手寫作業01　黃楷竣

1、

假設不存在兩人認識的人數一樣多

則這 n 個人分別認識 0、1、2、…、$n-1$ 個人

因為任意兩人可能互相認識或互相不認識

又認識 $n-1$ 個人的人認識所有其他人

因此其他人必定至少認識 1 人

與認識 0 個人的人矛盾

因此得證，必定存在兩個人認識的人數一樣多

2、

當 $n=3$ 時，$3^3+4^3=91<5^3=125$ 成立

設 $n=k$ 時，$3^k+4^k<5^k$ 成立

則 $n=k+1$ 時，$3^{k+1}+4^{k+1}=3\times3^k+4\times4^k$，

$3\times3^k+4\times4^k<4\times3^k+4\times4^k=4(3^k+4^k)$，

$4(3^k+4^k)<4\times5^k$，

$4(5^k)<5\times5^k=5^{k+1}$

$\therefore 3^{k+1}+4^{k+1}<5^{k+1}$ 亦成立

以數學歸納法得證對於正整數 $n\geq3$，滿足 $3^n+4^n<5^n$

3、

當 $n=4$ 時，$3^4=81>4^3=64$ 成立

設 $n=k$ 時，$3^k>k^3$

則 $n=k+1$ 時，$3^{k+1}=3\times3^k>3k^3$

$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$

證：$k\geq4$ 時 $3k^3>k^3+3k^2+3k+1$

$2k^3-3k^2-3k+2$

$=(2k-1)(k-1)(k+2)$

$k=4$時 $(2k-1)(k-1)(k+2)=126>3$

又 $2k-1$、$k-1$、$k+2$ 皆隨 k 增加而增加

因此 $k\geq 4$時 $(2k-1)(k-1)(k+2)>3$

$\Rightarrow 2k^3-3k^2-3k+2-3+k^3>0+k^3$

$\Rightarrow 3k^3>k^3+3k^2+3k+1$ 成立

則 $3^{k+1}>3k^3>k^3+3k^2+3k+1=(k+1)^3$

$\therefore 3^{k+1}>(k+1)^3$ 亦成立

以數學歸納法得證對於正整數 $n\geq 4$，滿足 $3^n>n^3$

4.

令 $\langle c_i \rangle$ 為正整數 i 的所有操作得分總和

當 $n=1$ 時不需操作，即操作得分總和為 0，$c_1=\frac{1^2-1}{2}=0$ 成立

設對於正整數 $i<k$，滿足 $c_i=\frac{i^2-i}{2}$

則 $n=k$ 時，$c_k=c_a+c_b+ab$

$$=\frac{a^2-a}{2}+\frac{b^2-b}{2}+ab$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a-b}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^2-(a+b)}{2}$$

$$=\frac{k^2-k}{2}$$ 亦成立

以數學歸納法得證對於正整數 n，滿足所有操作得分總和為 $\frac{n^2-n}{2}$

5.

對於所有 $\langle a_n \rangle$ 可分為兩種情況討論

(1) $\langle a_n \rangle$ 的每一項皆為 1

第 1 個人把票投給第 2 個人，第 2 個人把票投給第 3 個人，……
第 $n-1$ 個人把票投給第 n 個人，第 n 個人把票投給第 1 個人，
即為一種可能的投票方式

(2) (1) 的條件不再成立

令 $\langle a_n \rangle$ 非嚴格遞增而不失一般性，因為 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$，因此必定有 $a_k > 1$ 與 $a_k < 1$，又 $a_k \ge 0$，因此數列中必定有 0，又 $\langle a_n \rangle$ 為遞增，因此 a_1 必為 0，且 a_n 必大於 1

因為 $\langle a_n \rangle$ 為遞增，且 a_n 必大於 1，因此對於所有 $a_i \ge 1$ 且 $i < n$，
$\sum_{k=i+1}^{n} a_k > n-i$，又 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$，所以 $\sum_{k=1}^{i} a_k < i$

可假設對於所有 $a_i \ge 1$ 且 $i < n$，第 i 個人得到的票由 $(\sum_{k=1}^{i-1} a_k + 1) \sim (\sum_{k=1}^{i} a_k)$ 的人投出，如此一來恰有 a_i 張票投給第 i 個人，且第 i 個人沒有投給自己

但對於第 n 個人，他得到的票若由 $(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + 1) \sim (\sum_{k=1}^{n} a_k)$ 的人投出，因為 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$，因此第 n 個人會投給他自己，不是一個合法的投票結果

可假設從第二個 $a_i \ge 1$ 開始第 i 個人得到的票由 $(\sum_{k=1}^{i-1} a_k) \sim (\sum_{k=1}^{i} a_k - 1)$ 的人投出，如此一來第 n 個人也不會投給他自己，而第一個 $a_i \ge 1$ 的人其中一票由第 n 個人投出，因為 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$ 且 $a_k \le n-1$，因此第一個 $a_i \ge 1$ 的人不可能是第 n 個人，而第一個 $a_i \ge 1$ 的人剩下的 $a_i - 1$ 張票若不為 0，可由第 1 到第 $a_i - 1$ 個人投出，是一個合法的投票結果。

綜合 (1)(2)，得證當數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $0 \le a_k \le n-1$ 且 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$ 時就是一個可能的投票結果