

Socjologia obliczeniowa

Krzysztof Malarz

luty 2025

Spis treści

1 Modelowanie opinii społecznej	1
1.1 Model wyborcy	1
1.2 Model Sznajdów	3
1.3 Model Nowaka–Szamreja–Latané	4
2 Modelowanie równowagi strukturalnej	10
2.1 Model Heidera	10
3 Modelowanie transferu wiedzy w organizacji	13
3.1 Model	13
4 Modelowanie integracji grupy społecznej	16
4.1 Model Blaua	16
4.1.1 Podejście ciągle—układ równań różniczkowych	17
4.1.2 Podejście dyskretne—automat komórkowy	18
Literatura	25

1 Modelowanie opinii społecznej

1.1 Model wyborcy

W modelu wyborcy [1, 2] (zaobacz na przykład prace [3–6]) aktor naśladuje opinię swojego losowo wybranego sąsiada. Gdy liczba takich opinii jest skończona (ograniczona), wybór najpopularniejszych w sąsiedztwach staje się najbardziej prawdopodobny, a zatem do opisania zasad stojących za regułami modelu z perspektywy socjologii stoi teoria konformizmu [7, 8].

Akceptowanie lub odrzucanie danej opinii może wynikać z nacisków społecznych, które sprawiają, że jednostki dostosowują się do grupy, aby uniknąć odrzucenia, uzyskać akceptację lub uniknąć konfliktu. Ludzie ulegają społecznemu konformizmowi i dostosowują swoje przekonania, postawy i zachowania do norm i oczekiwań społecznych.

Konformizm może objawiać się na różne sposoby i obejmować różne obszary życia, takie jak przekonania, wartości, styl życia lub zachowanie. Można zidentyfikować kilka czynników, które wpływają na konformizm społeczny. Pierwszym z nich jest presja grupy. Potrzeba przynależności i akceptacji skłania jednostki do dostosowywania się do norm grupy [9]. Jednostki nie tylko starają się pozostać częścią własnej grupy lub zyskać względy grup zewnętrznych,

ale także starają się pozostać członkami społeczeństwa jako większej całości. Następnie są poddawane wpływowi norm społecznych. Społeczeństwo w procesie socjalizacji pierwotnej lub wtórnej wywiera presję na jednostki, aby przyjęły określone normy społeczne [10].

Innym czynnikiem jest presja autorytetu. Autorytety mogą wywierać presję na jednostki, aby dostosowały się do ich oczekiwań, wykorzystując społeczną legitymację, a tym samym władzę i kontrolę [11, 12].

Postawy konformistyczne kształtują się również w sytuacjach niepewności społecznej. W takiej sytuacji, gdy jednostka nie wie, jak się zachować, zachowanie innych osób będzie stanowić wzór właściwego zachowania. Przyjęcie takiego zachowania będzie mechanizmem adaptacyjnym w sytuacjach radzenia sobie z niepewnością [13].

W niektórych przypadkach wpływ grup mniejszościowych może być czynnikiem kształtującym postawy konformistyczne. Tak jest w przypadku, gdy grupa mniejszościowa ma spójne poglądy, jej członkowie są pewni słuszności swoich racji i wykazują determinację w ich obronie, są przedstawicielami większości lub otrzymują wsparcie z zewnątrz (od władz, organizacji lub innych grup społecznych) [14].

W modelu wyborcy aktorzy przyjmują swoją opinię w następnym kroku czasowym ($t + 1$) na podstawie opinii losowo wybranego sąsiada w czasie t . W tym modelu można sobie wyobrazić trzy schematy aktualizacji: sekwencyjny, synchroniczny i losowy (asynchroniczny).

W przypadku kolejności sekwencyjnej aktorzy są badani jeden po drugim w kolejności maszyny do pisania, a ich opinie są aktualizowane natychmiast. Zakładamy, że jeden MCS wykonuje N takich inspekcji. W schemacie losowym (asynchronicznym) wybieramy badanego aktora losowo, a jeden MCS wykonuje N takich losowań. W wersji synchronicznej schematu aktualizacji mamy do czynienia technicznie z dwiema macierzami opinii (dla czasów t i $t + 1$), a pojedynczy MCS oznacza aktualizację wszystkich N elementów macierzy w macierzy odpowiadającej czasowi $t + 1$ na podstawie macierzy dla czasu t [15].

Zadania

1. Zbadamy ewolucję układu na sieci kwadratowej o rozmiarze 100×100 dla początkowego losowego rozkładu dwóch opinii w układzie. Sporządzamy również wykres liczby opinii na 'tak' od czasu. Przyjmijmy sekwencyjny schemat aktualizacji opinii.
2. Powtarzamy dziesięciokrotnie symulacje mierząc średni czas dojścia do konsensusu (dziesięć różnych punktów startowych). Wyznaczamy średnią z tych dziesięciu pomiarów i niepewność jej wyznaczenia.
3. Sprawdźmy czy i jak średni czas dojścia do konsensusu (z dziesięciu realizacji) zależy od rozmiaru układu L^2 ? Przyjmijmy $L = 10, 50, 100, 200$.

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad 1: kilka wizualizacji sieci w kolejnych krokach czasowych. Wykres zależności czasowej liczby kroków na „tak”. ad 2: Średnia z czasów dojścia do konsensusu wraz z jej niepewnością (odchyleniem standardowym średniej). ad 3: Wykres $\tau(L^2)$.

Wnioski (25 pkt.) Jakie zjawisko udało się zaobserwować? W jaki sposób zmienia się czas dochodzenia do konsensusu z liczbą aktorów?

1.2 Model Sznajdów

- Zbudujemy model formowania opinii społecznej w oparciu o teorię **społecznego dowodu słuszności** https://en.wikipedia.org/wiki/Social_proof.
- W modelu Sznajdów [16], świeżutki przegląd w [17]:
 - jedna osoba stojąca na ulicy i wpatrzona w niebo nie wywołuje odruchowego zerknięcia w górę...
 - ... cztery takie obok siebie — tak... [18]
 - ... co właściwie kończy opis modelu.
- Każda komórka sieci $S_i = \pm 1$ (Republikanie/Demokraci, prawica/lewica, tak/nie).
- Jeśli w losowo wybranym miejscu na sieci znajdują się dwa „spinsony” (*spin+person*) o tych samych poglądach — ich sąsiedzi w następnym kroku dołączają do tej „domeny” (przyjmują opinię zgodnej pary).
- To losowe wybieranie miejsca *jest kluczowe* dla sprawy.
- Na sieci 1D — zgodna para przekonuje kolejną dwójkę, dla sieci regularnej prostej 2D — sześciu, dla heksagonalnej 2D — ośmiu, dla kubicznej prostej — dziesięciu.
- Jeśli wylosowana para $S_i S_{i+1} = -1$:
 - 1D — przeorientowuje sąsiadów ($S_i \rightarrow -S_i$) — bo „zgoda buduje, niezgoda rujnuje”;
 - 2D — pozostawia bez zmian ($S_i \rightarrow S_i$).
- System „spinsonów” (o ile nie ma komponenty „niezgoda rujnuje”) kończy w stałym punkcie

$$\sum_{i=1}^N S_i = \pm N.$$

- Czas potrzebny na osiągnięcie konsensusu jest jednak relatywnie długi (sieć 1000×1000 jest właściwie poza naszym zasięgiem).
- Początkowa koncentracja p spinów w górę decyduje czy na końcu dostaniemy same spiny w górę czy w dół (przejście fazowe w $p_C = 1/2$).
- Rezultaty nie zmieniają się ani na sieciach rozcieńczonych $S_i = 0, \pm 1$, ani gdy przekonywanie następuje tylko z pewnym prawdopodobieństwem $p < 1$ (w tym ostatnim przypadku potrzeba na to jednak jeszcze dłuższego czasu!) ani w sytuacji gdy w układzie dostępne jest mnóstwo opinii [15].

Aplikacja – K. Bojeś

http://orion.fis.agh.edu.pl/~malarz/AK/3_Model_Sznajdow_1D_Kamil_Bojes/

Aplikacja – M. Kwaśnicki

http://orion.fis.agh.edu.pl/~malarz/AK/3_Sznajd_2D_Kwasnicki/

Zadania

1. Na dwuwymiarowej sieci (kwadratowej, z okresowymi warunkami brzegowymi) prześledźmy ewolucję niewielkiego układu dla kilku kroków czasowych. W chwili początkowej $t = 0$ opinie są losowe, *fifty-fifty*. Symulację kończymy po dziesiątej skutecznej próbie wyboru uzgodnionej pary. Po każdym takim „szczęśliwym wyborze” wypisz współrzędne wylosowanej pary i stan sieci jako całości.
2. Zwiększmy rozmiar układu. Śledzimy czasową ewolucję frakcji $\rho(t)$ aktorów „na tak”. Parametrem wejściowym jest frakcja $\rho_0 = \rho(t = 0)$ aktorów „na tak” w chwili początkowej. Rozkład przestrzenny tych aktorów pozostaje przypadkowym.
3. Wielokrotnie zaczynamy symulację z taką samą liczbą aktorów „na tak” ($\rho_0 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$) – ale inaczej rozłożonych na sieci. Dla ustalonego ρ_0 po długim czasie zapisujemy końcową frakcję $\rho_\infty = \rho(t \rightarrow \infty)$ aktorów „na tak”. Wyniki uśredniamy $\langle \dots \rangle$ po R symulacjach i szacujemy niepewność tej średniej. Sporządź tabelę $\langle \rho_\infty \rangle$ vs. ρ_0 . Jak zmieniają się wyniki dla $R = 10, 10^3, 10^5$?

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad 1: Współrzędne wylosowanej uzgodnionej pary i stany sieci sprzed i po takiego losowania. ad. 2: Wykresy zależności czasowej $\rho(t)$ aktorów „na tak”. ad. 3: Tabela z średnimi i niepewnościami dla różnych ρ_0 .

Wnioski (25 pkt.) Jakie zjawisko udało się zaobserwować? Jak początkowa gęstość opinii „na tak” wpływa na końcową gęstość opinii „na tak”? Jak liczba symulacji wpływa na wiarygodność wyników symulacji?

1.3 Model Nowaka–Szamreja–Latané

- Teoria wpływu polecznego https://en.wikipedia.org/wiki/Social_impact_theory
- Wpływ grupy na jednostkę zależy od *społecznej bliskości* danego osobnika do pozostałych osobników w społeczności [21–23].
- Wersja obliczeniowa [24], przegląd w [25].
- Sam Latané lubił fizyczną analogię swojej teorii nazywając ją „żarówkową teorią relacji społecznych”. Zgodnie z tą analogią wpływ społeczny pełni rolę natężenia oświetlenia. Natężenie to zależy
 - od mocy żarówki,
 - ich liczby,
 - i odległości od nich.
- Grupa społeczna składa się z N osobników, z których każdy może mieć jeden z (co najmniej) dwóch radykalnych poglądów (tak/nie) w pewnej sprawie opisywanych jako $\xi_i = \pm 1$.
- W przypadku więcej niż dwóch ($K > 2$) dostępnych opinii lepiej myśleć o ich (żarówek) kolorach niż przypisywać im wartości liczbowe $\xi_i \in \{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_K\}$.

- Każdy osobnik jest charakteryzowany przez dwa parametry p_i i s_i określające intensywność oddziaływań z osobnikami o przeciwnych bądź tych sam poglądach.
- Zazwyczaj są one wartościami losowymi z rozkładami o średnich \bar{s} i \bar{p} .
- Osobniki są umieszczone w *przestrzeni społecznej* ze zdefiniowaną odległością każdej pary osobników d_{ij} : intensywność oddziaływań jest malejącą funkcją wzajemnej odległości.
- Dynamika zmian opinii może być zadana jest deterministyczna reguła:

$$\xi_i(t+1) = \Xi_k \iff I_{i,k}(t) = \max(I_{i,1}(t), I_{i,2}(t), \dots, I_{i,K}(t)), \quad (1)$$

gdzie k jest tą opinią, której wyznawcy wywarli największy wpływ społeczny na i -tego aktora i $I_{i,k}$ jest miarą tego wpływu na aktora i pochodzącym od opinii Ξ_k .

- Reguła (1) jest aplikowaną synchronicznie wszystkim osobnikom.
- Miara wpływu $I_{i,k}$ na i -tego aktora pochodząca od aktora j mającego *taką samą opinię* ($\xi_j = \xi_i$) jest obliczana jako:

$$I_{i,k}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\sum_{j=1}^N \frac{q(s_j)}{g(d_{i,j})} \delta(\Xi_k, \xi_j(t)) \delta(\xi_j(t), \xi_i(t)) \right) \quad (2a)$$

a od aktorów z $K-1$ *odmiennymi od niego* opiniami ($\xi_j \neq \xi_i$) jako

$$I_{i,k}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\sum_{j=1}^N \frac{q(p_j)}{g(d_{i,j})} \delta(\Xi_k, \xi_j(t)) [1 - \delta(\xi_j(t), \xi_i(t))] \right), \quad (2b)$$

gdzie $1 \leq k \leq K$ numeruje opinie a delta Kroneckera $\delta(x, y) = 1$, gdy $x = y$ i zero w przeciwnym wypadku [26].

- Założmy najprostszą zależność (jakby jej w ogóle nie było) od funkcji skalujących: $\mathcal{J}_S(x) \equiv x$, $\mathcal{J}_P(x) \equiv x$, $q(x) \equiv x$.
- Ponieważ wpływ społeczny (2) powinien maleć z odległością $d_{i,j}$ to funkcja $g(x)$ skłaująca odległość od źródła opinii (od żarówki) powinna być funkcją rosnącą (bo już jest w mianowniku), np:

$$g(x) = 1 + x^\alpha, \quad (3)$$

żeby $g(0) = 1 \neq 0$ w mianowniku (2a).

- W układzie może się pojawić również szum informacyjny (w formie niezerowej temperatury społecznej $T > 0$) [15, 27, 28].
- Wówczas zamiast deterministycznego przepisu (1) dostajemy np. tylko czynniki boltzmannowskie

$$p_{i,k}(t) = \exp \left(\frac{I_{i,k}(t)}{T} \right), \quad (4a)$$

które przekładają się na prawdopodobieństwa

$$P_{i,k}(t) = \frac{p_{i,k}(t)}{\sum_{j=1}^K p_{i,j}(t)} \quad (4b)$$

wyboru przez i -tego aktora w następnej chwili czasowej k -tej opinii:

$$\xi_i(t+1) = \Xi_k, \text{ z prawdopodobieństwem } P_{i,k}(t). \quad (4c)$$

- Najpowszechniej zauważanym zjawiskiem jest *klasteryzacja* i *polaryzacja* opinii.

Aplikacja – P. Bańcerowski

http://www.zis.agh.edu.pl/app/MSc/Przemyslaw_Bancerowski/

Prześledźmy ewolucję układu dla jego małego rozmiaru ($L = 3$) [29]. Załóżmy trzy opinie w układzie $K = 3$ oznaczone jako ‘czerwona’ (Ξ_1), ‘niebieska’ (Ξ_2) i ‘zielona’ (Ξ_3). Wyznamy wpływ społeczny na aktorów oznaczonych na rysunku 1 jako ‘2’, ‘5’ i ‘9’. Zakładamy $s_i = i/10$ i $p_i = 1 - i/10$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Rysunek 1: Przykład małej siatki z dziewięcioma aktorami i trzema opiniami. Numerki pokazują etykiety aktorów i . Kolory odpowiadają różnym opiniom (‘czerwony’— Ξ_1 , ‘niebieski’— Ξ_2 i ‘zielony’— Ξ_3).

Zgodnie z równaniem (2) by wyznaczyć opinię $\xi_2(t+1)$ w następnej chwili czasowej musimy policzyć $K = 3$ wpływów wywieranych na aktora $i = 2$ przez wyznawców trzech opinii dostępnych w systemie.

Ponieważ $\xi_2(t) = \Xi_3$ (‘zielony’) użyjemy równania (2a) do obliczenia

$$I_{2,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_2)}{g(d_{2,2})} + \frac{q(s_8)}{g(d_{2,8})} \right), \quad (5)$$

od wszystkich innych aktorów z ‘zielonymi’ opiniami (tj. od $i = 8$ i $i = 2$ włącznie). Wpływy od aktorów z ‘czerwonymi’ i ‘niebieskimi’ opiniami wyliczamy z równania (2b):

$$I_{2,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{2,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{2,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{2,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{2,7})} \right), \quad (6)$$

$$I_{2,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_5)}{g(d_{2,5})} + \frac{q(p_6)}{g(d_{2,6})} + \frac{q(p_9)}{g(d_{2,9})} \right). \quad (7)$$

Zakładamy $\mathcal{J}_S(x) \equiv x$, $\mathcal{J}_P(x) \equiv x$, $q(x) \equiv x$ oraz funkcję skłalującą odległość $g(x) = 1 + x^\alpha$, z $\alpha = 2$. To prowadzi do:

$$I_{2,\text{zielony}}(t) = 4 \left(\frac{s_2}{1 + d_{2,2}^2} + \frac{s_8}{1 + d_{2,8}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.2}{1 + 0^2} + \frac{0.8}{1 + 2^2} \right) = 1.44, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I_{2,\text{czerwony}}(t) &= 4 \left(\frac{p_1}{1 + d_{2,1}^2} + \frac{p_3}{1 + d_{2,3}^2} + \frac{p_4}{1 + d_{2,4}^2} + \frac{p_7}{1 + d_{2,7}^2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{0.9}{1 + 1^2} + \frac{0.7}{1 + 1^2} + \frac{0.6}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.3}{1 + \sqrt{5}^2} \right) = 4.2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_{2,\text{niebieski}}(t) = 4 \left(\frac{p_5}{1 + d_{2,5}^2} + \frac{p_6}{1 + d_{2,6}^2} + \frac{p_9}{1 + d_{2,9}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.5}{1 + 1^2} + \frac{0.4}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.1}{1 + \sqrt{5}^2} \right) = 1.61. \quad (10)$$

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 2$ wywierają aktorzy z ‘czerwoną’ opinią—więc na podstawie równania (1)—aktor $i = 2$ w następnej chwili czasowej **zmieni** swoją ‘zieloną’ opinię ($\xi_2(t) = \Xi_3$) na ‘czerwoną’ ($\xi_2(t+1) = \Xi_1$).

Analogicznie, zgodnie z równaniem (2) by wyznaczyć opinię $\xi_5(t+1)$ w następnej chwili czasowej musimy policzyć $K = 3$ wpływów wywieranych na aktora $i = 5$ przez wyznawców trzech opinii dostępnych w systemie. Ponieważ $\xi_5(t) = \Xi_2$ (‘niebieski’) użyjemy równania (2a) do obliczenia

$$I_{5,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_5)}{g(d_{5,5})} + \frac{q(s_6)}{g(d_{5,6})} + \frac{q(s_9)}{g(d_{5,9})} \right), \quad (11)$$

od wszystkich innych aktorów z ‘niebieskimi’ opiniami (tj. od $i = 6, 9$), z $i = 5$ wyłącznie. Wpływy od aktorów z ‘czerwonymi’ i ‘zielonymi’ opiniami wyliczamy z równania (2b):

$$I_{5,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{5,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{5,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{5,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{5,7})} \right), \quad (12)$$

$$I_{5,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_2)}{g(d_{5,2})} + \frac{q(p_8)}{g(d_{5,8})} \right). \quad (13)$$

$$I_{5,\text{niebieski}}(t) = 4 \left(\frac{s_5}{1 + d_{5,5}^2} + \frac{s_6}{1 + d_{5,6}^2} + \frac{s_9}{1 + d_{5,9}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.5}{1 + 0^2} + \frac{0.6}{1 + 1^2} + \frac{0.9}{1 + \sqrt{2}^2} \right) = 4.4, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_{5,\text{czerwony}}(t) &= 4 \left(\frac{p_1}{1 + d_{5,1}^2} + \frac{p_3}{1 + d_{5,3}^2} + \frac{p_4}{1 + d_{5,4}^2} + \frac{p_7}{1 + d_{5,7}^2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{0.9}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.7}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.6}{1 + 1^2} + \frac{0.3}{1 + \sqrt{2}^2} \right) = 3.7(3), \end{aligned} \quad (15)$$

$$I_{5,\text{zielony}}(t) = 4 \left(\frac{p_2}{1 + d_{5,2}^2} + \frac{p_8}{1 + d_{5,8}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.8}{1 + 1^2} + \frac{0.2}{1 + 1^2} \right) = 2. \quad (16)$$

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 5$ wywierają aktorzy z ‘niebieską’ opinią—więc na podstawie równania (1)—aktor $i = 5$ w następnej chwili czasowej **podtrzyma** swoją ‘niebieską’ opinię ($\xi_5(t) = \Xi_2$).

Dla $T > 0$ obliczamy prawdopodobieństwa $P_{5,\text{niebieski}}$, $P_{5,\text{czerwony}}$ i $P_{5,\text{zielony}}$ wyboru opinii przez aktora $i = 5$ (patrz równania (4a)–(4b)). Na przykład, dla $T = 1$ te prawdopodobieństwa wynoszą

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{niebieski}}/1)}{P_1}, \\ P_{5,\text{czerwony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{czerwony}}/1)}{P_1}, \\ P_{5,\text{zielony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{zielony}}/1)}{P_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

a dla $T = 10$ mamy

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{niebieski}}/10)}{P_{10}}, \\ P_{5,\text{czerwony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{czerwony}}/10)}{P_{10}}, \\ P_{5,\text{zielony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{zielony}}/10)}{P_{10}}, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie stała normalizacyjna (żeby się prawdopodobieństwa sumowały do jedynki)

$$P_1 = \exp(I_{5,\text{niebieski}}/1) + \exp(I_{5,\text{czerwony}}/1) + \exp(I_{5,\text{zielony}}/1)$$

oraz

$$P_{10} = \exp(I_{5,\text{niebieski}}/10) + \exp(I_{5,\text{czerwony}}/10) + \exp(I_{5,\text{zielony}}/10).$$

Wyliczone prawdopodobieństwa dla $T = 1$ wynoszą

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(4.4/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^2} \approx 0.624, \\ P_{5,\text{red}} &= \frac{\exp(3.7(3)/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^2} \approx 0.319, \\ P_{5,\text{green}} &= \frac{\exp(2/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^2} \approx 0.056, \end{aligned} \quad (19)$$

a dla $T = 10$ mamy

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(4.4/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.367, \\ P_{5,\text{red}} &= \frac{\exp(7.(3)/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.343, \\ P_{5,\text{green}} &= \frac{\exp(2/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.289. \end{aligned} \quad (20)$$

Czyli dla niedeterministycznej wersji algorytmu (tj. dla $T > 0$) nadal mamy najbardziej prawdopodobne wybranie opinii ‘niebieskiej’ Ξ_1 dla $\xi_5(t+1)$. Ale prawdopodobieństwo to dla aktora $i = 5$ spada z 100% dla $T = 0$ do 62.4% dla $T = 1$ i do 36.7% dla $T = 10$ aż do 33.3% = $1/K$ dla $T \rightarrow \infty$.

Powtórzmy obliczenia dla aktora $i = 9$:

$$I_{9,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_5)}{g(d_{9,5})} + \frac{q(s_6)}{g(d_{9,6})} + \frac{q(s_9)}{g(d_{9,9})} \right), \quad (21)$$

$$I_{9,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{9,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{9,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{9,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{9,7})} \right), \quad (22)$$

$$I_{9,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_2)}{g(d_{9,2})} + \frac{q(p_8)}{g(d_{9,8})} \right), \quad (23)$$

$$I_{9,\text{niebieski}}(t) = 4 \left(\frac{s_5}{1 + d_{9,5}^2} + \frac{s_6}{1 + d_{9,6}^2} + \frac{s_9}{1 + d_{9,9}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.5}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.6}{1 + 1^2} + \frac{0.9}{1 + 0^2} \right) = 5.4(6), \quad (24)$$

$$I_{9,\text{czerwony}}(t) = 4 \left(\frac{p_1}{1+d_{9,1}^2} + \frac{p_3}{1+d_{9,3}^2} + \frac{p_4}{1+d_{9,4}^2} + \frac{p_7}{1+d_{9,7}^2} \right) \\ = 4 \left(\frac{0.9}{1+(2\sqrt{2})^2} + \frac{0.7}{1+2^2} + \frac{0.6}{1+\sqrt{5}^2} + \frac{0.3}{1+2^2} \right) = 1.6, \quad (25)$$

$$I_{9,\text{zielony}}(t) = 4 \left(\frac{p_2}{1+d_{9,2}^2} + \frac{p_8}{1+d_{9,8}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.8}{1+\sqrt{5}^2} + \frac{0.2}{1+1^2} \right) = 0.9(3). \quad (26)$$

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 9$ jest znów wywierany przez ‘niebieskich’ aktorów i dlatego—zgodnie z równaniem (1)—aktor $i = 9$ w następnym kroku czasowym on też **podtrzyma** swoją ‘niebieską’ opinię ($\xi_9(t+1) = \xi_9(t) = \Xi_2$).

Dla $T > 0$ obliczmy prawdopodobieństwa $P_{9,\text{niebieska}}$, $P_{9,\text{czerwona}}$ i $P_{9,\text{zielona}}$ dla aktora $i = 9$ (równania (4a)–(4b)). Na przykład, dla $T = 1$ te prawdopodobieństwa wynoszą

$$P_{9,\text{blue}} = \frac{\exp(I_{9,\text{blue}}/1)}{P_1}, \\ P_{9,\text{red}} = \frac{\exp(I_{9,\text{red}}/1)}{P_1}, \\ P_{9,\text{green}} = \frac{\exp(I_{9,\text{green}}/1)}{P_1}, \quad (27)$$

a dla $T = 10$ mamy

$$P_{9,\text{blue}} = \frac{\exp(I_{9,\text{blue}}/10)}{P_{10}}, \\ P_{9,\text{red}} = \frac{\exp(I_{9,\text{red}}/10)}{P_{10}}, \\ P_{9,\text{green}} = \frac{\exp(I_{9,\text{green}}/10)}{P_{10}}, \quad (28)$$

stałe normalizacyjne wynoszą

$$P_1 = \exp(I_{9,\text{blue}}/1) + \exp(I_{9,\text{red}}/1) + \exp(I_{9,\text{green}}/1)$$

and

$$P_{10} = \exp(I_{9,\text{blue}}/10) + \exp(I_{9,\text{red}}/10) + \exp(I_{9,\text{green}}/10).$$

Wyznaczone prawdopodobieństwa dla $T = 1$ wynoszą

$$P_{9,\text{blue}} = \frac{\exp(5.4(6)/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.969, \\ P_{9,\text{red}} = \frac{\exp(1.6/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.020, \\ P_{9,\text{green}} = \frac{\exp(0.9(3)/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.011, \quad (29)$$

a dla $T = 10$ mamy

$$\begin{aligned}P_{9,\text{blue}} &= \frac{\exp(5.4(6)/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.432, \\P_{9,\text{red}} &= \frac{\exp(1.6/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.293, \\P_{9,\text{green}} &= \frac{\exp(0.9(3)/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.275.\end{aligned}\tag{30}$$

Podobnie jak dla aktora $i = 5$, wzrost poziomu szumu (temperatury społecznej) redukuje szanse na podtrzymanie swojej początkowej opinii u aktora $i = 9$. Dla $T = 10$ te prawdopodobieństwa nie różnią się od $1/K$ o więcej niż 0,1.

Zadania

1. Napisz program wyliczający wpływ społeczny w chwili $t = 0$ w wersji deterministycznej (bez szumu) dla siatki pokazanej na rys. 1. Wypisz otrzymane wartości dla każdego z aktorów pochodzące od każdej opinii. Na jego podstawie dokonaj zmian opinii w kilku kolejnych krokach symulacji.
2. Powiększ siatkę do 20×20 . Wylosuj aktorom ich s_i i p_i oraz ich początkową opinię ξ_i . Pozostawiamy $\alpha = 2$, $K = 3$ i $T = 0$. Wykonaj (deterministyczną) symulację układu wypisując w kolejnych chwilach czasowych tablicę opinii przyjętych przez aktorów.
3. Powtórz powyższą symulację dla $\alpha = 3$.

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad 1: mapy z opiniami i wpływami od każdej z opinii w kolejnych chwilach czasowych; ad. 2: mapy (albo animacja) z opiniami w kolejnych chwilach czasowych; ad. 3: mapy (albo animacja) z opiniami w kolejnych chwilach czasowych.

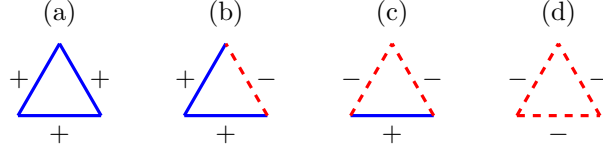
Wnioski (25 pkt.) Jakie zjawisko udało się zaobserwować? Czy widać wpływ parametru α na wyniki symulacji? Jeśli tak, to jaki?

2 Modelowanie równowagi strukturalnej

2.1 Model Heidera

- Równowaga strukturalna https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_theory
- prace Heidera [30, 31]
- przypisujemy relacje (wrogie bądź przyjazne) oddziaływaniom między węzłami sieci
- oznaczmy relację między węzłami i i j jako x_{ij}
- $x_{ij} < 0$ – wrogość, $x_{ij} > 0$ – sympatia

- spośród triad z rys. 2 dwa (te z 2a, 2c) nazywamy zbalansowanymi (w sensie Heidera) gdyż znaki relacji odpowiadają zasadom:
 - przyjaciel mojego przyjaciela jest moim przyjacielem,
 - przyjaciel mojego wroga jest moim wrogiem,
 - wróg mojego przyjaciela jest moim wrogiem,
 - wróg mojego wroga jest moim przyjacielem.



Rysunek 2: Triady oddziaływań odpowiadające stanom zbalansowanym (pierwszy i trzeci) oraz stanom niezbalansowanym (drugi i czwarty)

- W triadach niezbalansowanych (rys. 2b, 2d) powyższe zasady nie są spełnione, co prowadzi do pojawienia się napięcia znanego jako dysonans poznawczy https://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_dissonance.
- By rozładować to napięcie przydałoby się zmienić część relacji w układzie (tak by wyeliminować 2b i 2d).
- Zaczniemy od próby łatwej do zaimplementowania metody odróżniania triad zbalansowanych i niezbalansowanych.
- Przyjmijmy, $|x_{ij}| = 1$.
- Wówczas w trójkącie ijk : $x_{ij}x_{jk}x_{ik} = +1$ (dla triad zbalansowanych) i $x_{ij}x_{jk}x_{ik} = -1$ (dla triad niezbalansowanych)
- Suma

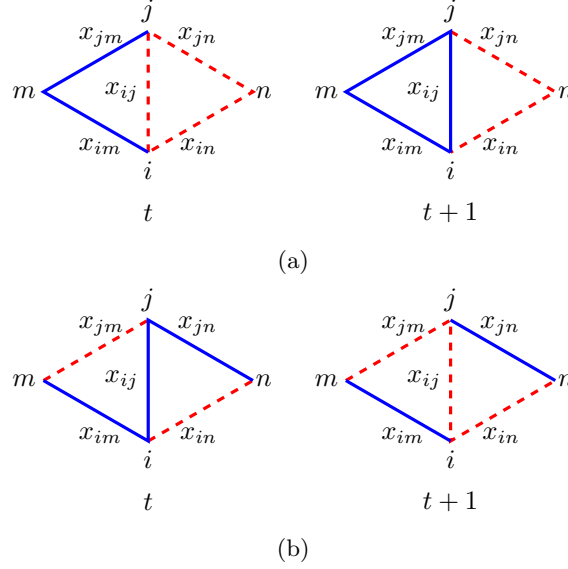
$$U \equiv -\frac{1}{\Delta} \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j} x_{ij}x_{jk}x_{ik} \quad (31)$$

(po wszystkich trójkątach, znormalizowana do liczby trójkątów Δ) wynosi -1 jeśli *każdy* trójkąt jest zbalansowany (w sensie Heidera).

- Ewolucja układu może przyjąć formę deterministyczną [32] zmierzającą do eliminacji niezbalansowanych trójkątów

$$x_{ij}(t+1) = \text{sign}(x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)). \quad (32)$$

- Jeśli krawędź ij należy do większej (niż pary) liczby triad to sumowanie jest po iloczynach par wartości relacji w każdym trójkącie do którego należy krawędź ij .
- W dążeniu do uzyskania równowagi Heidera układ może dotrzeć do stanu z samymi $x_{ij} = +1$. Układ ten nazywamy stanem raju i charakteryzuje go jednocześnie $U = -1$ oraz $\langle x_{ij} \rangle = +1$, gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza średniowanie po wszystkich krawędziach/relacjach dostępnych w układzie.



Rysunek 3: Przykłady prostych układów relacji x_{im} , x_{in} , x_{jm} , x_{jn} wpływających na relację x_{ij} w następnej chwili czasowej [(a) $x_{ij}(t) = -1 \rightarrow x_{ij}(t+1) = +1$ oraz (b) $x_{ij}(t) = +1 \rightarrow x_{ij}(t+1) = -1$] zgodnie z równaniem (32) (przypadek deterministyczny, bez szumu informacyjnego)

- Może się zdarzyć, że układ dotrze do stanu zbalansowanego $U = -1$ *nie* będącego rajem (tj. z $\langle x_{ij} \rangle \neq +1$).
- Wówczas układ dzieli się na grupy: wzajemnie wrogie, ale wewnętrznie zaprzyjaźnione.
- Istnieje wersja niedeterministyczna równania (32) z szumem (termicznym) — niezerową temperaturą społeczną [33–39].
- Widać, że do ewolucji układu potrzebne są sieci dające szansę na powstanie dysonansu poznawczego: z trójkątami.
- Najprostszym rozwiązaniem zdaje się przyjęcie topologii regularnej sieci trójkątnej. Ale jeszcze łatwiej symulacje prowadzi się na grafie pełnym (N wierzchołków połączonych każdy z każdym, odpada problem „brzegów” układu).

Zadania

1. Symulacje poprowadzimy na grafie pełnym o N wierzchołkach. Przyjmijmy $N = 50$.
2. Początkowo, dla $t = 0$, wartości relacji przyjmijmy przypadkowe $\forall i, j : x_{ij} = \pm 1$ z prawdopodobieństwem $1/2$.
3. Zapisujemy trójkę: chwila czasowa t , wartość U , wartość $\langle x_{ij} \rangle$.
4. Pomiędzy zapisami jak powyżej, w każdym kroku czasowym wykonujemy zmiany x_{ij} zgodnie z filozofią (32) (uwaga: w grafie pełnym licząc znak sumy w równaniu (32) sumujemy po wszystkich

wierzchołkach oprócz i i j !)

5. Przez jeden krok czasowy rozumiemy zaktualizowanie *wszystkich* dostępnych wartości x_{ij} .
6. Na końcu symulacji zapisujemy stan wiązań (relacji) na sieci (trójkę i, j, x_{ij}).
7. Symulacje (powyższe punkty od 1–6) powtarzamy do uzyskania co najmniej raz stanu raju i co najmniej raz stanu zbalansowanego odmiennego od raju.
8. Uaktualnienie wartości relacji (z pkt. 5) programujemy na dwa sposoby najpierw asynchronicznie, w drugiej wersji synchronicznie.

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad. 3: Wizualizacja (wykresy) zależności czasowej U oraz $\langle x_{ij} \rangle$. ad. 7: Wizualizacja sieci relacji (np. za pomocą <https://gephi.org/> albo <http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pajek/>). ad. 8: Wykresy/rysunki zarówno dla synchronicznego jak i asynchronicznego aktualizowania relacji.

Wnioski (25 pkt.) Jakie zjawisko udało się zaobserwować? Czy sposób aktualizowania wartości wiązań ma zauważalny wpływ na stan końcowy układu? Jeśli tak, to jaki?

3 Modelowanie transferu wiedzy w organizacji

3.1 Model

- Zasady w przyjętym modelu [40] są kompromisem różnych perspektyw mechanizmu transferu wiedzy. Przede wszystkim zakłada się, że agenci są członkami organizacji/społeczności i mają (na początku symulacji) pewną „wiedzę ogólną” (fragmenty wiedzy). Ta powszechna wiedza jest wynikiem działań organizacji, na przykład w ramach polityki zarządzania wiedzą. Model zakłada, że każdy agent z równym prawdopodobieństwem może „wchłonąć” każdą porcję wiedzy „oferowaną” przez organizację.
- Po drugie, każdy agent może być „dawcą” bądź „biorcą” wiedzy. Rola przyjmowana w danej chwili przez agenta zależy od liczby i jakości posiadanych fragmentów wiedzy. W pojedynczym akcie wymiany wymiany cząstek wiedzy „dawcą” (liderem) wiedzy jest ten z agentów, który ma większą wiedzę (więcej jej fragmentów).
- Po trzecie, zgodnie z doświadczalnymi badaniami Reagansa i McEvily’ego [41], transfer wiedzy jest skuteczny, jeśli dystans między źródłem a odbiorcą jest niewielki. Również symulacje oparte na zasadzie homofilii zakładają, że w organizacji mogą pojawiać się silniejsze oddziaływania między agentami, którzy są do siebie podobni [42].
- Uproszczenie modelu wprowadza blokowanie przepływu wiedzy pomiędzy agentami („biorcą” i „dawcą”), jeśli dystans ich wiedzy (mierzony różnicą w liczbie posiadanych kawałków wiedzy) jest większy niż jeden. Podejście to nie różni się znacząco od modelu wymiany opinii [43], gdy interakcja między agentami jest możliwa tylko wtedy, gdy dystans między opiniami agentów jest w jednowymiarowej [44–47] lub dwuwymiarowej [48–50] przestrzeni opinii jest mniejsza niż zakładany poziom ufności.

- Symulacje poprowadzimy na sieci kwadratowej $L \times L$ z helikalnymi warunkami brzegowymi i oddziaływaniami do najbliższych (czterech) sąsiadów: agent w i -tej pozycji ($i = 1, \dots, L^2$) ma sąsiadów o współrzędnych $i \pm 1$ and $i \pm L$.
- Na „górnym” i „dolnym” brzegu układu musimy wytworzyć wirtualne kopie agentów, np. umieszczając w pozycjach: $i = -L + 1, \dots, 0$ oraz $i = L^2 + 1, \dots, L^2 + L$ sobowtórów agentów z $i = L^2 - L + 1, \dots, L^2$ oraz $i = 1, \dots, L$.
- Każdy z agentów może posiadać część spośród K „cząstek” wiedzy dostępnych w organizacji $\mathbf{C}^i = [c_1^i, c_2^i, \dots, c_K^i]$ i $c_k^i \in \{0, 1\}$, gdzie $c_k^i = 0$ ($c_k^i = 1$) oznacza brak (posiadanie) konkretnej k -tej „cząstki” wiedzy u i -tego agenta.
- Początkowo (w chwili $t = 0$), każdy z agentów i każdą z cząstek $c_{k=1, \dots, K}^i(t = 0) = 1$ posiada z prawdopodobieństwem p (będącym parametrem modelu).
- W kolejnych chwilach czasowych każdy z agentów i może osiąść *jedną* cząstkę wiedzy od *jednego* ze swoich sąsiadów. Transfer wiedzy jest możliwy jeśli w chwili t sąsiad n ma *dokładnie jedną* cząstkę wiedzy więcej niż i :

$$c_k^i(t+1) = 1 \iff c_k^i(t) = 0, \quad c_k^n(t) = 1, \quad \nu^n(t) = \nu^i(t) + 1, \quad (33)$$

gdzie $\nu^n(t)$ oraz $\nu^i(t)$ są odpowiednio bieżącą liczbą cząstek wiedzy u agentów n oraz i .

- Transferowana „cząstka” wiedzy (nieobecna u \mathbf{C}^i ale posiadana przez \mathbf{C}^n) jest wybierana losowo.
- Zasady są aplikowane synchronicznie do wszystkich agentów.

Aplikacja – K. Paradowski

http://www.zis.agh.edu.pl/app/MSc/Kamil_Paradowski/

Zadania

1. Sprawdźmy wpływ początkowego nasycenia wiedzą p na liczbę $n(K)$ w pełni (połowicznie) kompetentnych pracowników — tj. posiadających komplet K (połowę $K/2$) dostępnych cząstek wiedzy.
2. Zakładamy, że w organizacji dostępne są cztery cząstki wiedzy $K = 4$. Początkowo, każdy pracownik, każdą cząstkę posiada z prawdopodobieństwem p . Zakładamy helikalne warunki brzegowe (prawie periodyczne, ale trochę łatwiej implementowalne) na sieci dwudziestu pięciu agentów osadzonych w węzłach sieci kwadratowej $L \times L$ z $L = 5$.
3. Transfer wiedzy następuje tylko wówczas, jeśli „biorca” i „dawca” sąsiadują bezpośrednio ze sobą a „dawca” jest o dokładnie jedną cząstkę wiedzy mądrzejszy od „biorcy”. W jednym kroku czasowym „biorca” może się nauczyć od „dawcy” dokładnie tej jednej brakującej mu cząstki wiedzy (czyli zgodnie z równaniem (33)).
4. Śledzimy ewolucję czasową liczby $n(K)$ agentów posiadających komplet wiedzy oraz liczby $n(K/2)$ agentów posiadających połowę wiedzy dostępnej w organizacji. Wyniki uśredniamy po $R = 50$ niezależnych symulacjach. Symulacje prowadzimy dla czterech wartości początkowego nasycenia wiedzą $p = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$. Na wspólnym wykresie rysujemy ilu jest w pełni/półowie kompetentnych w kolejnych chwilach czasowych dla wszystkich czterech p .

Algorithm 1

```
1: INPUT( $p, K, M, L$ )  $\triangleright$  initialise  $p, K, M, L$ 

2: for  $r \leftarrow 1, M$  do  $\triangleright$  average over  $M$  simulations

3:    $t \leftarrow 0$ 
4:   SETUP( $p$ )  $\triangleright$  initialise distribution of chunks of knowledge  $c_k^i(0)$ 
5:   RESET  $\triangleright$  reset  $N_r$  and  $F_r$  and  $\nu$ 

6:   for  $t \leftarrow 1, T$  do
7:     for all  $i$  do  $\triangleright$  for every agent  $i$ 
8:       loop  $\triangleright$  for one of the neighbour  $n$ 
9:         if  $(c_k^i(t-1) = 0 \wedge c_k^n(t-1) = 1 \wedge \nu^n(t-1) = \nu^i(t-1) + 1)$  then
10:           $c_k^i(t) \leftarrow 1$ 
11:           $\nu^i(t) \leftarrow \nu^i(t-1) + 1$ 

12:     for all  $i$  do  $\triangleright$  for every agent  $i$ 
13:        $N_r(\nu^i(t), t) \leftarrow N_r(\nu^i(t), t) + 1$ 
14:       for  $k \leftarrow 1, K$  do
15:         if  $c_k^i(t) = 1$  then
16:            $F_r(k, t) \leftarrow F_r(k, t) + 1$ 

17:       for  $k \leftarrow 1, K$  do
18:          $N(k, t) \leftarrow N(k, t) + N_r(k, t)$ 
19:          $F(k, t) \leftarrow F(k, t) + F_r(k, t)$ 

20: for  $t \leftarrow 1, T$  do
21:   for all  $k$  do
22:     OUTPUT( $t, N(k, t)/(ML^2), F(k, t)/(ML^2)$ )
```

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad. 4: Cztery wykresy, dla czterech różnych p . Na każdym z wykresów dwie krzywe: $n(K)$ oraz $n(K/2)$.

Wnioski (25 pkt.) Czy początkowe nasycenie wiedzą wpływa na obserwowane wartości $n(K)$ oraz $n(K/2)$ po długim czasie? Jeśli tak, to jak?

4 Modelowanie integracji grupy społecznej

4.1 Model Blaua

- Według Petera M. Blaua [51] proces kształtowania statusu można podzielić na dwa etapy.
- Pierwszy etap to próby zdobycia najwyższego jak to tylko możliwe statusu poprzez pokazanie głównych swoich atutów.
- Kiedy to zostanie osiągnięte, na drugim etapie aktorzy o wysokim statusie stosują strategię autodeprecjonowania (SDS), aby uniknąć wywołanego strachem odrzucenia przez osoby o niższym statusie.
- Jak ujął to Blau [51, s. 43]: „In a group situation, impressive qualities make a person attractive in one sense and unattractive in another, because they raise fears of rejection and pose a status threat for the rest of the group”. I dalej „The more successful A is in impressing B and earning B’s high regard, the more displeasure he causes to C, whose relative standing in the eyes of B has suffered. All group members simultaneously play the role of A, B, and C in this schema, which greatly complicates the competitive process”.
- Prowadzi to do paradoksalnego zjawiska: najfajniejsze osoby, najbardziej inteligentne i atrakcyjne fizycznie spotykają się z odrzuceniem i wrogością. Aby to zneutralizować, w drugim etapie inteligentne osoby znają i stosują sprytną strategię: pozornie zmniejszają swoją przewagę, demonstrując słabe punkty w mniej ważnych aspektach statusu. Cytując ponownie Blaua: „Having first impressed us with his Harvard accent and Beacon Hill friends, he may later tell a story that reveals his immigrant background” [51].
- W czasie ewolucji konkurują zatem ze sobą dwa procesy. Pierwszym jest odrzucenie wywołane strachem, które następuje poprzez obniżenie statusu A (status rzeczywisty) aktora przez jego bezpośredniego sąsiada o niższym statusie A i tym samym statusie B (statusie powierzchniowym). Proces ten zachodzi z prawdopodobieństwem α . Drugi proces to wzmocnienie statusu B (statusu powierzchniowego) aktora przez jego bezpośredniego sąsiada o wyższym statusie A i tym samym statusie B . Proces ten zachodzi z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$. Aktorzy o różnym statusie B nie wchodzi w interakcje. Ta ostatnia reguła zapewnia, że działanie mające na celu podniesienie statusu B sąsiada neutralizuje jego odrzucenie i pozwala na zachowanie własnego statusu A [52].
- Przedstawiona przez Blaua strategia samodeprecjonowania (SDS) była tematem serii artykułów [53–55]. Jednak dopiero w ostatnim [55] wyniki modelu z powodzeniem odtworzyły skuteczność SDS jako narzędzia do zmniejszania motywowanej strachem groźby odrzucenia przez grupę.

- Udało się to osiągnąć poprzez wprowadzenie dwuwymiarowej przestrzeni statusu, z osiami „rzeczywistego” i „powierzchniowego” statusu.
- Wzdłuż tych dwóch osi rywalizują ze sobą dwa procesy: odrzucenie wywołane strachem (równoważne przesunięciami w dół wzdłuż osi „rzeczywistego” statusu i przewencyjne wychwalanie, które podnosi status przeciwnika po osi „powierzchniowej”.

4.1.1 Podejście ciągłe—układ równań różniczkowych

- Wspomniane wyżej procesy mogą zostać zapisane w formie układu równań różniczkowych na gęstości $v(A, B)$ aktorów o statusie rzeczywistym A i powierzchniowym B [55]

$$\begin{aligned} \frac{dv(A, B)}{dt} = & - v(A, B)[w(A \rightarrow A-1, B) + w(A \rightarrow A+1, B) + w(A, B \rightarrow B-1) + w(A, B \rightarrow B+1)] \\ & + v(A+1, B)w(A+1 \rightarrow A, B) + v(A-1, B)w(A-1 \rightarrow A, B) \\ & + v(A, B+1)w(A, B+1 \rightarrow B) + v(A, B-1)w(A, B-1 \rightarrow B), \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie $w(A \rightarrow A', B)$, $w(A, B \rightarrow B')$ są częstościami zachodzenia odpowiednich procesów, z warunkiem normalizacyjnym

$$\sum_{A, B=-\infty}^{+\infty} v(A, B) = 1. \quad (35)$$

Częstości te można zaproponować jako:

$$w(A \rightarrow A-1, B) = \alpha \sum_{A'=-\infty}^{A-1} v(A', B)f(A-A'); \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} w(A \rightarrow A+1, B) &= 0; \\ w(A, B \rightarrow B-1) &= 0; \end{aligned}$$

$$w(A, B \rightarrow B+1) = \beta \sum_{A'=A+1}^{\infty} v(A', B)f(A'-A); \quad (36b)$$

$$w(A+1 \rightarrow A, B) = \alpha \sum_{A'=-\infty}^A v(A', B)f(A+1-A'); \quad (36c)$$

$$\begin{aligned} w(A-1 \rightarrow A, B) &= 0; \\ w(A, B+1 \rightarrow B) &= 0; \end{aligned}$$

$$w(A, B-1 \rightarrow B) = \beta \sum_{A'=A+1}^{\infty} v(A', B-1)f(A'-A). \quad (36d)$$

- Funkcja f pozwala sprawdzić jak stacjonarne rozwiązanie zależy od różnicy statusów między wchodzącymi w interakcję aktorami. Zasadniczo możemy jednak ograniczyć obliczenia do $f(x) \equiv 1$.
- Równanie (34) rozwiążemy numerycznie [56, p. 434] metodą Eulera. Metoda Eulera jest najprostszym sposobem numerycznego rozwiązywania problemu początkowego

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (37)$$

korzystając z przybliżenia

$$\frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t} \approx f(t, y(t)), \quad (38)$$

co prowadzi do

$$y(t + \delta t) \approx y(t) + \delta t \cdot f(t, y(t)), \quad (39)$$

i w konsekwencji oferuje iteracyjny schemat znajdowania przybliżonego rozwiązania $\eta_i = \eta(t_i)$ równania (37) w równoodległych punktach $t_i = t_0 + i\delta t$:

$$\eta_0 \equiv y_0; \quad (40a)$$

$$\eta_{i+1} \equiv \eta_i + \delta t \cdot f(t_i, \eta_i) \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots \quad (40b)$$

- Różnicowy schemat rozwiązania równania (34) jest więc dany jako:

$$\begin{aligned} v(A, B; t + \delta t) &= v(A, B; t) \\ &+ \delta t (-v(A, B; t)[w(A \rightarrow A-1, B) + w(A, B \rightarrow B+1)] \\ &+ v(A+1, B; t)w(A+1 \rightarrow A, B) + v(A, B-1; t)w(A, B-1 \rightarrow B)) \end{aligned} \quad (41)$$

Zadania

1. Symulacje prowadzimy na prostokącie o $L_A = 40$, $L_B = 60$ i z krokiem czasowym $\delta t = 10^{-5}$ dla $f(x) \equiv 1$.
2. Zakładamy jednorodny stan początkowy $v(A, B; t = 0) = \text{const} = 1/(L_A \cdot L_B/2)$ (zgodnie z (35)) dla $1 \leq A \leq L_A$ i $1 \leq B \leq L_B/2$ oraz $\beta = 1 - \alpha$.
3. Interesuje nas finalny ($t \rightarrow \infty$, w praktyce dla $t = 3000$) rozkład $v(A, B)$.
4. Symulacje prowadzimy dla $\alpha = 0.05 \dots$
5. ...a potem powtarzamy dla $\alpha = 0.95$.

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad. 4-5: Dwa (dla dwóch różnych α) dwuwymiarowe mapy (na płaszczyźnie (A, B)) liczby aktorów o statusie (A, B) po 3000 krokach czasowych.

Wnioski (25 pkt.) Jeśli tak, to jak?

4.1.2 Podejście dyskretne—automat komórkowy

- W rozdziale 4.1.1 jako parametry wykorzystano prawdopodobieństwa dwóch strategii (odpowiednio α i $1 - \alpha$); poniżej zachowujemy tę samą notację.

- Zastosowanym tam formalizmem był układ równań różniczkowych, w których jako zmienne zastosowano zarówno rozkład prawdopodobieństwa agentów w przestrzeni statusu, jak i związany z nim rozkład skumulowany.
- W tym sensie opis przedstawiony w Ref. [55] był nielokalny; ewolucja statusu aktorów w czasie zależała nie tylko od ich bezpośrednich sąsiadów, ale także od tych dość odległych na płaszczyźnie statusu.
- W dyskretnym podejściu agentowym [52] wykorzystamy technikę automatów komórkowych [57–60].
- Technika automatów komórkowych opiera się na kilku założeniach, w tym:
 - dyskretna (geometryczna) przestrzeń (ortodoksyjnie: regularna sieć) i dyskretny czas;
 - dyskretny i skończony zbiór (ortodoksyjnie: o małej mocy) dostępnych stanów pojedynczego węzła sieci;
 - lokalne reguły \mathcal{F} (ortodoksyjnie: i) deterministyczne, ii) takie same dla każdego węzła, iii) aplikowane synchronicznie) rządzące ewolucją czasową stanu pojedynczej komórki.
- Reguła \mathcal{F} definiuje stan s_i węzła i w chwili $(t + 1)$ w zależności od stanu komórki s_i w chwili t oraz stanu otoczenia \mathcal{N} i -tego węzła sieci:

$$s_i(t + 1) = \mathcal{F}\left(s_i(t); \mathcal{N}(s_i(t))\right).$$

Czasami regułę \mathcal{F} łatwiej jest „opowiedzieć” niż zapisać.

- Każdy węzeł sieci prostokątnej $\mathcal{G} = \{(A, B) : 1 \leq A \leq L_A, 1 \leq B \leq L_B\}$ odpowiada liczbie $v(A, B)$ aktorów z „rzeczywistym” statusie A i statusie „powierzchniowym” B .
- Początkowo zakładamy, że węzły o współrzędnej $B \leq L_B/4$ są zajęte przez kilkudziesięciu aktorów a w węzłach o $B > L_B/4$ nie ma aktorów.
- W każdym kroku czasowym t każda para aktorów w węźle $\{(A, B) \cup (A + 1, B)\}$ dla której $v(A, B; t)v(A + 1, B; t) > 0$ stosuje albo strategię SDS (z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$):

$$v(A, B + 1; t + 1) = v(A, B + 1; t) + 1, \quad (42a)$$

$$v(A, B; t + 1) = v(A, B; t) - 1 \quad (42b)$$

albo następuje motywowany strachem proces odrzucenia (z prawdopodobieństwem α):

$$v(A + 1, B; t + 1) = v(A + 1, B; t) - 1, \quad (43a)$$

$$v(A, B; t + 1) = v(A, B; t) + 1. \quad (43b)$$

- W wersji *asynchronicznej*, jeden krok czasowy jest skompletowany po aktualizacji wszystkich par (sąsiednich) agentów w przypadkowej kolejności.
- W obu wersjach liczby losowe (na podstawie których podejmowana jest decyzja o stosowaniu bądź niestosowaniu SDS) jest ustalana dla każdej pary osobno [52].

Algorithm 2 Algorytm asynchronicznego automatu komórkowego do symulacji procesu integracji społecznej grupy

```

1:  $t \leftarrow 0$   $\triangleright t$  is discrete time
2:  $\hat{v}(A, B) \leftarrow 0$   $\triangleright \hat{v}$  marks matrices
3: for all  $A$  do
4:   for  $B = 1, L_B/4$  do
5:      $v(A, B) \leftarrow 20$   $\triangleright$  initial (for  $t = 0$ ) number  $v$  of agents in status  $(A, B)$ 
6: for all  $t < 10^3$  do
7:    $\hat{p} \leftarrow 0$ 
8:   for  $A = 1, L_A - 1$  do
9:     for  $B = 1, L_B$  do
10:      if  $v(A, B) > 0 \wedge v(A + 1, B) > 0$  then
11:         $p(A, B) \leftarrow \text{random}()$   $\triangleright \hat{p}$  is the probability matrix
12:    $\hat{v}_1 \leftarrow \hat{v}$ 
13:   for  $A = 1, L_A$  do
14:     for  $B = 1, L_B$  do
15:       if  $p(A, B) > 0$  then
16:         if  $p(A, B) > \alpha$  then  $\triangleright$  with probability  $1 - \alpha$ , self-deprecation strategy
17:            $v_1(A, B) = v(A, B) - 1$ 
18:    $\hat{v}_2 \leftarrow \hat{v}_1$ 
19:   for  $A = 1, L_A$  do
20:     for  $B = 1, L_B - 1$  do
21:       if  $p(A, B) > 0$  then
22:         if  $p(A, B) > \alpha$  then  $\triangleright$  with probability  $1 - \alpha$ , self-deprecation strategy
23:            $v_2(A, B + 1) \leftarrow v_1(A, B + 1) + 1$ 
24:    $\hat{v}_3 \leftarrow \hat{v}_2$ 
25:   for  $A = 1, L_A$  do
26:     for  $B = 1, L_B$  do
27:       if  $p(A, B) > 0$  then
28:         if  $p(A, B) < \alpha$  then  $\triangleright$  with probability  $\alpha$ 
29:            $v_3(A, B) \leftarrow v_2(A, B) + 1$ 
30:    $\hat{v}_4 \leftarrow \hat{v}_3$ 
31:   for  $A = 1, L_A - 1$  do
32:     for  $B = 1, L_B$  do
33:       if  $p(A, B) > 0$  then
34:         if  $p(A, B) < \alpha$  then  $\triangleright$  with probability  $\alpha$ 
35:            $v_4(A + 1, B) \leftarrow v_3(A + 1, B) - 1$ 
36:    $\hat{v} \leftarrow \hat{v}_4$ 
37:    $t \leftarrow t + 1$ 
38: for all  $A$  do
39:   for all  $B$  do  $\text{print}(A, B, v(A, B))$ 

```

Tabela 1: Filmiki pokazujące czasową ewolucję liczby aktorów $v(A, B)$ w poszczególnych stanach (A, B) dla synchronicznej i asynchronicznej wersji automatu komórkowego i różnych wartości α przy $L_A = 40$, $L_B = 60$ [52].

α	URL
aktualizacja synchroniczna	
0.00	http://www.zis.agh.edu.pl/files/synchro000.gif
0.25	http://www.zis.agh.edu.pl/files/synchro025.gif
0.50	http://www.zis.agh.edu.pl/files/synchro050.gif
0.75	http://www.zis.agh.edu.pl/files/synchro075.gif
1.00	http://www.zis.agh.edu.pl/files/synchro100.gif
aktualizacja asynchroniczna	
0.00	http://www.zis.agh.edu.pl/files/asynchro000.gif
0.25	http://www.zis.agh.edu.pl/files/asynchro025.gif
0.50	http://www.zis.agh.edu.pl/files/asynchro050.gif
0.75	http://www.zis.agh.edu.pl/files/asynchro075.gif
1.00	http://www.zis.agh.edu.pl/files/asynchro100.gif

Zadania

1. Zakładamy jednorodny stan początkowy $v(A, B) = 20$ dla $1 \leq A \leq L_A$ i $1 \leq B \leq L_B/4$ oraz $\beta = 1 - \alpha$.
2. Symulacje prowadzimy na prostokącie o $L_A = 40$, $L_B = 60$ zgodnie z algorytmem 2.
3. Interesuje nas finalny ($t \rightarrow \infty$, w praktyce dla $t = 1000$) rozkład $v(A, B)$.
4. Symulacje prowadzimy (osobno, kolejno) dla $\alpha = 0.0$, $\alpha = 1.0$ oraz $\alpha = 0.5$.
5. Zwizualizuj finalne mapy liczby aktorów v o statusie (A, B) dla trzech powyższych przypadków.

Sprawozdanie

Wprowadzenie (25 pkt.) Zdefiniowanie modelu, opisanie problemu.

Wyniki (50 pkt.) ad. 5: Trzy (dla trzech różnych α) dwuwymiarowe mapy (na płaszczyźnie (A, B)) liczby aktorów o statusie (A, B) po 1000 krokach czasowych.

Wnioski (25 pkt.) Jakie zjawisko udało się zaobserwować?

Literatura

- [1] R. A. Holley, T. M. Liggett, Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and voter model, Annals of Probability 3 (4) (1975) 643–663. doi:10.1214/aop/1176996306.
- [2] T. M. Liggett, Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999. doi:10.1007/978-3-662-03990-8.

- [3] F. Herrerías-Azcué, T. Galla, Consensus and diversity in multistate noisy voter models, *Physical Review E* 100 (2019) 022304. doi:10.1103/PhysRevE.100.022304.
- [4] M. Doniec, A. Lipiecki, K. Sznajd-Weron, Consensus, polarization and hysteresis in the three-state noisy q -voter model with bounded confidence, *Entropy* 24 (7) (2022) 983. doi:10.3390/e24070983.
- [5] M. Mobilia, Polarization and consensus in a voter model under time-fluctuating influences, *Physics* 5 (2) (2023) 517–536. doi:10.3390/physics5020037.
- [6] A. Vendeville, S. Zhou, B. Guedj, Discord in the voter model for complex networks, *Physical Review E* 109 (2024) 024312. doi:10.1103/PhysRevE.109.024312.
- [7] R. B. Cialdini, *Influence: The Psychology of Persuasion*, William Morrow and Company, New York, 1984.
- [8] T. Morgan, K. Laland, The biological bases of conformity, *Frontiers in Neuroscience* 6 (2012) 87. doi:10.3389/fnins.2012.00087.
- [9] S. E. Asch, Studies of independence and conformity: A minority of one against a unanimous majority, *Psychological Monographs: General and Applied* 70 (1956) 1–70. doi:10.1037/h0093718.
- [10] M. Deutsch, H. B. Gerard, A study of normative and informational social influences upon individual judgment, *Journal of Abnormal and Social Psychology* 51 (3) (1955) 629–636. doi:10.1037/h0046408.
- [11] S. Milgram, Behavioral study of obedience, *Journal of Abnormal and Social Psychology* 67 (4) (1963) 371–378. doi:10.1037/h0040525.
- [12] T. Blass, The Milgram paradigm after 35 years: Some things we now know about obedience to authority, *Journal of Applied Social Psychology* 29 (5) (1999) 955–978. doi:10.1111/j.1559-1816.1999.tb00134.x.
- [13] R. B. Cialdini, N. J. Goldstein, Social influence: Compliance and conformity, *Annual Review of Psychology* 55 (2004) 591–621. doi:10.1146/annurev.psych.55.090902.142015.
- [14] S. Moscovici, C. Nemeth, *Social influence: II. Minority influence.*, Rand McNally, 1974.
- [15] M. Wołoszyn, T. Maslyk, S. Pająk, K. Malarz, Universality of opinions disappearing in sociophysical models of opinion dynamics: From initial multitude of opinions to ultimate consensus, *Chaos* 34 (6) (2024) 063105. doi:10.1063/5.0208843.
- [16] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, Opinion evolution in closed community, *International Journal of Modern Physics C* 11 (6) (2000) 1157–1165. doi:10.1142/S0129183100000936.
- [17] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, T. Weron, A review on the Sznajd model—20 years after, *Physica A* 565 (2021) 125537. doi:10.1016/j.physa.2020.125537.
- [18] S. Milgram, L. Bickman, L. Berkowitz, Note on drawing power of crowds of different size, *Journal of Personality and Social Psychology* 13 (2) (1969) 79–82. doi:10.1037/h0028070.
- [19] K. Malarz, K. Kułakowski, The Sznajd dynamics on a directed clustered network, *Acta Physica Polonica A* 114 (3) (2008) 581–588. doi:10.12693/APhysPolA.114.581.
- [20] K. Malarz, K. Kułakowski, Indifferents as an interface between contra and pro, *Acta Physica Polonica A* 117 (4) (2010) 695–699. doi:10.12693/APhysPolA.117.695.

- [21] J. M. Darley, B. Latané, Bystander intervention in emergencies—Diffusion of responsibility, *Journal of Personality and Social Psychology* 8 (4P1) (1968) 377–383. doi:10.1037/h0025589.
- [22] B. Latané, S. Harkins, Cross-modality matches suggest anticipated stage fright a multiplicative power function of audience size and status, *Perception & Psychophysics* 20 (6) (1976) 482–488. doi:10.3758/BF03208286.
- [23] B. Latané, S. Nida, Ten years of research on group size and helping, *Psychological Bulletin* 89 (2) (1981) 308–324. doi:10.1037/0033-2909.89.2.308.
- [24] A. Nowak, J. Szamrej, B. Latané, From private attitude to public opinion: A dynamic theory of social impact, *Psychological Review* 97 (3) (1990) 362–376. doi:10.1037/0033-295X.97.3.362.
- [25] J. A. Hołyst, K. Kacperski, F. Schweitzer, Social impact models of opinion dynamics, in: D. Stauffer (Ed.), *Annual Reviews of Computational Physics IX*, World Scientific, Singapore, 2011, pp. 253–273. doi:10.1142/9789812811578_0005.
- [26] P. Bańcerowski, K. Malarz, Multi-choice opinion dynamics model based on Latané theory, *The European Physical Journal B* 92 (10) (2019) 219. doi:10.1140/epjb/e2019-90533-0.
- [27] M. Dworak, K. Malarz, Vanishing opinions in Latané model of opinion formation, *Entropy* 25 (1) (2023) 58. doi:10.3390/e25010058.
- [28] K. Malarz, T. Maslyk, Phase diagram for social impact theory in initially fully differentiated society, *Physics* 5 (4) (2023) 1031–1047. doi:10.3390/physics5040067.
- [29] A. Kowalska-Styczeń, K. Malarz, Noise induced unanimity and disorder in opinion formation, *Plos One* 15 (7) (2020) e0235313. doi:10.1371/journal.pone.0235313.
- [30] F. Heider, Attitudes and cognitive organization, *The Journal of Psychology* 21 (1) (1946) 107–112. doi:10.1080/00223980.1946.9917275.
- [31] D. Cartwright, F. Harary, Structural balance: A generalization of Heider’s theory, *Psychological Review* 63 (5) (1956) 277–293. doi:10.1037/h0046049.
- [32] K. Malarz, M. Wołoszyn, K. Kułakowski, Towards the Heider balance with a cellular automaton, *Physica D* 411 (2020) 132556. doi:10.1016/j.physd.2020.132556.
- [33] K. Malarz, J. A. Hołyst, Mean-field approximation for structural balance dynamics in heat bath, *Physical Review E* 106 (6) (2022) 064139. doi:10.1103/PhysRevE.106.064139.
- [34] K. Malarz, M. Wołoszyn, Expulsion from structurally balanced paradise, *Chaos* 30 (12) (2020) 121103. doi:10.1063/5.0022922.
- [35] K. Malarz, K. Kułakowski, Heider balance of a chain of actors as dependent on the interaction range and a thermal noise, *Physica A* 567 (2021) 125640. doi:10.1016/j.physa.2020.125640.
- [36] K. Malarz, K. Kułakowski, Comment on ‘Phase transition in a network model of social balance with Glauber dynamics’, *Physical Review E* 103 (6) (2021) 066301. doi:10.1103/PhysRevE.103.066301.
- [37] M. Wołoszyn, K. Malarz, Thermal properties of structurally balanced systems on diluted and densified triangulations, *Physical Review E* 105 (2) (2022) 024301. doi:10.1103/PhysRevE.105.024301.

- [38] K. Malarz, M. Wołoszyn, Thermal properties of structurally balanced systems on classical random graphs, *Chaos* 33 (7) (2023) 073115. doi:10.1063/5.0141019.
- [39] M. Wołoszyn, K. Malarz, K. Kułakowski, Heider balance on Archimedean lattices and cliques, *Physical Review E* 111 (1) (2025) 014310. doi:10.1103/PhysRevE.111.014310.
- [40] A. Kowalska-Styczeń, K. Malarz, K. Paradowski, Model of knowledge transfer within an organisation, *JASSS—the Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 21 (2) (2018) 3. doi:10.18564/jasss.3659.
- [41] R. Reagans, B. McEvily, Network structure and knowledge transfer: The effects of cohesion and range, *Administrative Science Quarterly* 48 (2) (2003) 240–267. doi:10.2307/3556658.
- [42] B. R. Hirshman, J. St. Charles, K. M. Carley, Leaving us in tiers: Can homophily be used to generate tiering effects?, *Computational and Mathematical Organization Theory* 17 (4) (2011) 318–343. doi:10.1007/s10588-011-9088-4.
- [43] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, Mixing beliefs among interacting agents, *Advances in Complex Systems* 3 (1-4) (2000) 87. doi:10.1142/S0219525900000078.
- [44] R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence: Models, analysis and simulation*, *JASSS—the Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 5 (3) (2002) (3)2. URL <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
- [45] K. Malarz, Truth seekers in opinion dynamics models, *International Journal of Modern Physics C* 17 (10) (2006) 1521–1524. doi:10.1142/S0129183106009850.
- [46] Y. Zhao, L. Zhang, M. Tang, G. Kou, Bounded confidence opinion dynamics with opinion leaders and environmental noises, *Computers & Operations Research* 74 (2016) 205–213. doi:10.1016/j.cor.2015.07.022.
- [47] Y. Dong, X. Chen, H. Liang, C.-C. Li, Dynamics of linguistic opinion formation in bounded confidence model, *Information Fusion* 32 (2016) 52–61. doi:10.1016/j.inffus.2016.03.001.
- [48] K. Kułakowski, Opinion polarization in the Receipt–Accept–Sample model, *Physica A* 388 (4) (2009) 469–476. doi:10.1016/j.physa.2008.10.037.
- [49] K. Malarz, K. Kułakowski, Mental ability and common sense in an artificial society, *Europhysics News* 45 (4) (2014) 21–23. doi:10.1051/epn/2014402.
- [50] K. Malarz, P. Gronek, K. Kułakowski, Zaller–Deffuant model of mass opinion, *JASSS—the Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 14 (1) (2011) 2. doi:10.18564/jasss.1719.
- [51] P. M. Blau, *Exchange and Power in Social Life*, Transaction Publishers, New Brunswick, 1964.
- [52] K. Malarz, K. Kułakowski, Paradox of integration—Cellular automata approach, *Acta Physica Polonica A* 138 (1) (2020) 60–64. doi:10.12693/APhysPolA.138.60.
- [53] M. J. Krawczyk, K. Kułakowski, Paradox of integration—A computational model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 468 (2017) 409–414. doi:10.1016/j.physa.2016.10.084.
- [54] K. Kułakowski, P. Gronek, A. Borzì, Paradox of integration—Mean field approach, *International Journal of Modern Physics C* 28 (11) (2017) 1750133. doi:10.1142/S0129183117501339.

- [55] K. Malarz, K. Kułakowski, Paradox of integration—Dynamics of two-dimensional status, *International Journal of Modern Physics C* 30 (6) (2019) 1950040. doi:10.1142/S0129183119500402.
- [56] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Edition, Springer, New York, NY, 1992.
- [57] A. Ilachinski, *Cellular Automata: A Discrete Universe*, World Scientific, 2001. doi:10.1142/4702.
- [58] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.
URL <http://www.wolframscience.com/>
- [59] B. Chopard, M. Droz, *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [60] B. Chopard, Cellular automata modeling of physical systems, in: R. A. Meyers (Ed.), *Computational Complexity: Theory, Techniques, and Applications*, Springer, New York, NY, 2012, pp. 407–433. doi:10.1007/978-1-4614-1800-9_27.