Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский Федеральный Университет»

На правах рукописи

Ходюня Николай Дмитриевич

# Неассоциативные обертывающие алгебры нильтреугольных алгебр Шевалле

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Левчук Владимир Михайлович
доктор физ.-мат. наук, профессор
Сулейманова Галина Сафиуллановна

Красноярск — 2026

## Оглавление

Стр.

**Введение** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

**Глава 1. Неассоциативные обертывающие алгебры нильтреугольных алгебр Шевалле** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.1 Точные обертывающие алгебры и стандартные идеалы . . . . . . . 6

1.2 Стандартные обертывающие алгебры типа $F_4$ . . . . . . . . . . . . . 11

1.3 Теоремы единственности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

**Глава 2. Проблемы перечисления идеалов нильтреугольных алгебр Шевалле** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.1 Проблема перечисления стандартных идеалов . . . . . . . . . . . . . 23

2.2 Специальная каноническая база идеала . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2.3 Метод коэффициентов и перечисление идеалов алгебры $RD_n(q)$ . . 28

**Наиболее употребительные обозначения** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

## Введение

Ассоциативное кольцо $A$ всегда превращается в кольцо Ли $A^{(-)}$, если умножение в $A$ заменим новым $[a,b] := ab - ba$ (коммутирование). А. А. Альберт [1] называет произвольную алгебру $A$ (не обязательно ассоциативную) *Ли-допустимой*, когда $A^{(-)}$ есть алгебра Ли; см. также [2]. Согласно [3] и [31], $A$ называется *точной обертывающей* алгебры Ли $L$, если $A^{(-)} \simeq L$.

Алгебру Шевалле над полем $K$ характеризуют системой корней $\Phi$ и базой, состоящей из элементов $e_r$ $(r \in \Phi)$ и подходящей базы подалгебры Картана. Как показано в [4, § 4.2], структурные константы базы Шевалле однозначно определяет их выбор для *нильтреугольной* подалгебры $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. Унипотентная подгруппа $U\Phi(K)$ группы Шевалле типа $\Phi$ над $K$ представлена в [5] присоединенной группой на $N\Phi(K)$. Как правило, ее нормальные подгруппы – это, в точности, идеалы кольца Ли $N\Phi(K)$, [6; 7].

Для корней считаем $s \geqslant r$, когда в разложении $s-r$ по базе $\Pi$ в $\Phi^+$ все коэффициенты неотрицательны. Корни $r$ и $s$ в $\Phi^+$ назовем *инцидентными*, если $s \geqslant r$ или $r \geqslant s$. Любое множество $\mathcal{L}$ попарно неинцидентных корней в $\Phi^+$ называем *множеством углов в* $\Phi^+$. Выделим в $N\Phi(K)$ идеалы

$$T(r) = \sum_{s\geqslant r} Ke_s, \quad Q(r) = \sum_{s>r} Ke_s \quad (r \in \Phi^+), \quad Q(\mathcal{L}) = \sum_{r\in\mathcal{L}} Q(r).$$

Если $H \subseteq T(\mathcal{L}) := \sum_{r\in\mathcal{L}} T(r)$ и включение нарушается при любой замене $T(r)$ на $Q(r)$ в сумме, то множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ определено однозначно и, согласно [3, п. 3], называется *множеством углов в* $H$.

Идеал $H$ кольца Ли $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если $Q(\mathcal{L}(H)) \subset H$.

Известные взаимосвязанные перечисления идеалов колец Ли $N\Phi(K)$ и нормальных подгрупп групп $U\Phi(K)$ редуцировались к перечислениям идеалов вида $T(\mathcal{L})$ ([8, следствие 4.3], [9, теорема 2.1.2], [10; 11] и др.) и, таким образом, к перечислениям путей в различных решетках.

Для классических типов в 2001 году в [12] записана, как проблема 1, задача

**(A)** *Найти число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ над конечным полем $K$.*

В § 2.1 проблему 1 из [12] решает теорема 5, анонсированная ранее [3, Теорема 3]. Для исключительных типов задачу **(A)** решает теорема 6.

При фиксированном $\Phi$ для алгебры Ли $N\Phi(K)$ точные обертывающие алгебры $R_\Phi$ и их число выявляет предложение 1 в § 1.1. Известно, что одну из них для $\Phi$ типа $A_{n-1}$ представляет алгебра $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над $K$; все идеалы алгебры и кольца $NT(n, K)$ стандартны [13; 14].

Алгебру $R_\Phi$ называем стандартной, если все ее идеалы стандартны. В силу теоремы 3 и предложения 2 (см. также [3] и [32]), стандартная алгебра $R_\Phi$ существует для всех типов, исключая тип $D_n$ $(n \geqslant 4)$ и $E_n$ $(n = 6{,}7{,}8)$.

Алгебра $NT(n,K)$ нижних нильтреугольных (т. е. с нулями на главной диагонали и над ней) $n \times n$ матриц над полем $K$, с точностью до изоморфизма, оказывается единственной ассоциативной обертывающей алгеброй $R_\Phi$ типа $A_{n-1}$ (теорема 2 в § 1.3 и [31]); более слабым является условие стандартности.

Вопрос об условиях однозначности неассоциативной обертывающей алгебры отмечал И. П. Шестаков на конференции в 2017 году (см. [33]). Для классических типов этот вопрос исследуется в § 1.3 (теоремы 2, 4 и замечание 3).

Лемма 2.2.1 и теорема 7 характеризуют нестандартные идеалы единственной нестандартной алгебры $RD_n(K)$ специальным набором параметров.

В работе используем стандартные обозначения [4], [15]: $\Phi^+$ — система положительных корней, $\Pi$ — ее база, $\rho$ — максимальный в $\Phi^+$ корень, $ht(r)$ — высота корня $r$. Число Кокстера $h = h(\Phi)$ системы $\Phi$ равно $ht(\rho) + 1$.

**Целью** данной работы является исследование записанных в 2001 году проблем комбинаторного перечисления идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ [12, Проблемы 1 и 2] и нахождение условия однозначности ее точной обертывающей алгебры.

**Научная новизна:**

1. Впервые …
2. Впервые …
3. Было выполнено оригинальное исследование …

**Практическая значимость** Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер.

**Методология и методы исследования.** Развиваемый Г. П. Егорычевым с 1970-х годов метод интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм (метод коэффициентов) находит приложения в многочисленных задачах алгебры, комбинаторного анализа и других областей математики, [9; 16—19]. Комбинаторная теорема 8, завершающая перечисление всех идеалов обертывающих алгебр классических типов, впервые применяется для вычисления 3-кратной комбинаторной суммы с $q$-биномиальными коэффициентами. См. также замечание 4.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на заседаниях Красноярского алгебраического семинара (2016–2020 гг.), на семинаре им. Н. А. Вавилова (СПбГУ, г. Санкт-Петербург, 8 декабря 2017 г.) и апробировались на следующих конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Проспект Свободный», 2016 г., г. Красноярск.
2. Международная конференция, посвященная 70-летию В. М. Левчука «Алгебра и Логика: Теория и Приложения», 2016 г., г. Красноярск.
3. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева «Математика в современном мире», 2017 г., г. Новосибирск.
4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, 2018 г., г. Москва.
5. Международная конференция «Мальцевские чтения», 2016 и 2023 г., г. Новосибирск.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 6 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и 0 приложен. Полный объём диссертации составляет 36 страниц, включая 1 рисунок и 1 таблицу. Список литературы содержит 0 наименований.

Автор благодарен научным руководителям профессору Левчуку Владимиру Михайловичу и профессору Сулеймановой Галине Сафиуллановне за постановку задач и внимание к работе. Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

# Глава 1. Неассоциативные обертывающие алгебры нильтреугольных алгебр Шевалле

## 1.1 Точные обертывающие алгебры и стандартные идеалы

Отметим, что в теории алгебр Ли с самого ее основания эффективно используются универсальные ассоциативные обертывающие алгебры, см. теорему Пуанкаре—Биркгофа—Витта [20, глава 1, § 1] и [21, § V.9].

По определению [3], если алгебра $A$ есть точная обертывающая алгебры Ли $L$, то алгебры $L$ и $A^{(-)}$ изоморфны. Поэтому алгебру Ли $L$ и ее точную обертывающую алгебру $A$ можно определять структурными константами в одной базе, в отличие от универсальной ассоциативной обертывающей алгебры.

Точные обертывающие алгебры определенных подалгебр алгебр Шевалле указаны в [3]. Нам потребуются предварительные сведения.

В теории Картана—Киллинга всякую простую комплексную конечномерную алгебру Ли $L$ ассоциируют с единственной (с точностью до эквивалентности) неразложимой системой корней $\Phi$ евклидова пространства $V$, построенного на подалгебре Картана [4, Глава 3]. Выбор простых корней или базы $\Pi$ в $\Phi$ определяет линейное упорядочение $\prec$ на $V$ с множеством $V^+$ векторов $v \succ 0$ и систему положительных корней $\Phi^+ = V^+ \cap \Phi \supseteq \Pi$.

Элементы $e_r$ $(r \in \Phi)$ и подходящая база подалгебры Картана алгебры Ли $L = \mathcal{L}(\Phi, \mathbb{C})$ дают [22] базу Шевалле с целочисленными структурными константами, приводящую к алгебре Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ над любым полем $K$ (алгебра Шевалле). Ее подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной*.

По теореме Шевалле о базе [4, Теорема 4.2.1] при $r,s \in \Phi$ имеем

$$[e_r,e_s] = N_{rs}e_{r+s} = -[e_s,e_r] \ \ (r+s \in \Phi), \qquad [e_r,e_s] = 0 \ \ (r+s \notin \Phi \cup \{0\}),$$

где либо $N_{rs} = \pm 1$, либо $|r| = |s| < |r+s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, либо $N_{rs} = \pm 2$ или $\pm 3$ и $\Phi$ типа $G_2$. Согласно [4, Предложение 4.2.2], знаки структурных констант $N_{rs}$ имеют определенный произвол для алгебры Шевалле, а также для $N\Phi(K)$.

Фиксируя выбор знаков структурных констант $N_{rs}$, через $R_\Phi$ обозначим $K$-алгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ и умножением: $e_re_s = 0$ при $r+s \notin \Phi$ и

$$e_r e_s = e_{r+s}, \qquad e_s e_r = (1 - N_{rs}) e_{r+s} \qquad (r,s,r+s \in \Phi^+,\, N_{rs} \geqslant 1).$$

При фиксированном $\Phi$ точные обертывающие алгебры $R_\Phi$ и их число выявляет

**Предложение 1.** *Для алгебры Ли $N\Phi(K)$ каждая алгебра $R_\Phi$ является точной обертывающей алгеброй и их число равно $2^{|\Phi^+ \setminus \Pi|}$.*

*Доказательство.* Таблицы умножения базисных элементов $N\Phi(K)$ и любой алгебры $R_\Phi^{(-)}$, очевидно, совпадают. Поэтому, как и в [3, Предложение 1], алгебра $R_\Phi$ есть точная обертывающая алгебры Ли $N\Phi(K)$.

Когда $r,s,r+s \in \Phi^+$ и $0 \prec r \prec s$, пару корней $r,s$ называют *специальной*, а также *экстраспециальной*, если $r \preccurlyeq r_1$ для каждой специальной пары $r_1, s_1$ с суммой $r_1 + s_1 = r + s$. Согласно [4, Предложение 4.2.2], знаки констант $N_{rs}$ можно выбрать для экстраспециальных пар $(r,s)$ произвольно, с точностью до изоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ (аналогично, $N\Phi(K)$); тогда знаки остальных констант $N_{rs}$ определяются однозначно.

Любую из построенных точных обертывающих алгебр $R_\Phi$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ однозначно определяет выбор знака $\pm$ (одна из двух возможностей) константы $N_{rs}$ для каждой экстраспециальной пары корней $(r,s)$ в $\Phi^+$.

С другой стороны, любой положительный непростой корень в $\Phi$ есть сумма $r + s$ единственной экстраспециальной пары корней $r,s$. Поэтому множество экстраспециальных пар взаимнооднозначно множеству $\Phi^+ \setminus \Pi$.

Отсюда вытекает запись требуемого в предложении числа в виде $2^{|\Phi^+ \setminus \Pi|}$.

$\square$

**Лемма 1.1.1.** *Все ненулевые структурные константы алгебр $R_\Phi$ в выбранной базе равны $\pm 1$ для типа $\neq G_2$ и равны $1$, когда все корни в $\Phi$ одной длины. Если $\Phi$ имеет корни разных длин, то все алгебры $R_\Phi$ неассоциативные.*

*Доказательство.* Когда система корней $\Phi$ имеет корни разных длин, найдутся корни $r, s \in \Phi^+$, для которых пересечение $\Phi \cap (Zr + Zs) = \Psi$ есть подсистема корней типа $B_2$ или $G_2$. Определение алгебры $R_\Phi$ позволяет считать, что $\{r, s\}$ есть база в $\Psi$ и $2r + s$ — корень. Если $N_{rs} \geqslant 1$, то получаем

$$e_r(e_r e_s) = e_r e_{r+s} = \pm e_{2r+s}, \quad (e_r e_r) e_s = 0.$$

Аналогично при $N_{sr}\ (= -N_{rs}) \ \geqslant 1$ произведения $(e_s e_r)e_r = e_{r+s}e_r = \pm e_{2r+s}$ и $e_s(e_r e_r) = 0$ не совпадают. Следовательно, алгебра $R_\Phi$ — неассоциативная.

Первое утверждение в лемме сейчас сразу следует из определения алгебр $R_\Phi$. Таким образом, доказательство завершено. $\square$

Для каждого типа $\Phi$ мы исследуем (§ 1.3) условия однозначности алгебр $R_\Phi$ и, взаимосвязано, структурных констант $N_{rs}$ алгебр Ли $N\Phi(K)$ над полем $K$.

Идеал произвольного кольца $A$ всегда есть идеал и кольца $A^{(-)}$, так как основные операции в $A^{(-)}$ производны от операций в $A$. Верно и обратное, когда умножение в $A$ есть также производная операция от операций в $A^{(-)}$, например, если для алгебры Ли $L$ с умножением $*$ выберем обертывающую алгебру $A$ с умножением $\alpha \cdot \beta = (\alpha * \beta)t$, где $t$ — обратимый скаляр.

Как и во введении, используем отношения частичного порядка $r > s$ корней и инцидентности ($r \geqslant s$ или $s \geqslant r$), понятие множества углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ подмножеств $H$ в $N\Phi(K)$, а также идеалы $T(r),\ Q(r),\ T(\mathcal{L})$ и $Q(\mathcal{L})$.

**Определение 1.** Идеал $H$ кольца Ли $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если $Q(\mathcal{L}(H)) \subset H$. Точную обертывающую алгебру $R_\Phi$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем $K$ называем *стандартной*, если все ее идеалы стандартны.

Из свойств систем корней и определений легко вытекает

**Лемма 1.1.2.** *В кольце $R_\Phi$ каждый идеал с единственным углом стандартен. Когда $\Phi$ ранга 2, любая алгебра $R_\Phi$ стандартна.*

*Доказательство.* Доказательство первого утверждения леммы для идеала $H$ в $R_\Phi$ с множеством углов $\mathcal{L}(H) = \{r\}$ проводим с помощью индукции по $h(\Phi) - ht(r)$. Ясно, что $Q(\rho) = 0 \subset H \subseteq T(r)$. Пусть $r$ — не максимальный корень. Тогда существует простой корень $p$ с условием $r + p \in \Phi^+$ и одно из произведений $e_p e_r$, $e_r e_p$ равно $e_{r+p}$. Поэтому множество $(Ke_p)H + H(Ke_p)$ по модулю $Q(r+p)$ совпадает с $Ke_{r+p}$ и, по индукции, порождает идеал, содержащий $Q(r+p)$, откуда $T(r+p) \subseteq H$. Учитывая произвол в выборе $p$, получаем включение $Q(r) \subset H$.

Второе утверждение леммы сразу следует из первого для случая систем корней $\Phi$ типа $A_2$, $B_2$ и $G_2$. $\square$

Хорошо известно, что алгебра Ли $N\Phi(K)$ типа $A_{n-1}$ изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$ матриц над $K$. Таким образом, для алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_{n-1}$ существует ассоциативная точная обёртывающая алгебра — алгебра $R = NT(n,K)$.

Здесь обычные матричные единицы $e_{ij}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$ составляют базу алгебры $R$, а также базу Шевалле из элементов $e_r = e_{ij}$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $R^{(-)} = N\Phi(K)$ после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$. В этом случае известна стандартность всех идеалов алгебры $R$ над полем $K$ (Р. Дюбиш и С. Перлис [13, Теорема 8] и даже идеалов кольца $R$, [14, Теорема 2]).

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ остальных классических типов заданы в [5, Лемма 2] аналогично в базе Шевалле из "матричных единиц" $e_{iv}$ с ограничениями

$$B_n: \ -i < v < i \leqslant n; \quad D_n: \ 1 \leqslant |v| < i \leqslant n; \quad C_n: \ -i \leqslant v < i \leqslant n, \ v \neq 0.$$

К суммам двух корней, являющихся корнями, помимо сумм $r_{ij} + r_{jv} = r_{iv}$ (аналогично типу $A_n$), здесь относятся еще суммы

$$r_{kv} + r_{m,-v} = r_{k,-m} \quad (k > m > |v|),$$

а для типа $C_n$ при $k = m > |v| \geqslant 1$ также суммы $r_{kv} + r_{k,-v} = r_{k,-k}$.

Любой элемент из $N\Phi(K)$ представляется суммой $\sum a_{iv}e_{iv}$ и $\Phi^+$-матрицей $||a_{iv}||$ над $K$ соответствующего типа. Так, $B_n^+$-матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} a_{10} \\ \\ a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21} \\ \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \\ a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{array}$$

Отбрасывая столбец с нулевым номером, получаем $D_n^+$-матрицу.

В [5, лемма 2] доказана

**Лемма 1.1.3.** *Знаки структурных констант $N_{rs}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ можно выбрать так, что $[e_{ij},e_{jv}] = e_{iv} = -[e_{jv},e_{ij}]$ и выполняются равенства:*

$$[e_{jv},e_{i,-v}] = e_{i,-j} \quad (\Phi = B_n,D_n), \quad i > j > |v| > 0;$$

$$[e_{i0},e_{j0}] = 2e_{i,-j} \quad (\Phi = B_n), \quad [e_{ij},e_{i,-j}] = 2e_{i,-i} \quad (\Phi = C_n), \quad i > j \geqslant 1;$$

$$[e_{jm},e_{i,-m}] = [e_{im},e_{j,-m}] = e_{i,-j} \quad (\Phi = C_n), \quad i > j > m \geqslant 1.$$

Соответственно типу $\Phi$ для алгебр Ли $N\Phi(K)$ используем обозначения $NB_n(K)$, $NC_n(K)$ и так далее. Очевидным следствием леммы 1.1.3 является

**Лемма 1.1.4.** *Фактор-алгебра $ND_n(K)/T(r)$ изоморфна $NT(n,K)^{(-)}$ точно для двух корней $r = r_{2,-1}$ и $r = r_{21}$ при $n > 4$, и точно для трех простых корней $r$ при $n = 4$. Кроме того, $NB_n(K)/T(r) \simeq NT(n+1,K)^{(-)}$ и $NC_n(K)/T(r) \simeq NT(n+1,K)^{(-)}$ для единственного корня $r = r_{2,-1}$ и $r = r_{2,-2}$ соответственно.*

**Замечание 1.** Для $\Phi$ типа $B_n$ и $C_n$ произвольная обертывающая алгебра $R_\Phi$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ имеет $K$-подмодуль $M_\Phi$ с базой $\{e_{iv} \mid 1 \leqslant |v| < i \leqslant n\}$. Он не является подалгеброй для $\Phi$ типа $C_n$ $(n > 1)$, а в алгебре $R_\Phi$ типа $B_n$ есть подалгебра, изоморфная обертывающей алгебре алгебры Ли $ND_n(K)$.

Точные обертывающие алгебры $R_\Phi$ классического типа с выбором знаков структурных констант по лемме 1.1.3 обозначаем соответственно типу

$$RA_n(K) = NT(n+1,K),\ \ RB_n(K),\ \ RC_n(K),\ \ RD_n(K). \tag{1.1.1}$$

**Лемма 1.1.5.** *В алгебрах $R_\Phi$ из списка* (1.1.1) *умножение определяют правила*

$$e_{ij}e_{jv} = e_{iv}, \quad e_{iu}e_{jv} = 0 \quad (u \neq j,\ u \neq -v);$$

$$\Phi = B_n, D_n: \ \ e_{jv}e_{i,-v} = e_{i,-j}\ \ (i > j > |\,v\,| > 0), \quad e_{iv}e_{j,-v} = 0\ \ (i \geqslant j > |\,v\,| > 0);$$

$$\Phi = C_n: \ \ e_{ij}e_{i,-j} = -e_{i,-j}e_{ij} = e_{i,-i} \quad (i > j \geqslant 1),$$

$$e_{jm}e_{i,-m} = e_{im}e_{j,-m} = e_{i,-j}, \quad e_{i,-m}e_{jm} = e_{j,-m}e_{im} = 0 \quad (i > j > m \geqslant 1);$$

$$\Phi = B_n: \qquad e_{i0}e_{j0} = e_{i,-j} = -e_{j0}e_{i0} \quad (i > j \geqslant 1).$$

**Лемма 1.1.6.** *Точная обертывающая алгебра $RD_3(K)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_3$ является неассоциативной и нестандартной.*

*Доказательство.* Алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_3$ и $D_3$ изоморфны, поскольку их системы корней эквивалентны. Однако, алгебра $RD_3(K)$, в отличие от алгебры $RA_3(K) = NT(4,K)$, имеет нестандартный идеал

$$K(e_{21} + e_{2,-1}) + K(e_{31} + e_{3,-1}) + Ke_{3,-2}$$

и является неассоциативной, так как $e_{2,-1}(e_{32}e_{21}) = e_{3,-2}$ и $(e_{2,-1}e_{32})e_{21} = 0$. $\square$

## 1.2 Стандартные обертывающие алгебры типа $F_4$

**Теорема 1** ([32, теорема 1.1]). *Существует стандартная обертывающая алгебра $R_\varphi$ типа $F_4$.*

*Доказательство.* □

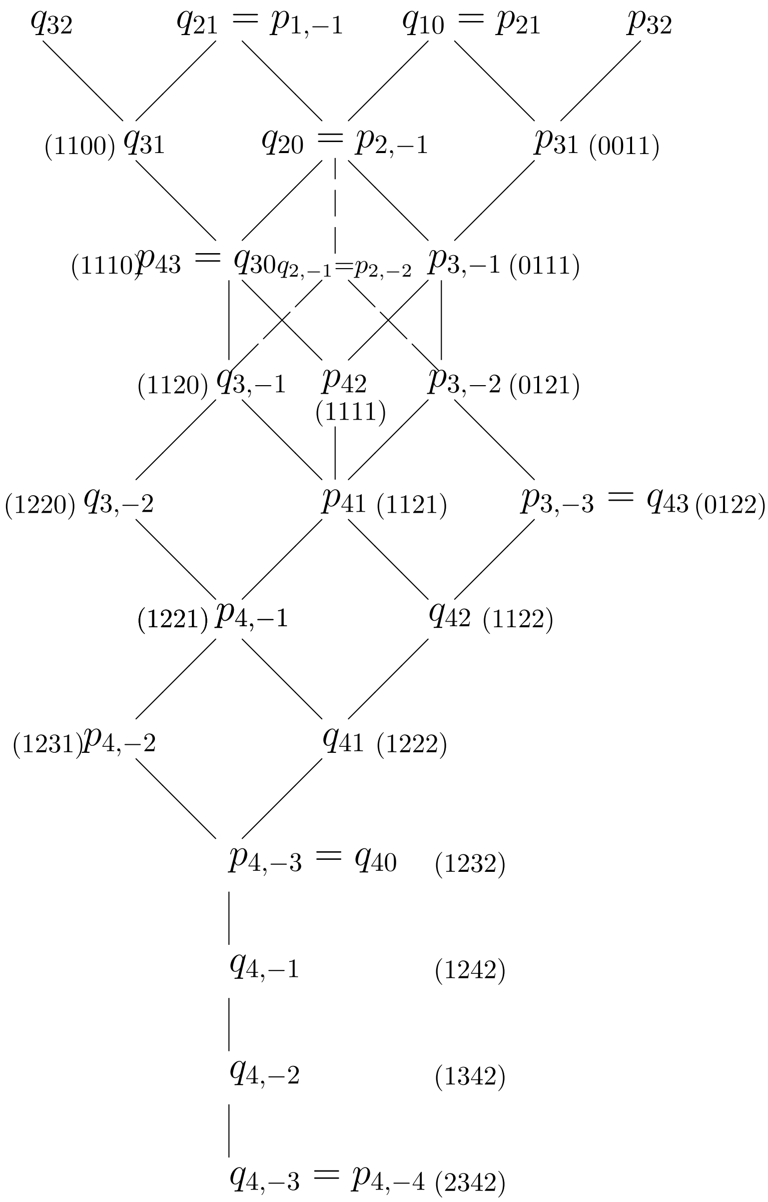


Рисунок 1.1 — Система положительных корней $F_4$

Таблица 1, рисунок 1.1.

Таблица 1 — Значения $B(\Phi,m)$ для типов $F_4$ и $E_n$.

| Ф/m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_4$ | 1 | 24 | 55 | 24 | 1 | | | | |
| $E_6$ | 1 | 36 | 204 | 351 | 204 | 36 | 1 | | |
| $E_7$ | 1 | 63 | 546 | 1470 | 1470 | 546 | 63 | 1 | |
| $E_8$ | 1 | 120 | 1540 | 6120 | 9518 | 6120 | 1540 | 120 | 1 |

## 1.3 Теоремы единственности

В этом разделе мы исследуем для классических типов Φ условия однозначности обертывающих алгебр $R_\Phi$ над полем.

Ясно, что для любой подсистемы Ψ системы корней Φ точная обёртывающая алгебры Ли $N\Psi(K)$ определена в алгебре $R_\Phi$ как подалгебра

$$R(\Psi) := \sum_{a\in\Psi^+} Ke_a.$$

Когда в системе Φ все корни одной длины и база $\Pi(\Psi)$ подсистемы Ψ лежит в базе $\Pi(\Phi)$, нестандартный идеал подалгебры $R(\Psi)$ порождает в алгебре $R_\Phi$ также нестандартный идеал. Отсюда вытекает

**Лемма 1.3.1.** *Пусть $\Pi(\Psi) \subseteq \Pi(\Phi)$ для подсистемы Ψ системы корней Φ одной длины. Если точная обёртывающая $R_\Phi$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ стандартная, то подалгебра $R(\Psi)$ алгебры $R_\Phi$ также стандартна.*

Как и в [7], корни $r, s$ называем *$p$-связанными* для простого корня $p$, если $r + p$, $s + p \in \Phi^+$. Подсистему корней $\Psi(r, p, s)$ в Φ определяем равенствами

$$\Psi = \Psi(r, p, s) := \Phi \cap (Zr + Zp + Zs).$$

Алгебры $R_\Phi$ типа $A_2$ ассоциативны, поскольку для них $R_\Phi^3 = 0$. В системах корней Φ одной длины подсистема Ψ ранга 3 всегда типа $A_3$. Очевидна

**Лемма 1.3.2.** *Если подсистема корней $\Psi = \Psi(r,p,s)$ ранга $> 2$, то либо она типа $A_3$ с базой $\{r, p, s\}$, либо Ψ типа $B_3$ или $C_3$.*

Замена $a \circ b := ba$ умножения в $R$ дает *противоположную алгебру* $R^{(op)}$, антиизоморфную $R$.

**Лемма 1.3.3.** *Алгебра $NT(n,K)$ нижних нильтреугольных $n\times n$ матриц над полем $K$ изоморфна своей противоположной алгебре $NT(n,K)^{(op)}$.*

*Доказательство.* Пусть $J = (j_{ab})$ — матрица перестановки с единицами на побочной диагонали, то есть $j_{a,n+1-a} = 1$ и $j_{ab} = 0$ иначе. Тогда $J^{-1} = J$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi\colon NT(n,K) \to NT(n,K), \qquad \varphi(X) = JX^tJ^{-1} = JX^tJ,$$

где $X^t$ — транспонированная матрица. Если $X$ нижнетреугольна, то $X^t$ верхнетреугольна, а сопряжение матрицей $J$ переводит верхнетреугольные матрицы в нижнетреугольные; значит, $\varphi(NT(n,K)) = NT(n,K)$.

Для любых $X,Y \in NT(n,K)$ имеем

$$\varphi(XY) = J(XY)^tJ = JY^tX^tJ = (JY^tJ)(JX^tJ) = \varphi(Y)\varphi(X),$$

то есть $\varphi$ — антиавтоморфизм алгебры $NT(n,K)$. Следовательно, отображение $X \mapsto \varphi(X)$ задает изоморфизм $NT(n,K) \simeq NT(n,K)^{(op)}$. □

**Лемма 1.3.4.** *Если точная обертывающая алгебра $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ стандартна, то $R^{(op)}$ также является стандартной обертывающей алгеброй.*

*Доказательство.* Очевидно, что множества идеалов в $R$ и в $R^{(op)}$ совпадают. Эндоморфизм $x \mapsto -x$ $(x \in R)$ модулей $R$ и $R^{(-)}$ является антиавтоморфизмом алгебры $R^{(-)}$ в силу равенств

$$[-a,-b] = [a,b] = ab - ba = -[b,a] \ (a,b \in R).$$

Его композиция $-\mu\colon x \mapsto -x^{\mu}$ с любым антиизоморфизмом $\mu$ алгебры $R$ дает изоморфизм алгебр $R^{(-)}$ и $\mu(R)^{(-)}$. (В важном частном случае этот изоморфизм хорошо известен [4, Раздел 11.2.1].)

Остается заметить, что алгебры $R$ и $R^{(op)}$ определены на одном множестве и их антиизоморфизмом является тождественное отображение. □

Отметим, что переход к противоположной алгебре $R^{(op)}$ сохраняет и стандартность, и ассоциативность.

**Лемма 1.3.5.** *Пусть $\Psi = \Psi(r,p,s)$ — подсистема типа $A_3$ для $p$-связанных корней $r$, $s$ в $\Phi$. Тогда стандартность подалгебры $R(\Psi)$ в $R_\Phi$ равносильна условию $N_{s,p} = N_{p,r}$ и дает равенство $N_{s+p,r} = N_{s,r+p}$, причем $R(\Psi) \simeq NT(4,K)$, когда $N_{s+p,r} = 1$. Если $N_{s+p,r} = -1$, то $R(\Psi)$ — неассоциативная алгебра.*

*Доказательство.* В подсистеме $\Psi = \Psi(r,p,s)$ типа $A_3$ корень $r+p+s$ — единственный, представимый неоднозначно суммой специальной пары корней.

Любую обертывающую алгебру $R(\Psi)$ алгебры Ли $N\Psi(K)$ порождают $Ke_r$, $Ke_s$ и $Ke_p$. Ненулевые структурные константы для $R(\Psi)$ типа $A_3$ равны $\pm 1$.

Для любого кольца $A$ наряду с его односторонними аннуляторами выделяют аннулятор

$$\mathrm{Ann}\,(A) = \{\alpha \in A \mid \alpha A = 0 = A\alpha\}.$$

Аннулятор кольца $R(\Psi)$ есть идеал $Ke_{r+p+s} = R(\Psi)^3$, причем

$$R(\Psi) = Ke_r + (T(p) \cap R(\Psi)) + Ke_s.$$

Пересечение $T(p) \cap R(\Psi)$ и его аннулятор в $R(\Psi)$ совпадают с аннулятором идеала $R(\Psi)^2$. Если по модулю $R(\Psi)^3$ односторонний аннулятор пересечения (равносильно, элемента $e_p$) совпадает с $R(\Psi)$ и, например, $e_pe_r = e_{r+p}$, $e_re_p = 0$, то $K(e_p + e_s)$ порождает в $R(\Psi)$ нестандартный идеал, как и в лемме 1.1.6.

Таким образом, при условии стандартности $R(\Psi)$ элементы $e_r, e_s$ лежат в разных односторонних аннулляторах элемента $e_p$. Это означает, что совпадают знаки констант $N_{p,r}$ и $N_{s,p}$, равносильно, $N_{p,r}N_{s,p} = 1$.

С учетом леммы 1.3.4, с точностью до перехода к противоположной алгебре, имеем

$$N_{s,p} = N_{p,r} = 1, \quad e_se_p = e_{s+p}, \quad e_pe_r = e_{r+p}, \quad e_re_p = 0 = e_pe_s. \tag{1.3.1}$$

Тождество Якоби в кольце Ли $R(\Psi)^{(-)}$ дает равенства

$$[e_s,[e_p,e_r]] = [[e_s,e_p],e_r], \quad N_{pr}N_{s,r+p} = N_{sp}N_{s+p,r}.$$

Отсюда $N_{s,r+p} = N_{s+p,r}$ $(= \pm 1)$, то есть $N_{s,r+p}N_{s+p,r} = 1$. В случае

$$N_{s+p,r} = 1, \quad e_{s+p}e_r = e_{r+s+p} = e_se_{r+p}, \quad e_re_{s+p} = 0 = e_{r+p}e_s, \tag{1.3.2}$$

приходим к изоморфизму алгебр $R(\Psi) \simeq NT(4,K)$, действующему по правилу:

$$e_p \mapsto e_{32}, \ \ e_r \mapsto e_{21}, \ \ e_s \mapsto e_{43}, \ \ e_{r+p} \mapsto e_{31}, \ \ e_{s+p} \mapsto e_{42}, \ \ e_{s+r+p} \mapsto e_{41}.$$

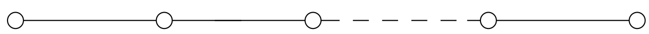
В оставшемся случае, когда $N_{s+p,r} = -1$, имеем $e_p(e_re_s) = 0$ и $(e_pe_r)e_s = e_{s+r+p}$. Поэтому алгебра $R(\Psi)$ неассоциативная; по модулю аннуллятора она изоморфна алгебре $NT(4,K)/Ke_{41}$. Лемма доказана. □

**Лемма 1.3.6.** *Если точная обертывающая алгебра $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_n$ $(n > 2)$ стандартна, то по модулю третьих степеней алгебр имеем*

$$R \simeq NT(n+1, K) \quad \textit{или} \quad R^{(op)} \simeq NT(n+1, K).$$

*Доказательство.* Исследуем произвольную стандартную обертывающую алгебру $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_n$ $(n > 2)$. Для любой подсистемы корней $\Psi = \Psi(r, p, s)$ типа $A_3$ в $\Phi$, по лемме 1.3.1, свойство стандартности $R$ наследуется подалгеброй $R(\Psi)$ — обертывающей алгебры Ли $N\Psi(K)$.

Ясно, что пара $p$-связанных корней $r, s \in \Phi^+$ с простым корнем $p$ существует только если $p$ — промежуточный корень в графе Кокстера

$A_n$ :  ($n$ вершин).

Вершины графа Кокстера системы корней $\Phi$ соответствуют простым корням. Ясно, что специальные пары простых корней экстраспециальны.

Пусть $\Psi = \Psi(r, p, s)$ — подсистема в $\Phi$ с базой из простых корней $r, p, s$. Учитывая леммы 1.1.2 и 1.3.5, для стандартной алгебры $R(\Psi)$ элементы $e_r, e_s$ лежат в разных односторонних аннуляторах элемента $e_p$ — в левом $\mathrm{Ann}^{(l)}(e_p)$ и правом $\mathrm{Ann}^{(r)}(e_p)$. В этом случае знаки структурных констант $N_{s,p}$ и $N_{p,r}$ совпадают и $N_{s,p}N_{p,r} = 1$.

Когда корень $s$ соответствует последней вершине графа Кокстера, в силу леммы 1.3.4, с точностью до перехода от $R$ к противоположной алгебре, получаем соотношения (1.3.1).

Выберем далее корень $q$, соседний слева с $r$ в графе Кокстера, и подсистему $\Psi = \Psi(q, r, p)$ с базой $q, r, p$. Применяя леммы 1.1.2 и 1.3.5 к подалгебре $R(\Psi)$, аналогично получаем $e_r e_q = e_{r+q}$.

Указанный процесс продолжаем, завершая подалгеброй $R(\Psi)$ с базой в $\Psi$, начинающейся с первой вершины графа Кокстера.

Базу обертывающей алгебры $R = NT(n+1, K)$ и базу Шевалле алгебры Ли $R^{(-)}$ дают матричные единицы $e_r = e_{ij}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant n+1)$ при соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$ системы $\Phi$ типа $A_n$.

В матричной индексации и обозначениях $e_r = e_{ij}$ при $r = r_{ij}$ получаем $e_{ij}e_{jm} = e_{im}$ для случаев $i - m = 2$. Это дает изоморфизм алгебр $R$ и $NT(n+1, K)$ по модулю их третьих степеней. Лемма доказана. $\square$

Все стандартные и все ассоциативные точные обертывающие алгебры $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_{n-1}$ $(n>3)$ над полем $K$ классифицирует

**Теорема 2** ([31, теорема 1])**.** *Точная обертывающая алгебра $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_{n-1}$ стандартна тогда и только тогда, когда алгебра $R$ или $R^{(op)}$ по модулю аннулятора изоморфна $NT(n,K)/Ke_{n1}$. Ассоциативная точная обертывающая алгебра алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_{n-1}$, с точностью до изоморфизма единственна и изоморфна алгебре $NT(n,K)$.*

*Доказательство.* Исследуем произвольную стандартную обертывающую алгебру $R$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $A_n$ $(n>2)$. Для $n=3$ теорему 2 доказывают леммы 1.3.5 и 1.3.6; в этом случае $\Phi=\Psi=\Psi(r,p,s)$ типа $A_3$, а пара $p$-связанных корней $r,s$ в $\Phi^+$ и простой корень $p$ определены однозначно.

Каждая подалгебра $R(\Psi)$ в $R$ с подсистемой корней $\Psi=\Psi(r,p,s)$ типа $A_3$ в $\Phi$ стандартна в силу леммы 1.3.1. С точностью до перехода от $R$ к противоположной алгебре, по лемме 1.3.5 имеем соотношения (1.3.1), а в случае ассоциативности $R$ также (1.3.2). При $n>3$ по индукции можем считать теорему доказанной для каждого типа $A_k$, $3\leqslant k<n$.

Выберем в $\Phi$ подсистему $\Phi_1$ (аналогично $\Phi_n$) с базой, полученной из $\Pi$ отбрасыванием первого (соответственно, последнего) простого корня в графе Кокстера; обе подсистемы типа $A_{n-1}$. Ясно, что стандартность алгебры $R$ наследуется ее подалгебрами $R(\Phi_1)$ и $R(\Phi_n)$, по индуктивному предположению, и дает их ассоциативность, а также изоморфность алгебр $R$ и $NT(n+1,K)$ по модулю $n$-х степеней.

Стандартность подалгебр $R(\Psi)$ в $R$ для подсистем корней $\Psi=\Psi(r,p,s)$ типа $A_3$ в $\Phi_l\cup\Phi_r$ приводит к уточнению. Матричная индексация корней и обозначения $e_r=e_{ij}$ при $r=r_{ij}$ $(1\leqslant j<i\leqslant n)$, наряду с ассоциативностью произведения $e_{n+1n}e_{nn-1}\cdots e_{32}e_{21}=e_{n+11}$ и подалгебр $R(\Psi(r_{j1},r_{ij},r_{n+1i}))$ при $1<j<i<n+1$, по лемме 1.3.5, дают также изоморфность алгебр $R$ и $NT(n+1,K)$.

Это завершает доказательство теоремы. □

**Замечание 2.** Замена соотношений $e_{nj}e_{j1}=e_{n1}$ и $e_{j1}e_{nj}=0$ новыми

$$e_{nj}e_{j1}=0,\quad e_{j1}e_{nj}=e_{n1}\qquad (j=2,3,\ldots,n-1)$$

приводит алгебру $NT(n,K)$ $(n>3)$ к неассоциативной стандартной обертывающей алгебре типа $A_{n-1}$; обе алгебры по модулю аннулятора $Ke_{n1}$ изоморфны.

Поэтому требование стандартности точной обертывающей алгебры здесь слабее условия ассоциативности, с учетом теоремы 2.

Перечислим возможные типы $\Phi$ стандартных обертывающих алгебр $R_\Phi$.

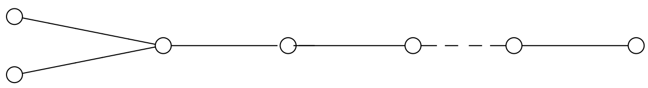
**Предложение 2.** *Стандартная обертывающая $R_\Phi$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ существует для всех типов $\Phi$, кроме типа $D_n$ $(n \geqslant 4)$ и $E_n$ $(n = 6{,}7$ и $8)$.*

*Доказательство.* Существование стандартной обертывающей алгебры $R_\Phi$ над полем для $\Phi$ типа $B_n$ и $C_n$ указывает ([3, Теорема 4], [31]) следующая

**Теорема 3.** *Пусть $R_\Phi$ есть алгебра классического типа из списка 1.1.1. Если $s$ — угол идеала $H$ кольца $R_\Phi$ и $Q(s) \nsubseteq H$, то $\Phi$ типа $D_n$, $s = r_{iv}$, $2 \leqslant i < n$, $v = \pm 1$, причем идеалы $T(r_{i+1,1})$ и $T(r_{i+1,-1})$ оба не лежат в $H$.*

В силу теорем 2 и 3, для алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов доказательство предложения 2 требуется лишь для типа $D_n,\ n > 3$.

Допустим, что стандартная точная обертывающая алгебра $R_\Phi$ для $\Phi$ типа $D_n$ существует. Граф Кокстера системы корней $\Phi$ (его вершины соответствуют простым корням) типа $D_n$ представляется в виде

$D_n$ :  ($n$ вершин).

Нетривиальная симметрия $\bar{\ }$ графа Кокстера единственна при $n > 4$. Она переставляет крайние слева вершины $r_{2,-1}$ и $r_{21}$; остальные вершины неподвижны. Если $r \neq \bar{r}$ для линейного продолжения $\bar{\ }$ перестановки базы $\Pi = \Pi(\Phi)$ на $\Phi$, то $r = r_{iv}$ и $\bar{r} = r_{i,-v}$ при одном из двух значений $v = \pm 1$.

Обозначим через $\Phi_v$ подсистему корней типа $A_{n-1}$ в $\Phi$ с базой

$$\Pi_v = \Pi(\Phi) \setminus \{r_{2,-v}\},\ v = \pm 1.$$

Тогда в $N\Phi(K)$ находим подалгебру $N\Phi_v(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Pi_v\}$ типа $A_{n-1}$, как показывают графы Кокстера. По лемме 1.3.1 получаем стандартность точных обертывающих алгебр $R(\Phi_v)$, $v = \pm 1$, как подалгебр в $R_\Phi$.

В алгебрах $R(\Phi_1)$ и $R(\Phi_{-1})$ стандартна и каждая подалгебра $R(\Psi)$ для подсистемы $\Psi = \Psi(r{,}p{,}s)$ типа $A_3$ в $\Phi$ с условием $\{r{,}p{,}s\} \subseteq \Pi_1$ или $\{r{,}p{,}s\} \subseteq \Pi_{-1}$. Две такие подалгебры $R(\Psi)$ получаем для случаев $r = r_{2,-1}$ и $r = r_{21}$. Для них элементы $e_r$ и $e_s$ лежат в разных односторонних аннуляторах элемента $e_p = e_{32}$; соответственно, $R(\Psi)$ есть левый или правый аннулятор элемента $e_{32}$. Поэтому для $\Psi_0 = \Psi_0\{r_{2,-1}, r_{32}, r_{21}\}$ подалгебра $R(\Psi_0)$ типа $A_3$ в $R_\Phi$, в силу леммы 1.3.5, не является стандартной, как и алгебра $R_\Phi$.

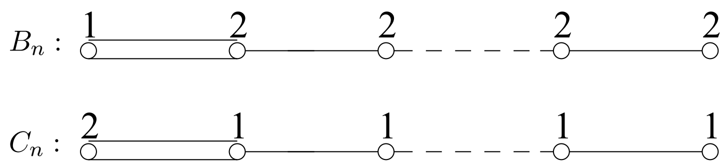
Полученное противоречие доказывает предложение 2 для типа $D_n$.

Графы Кокстера систем корней типа $E_n$ $(n = 6{,}7{,}8)$ содержат, как подграф, граф Кокстера системы корней типа $D_4$. Поэтому здесь предложение 2 получаем, как несложное следствие. Существование стандартной обертывающей алгебры $R_\Phi$ для $\Phi$ типа $F_4$ устанавливает теорема 1.

Завершая доказательство для исключительных типов, отметим, что для $\Phi$ ранга 2 предложение 2 следует из леммы 1.1.2. $\square$

Исследуем условия однозначности обертывающих алгебр $R_\Phi$ типов $B_n$ и $C_n$ над полем.

Системы корней $\Phi$ типа $B_n$ и $C_n$ дуальны друг другу. В терминологии Ж.-П. Серра [23], графы Кокстера у них совпадают, см. также замечание в [7, § 1]. Однако, при $n > 2$ различаются схемы Дынкина, то есть графы Кокстера с приписанным каждой вершине числом (обычно, квадрат длины соответствующего вершине корня, когда короткие корни длины 1),




В отличие от типа $D_n$, в системах $\Phi$ типа $B_n$ и $C_n$ корни $r_{jv}$ и $r_{j,-v}$ всегда инцидентны, то есть в $R_\Phi$ один из идеалов $T(r_{jv})$ и $T(r_{j,-v})$ лежит в другом.

Далее идеал $T(r)$ обертывающей алгебры $R_\Phi$ классического типа обозначаем при $r = r_{iv}$ через $T_{iv}$, кроме случая $v = 1$ для типа $D_n$, где

$$T_{i1} := T_{i,-1} + T(r_{i1}).$$

Как показывают леммы 1.1.2 и 1.1.3, стандартны все идеалы алгебры $R_\Phi$, лежащие в идеале вида $T_{i,-1}$ или — для типа $B_n$ — в $T_{10}$.

Учитывая лемму 1.1.4 и теорему 2, на алгебры $R_\Phi$ накладываем условие

$$B_n:\ R_\Phi/T_{2,-1} \simeq NT(n+1,K); \tag{1.3.3}$$

$$C_n:\ R_\Phi/T_{2,-2} \simeq NT(n+1,K). \tag{1.3.4}$$

Тогда элементы $e_{jm}$ алгебры $R_\Phi$ при $j > m > 0$ умножаются по обычным для матричных единиц правилам, причем для $\Phi$ типа $B_n$, в силу предложения 1,

$$e_{jm}e_{m0} = e_{j0}, \qquad e_{m0}e_{j0} = -e_{j0}e_{m0} = c_{jm}e_{j,-m} \ \ (c_{jm} = \pm 1). \tag{1.3.5}$$

**Лемма 1.3.7.** *Алгебра $R_\Phi$ типа $B_3$ с условием (1.3.3) стандартная. С точностью до выбора знака произведения $e_{10}e_{20} = \pm e_{2,-1}$, она определена однозначно, когда подалгебра $R(\Psi)$ для подсистемы $\Psi$ типа $A_3$ в $\Phi$ ассоциативная.*

*Доказательство.* Все длинные корни системы корней $\Phi$ типа $B_3$ образуют единственную подсистему $\Psi$ типа $A_3$. С учетом равенств (1.3.5), условие (1.3.3) легко дает стандартность алгебры $R_\Phi$.

Базу в $\Psi$ дают корень $r_{32}$ и $r_{32}$-связанные корни $r_{2,-1}$ и $r_{21}$, то есть

$$\Psi = \Psi(r_{2,-1}, r_{32}, r_{21}).$$

В силу (1.3.3), имеем $e_{32}e_{21} = e_{31}$, $e_{21}e_{32} = 0$. Поэтому стандартность подалгебры $R(\Psi)$ по лемме 1.3.5 равносильна равенствам

$$e_{32}e_{2,-1} = 0, \ \ e_{2,-1}e_{32} = e_{3,-1}.$$

Тождество Якоби алгебры Ли $N\Phi(K)$, предложение 1 и лемма 1.1.3 дают:

$$[e_{20},e_{10}] = [[e_{21},e_{10}],e_{10}] = 2ce_{2,-1}, \quad e_{20}e_{10} = ce_{2,-1} \quad (c = \pm 1);$$

$$[e_{30},e_{10}] = [[e_{32},e_{20}],e_{10}] = [e_{32},[e_{20},e_{10}]] = 2ce_{3,-1}, \ \ e_{30}e_{10} = ce_{3,-1}.$$

$$[e_{30},e_{20}] = [e_{30},[e_{21},e_{10}]] = [e_{21},[e_{30},e_{10}]] = 2ce_{3,-2}, \ \ e_{30}e_{20} = ce_{3,-2}.$$

(См. также замечание 2.) Далее,

$$[e_{2,-1},e_{31}] = [e_{2,-1},[e_{32},e_{21}]] = [[e_{2,-1},e_{32}],e_{21}] = [e_{3,-1},e_{21}] = \pm e_{3,-2},$$

то есть либо $e_{2,-1}e_{31} = e_{3,-2}$ и $e_{31}e_{2,-1} = 0$, либо $e_{2,-1}e_{31} = 0$ и $e_{31}e_{2,-1} = e_{3,-2}$. К ассоциативности подалгебры $R(\Psi)$ приводят оба случая:

$$e_{2,-1}(e_{32}e_{21}) = e_{2,-1}e_{31} = e_{3,-2} = (e_{2,-1}e_{32})e_{21} = e_{3,-1}e_{21}.$$

Однако, выбор знака константы $N_{rs}$ для специальной пары $(r,s)$ корней с суммой $r + s = r_{3,-2}$ произволен, согласно [4, Предложение 4.2.2], лишь при условии экстраспециальности пары $(r,s)$.

Таким образом, выбор знака $c = \pm 1$ определяет алгебру $R_\Phi$ однозначно. $\square$

**Лемма 1.3.8.** *Пусть $R_n = R_\Phi$ есть стандартная обертывающая алгебра типа $B_n$ $(n > 3)$ с условием (1.3.3). Тогда $R_\Phi = RB_n(K)$ по модулю идеала $T_{n,-1}$, с точностью до выбора знака $c = \pm 1$ произведения $e_{20}e_{10} = ce_{2,-1}$.*

*Доказательство.* В системе корней $\Phi$ типа $B_n$ $(n > 3)$ выделим подсистемы $\Psi_{m,j,i,k}$ типа $B_4$ с базой $\{r_{m0}, r_{jm}, r_{ij}, r_{ki}\}$. Корень $r_{ij}$ и $r_{ij}$-связанные корни $r_{j,-m}$, $r_{ki}$ образуют базу подсистемы $\Psi$ типа $A_3$, то есть

$$\Psi = \Psi(r_{j,-m}, r_{ij}, r_{ki}), \quad 1 \leqslant m < j < i < k \leqslant n. \tag{1.3.6}$$

Пусть стандартная алгебра $R_\Phi$ выбрана с условием (1.3.3). По лемме 1.3.5, если $e_{ij}e_{j,-m} = 0$ (как и в лемме 1.3.7 при $n = 3$), то в подалгебре $R(\Psi)$, а при $i = j + 1$ и в алгебре $R_\Phi$, находим нестандартные идеалы с двумя углами $r_{j,-m}$, $r_{ki}$. Следовательно, $e_{ij}e_{j,-m} = e_{i,-m}$ и, по лемме 1.3.5,

$$e_{jv}e_{ij} = 0, \quad e_{ij}e_{jv} = e_{iv} = [e_{ij}, e_{jv}] \qquad (i > j > |v| = m > 0).$$

Корень $r_{2.-1}$ представляется суммой $r_{2.-1} = r_{10} + r_{20}$ специальной пары корней однозначно, причем

$$[e_{20}, e_{10}] = 2ce_{2,-1}, \quad e_{20}e_{10} = ce_{2,-1} \quad (c = \pm 1),$$

$$[e_{j0}, e_{10}] = [[e_{j2}, e_{20}], e_{10}] = [e_{j2}, [e_{20}, e_{10}]] = 2ce_{j,-1}, \;\; e_{j0}e_{10} = ce_{j,-1}.$$

Для корней $r_{i,-j}$ при $1 < j < i$ также имеем

$$[e_{i0}, e_{j0}] = [e_{i0}, [e_{j1}, e_{10}]] = [e_{j1}, [e_{i0}, e_{10}]] = 2ce_{i,-j}, \;\; e_{i0}e_{j0} = ce_{i,-j}.$$

Корни $r_{i,-m}$ и $r_{jm}$ инцидентны в системе $\Psi_{m,j,i,k}$, однако, в ее подсистеме (типа $D_4$) длинных корней не инцидентны. Вместе с $r_{kj}$ они образуют базу подсистемы $\Psi = \Psi(r_{i,-m}, r_{jm}, r_{kj})$ типа $A_3$. Подалгебра $R(\Psi)$ в $R_\Phi$ здесь также стандартная; в противном случае нестандартный идеал с двумя углами $r_{i,-m}$ и $r_{ki}$ находим в $R(\Psi)$ и в алгебре $R_\Phi$. Поэтому $e_{i,-m}e_{jm} = 0$ и $e_{jm}e_{i,-m} = e_{i,-j}$.

Используя лемму 1.3.5 и тождество Якоби алгебры Ли $N\Phi(K)$, получаем

$$e_{i,-j} = [e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{jm}, [e_{ij}, e_{j,-m}]] = [e_{j,-m}, [e_{ij}, e_{jm}]] = [e_{j,-m}, e_{im}],$$

$$e_{i,-j} = e_{jm}e_{i,-m} = [e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{j,-m}, e_{im}] = e_{j,-m}e_{im}. \tag{1.3.7}$$

Учитывая произвол в выборе подсистемы $\Psi_{m,j,i,k}$ $(i < k \leqslant n)$, с точностью до выбора знака $c = \pm 1$, имеем $R_\Phi = RB_n(K)$ по модулю идеала $T_{n,-1}$. $\square$

Согласно доказательству предложения 12.2.3 в [4] (см. также [5]), алгебра Ли $N\Phi(K)$ допускает графовый автоморфизм $\theta$, когда граф Кокстера системы корней $\Phi$ допускает нетривиальную симметрию и все корни в $\Phi$ одной длины. Симметрия линейно продолжается до перестановки ¯ системы корней $\Phi$.

Симметрия ¯ системы корней $\Phi$ типа $D_n$ при $n > 4$ единственна и графовый автоморфизм $\theta$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ порядка 2 определяется правилом

$$\theta : \ e_r \to e_{\bar{r}} \quad (r \in \Phi^+)$$

**Лемма 1.3.9.** *Алгебра $RB_n(K)$ представляется в алгебре $RD_{n+1}(K)$ централизатором графового автоморфизма $\theta$ порядка 2 алгебры Ли $RD_{n+1}(K)^{(-)}$.*

*Доказательство.* В представлении алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа $D_{n+1}$ алгеброй Ли $RD_{n+1}(K)^{(-)}$ графовый автоморфизм $\theta$ переставляет в $D^+_{n+1}$-матрицах 1-й и (-1)-й столбцы (то есть $\theta(e_{iv}) = e_{i,-v}$ при $v = \pm 1$), не изменяя остальные столбцы.

Автоморфизм $\theta$ централизует (или оставляет неподвижными) все элементы

$$f_{i-1,0} := e_{i,-1} + e_{i1} \ \ 1 < i \leqslant n+1, \quad f_{i-1,\pm(v-1)} := e_{i,\pm v} \ \ (1 < v < i \leqslant n). \quad (1.3.8)$$

Очевидно, централизатор графового автоморфизма $\theta$ совпадает с подалгеброй

$$C(\theta) = \sum_{i=2}^{n+1} K(e_{i,-1} + e_{i1}) + \sum_{1<|v|<i\leqslant n+1} K e_{iv}$$

и является даже идеалом алгебры $RD_{n+1}(K)$.

Выбранная нумерация элементов $f_{iv}$ позволяет считать их базой модуля $RB_n(K)$. Умножение в алгебре $RD_{n+1}(K)$, по лемме 1.1.5, превращает модуль в алгебру $RB_n(K)$ с базой Шевалле из элементов $f_{iv}$.

Требуемый изоморфизм $C(\theta) \to RB_n(K)$ укажем явным действием на произвольную $D^+_{n+1}$-матрицу $\alpha$ из $C(\theta)$, по аналогии со скручивающим автоморфизмом группы Шевалле типа $D_{n+1}$ перед леммой 4 в [5]. Вначале "склеиваем" 1-ый и (-1)-й столбцы в $\alpha$, считая его 0-м, а остальные столбцы не изменяем. Заменяя в новой матрице номер $i$ каждой строки на $i-1$, а номер $\pm(v-1)$ столбца элементов из них на номер $\pm v$ $(1 < v < i \leqslant n)$, получаем изоморфный образ элемента $\alpha$. Равенства (1.3.8) определяют обратное изоморфное вложение. $\square$

Лемма 1.3.9 и замечание 1 приводят к возрастающей последовательности с однозначно определенными изоморфными вложениями алгебр:

$$RB_{n-1}(K) \subset RD_n(K) \subset RB_n(K) \subset RD_{n+1}(K) \subset \cdots , \quad n = 3{,}4{,}5, \ldots . \quad (1.3.9)$$

**Определение 2.** Последовательность обертывающих алгебр $R_n$ одного классического типа (скажем, $B_n$) возрастающих рангов $n$ назовем *монотонной*, если каждый ее член изоморфно представляется подалгеброй следующего члена.

Соответствующий пример с естественными изоморфными вложениями дает

$$RB_3(K) \subset RB_4(K) \subset \cdots \subset RB_n(K) \subset RB_{n+1}(K) \subset \cdots . \quad (1.3.10)$$

Монотонность здесь, очевидно, нарушается (вместе с первым включением) при замене $RB_3(K)$ на алгебру $R_\Phi$ типа $B_3$ из леммы 1.3.7.

Сейчас мы можем указать условия однозначности обертывающих алгебр $R_\Phi$ классических типов. Непосредственно из леммы 1.3.8 вытекает

**Теорема 4.** *Если последовательность* $R_n = R_\Phi$ *стандартных обертывающих алгебр типа* $B_n$ $(n = 3, 4, \cdots)$ *с условием* (1.3.3) *монотонная, то* $R_n = RB_n(K)$, *с точностью до выбора знака* $c = \pm 1$ *произведения* $e_{20}e_{10} = ce_{2,-1}$.

Отметим, что наряду с последовательностями стандартных обертывающих алгебр типа $B_n$, в силу (1.3.9), определены и монотонные последовательности обертывающих алгебр типа $D_n$.

**Замечание 3.** По аналогии с теоремой 4 выделяется обертывающая алгебра $R_\Phi$ типа $C_n$ $(n \geqslant 3)$ с условием (1.3.4) — алгебра $RC_n(K)$. Подчеркнем, что построения изоморфных вложений основаны на лемме о гомоморфизмах систем корней [24, Лемма 7]. Так, алгебра $RC_n(K)$ представляется централизатором в алгебре $RA_{2n-1}(K) = NT(2n,K)$ графового автоморфизма θ порядка 2 алгебры Ли $RA_{2n-1}(K)^{(-)}$. Получаем:

$$RC_n(K) \subset NT(2n,K) \subset RC_{n+1}(K) \subset NT(2n+2,K) \subset \cdots , n = 3{,}4, \ldots . \quad (1.3.11)$$

# Глава 2. Проблемы перечисления идеалов нильтреугольных алгебр Шевалле

## 2.1 Проблема перечисления стандартных идеалов

Проблемы комбинаторного перечисления стандартных идеалов и всех идеалов алгебр Ли $N\Phi(q) := N\Phi(GF(q))$ классических типов записаны в 2001 году [12, Проблемы 1 и 2]. Полное решение проблемы 1 дает следующая теорема (анонсировалась в [3]), использующая $q$-биномиальные коэффициенты

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1-q^{n-i}}{1-q^{i+1}}.$$

**Теорема 5.** *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ классического типа $\Phi$ лиева ранга $n$ равно*

$$1 + \sum_{m=1}^{n} B(\Phi,m) \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^k \binom{m}{k} \begin{bmatrix} m-k \\ t \end{bmatrix}_q,$$

*где $B(\Phi,m) = \binom{n}{m}^2$ для типов $B_n$ и $C_n$, а также*

$$B(A_{n-1},m) = \frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}, \quad B(D_n,m) = \binom{n}{m}\left(\binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-2}\right).$$

*Доказательство.* Согласно [7], стандартный идеал $H$ в $N\Phi(K)$ характеризуют множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ его углов и *фрейм* $\mathcal{F}(H)$, определяемый условиями

$$\mathcal{F}(H) \subseteq \sum_{s\in\mathcal{L}} Ke_s, \quad \mathcal{F}(H) = H \mod Q(\mathcal{L}).$$

Таким образом, стандартность $H$ равносильна условию $H = Q(\mathcal{L}) + \mathcal{F}(H)$.

Известные перечисления ([8, Следствие 4.3], [9, Теорема 2.1.2], [10], [11]) нормальных подгрупп групп $U\Phi(K)$ над полем $K$, инвариантных относительно диагональных автоморфизмов, редуцируются к перечислению стандартных идеалов $H$ колец Ли $N\Phi(K)$ с фреймом $\mathcal{F}(H) = \sum_{s\in\mathcal{L}} Ke_s$, то есть вида $T(\mathcal{L})$. Тем самым, они редуцируются к перечислению определенных путей в решетках, зависящих от выбора типа алгебры $N\Phi(K)$.

Пусть $K^m$ — пространство строк длины $m$ над $K$. Подпространство $S$ назовем *координатно полным*, если для каждого номера $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ в $S$ существует элемент с ненулевой $i$-той координатой. Ясно, что в алгебре Ли $N\Phi(K)$ любой стандартный идеал $H$ с $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ порядка $m$ записывается в виде

$$H(\mathcal{L},S) = Q(\mathcal{L}) + \{a_1e_{r_1} + a_2e_{r_2} + \cdots + a_me_{r_m} \,|\, (a_1,a_2,\ldots,a_m) \in S\} \tag{2.1.1}$$

для однозначно определенного координатно полного подпространства $S$ в $K^m$.

Число всех координатно полных $t$-мерных подпространств пространства $K^m$ при $K = GF(q)$ обозначим через $\tilde{V}(m,t,q)$, а через $B(\Phi,m)$ — число всех $m$-элементных множеств углов $\mathcal{L}$ в $\Phi^+$. Из биективности соответствия (2.1.1) между стандартными идеалами и парами $(\mathcal{L}, S)$ сразу же вытекает

**Лемма 2.1.1.** *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ ранга $n$ равно*

$$1 + \sum_{m=1}^{n} B(\Phi,m) \sum_{t=1}^{m} \widetilde{V}(m,t,q).$$

В [25] задача **(A)** исследовалась для типа $A_n$. Числа $B(\Phi,m) = B(A_n,m)$ вычислены ранее [9, Теорема 2.1.2] (см. также [8] и [26]):

$$B(A_{n-1},m) = \frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}.$$

Для требуемых в лемме 2.1.1 чисел $\widetilde{V}(m,t,q)$ в [25] найдена формула

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Применяя к ней разработанный [9] метод интегрального представления комбинаторных сумм, включающих $q$-биномиальные коэффициенты, Г. П. Егорычев установил [27, Леммы 3 и 4] рекуррентное соотношение

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t}(q^t-1)^k \times \widetilde{V}(m-1-k,t-1,q) \tag{2.1.2}$$

и следующее утверждение.

**Лемма 2.1.2.** *Справедлива следующая формула*

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t}(-1)^{m-t-k}q^k\binom{m-1}{t+k-1}\begin{bmatrix} t+k-1 \\ k\end{bmatrix}_q. \tag{2.1.3}$$

В [27, Заключение] высказывалась потребность алгебраически-комбинаторного доказательства формул (2.1.2) и (2.1.3). Доказана

**Лемма 2.1.3.** *Справедлива формула*

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \sum_{k=0}^{m-t}(-1)^k\binom{m}{k}\begin{bmatrix} m-k \\ t \end{bmatrix}_q. \tag{2.1.4}$$

*Доказательство.* К формуле (2.1.4) приводят $q$-аналог $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix}\right]_q$ известной комбинаторной формулы и подстановка в (2.1.3) тождества

$$q^k\begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} t+k \\ t \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} t+k-1 \\ t \end{bmatrix}_q.$$

Докажем формулу (2.1.4) для числа $\widetilde{V}(m,t,q)$ всех координатно полных $t$-мерных подпространств в $K^m$ при $K = GF(q)$. Н. Д. Ходюня получает рекуррентную формулу (2.1.2) перенесением схемы перечисления канонических баз в лемме 2.2.1.

Известно, что число всех $t$-мерных подпространств в $K^m$ при $K = GF(q)$ равно $\left[\begin{smallmatrix} m \\ t \end{smallmatrix}\right]_q$. Пусть $U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — подпространство размерности $m-1$ всех векторов в $K^m$ с нулевой $i$-й координатой. Тогда любое подпространство в $U_i$ не является координатно полным в $K^m$, а каждое подпространство в $K^m$, не являющееся координатно полным, лежит хотя бы в одном подпространстве $U_i$.

Обозначим через $\hat{U}_i$ множество всех $t$-мерных подпространств в $U_i$. Формулу (2.1.4) находим, пользуясь формулой включений-исключений,

$$\widetilde{V}(m,t,q) = \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q - \sum_i |\hat{U}_i| + \sum_{i\neq j}|\hat{U}_i\cap\hat{U}_j| - \sum_{i\neq j\neq k}|\hat{U}_i\cap\hat{U}_j\cap\hat{U}_k| + \cdots =$$

$$\begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q - \binom{m}{1}\begin{bmatrix} m-1 \\ t \end{bmatrix}_q + \binom{m}{2}\begin{bmatrix} m-2 \\ t \end{bmatrix}_q + \cdots + (-1)^{m-t}\binom{m}{m-t}\begin{bmatrix} m-(m-t) \\ t \end{bmatrix}_q.$$

□

Леммы 2.1.1 и 2.1.3 вместе с указанной формулой для числа $B(A_{n-1},m)$ завершают доказательство теоремы 5 для типа $A_n$.

Числа $B(\Phi,m)$ исследовались для классических типов в различных ситуациях с использованием метода интегрального представления комбинаторных сумм ([9], [10], [12] и др.). Эти числа указаны явно в выписанном в теореме 5 виде для типов $B_n$ и $C_n$ в [28, Предложение 17], а для типа $D_n$ — в [29, Теорема 1.2].

Учитывая леммы 2.1.1 и 2.1.3, доказательство теоремы 5 завершено. □

Решая проблему 1 из [12], теорема 5 завершает решение задачи **(A)** для классических типов. Для исключительных типов ее решает (Н. Д. Ходюня [32])

**Теорема 6.** *Число стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ исключительного типа равно*

$$G_2:\ q+7; \qquad F_4:\ q^4+3\,q^3+44\,q^2+32\,q+25;$$
$$E_6:\ q^9+3\,q^8+4\,q^7+67\,q^6+69\,q^5+230\,q^4+306\,q^3+94\,q^2+22\,q+37;$$
$$E_7:\ 2\,(q^{12}+q^{11}+3\,q^{10}+32\,q^9+90\,q^8+118\,q^7+394\,q^6+449\,q^5+$$
$$+\,708\,q^4+300\,q^3-79\,q^2+31\,q+32);$$
$$E_8:\ q^{16}+3\,q^{15}+4\,q^{14}+7\,q^{13}+237\,q^{12}+239\,q^{11}+693\,q^{10}+1647\,q^9+3554\,q^8+$$
$$+\,4283\,q^7+5829\,q^6+7055\,q^5+3773\,q^4-2361\,q^3-244\,q^2+239\,q+121.$$

## 2.2 Специальная каноническая база идеала

В связи с проблемой 2 из [12] перечисления всех идеалов алгебр Ли $N\Phi(q)$ классических типов, в [25, § 4] рассматривались специальные канонические базы лиевых идеалов алгебр $NT(n,K)$.

Аналогичные базы подалгебр в алгебрах Ли $N\Phi(K)$ выявляет

**Лемма 2.2.1.** *Пусть $H$ — ненулевая подалгебра алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем $K$ и $\mathcal{L}=\mathcal{L}(H)=\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$. Тогда любую базу пересечения $Q(\mathcal{L})\cap H$ можно дополнить до базы в $H$ элементами*

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}e_{r_j}+\alpha_i',\quad i=1,2,\dots,t,\quad t=\dim_K\ H/H\cap Q(\mathcal{L}), \tag{2.2.1}$$

*где $||a_{ij}||$ — $t\times m$-матрица ранга $t$ над $K$ $(t\leqslant m)$ и $\alpha_i'\in Q(\mathcal{L})$. Кроме того, при фиксированном упорядочении $\mathcal{L}$ для однозначно определенных номеров $j_1=1<j_2<\dots<j_t\leqslant m$ можно считать*

$$a_{i,j_i}=1\ (1\leqslant i\leqslant t),\quad a_{ik}=0\ (k<j_i),\quad a_{i,j_k}=0,\ 1\leqslant i<k\leqslant t. \tag{2.2.2}$$

*Доказательство.* Ясно, что $Q(\mathcal{L}) + H = Q(\mathcal{L}) + \mathcal{F}(H)$ есть стандартный идеал в $N\Phi(K)$, имеющий вид $H(\mathcal{L},S)$ из (2.1.1). Элементы $\alpha_i \in H$ и равенства (2.2.2) получаем, используя известный изоморфизм

$$(H + Q(\mathcal{L}))/Q(\mathcal{L}) \simeq H/H \cap Q(\mathcal{L}).$$

Уточним матрицу $||a_{ij}||$ из (2.2.1). Очевидно, базисный элемент $\alpha_1 \in H$ всегда можно выбрать так, что $a_{11} = 1$; положим $j_1 = 1$ и обозначим через $H_1$ подалгебру элементов из $H$ с нулевым коэффициентом при $e_{r_1}$. Если $\alpha_i$, $j_i$ и $H_i$ уже определены при $1 \leqslant i < t$, то элемент $\alpha_{i+1} \in H_i$ выбираем с наименьшим возможным номером $j_{i+1}$ первой ненулевой координаты; можно считать $a_{i+1,k} = 1$ при $k = j_{i+1}$. Через $H_{i+1}$ обозначаем подалгебру элементов из $H_i$ с нулевым коэффициентом при $e_{r_k}$, $k = j_{i+1}$.

Продолжая аналогично, на $t$-м шаге выбираем в $H_{t-1}$ элемент $\alpha_t$ с коэффициентом $a_{t,j_t} = 1$ и $H_t = H \cap Q(\mathcal{L})$. Элементарные преобразования дают оставшиеся в (2.2.2) равенства $a_{i,j_k} = 0$ последовательно для $i = 1,2, \cdots, t-1$ и $i < k \leqslant t$. Это завершает доказательство леммы. □

Уточним базу (2.2.1) для нестандартного идеала $H$ обертывающей алгебры $RD_n(K)$. По теореме 3, $Q(r) \subset H$ для всех его углов $r$, кроме двух симметричных углов $s$ и $\bar{s}$. Простой корень $p \neq \bar{p}$, инцидентный с $s$, и простой корень $p_0 = \bar{p}_0$ такой, что $p + p_0 \in \Phi^+$, определены однозначно, причем $T(s_0 + \bar{p}) \subset H$, где полагаем $s_0 = s + p_0$ при $s = p$ и $s_0 = s$ при $s \neq p$.

Если неинцидентные с $s$ и $\bar{s}$ простые корни $p_j = \bar{p}_j$ выберем так, что

$$s_i = s + p_1 + p_2 + \cdots + p_i \in \Phi^+, \quad 1 \leqslant i < n - ht(s), \tag{2.2.3}$$

то $Q(s_i) \subseteq H$ при $i = n - 1 - ht(s)$. Поэтому существует наименьший номер $k$ с условиями $Q(s_k) \subseteq H$ и $1 \leqslant k \leqslant n - 1 - ht(s)$. Записывая $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \{r_1 = s, r_2 = \bar{s}, r_3, \ldots, r_m\} \quad (2 \leqslant m = |\mathcal{L}| < n), \tag{2.2.4}$$

при $3 \leqslant j \leqslant m$ имеем $\bar{r}_j = r_j$. Сопоставим $H$, по лемме 2.2.1, $t \times m$-матрицу $||a_{ij}||$ над $K$ ранга $t$ $(1 \leqslant t < m)$ с условиями (2.2.2). Тогда $a_{12} = c \neq 0$ и

$$H \cap Q(\mathcal{L}) = T(s_0 + \bar{p}) + Q(s_k) + Q(\bar{s}_k) + \sum_{j=1}^{k} K(e_{s_j} + ce_{\bar{s}_j}) + \sum_{j=3}^{m} Q(r_j)$$

(последнее слагаемое при $m = 2$ отбрасываем). Упрощая в (2.2.1) элементы $\alpha_i$ по модулю $H \cap Q(\mathcal{L})$, находим $d_i \in K$ такие, что $\alpha_i' = d_i e_{s_k}$, $i = 1,2,\dots,t$.

Таким образом, идеал $H$ представляется в виде

$$Id\,\{\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||, c, d_1, \dots d_t\} \coloneqq \sum_{i=1}^{t} K(d_i e_{s_k} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{r_j}) + \tag{2.2.5}$$

$$+T(s_0 + \bar{p}) + Q(s_k) + Q(\bar{s}_k) + \sum_{j=1}^{k} K(e_{s_j} + c e_{\bar{s}_j}) + \sum_{j=3}^{m} Q(r_j),$$

где корни $s_i$ определены в (2.2.3). Его однозначно характеризуют множество углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ вида (2.2.4), параметры $k, t$ с условиями

$$1 \leqslant k \leqslant n - 1 - ht(s), \quad 1 \leqslant t = \dim_K \; H/H \cap Q(\mathcal{L}) < |\mathcal{L}| = m < n,$$

элементы $c \neq 0$, $d_1, \dots, d_t$ из $K$ и $t \times m$-матрица $||a_{ij}||$ над $K$ ранга $t$ с условиями $a_{12} = c$ и (2.2.2). Тем самым, доказана

**Теорема 7.** *В обертывающей алгебре $RD_n(K)$ всякий нестандартный идеал $H$ имеет множество углов $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ вида* (2.2.4) *и представляется как идеал* (2.2.5)*, однозначно характеризуемый набором $\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||, c, d_1, \dots d_t$.*

## 2.3 Метод коэффициентов и перечисление идеалов алгебры $RD_n(q)$

Теорема 5, решая проблему 1 из [12] о числе всех стандартных идеалов алгебры Ли $N\Phi(q)$ классического типа над полем $K = GF(q)$, дает и число всех идеалов ее обертывающей алгебры $R_\Phi(q)$, когда она стандартна.

В силу теорем 5 и 3, перечисление идеалов любой стандартной обёртывающей алгебры из предложения 1 классических типов $A_n$, $B_n$ и $C_n$ завершено. Остается перечислить нестандартные идеалы обёртывающей алгебры $RD_n(q)$.

Основной в этом параграфе является

**Теорема 8.** *Число нестандартных идеалов алгебры $RD_n(q)$ равно*

$$\sum_{m=2}^{n-1} \binom{n-2}{m-2} \binom{n-1}{m} \sum_{t=1}^{m-1} q^t (q-1) \sum_{j=0}^{m-1-t} (-1)^j \binom{m-1}{j} \begin{bmatrix} m-1-j \\ t \end{bmatrix}_q .$$

*Доказательство.* Нестандартные идеалы алгебры $RD_n(q)$, по теореме 7, исчерпываются идеалами вида (2.2.5), которые характеризуются однозначно набором $\mathcal{L}, k, t, ||a_{ij}||,\ c, d_1, \ldots d_t$. Записывая $\mathcal{L}$ как в (2.2.4) в матричном представлении, считаем

$$e_s = e_{i1}, \quad e_{\bar{s}} = e_{i,-1}, \quad e_{s_k} = e_{i+k,1} \quad (2 \leqslant i < n-k).$$

Через $B(m,n,i,k)$ обозначим число всевозможных $(m+2)$-элементных множеств углов вида (2.2.4), у которых два угла соответствуют базисным элементам $e_s$ и $e_{\bar{s}}$ и нет углов в строках с номерами $j$, $i < j \leqslant k$. Нам потребуется

**Лемма 2.3.1.** *Число нестандартных идеалов алгебры $RD_n(q)$ равно*

$$\sum_{m=2}^{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} B(m,n,i,k) \sum_{t=1}^{m-1} q^t(q-1)\widetilde{V}(m-1,t,q). \tag{2.3.1}$$

*Доказательство.* При фиксированных $|\mathcal{L}| = m$ и $k$ число способов выбора параметра $c \neq 0$ в $K = GF(q)$ и наборов $(d_1, \ldots, d_t)$ над $K$ равно $q^t(q-1)$. Согласно доказательству леммы 2.2.1, число возможностей выбора матриц $||a_{ij}||$, требуемых для канонических базисов идеалов, совпадает с $\widetilde{V}(m-1,t,q)$ при любых $t,m$. Отсюда для числа нестандартных идеалов алгебры $RD_n(q)$ получаем формулу (2.3.1). □

Второе и третье суммирования в комбинаторной сумме (2.3.1) проведем с помощью метода коэффициентов. Напомним некоторые понятия.

Пусть $L$ — множество формальных степенных рядов Лорана над полем $\mathbb{C}$, содержащих конечное число членов с отрицательными степенями. По определению, целое число $k$ есть *порядок* монома $c_k w^k \neq 0$ и $L_k$ — множество рядов Лорана из $L$, у которых наименьший порядок мономов равен $k$. Под *оператором формального вычета* ряда $C(w) = \sum_k c_k w^k$ из $L$ полагают

$$\operatorname*{res}_w C(w) := c_{-1}.$$

Оператор формального вычета res (контурный интеграл) имеет ряд свойств (см., например, [9]). Из них наиболее часто используются следующие два.

**Правило линейности.** Для любых $A(w)$ и $B(w)$ из $L$ и $a,b \in \mathbb{C}$ имеем

$$a \operatorname*{res}_w A(w) + b \operatorname*{res}_w B(w) = \operatorname*{res}_w \{aA(w) + bB(w)\}.$$

**Правило подстановки.** Если либо $f \in L_m$ $(m = 1,2,\dots)$ и $A(w) \in L$, либо $A(w)$ — полином и $f(w) \in L$, то

$$\sum_k (f(w))^k \operatorname*{res}_z\{A(z)z^{-k-1}\} = A(f(w)).$$

Если $C(w) = \sum_k c_k w^k$ из $L$ есть производящая функция для последовательности $\{c_k\}$, то $c_k = \operatorname{res}_w C(w)w^{-k-1}$ для любого $k$. Когда $n,k = 0,1,2,\dots$, приходим к биномиальным коэффициентам

$$\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_w\{\frac{(1+w)^n}{w^{k+1}}\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\theta} \frac{(1+w)^n}{w^{k+1}}\,dw,\ \theta > 0, \tag{2.3.2}$$

$$\binom{-n}{k} := \binom{n+k-1}{k} = \operatorname*{res}_w\{\frac{(1-w)^{-n}}{w^{k+1}}\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\theta} \frac{(1-w)^{-n}}{w^{k+1}}\,dw,\ 0 < \theta < 1.$$

В доказательстве теоремы 8 основной является

**Лемма 2.3.2.** *Справедлива следующая формула суммирования*

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} B(m,n,i,k) = \binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m}.$$

*Доказательство.* Обозначим через $B^{(-)}(u,l)$ число $l$-элементных множеств углов в $D_n^+$-матрице таких, что последний угол расположен левее $(-1)$-го столбца и выше $(u+3)$-й строки, а через $B^{(+)}(u,n-u-1,l)$ — число $l$-элементных множеств углов таких, что первый угол расположен правее 1-го столбца и ниже $(n-u)$-й строки. В этих обозначениях

$$B(m,n,i,k) = \sum_{l=0}^{m} B^{(-)}(i-3,l)B^{(+)}(n-i-k,i+k-1,m-2-l). \tag{2.3.3}$$

Применяя [30, Теорема 10.14.1], находим

$$B^{(+)}(u,v,l) = \binom{u+v}{l}\binom{u}{l} - \binom{u+v-1}{l-1}\binom{u+1}{l+1}. \tag{2.3.4}$$

Несложная индукция по $v$ дает также равенство

$$B^{(-)}(u,v) = \binom{u+1}{2v}. \tag{2.3.5}$$

В силу (2.3.3)-(2.3.5), второе и третье суммирования в (2.3.1) приводят к 3-кратной комбинаторной сумме с биномиальными коэффициентами. При этом, как обычно, вычисления проводим с помощью свойств оператора res, путем последовательного нахождения интегрального представления рассматриваемых выражений и вычисления полученных интегралов. В соответствии с [30, теорема 10.14.1] находим представление чисел $B^{+}(u,v,l)$. Пользуясь интегральной формулой (2.3.2), для каждого из биномиальных коэффициентов находим

$$B^{(+)}(u,v,l) = \binom{u+v}{l}\binom{u}{l} - \binom{u+v-1}{l-1}\binom{u+1}{l+1} =$$
$$= \operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{u+v}}{z^{l+1}}\frac{(1+w)^{u}}{w^{l+1}}\right\} - \operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{u+v-1}}{z^{l}}\frac{(1+w)^{u+1}}{w^{(l+1)+1}}\right\} =$$
$$= \operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{u+v-1}(1+w)^{u}}{z^{l+2}}(w-z)\right\}$$

и, тем самым,

$$\begin{gathered} B^{(+)}(n-i-k, i+k-1, m-2-l) := \\ = \operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}}{z^{(m-2-l)+1}w^{(m-1-l)+1}}(w-z)\right\}. \end{gathered} \tag{2.3.6}$$

Отсюда, в силу (2.3.3)-(2.3.5), получаем

$$S := \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} B(m,n,i,k) =$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\sum_{l=0}^{m} B^{(-)}(i-3,l)B^{(+)}(n-i-k, i+k-1, m-2-l) =$$

(занесение знака суммы за знак $\mathrm{res}_{z,w}$ и добавление нулевых слагаемых)

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}} \times \left[\sum_{l=0}^{m}(zw)^{l}\binom{i-2}{2l}\right]\right\} =$$

(суммирование в квадратных скобках и формула геометрической прогрессии)

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-i-k}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}} \times \frac{(1+\sqrt{zw})^{i-2}+(1-\sqrt{zw})^{i-2}}{2}\right\} =$$
$$\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-2}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times$$
$$\left[\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{zw}}{1+w}\right)^{i-2} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{zw}}{1+w}\right)^{i-2}\right] \times \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+w}\right)^{k}\} =$$

($|w| \gg 1$, $|(1+\sqrt{zw})/(1+w)| < 1$, $|(1-\sqrt{zw})/(1+w)| < 1$, суммирование по индексам $i$ и $k$, формула геометрической прогрессии)

$$\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-2}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times$$
$$\left[1/(1-\frac{1+\sqrt{zw}}{1+w})+1/(1-\frac{1-\sqrt{zw}}{1+w})\right]\times\frac{1}{1+w}\times\frac{1}{1-\frac{1}{1+w}}\}=$$
$$\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times\left[\frac{1}{w-\sqrt{zw}}+\frac{1}{w+\sqrt{zw}}\right]\times\frac{1}{w}\right\}=$$
$$\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}(w-z)}{z^{(m-2)+1}w^{(m-1)+1}}\times\frac{2w}{w^2-zw}\times\frac{1}{w}\right\}=$$
$$\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}(1+w)^{n-1}}{z^{(m-2)+1}w^{m+1}}\right\}=$$
$$\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+z)^{n-2}}{z^{(m-2)+1}}\right\}\times\operatorname*{res}_{z,w}\left\{\frac{(1+w)^{n-1}}{w^{m+1}}\right\}:=\binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m}.$$

Тем самым, доказательство леммы 2.3.2 завершается. □

Применяя к лемме 2.3.1 леммы 2.1.3 и 2.3.2 получаем утверждение теоремы 8. □

**Замечание 4.** В отличие от идеалов алгебры $RD_n(K)$, для идеалов $H$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ классического типа возрастает число пар $p$-связанных углов $r,s$ в $H$. Решение проблемы 2 из [12] сложнее даже для типа $A_n$; с возрастанием ранга $\Phi$ может неограниченно возрастать и число углов, $p$-связанных не с одним, а с двумя углами в $H$.

## Наиболее употребительные обозначения

| | |
|---|---|
| $\Phi^+$ | система положительных корней |
| $\Pi$ | база системы корней |
| $\rho$ | максимальный в $\Phi^+$ корень |
| $ht(r)$ | высота корня $r$ |
| h($\Phi$) | Число Кокстера системы $\Phi$ (равно $ht(\rho) + 1$) |

**Список литературы**


1. *Albert*, *A. A.* Power-Associative Rings / A. A. Albert // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 3. — P. 552—593.
2. *Myung*, *H. C.* Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebras / H. C. Myung // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 167, no. 1. — P. 79—88.
3. *Левчук*, *В. М.* Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы / В. М. Левчук // Докл. Акад. наук. — 2018. — Т. 478, № 2. — С. 137—140.
4. *Carter*, *R.* Simple Groups of Lie Type / R. Carter. — New York : Wiley and Sons, 1972. — 352 p.
5. *Левчук*, *В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В. М. Левчук // Алгебра и Логика. — 1990. — Т. 29, № 3. — С. 315—338.
6. *Levchuk*, *V. M.* The Normal Structure of Unipotent Subgroup in Groups of Lie Type and Related Questions / V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova // Doklady Math. — 2008. — Vol. 77, no. 2. — P. 595—598.
7. *Levchuk*, *V. M.* Extremal and Maximal Normal Abelian Subgroups of a Maximal Unipotent Subgroup in Groups of Lie Type / V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova // Journal of Algebra. — 2012. — Vol. 349, no. 1. — P. 98—116.
8. *Левчук*, *В. М.* Подгруппы унитреугольной группы / В. М. Левчук // Изв.~АН СССР, сер.~матем. — 1974. — Т. 38, № 6. — С. 1202—1220.
9. *Егорычев*, *Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев. — Новосибирск : Наука, 1977. — 285 с.
10. *Egorychev*, *G. P.* Enumeration of Characteristic Subgroups of Unipotent Lie-type Groups / G. P. Egorychev, V. M. Levchuk // Algebra. — Berlin : Walter de Gruyter, 1996. — P. 49—62.
11. *Sommers*, *E.* B-Stable Ideals in the Nilradical of a Borel Subalgebra / E. Sommers // Canad. Math. Bull. — 2005. — Vol. 48, no. 3. — P. 460—472.
12. *Egorychev*, *G. P.* Enumeration in the Chevalley Algebras / G. P. Egorychev, V. M. Levchuk // ACM SIGSAM Bulletin. — 2001. — Vol. 35, no. 2. — P. 20—34.

13. *Dubish*, *R.* On Total Nilpotent Algebras / R. Dubish, S. Perlis // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73, no. 2. — P. 439—452.

14. *Левчук*, *В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами / В. М. Левчук // Алгебра и Логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 558—579.

15. *Бурбаки*, *Н.* Группы и алгебры Ли (Главы IV-VI) / Н. Бурбаки. — М. : Мир, 1972.

16. *Egorychev*, *G. P.* Method of Coefficients: An Algebraic Characterization and Recent Applications / G. P. Egorychev // Math. Proc. of the Waterloo Workshop in Comp. Alg. 2008, Devoted to the 70th Birthday G. Egorychev. — Springer, 2009. — (Advances and Combinatorics).

17. *Леонтьев*, *В. К.* Избранные проблемы комбинаторного анализа / В. К. Леонтьев. — М. : МГТУ, 2001. — 179 с.

18. *Riedel*, *M.* Egorychev Method: A Hidden Treasure / M. Riedel, H. Mahmoud // La Matematica. — 2023. — Vol. 2. — P. 893—933.

19. *Egorychev*, *G. P.* Enumeration of Ideals of Some Nilpotent Matrix Rings / G. P. Egorychev, K. Kuzucuoglu, V. M. Levchuk // J.~Algebra and Its Appl. — 2013. — Vol. 12, no. 1. — P. 1250140-1—1250140-11.

20. *Капланский*, *И.* Алгебры Ли и локально компактные группы / И. Капланский. — М. : Мир, 1974. — 148 с.

21. *Курош*, *А. Г.* Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. — 2-е изд. — М. : Наука, 1973. — 400 с.

22. *Chevalley*, *C.* Sur Certain Groups Simples / C. Chevalley // Tohoku Math. J. — 1955. — Vol. 7, no. 1/2. — P. 14—66.

23. *Serre*, *J.-P.* Algèbres de Lie Semi-Simples Complexes / J.-P. Serre. — New York : W. A. Benjamin, 1966.

24. *Levchuk*, *V. M.* Parabolic Subgroups of Some ABA-groups / V. M. Levchuk // Matem. zametki. — 1982. — Vol. 31, no. 4. — P. 509—525.

25. *Кривоколеско*, *В. П.* Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр / В. П. Кривоколеско, В. М. Левчук // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 166—171.

26. *Толасов*, *Б. А.* О числе нормальных делителей треугольной группы, содержащихся в унитреугольной подгруппе / Б. А. Толасов // Алгебра и теория чисел, Нальчик. — 1977. — № 2. — С. 122—126.

27. *Егорычев*, *Г. П.* Перечисление собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над полем $GF(q)$ / Г. П. Егорычев // Известия ИркГУ, сер. матем. — 2016. — Т. 17, № 3. — С. 12—22.

28. *Reiner*, *V.* Non-Crossing Partitions for Classical Reflection Groups / V. Reiner // Discrete Mathematics. — 1997. — Vol. 177. — P. 195—222.

29. *Athanasiadis*, *C. A.* Noncrossing Partitions for the Group $D_n$ / C. A. Athanasiadis, V. Reiner // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 2004. — Vol. 18, no. 2. — P. 397—417.

30. *Krattenhaler*, *C.* Lattice Path Enumeration / C. Krattenhaler // Handbook of Enumerative Combinatorics / ed. by M. Bóna. — Boca Raton, FL : CRC Press, 2015. — P. 589—678. — (Discrete Mathematics and Its Applications).

**Публикации автора по теме диссертации**

31. *Левчук*, *В. М.* Неассоциативные обертывающие алгебр Шевалле / В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова, Н. Д. Ходюня // Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 3. — С. 91—100.

32. *Khodyunya*, *N. D.* Enumerations of Ideals in Niltriangular Subalgebra of Chevalley Algebras / N. D. Khodyunya // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2018. — Vol. 11, no. 3. — P. 271—277. — (Mathematics & Physics).

33. *Khodyunya*, *N. D.* Ideals of Niltriangular Lie Algebras of Exceptional Type / N. D. Khodyunya // Proceedings of the International Conference (Mathematics in the Modern World). — Novosibirsk, 2017. — P. 104.