XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.11.2014**

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА**

**1.** В одной семье папа, мама, сын и дочка родились 30 ноября. Если из возраста папы вычесть возраст мамы, потом прибавить возраст сына и вычесть возраст дочки, то получится 10 лет. А что получится, если из года рождения папы вычесть год рождения мамы, потом прибавить год рождения сына и вычесть год рождения дочки? (С. Волчёнков)

**2.** Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А (где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий — со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза. (С. Усов; омские олимпиады)

**3.** Вася вместе с десятью своими одноклассниками принял участие в трёх тестах. В каждом из тестов, а также по сумме тестов все школьники набрали разное количество баллов, а Вася показал в каждом из трёх тестов третий результат. Какое самое низкое место Вася мог занять среди всех 10 одноклассников по сумме баллов за все три теста? (С. Берлов)

**4.** Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника? (С. Волчёнков)

**5.** В ряд выписали 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. (С. Берлов)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.11.2014**

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА**

**1.** Рита, Люба и Варя решили задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней  одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются. (Белоруссия, II этап, 9 класс, 2012/13)

**2.** Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А (где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий — со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза. (С. Усов; омские олимпиады)

**3.** Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника? (С. Волчёнков)

**4.** В ряд выписано 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. (С. Берлов)

**5.** За круглым столом сидит 200 ребят, среди которых не менее 70 девочек и не менее 70 мальчиков. Докажите, что за столом есть мальчик и девочка, между которыми сидят один мальчик и одна девочка. (Сербия, 2014, модифицировано)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.11.2014**

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА**

**1.** Натуральные числа *n*, *a* и *b* таковы, что *n*+3 = *a*+*b*, а 3*n*+1 = *ab*. Докажите, что *a = b*. (Сообщил А. Голованов)

**2.** Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника? (С. Волчёнков)

**3.** В ряд выписано 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. (С. Берлов)

**4.** За круглым столом сидит 200 ребят, среди которых не менее 70 девочек и не менее 70 мальчиков. Докажите, что за столом есть мальчик и девочка, между которыми сидят один мальчик и одна девочка. (Сербия, 2014, модифицировано)

**5.** В квадрате *ABCD* на сторонах *AB* и *AD* отмечены точки *N* и *P* соответственно так, что *CN* = *NP*. Точка *Q* на отрезке *AN* такова, что ∠*BCN* = ∠*NPQ*. Докажите, что ∠*AQP* = 2∠*BCQ*.

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**Решения задач личной олимпиады 6 класса**

**Задача 1.** *В одной семье папа, мама, сын и дочка родились 30 ноября. Если из возраста папы вычесть возраст мамы, потом прибавить возраст сына и вычесть возраст дочки, то получится 10 лет. А что получится, если из года рождения папы вычесть год рождения мамы, потом прибавить год рождения сына и вычесть год рождения дочки?*

Ответ. −10. Решение. Если из года рождения папы вычесть год рождения мамы, получится разность возраста папы и возраста мамы, взятая со знаком минус. Аналогично с разностью года рождения сына и года рождения дочки. Отсюда и получаем ответ.

**Задача 2.** *Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А (где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий — со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.*

Ответ. Толстый. Решение. Толстому, чтобы доставить в точку В 5 г груза и вернуться в точку А, требуется 100 минут, а Тонкому на те же действия с 3 г груза требуется 60 минут. Так как после последней доставки муравьям возвращаться не надо, Толстый весь груз перенесёт за (150:5)⋅100−50 = 2950 минут, а Тонкий — за (150:3)⋅60−30 = 2970 минут.

**Задача 3.** *Вася вместе с десятью своими одноклассниками принял участие в трёх тестах. В каждом из тестов, а также по сумме тестов все школьники набрали разное количество баллов, а Вася показал в каждом из трёх тестов третий результат. Какое самое низкое место Вася мог занять среди всех 10 одноклассников по сумме баллов за все три теста?*

Ответ. Седьмое. Решение. Опередить Васю хотя бы в одном из тестов могли только 2⋅3 = 6 одноклассников. Поэтому ниже седьмого места он опуститься не мог. С другой стороны, если в каждом тесте Вася набирал по 10 очков, а занявшие первое и второе места — по 100 и 50 соответственно (остальные могли при этом в каждом тесте набирать по столько очков, на каком месте с конца они оказались), и при этом первые и вторые места в тестах заняли в общей сложности шестеро, То Вася по сумме баллов занял как раз седьмое место.

**Задача 4.** *Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?*

1

2

3

2

1

1

2

3

?

Ответ. Петя. Решение. Пусть Петя по очереди выбирает квадраты, показанные на рисунке справа (большие квадраты там размером 2×2, малые — 1×1), в таком порядке: сначала два верхних, потом центральный средний, левый и правый средние, правый нижний, верхний из малых, левый нижний, нижний из малых. Тогда цвета можно занумеровать так, что Вася должен будет раскрасить квадраты, как показано на рисунке (потому что цвета всех квадратов, начиная с третьего, полностью задаются предыдущей раскраской), и получится, что нижний малый квадрат красить нечем.

**Задача 5.** *В ряд выписали 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9.*

Решение. Заметим, что среди последних цифр наших чисел по 10 нулей, единиц, …, девяток. Поэтому сумма всех последних цифр равна 10⋅(1+2+…+9) = 450. Это число делится на 9. Поэтому сумма *всех* цифр всех выписанных чисел делится на 9. Значит, и сумма их первых цифр делится на 9. Если бы все первые цифры были одинаковы, их сумма была бы в 100 раз больше каждой из них и потому не делилась бы на 9, так как девятка на первом месте по условию стоять не может. Значит, среди наших чисел есть число *n*, делящееся на 10000. Но тогда вторые цифры всех выписанных чисел, меньших *n*, равны 9, а остальных — 0. Поэтому, убрав все эти цифры из делящейся на 9 суммы всех цифр, мы сохраним делимость на 9.

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**Решения задач личной олимпиады 7 класса**

**Задача 1.** *Рита, Люба и Варя решили задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй  две, а решившая последней  одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.*

Решение. По условию за каждую задачу девочки получили по 4+2+1 = 7 конфет, а 20⋅3 на 7 не делится.

**Задача 2.** *Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А (где они сейчас находятся) в точку В, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий ⎯ со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку В? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.*

Ответ. Толстый. Решение. Толстому, чтобы доставить в точку В 5 г груза и вернуться в точку А, требуется 100 минут, а Тонкому на те же действия с 3 г груза требуется 60 минут. Так как после последней доставки муравьям возвращаться не надо, Толстый весь груз перенесёт за (150:5)⋅100−50 = 2950 минут, а Тонкий ⎯ за (150:3)⋅60−30 = 2970 минут.

**Задача 3.** *Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?*

1

2

3

2

1

1

2

3

?

Ответ. Петя. Решение. Пусть Петя по очереди выбирает квадраты, показанные на рисунке справа (большие квадраты там размером 2×2, малые ⎯ 1×1), в таком порядке: сначала два верхних, потом центральный средний, левый и правый средние, правый нижний, верхний из малых, левый нижний, нижний из малых. Тогда цвета можно занумеровать так, что Вася должен будет раскрасить квадраты, как показано на рисунке (потому что цвета всех квадратов, начиная с третьего, полностью задаются предыдущей раскраской), и получится, что нижний малый квадрат красить нечем.

**Задача 4.** *В ряд выписали 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9.*

Решение. Заметим, что среди последних цифр наших чисел по 10 нулей, единиц, …, девяток. Поэтому сумма всех последних цифр равна 10⋅(1+2+…+9) = 450. Это число делится на 9. Поэтому сумма *всех* цифр всех выписанных чисел делится на 9. Значит, и сумма их первых цифр делится на 9. Если бы все первые цифры были одинаковы, их сумма была бы в 100 раз больше каждой из них и потому не делилась бы на 9, так как девятка на первом месте по условию стоять не может. Значит, среди наших чисел есть число *n*, делящееся на 10000. Но тогда вторые цифры всех выписанных чисел, меньших *n*, равны 9, а остальных ⎯ 0. Поэтому, убрав все эти цифры из делящейся на 9 суммы всех цифр, мы сохраним делимость на 9.

**Задача 5.** *За круглым столом сидит 200 ребят, среди которых не менее 70 девочек и не менее 70 мальчиков. Докажите, что за столом есть мальчик и девочка, между которыми сидят один мальчик и одна девочка.*

Решение. Допустим, утверждение задачи неверно. Поскольку конфигурации МДМД и ДМДМ невозможны, найдутся не менее двух ребят одного пола (пусть это мальчики), сидящих подряд. Они с сидящими по краям девочками образуют конфигурацию ДМ…МД (\*). Так как конфигурации ММДД и МДМД невозможны, конфигурация (\*) продолжается до ММДМ…МДММ. Продолжая эти рассуждения, получаем, что рядом с каждой девочкой сидят два мальчика, а мальчиков, рядом с которыми сидят две девочки, нет. Но тогда, сопоставляя каждой девочке двух ближайших мальчиков, сидящих справа от неё, получаем, что мальчиков по крайней мере вдвое больше, чем девочек, то есть мальчиков и девочек вместе не меньше, чем 70+2⋅70 = 210. Противоречие.

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**Решения задач личной олимпиады 8 класса**

**Задача 1.** *Натуральные числа n, a и b таковы, что n+3 = a+b, а 3n+1 = ab. Докажите, что a = b.*

Решение. Выразив *n* из первого равенства и подставив результат во второе, получим равенство 3(*a+b*−3)+1 = *ab*, которое нетрудно привести к виду (*a*−3)(*b*−3) = 1. Отсюда либо *a*−3 = *b*−3 = 1, либо *a*−3 = *b*−3 = −1, что и требовалось доказать.

**Задача 2.** *Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?*

1

2

3

2

1

1

2

3

?

Ответ. Петя. Решение. Пусть Петя по очереди выбирает квадраты, показанные на рисунке справа (большие квадраты там размером 2×2, малые — 1×1), в таком порядке: сначала два верхних, потом центральный средний, левый и правый средние, правый нижний, верхний из малых, левый нижний, нижний из малых. Тогда цвета можно занумеровать так, что Вася должен будет раскрасить квадраты, как показано на рисунке (потому что цвета всех квадратов, начиная с третьего, полностью задаются предыдущей раскраской), и получится, что нижний малый квадрат красить нечем.

**Задача 3.** *В ряд выписали 100 идущих подряд пятизначных чисел, меньших 90000. Оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть первую цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9. Также оказалось, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то сумма получившихся чисел тоже будет делиться на 9. Докажите, что если у всех этих чисел вычеркнуть вторую (с начала) цифру, то сумма получившихся чисел будет делиться на 9.*

Решение. Заметим, что среди последних цифр наших чисел по 10 нулей, единиц, …, девяток. Поэтому сумма всех последних цифр равна 10⋅(1+2+…+9) = 450. Это число делится на 9. Поэтому сумма *всех* цифр всех выписанных чисел делится на 9. Значит, и сумма их первых цифр делится на 9. Если бы все первые цифры были одинаковы, их сумма была бы в 100 раз больше каждой из них и потому не делилась бы на 9, так как девятка на первом месте по условию стоять не может. Значит, среди наших чисел есть число *n*, делящееся на 10000. Но тогда вторые цифры всех выписанных чисел, меньших *n*, равны 9, а остальных ⎯ 0. Поэтому, убрав все эти цифры из делящейся на 9 суммы всех цифр, мы сохраним делимость на 9.

**Задача 4.** *За круглым столом сидит 200 ребят, среди которых не менее 70 девочек и не менее 70 мальчиков. Докажите, что за столом есть мальчик и девочка, между которыми сидят один мальчик и одна девочка.*

Решение. Допустим, утверждение задачи неверно. Поскольку конфигурации МДМД и ДМДМ невозможны, найдутся не менее двух ребят одного пола (пусть это мальчики), сидящих подряд. Они с сидящими по краям девочками образуют конфигурацию ДМ…МД (\*). Так как конфигурации ММДД и МДМД невозможны, конфигурация (\*) продолжается до ММДМ…МДММ. Продолжая эти рассуждения, получаем, что рядом с каждой девочкой сидят два мальчика, а мальчиков, рядом с которыми сидят две девочки, нет. Но тогда, сопоставляя каждой девочке двух ближайших мальчиков, сидящих справа от неё, получаем, что мальчиков по крайней мере вдвое больше, чем девочек, то есть мальчиков и девочек вместе не меньше, чем 70+2⋅70 = 210. Противоречие.

**Задача 5.** *В квадрате ABCD на сторонах AB и AD отмечены точки N и P соответственно так, что CN = NP. Точка Q на отрезке AN такова, что ∠BCN = ∠NPQ. Докажите, что ∠AQP = 2∠BCQ.*

Решение. Рассмотрим треугольник *APQ*. Биссектриса его угла *A* проходит через точку *C*. Биссектриса внешнего угла *P* также проходит через точку *C*:

∠*CPD* = ∠*BCP* = ∠*BCN*+∠*NCP* = ∠*NPQ*+∠*NPC* = ∠*QPC*.

Значит, *QC* — биссектриса внешнего угла *Q*, то есть ∠*BQP* = 2∠*BQC*. Следовательно, ∠*AQP* = 180°–∠*BQP* = 2(90°–∠*BQC*) = 2∠*BCQ*.