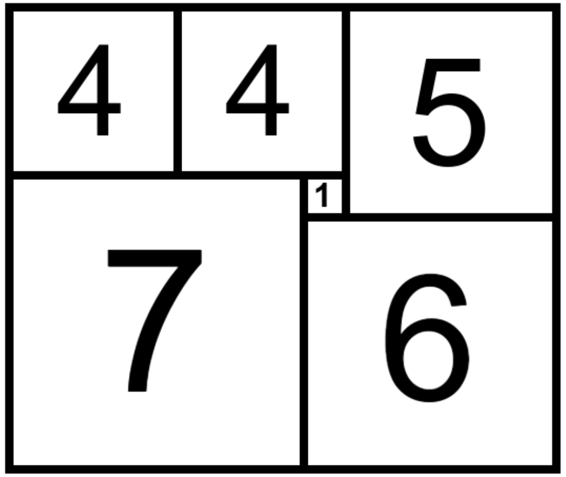
探討不同演算法於矩形中分割方形之應用

編號：190005

關鍵詞：矩形分割、枚舉、線段樹

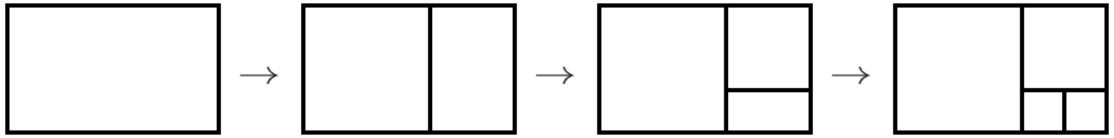
研究目標

- 問題：將邊長為正整數的矩形分割為數個邊長亦為正整數的正方形，使得矩形恰好被這些正方形分割完。 求最佳的分割方法至少需要分割出多少個正方形。
- 目標：撰寫能夠解決矩形中分割正方形的程式，並探討不同演算法間的差異性。

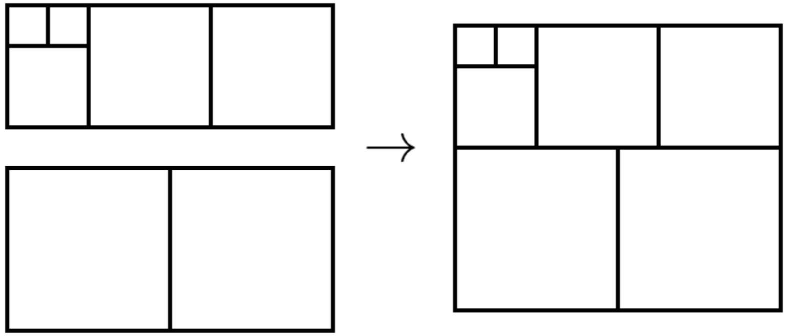


研究方法：輾轉相除法與動態規劃

- 輾轉相除法：$f(n,m) = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + f(m, n \bmod m)$



- 動態規劃：$f(n,m) = \begin{cases} 1, n = m \\ \min(\min_{1\le i<n}(f(i,m) + f(n-i,m)), \min_{1\le j<m}(f(n,j) + f(n,m-j))), n \ne m \end{cases}$



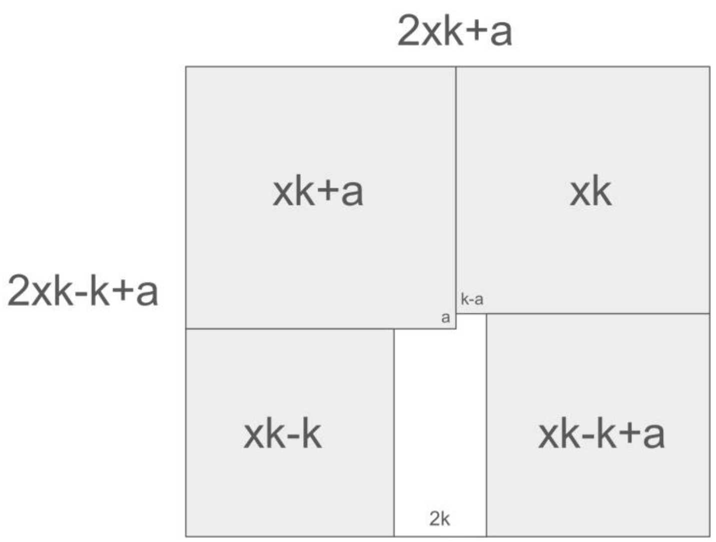
研究方法：四角分割

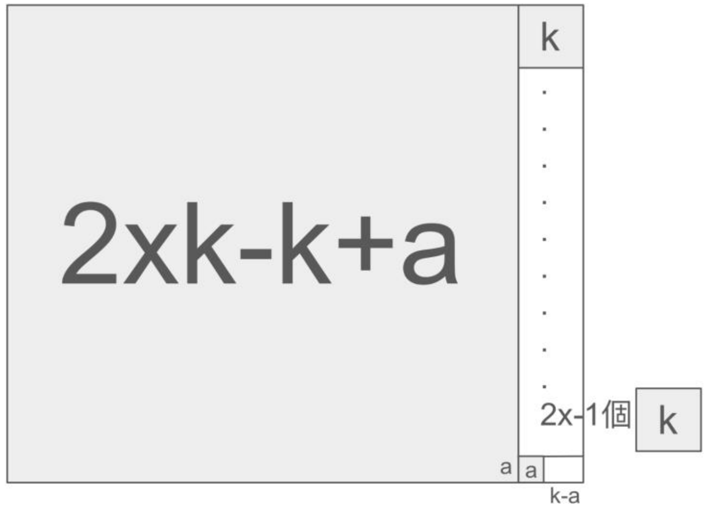
$$
\begin{aligned}
G(2xk+a, 2xk-k+a) &= 4 + F(xk-k, 2k) + F(k-a, a) \\
&= 4 + F(x-1, 2) + F(k-a, a) \\
&\leq 4 + \frac{x-2}{2} + 2 + F(k-a, a) \\
&= 5 + \frac{x}{2} + F(k-a, a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(2xk+a, 2xk-k+a) &= 1 + 2x - 1 + 1 + F(k-a, a) \\
&= 2x + 1 + F(k-a, a)
\end{aligned}
$$

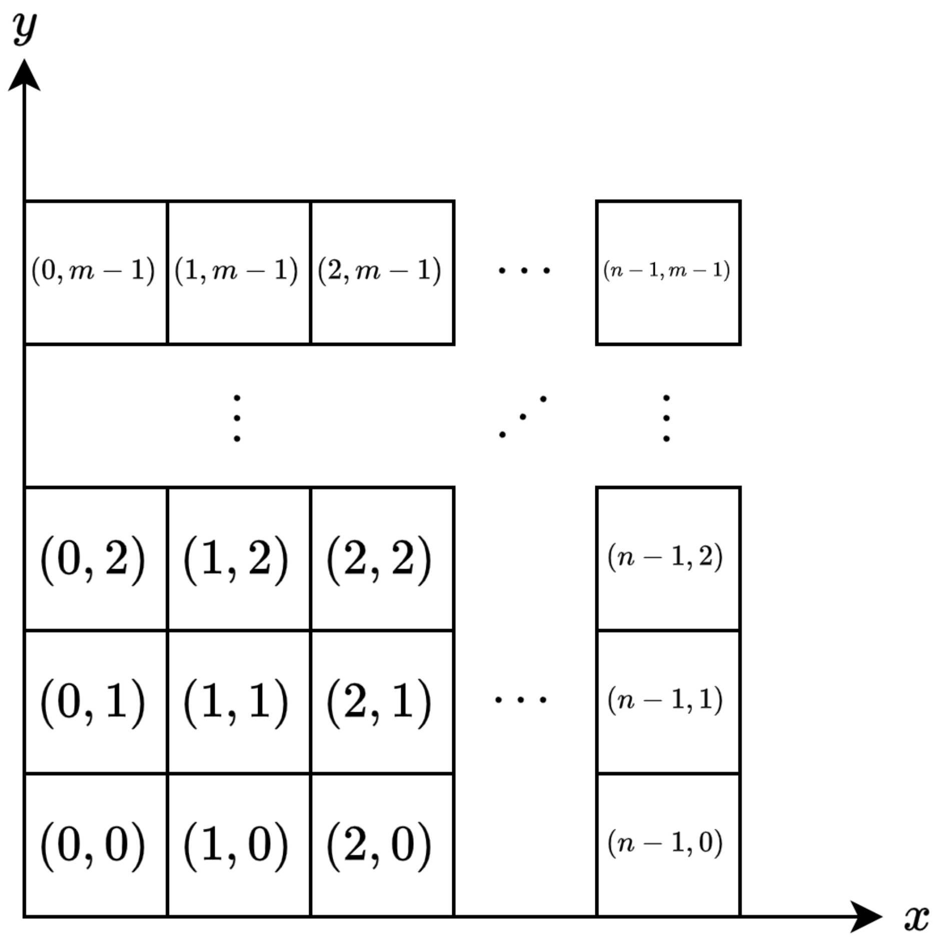
$$5 + \frac{x}{2} + F(k-a, a) < 2x + 1 + F(k-a, a) \Rightarrow x > \frac{8}{3}$$

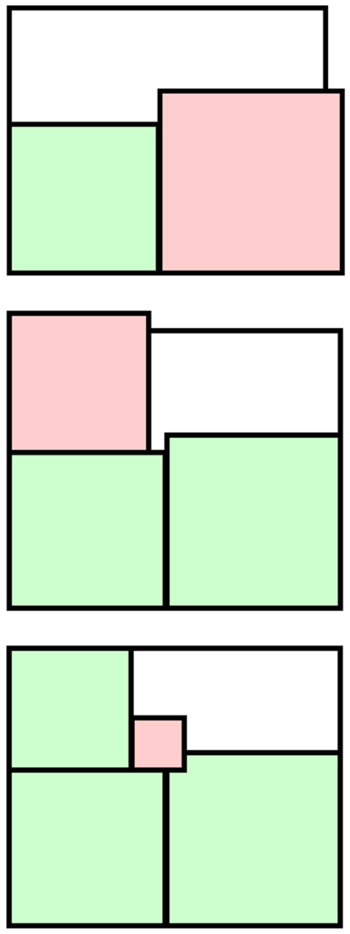
$x \geq 3$ 時 $G(2xk+a, 2xk-k+a) < F(2xk+a, 2xk-k+a)$





研究方法：枚舉





研究方法：枚舉

二維枚舉

- 在二維陣列 a 中紀錄矩形中的正方形
- 選定正方形的範圍並填入矩形邊長

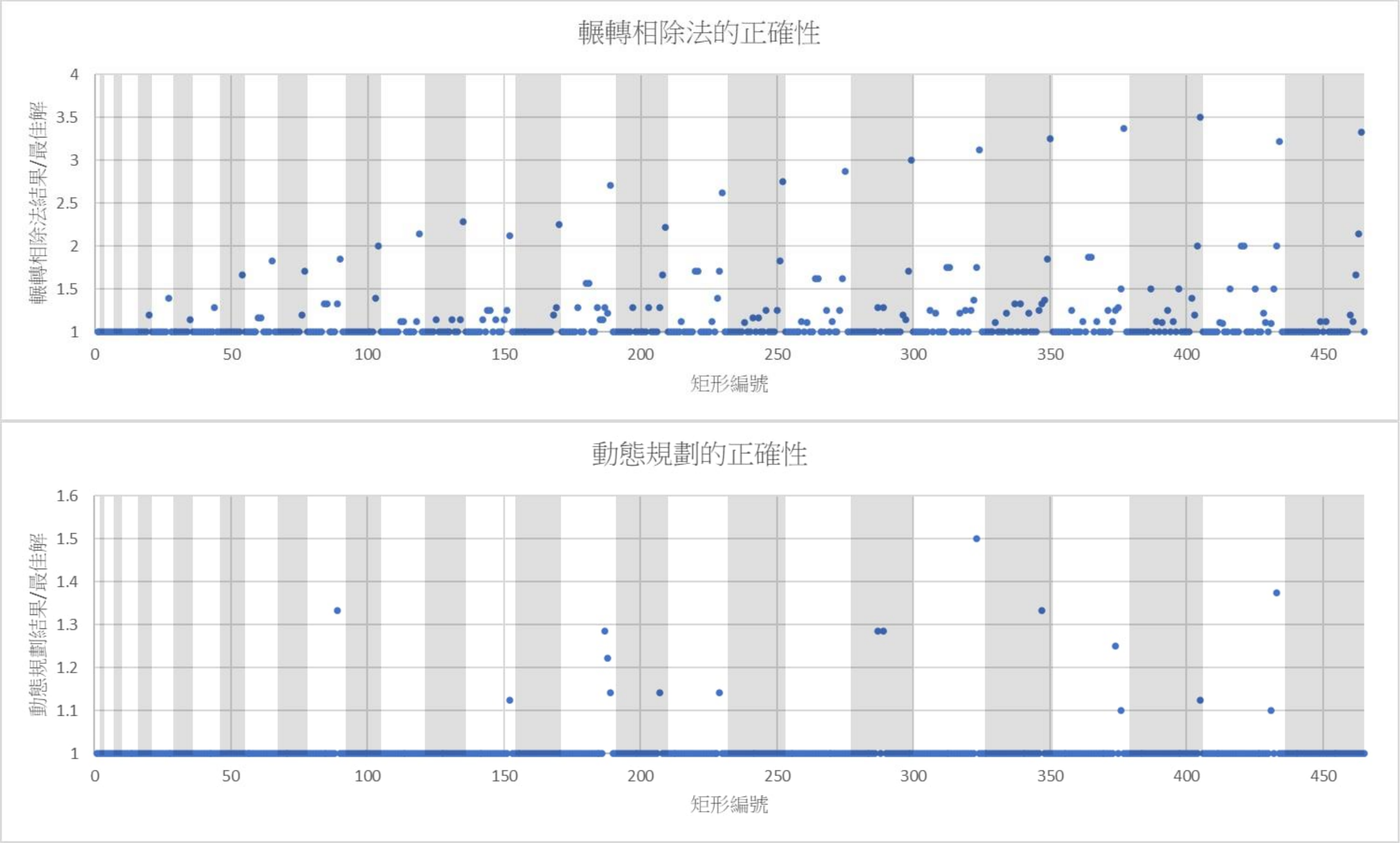
一維枚舉

- 在一維陣列 a' 中紀錄 x 座標對應的高度
- 選定一平坦區間並增加正方形的邊長

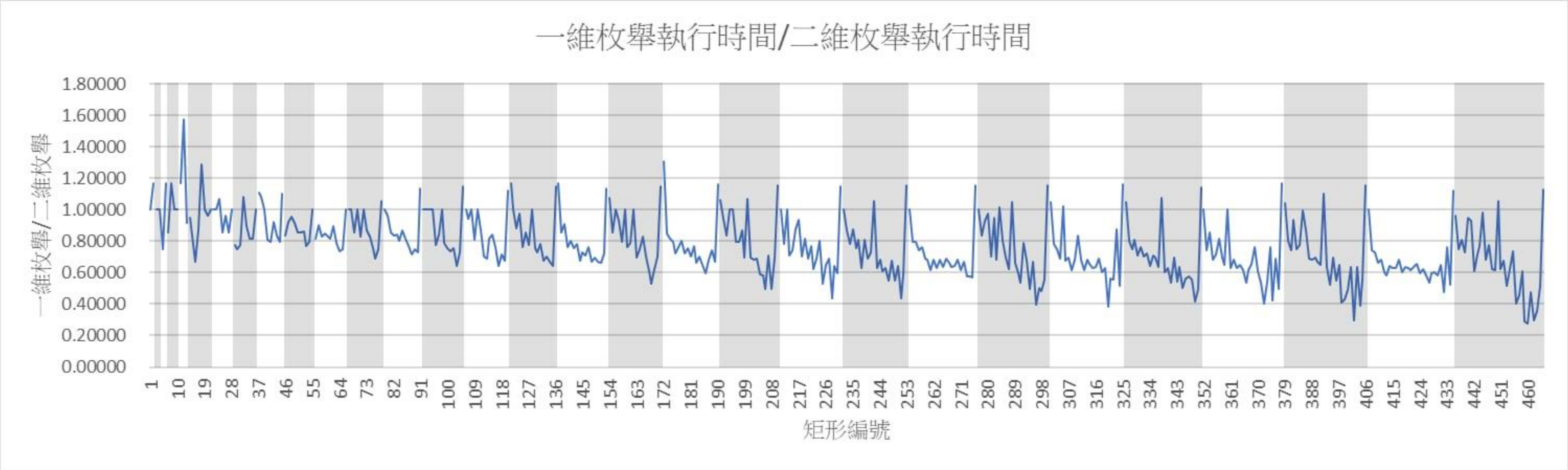
線段樹

- 將一維枚舉的過程以線段樹優化

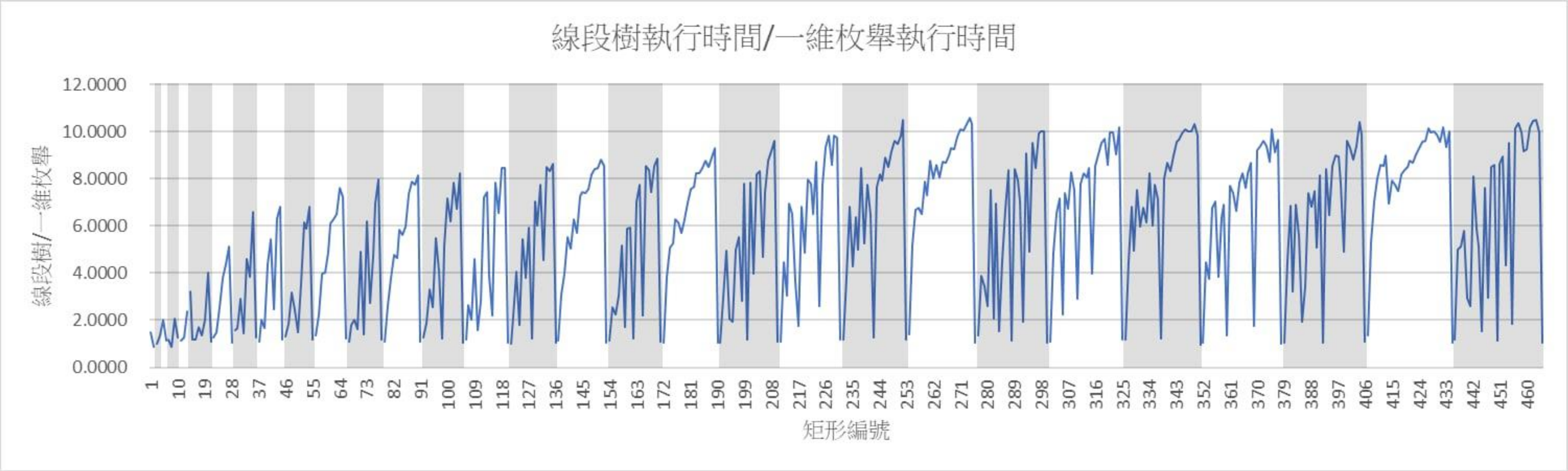
目前結果：輾轉相除法與動態規劃的正確性

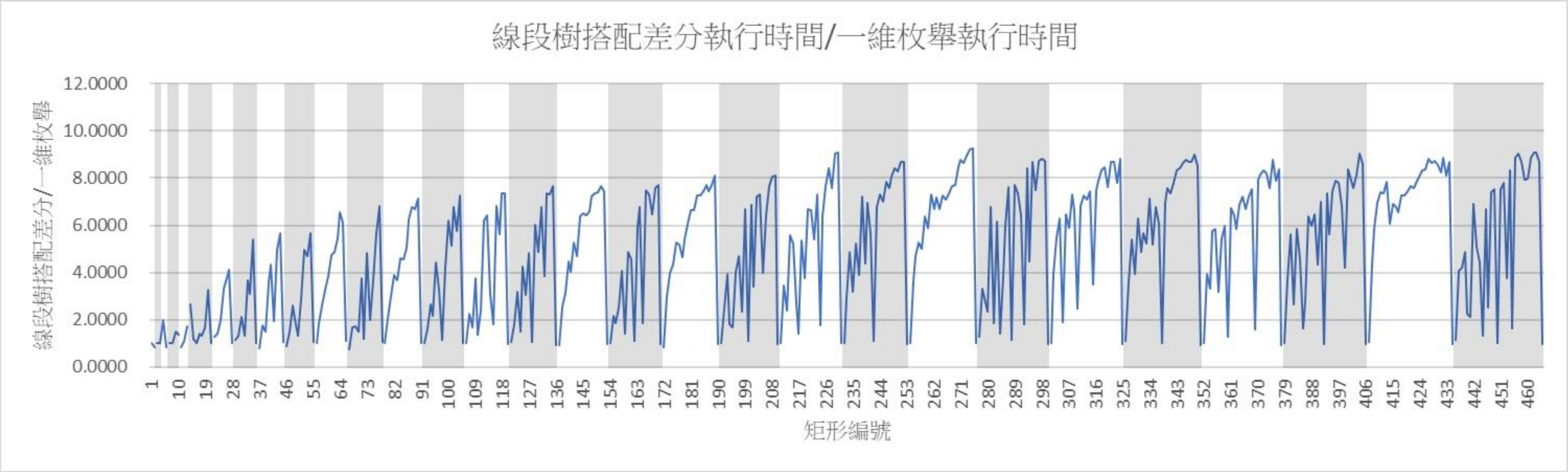


目前結果：程式的執行效率

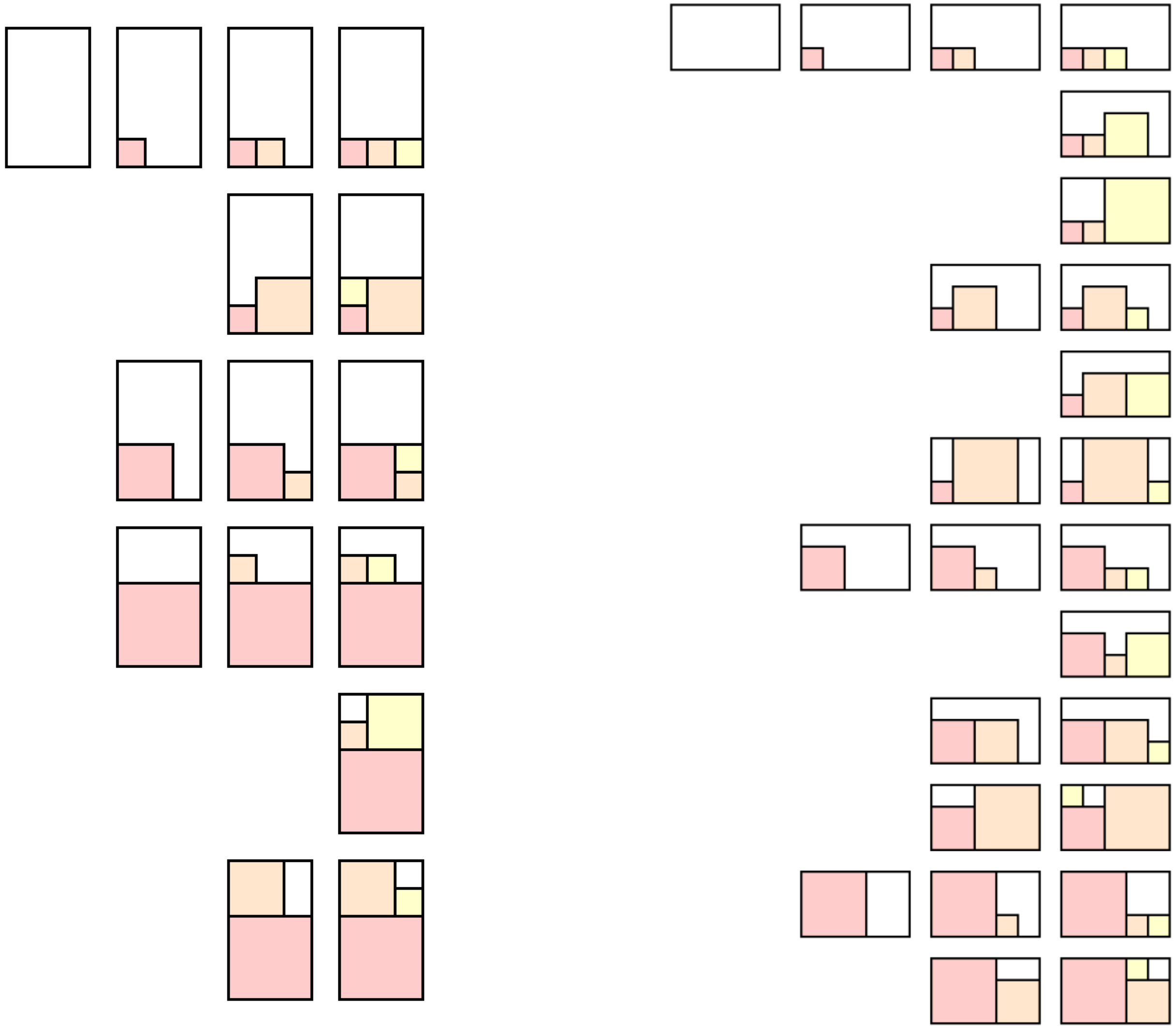


目前結果：程式的執行效率





目前結果：以長短邊為 x 軸執行效率比較



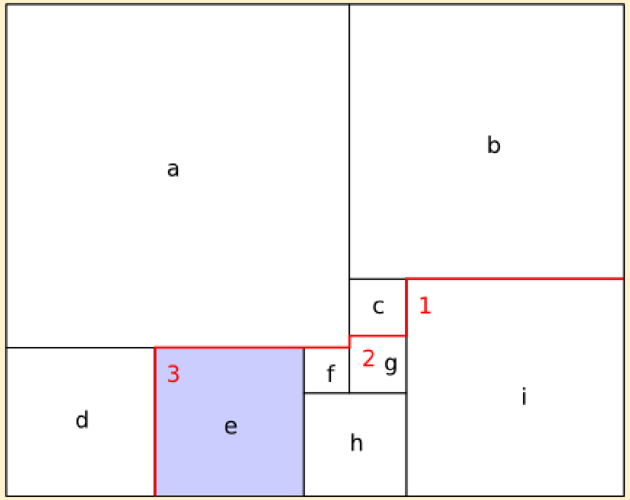
研究進度與預期結果

- 期初研習營前：
  - 四角分割法實作（已完成）
  - 山谷演算法實作
  - 階梯演算法實作
- 期中研習營前：
  - 將山谷演算法結合階梯演算法
  - 實作影像風格化程式
- 期末研習營前：
  - 完成撰寫科展報告
  - 準備科展報名資料

預期困難度

實作複雜度較低的枚舉方法時需要擁有對圖形的高度想像才能設計切割流程與驗證正確性，進而較不易實作。

Bertram Felgenhauer 的研究



→ 1:30, 1:24, 1:5, 3:13, 3:13, 3:4, 2:5, 2:9, 11:9

解決辦法

- 拆解演算法的執行步驟
- 以較小的矩形觀察規律

結論

- 動態規劃在此問題中是一個兼具正確性與效率的方法
- 一維枚舉是可以得到最佳解程式中效率最高的方法
- 以短邊為 x 軸在一般的情況下會較以長邊為 x 軸執行效率更高