XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Вещественные числа *a*, *b*, *c* таковы, что |*a*–*b*| ≥ |*c*|, |*b*–*c*| ≥ |*a*|, |*c*–*a*| ≥ |*b*|. Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других. (Румыния, 2014, уездный тур, 7 класс)

**2.** Муравей ползает по граням куба, переползая с грани на грань через их общее ребро. В некоторый момент оказалось, что на одной грани он побывал 2014 раз, а на остальных — по *n* раз. При каком наименьшем *n* такое возможно? (Фольклор)

**3.** Найдите все натуральные *n* ≥ 2, для которых число 1/*n* записывается конечной десятичной дробью , сумма цифр которой *a*1+*a*2+...+*ak* равна *n*. (GfhRbDs, 2014:131:79)

**4.** В выпуклом четырёхугольнике *ABCD*, углы *BAD* и *BCD* равны, а биссектриса угла *ABC* проходит через середину отрезка *CD*. Известно, что *CD*= 3*AD*. Найдите отношение *AB*/*BC*. (Аргентина, 2013)

**5.** Точка *M* — середина стороны *BC* треугольника *ABC*. На его сторонах *AB* и *AC* выбраны соответственно точки *E* и *F*. Прямые *BF* и *CE* пересекаются в точке *K*. Прямая, проведенная через *C* параллельно *AB*, и прямая, проведенная через *B* параллельно *CE*, пересекаются в точке *L*. Прямые *AM* и *CL* пересекаются в точке *N*. Докажите, что *KN*|| *FL*. (Украина, заключи­тельный этап, 2013)

**6.** При каких натуральных *N* рёбра полного графа на *N* вершинах можно раскрасить в *N* цветов таким образом, чтобы для любых трёх разных цветов можно было найти три вершины, попарно соединённые рёбрами этих цветов? (Crux Mathematicorum, 2012)

**7.** Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число *k* и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Могло ли при каком-нибудь натуральном *k* произведение всех 2016 выписанных чисел оказаться квадратом натурального числа? (По мотивам Közepiskolai Matematikai Lapok, 2014)

**8.** На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, национальный этап, 2013)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Вещественные числа *a*, *b*, *c* таковы, что |*a*–*b*| ≥ |*c*|, |*b*–*c*| ≥ |*a*|, |*c*–*a*| ≥ |*b*|. Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других. (Румыния, 2014, уездный тур, 7 класс)

**2.** Муравей ползает по граням куба, переползая с грани на грань через их общее ребро. При этом нельзя переползать через одно и то же ребро два раза подряд. В некоторый момент оказалось, что на одной грани он побывал 2014 раз, а на остальных — по *n* раз. При каком наименьшем *n* такое возможно? (Фольклор)

**3.** Решите систему уравнений 2*x*2+*y*2 = 4, 2*x*−2*xy* = 5 в вещественных числах. (Польша, олимпиада для гимназистов, 1 тур, 2013)

**4.** Дан выпуклый пятиугольник *ABCDE*. Известно, что ∠*CAE* = ∠*CEA*, ∠*ACB* = ∠*CED*, ∠*CAD*+∠*ECD* = 90° и *BC* = *ED*. Докажите, что *AB*+*BC*> *AD*. (А. Пастор)

**5.** Точка *M* — середина стороны *BC* треугольника *ABC*. На его сторонах *AB* и *AC* выбраны соответственно точки *E* и *F*. Прямые *BF* и *CE* пересекаются в точке *K*. Прямая, проведенная через *C* параллельно *AB*, и прямая, проведенная через *B* параллельно *CE*, пересекаются в точке *L*. Прямые *AM* и *CL* пересекаются в точке *N*. Докажите, что *KN*|| *FL*. (Украина, заключи­тельный этап, 2013)

**6.** На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета? (По мотивам Crux-2012)

**7.** Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число *k* и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Могло ли при каком-нибудь натуральном *k* произведение всех 2016 выписанных чисел оказаться квадратом натурального числа? (По мотивам Közepiskolai Matematikai Lapok, 2014)

**8.** На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, национальный этап, 2013)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Найдите наименьшую сумму цифр числа вида 3*n*2+*n*+1, где *n* — натуральное число. (Сербия, 2008)

**2.** На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, национальный этап, 2013)

**3.** Докажите, что число 2*n*+27*n*+1 при всех натуральных *n* — составное. (Сербия, Републичко, 2006)

**4.** Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 3 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Он также разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман также разделил все монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Этого атамана разбойники также убили. Наконец, четвёртый атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 439 монет. Какое наибольшее число монет могли делить разбойники? (Белоруссия, III этап, 9 класс, 2010; числа изменены)

**5.** На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета? (По мотивам Crux-2012)

**6.** На нескольких карточках написаны положительные числа. Карточки сложены в две стопки. Среднее арифметическое чисел равно 100. В левой стопке карточек больше чем в правой. Обязательно ли в левой стопке найдется карточка, на которой написано число, меньшее чем 200? (А. Шаповалов, А. Скопенков)

**7.** Целые числа *a*, *b* и *c* удовлетворяют неравенствам |*b*−*c*| ≥ |*a*|, |*c*−*a*| ≥ |*b*| и |*a*−*b*| ≥ |*c*|. Докажите, что одно из чисел равно сумме двух оставшихся. (Сербия, Општинско, 2014)

**8.** Дан выпуклый пятиугольник *ABCDE*. Известно, что ∠*CAE* = ∠*CEA*, ∠*ACB* = ∠*CED*, ∠*CAD*+∠*ECD* = 90° и *BC* = *ED*. Докажите, что *AB*+*BC*> *AD*. (А. Пастор)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Найдите наименьшую сумму цифр числа вида 3*n*2+*n*+1, где *n* — натуральное число. (Сербия, 2008)

**2.** На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, Државно, 2013; модификакция)

**3.** Докажите, что число 2*n*+27*n*+1 при всех натуральных *n* — составное. (Сербия, Републичко, 2006)

**4.** Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 3 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Он также разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман также разделил все монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Этого атамана разбойники также убили. Наконец, четвёртый атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 439 монет. Какое наибольшее число монет могли делить разбойники? (Белоруссия, III этап, 9 класс, 2010; числа изменены)

**5.** Вася записывает на доске в строчку в некотором порядке натуральные числа от 1 до 2014. Затем он каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывает абсолютную величину их разности, а эти два числа стирает. Так он делает до тех пор, пока на доске не останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа. (По мотивам эстонской олимпиады 2012-13)

**6.** На нескольких карточках написаны положительные числа. Карточки сложены в две стопки. Среднее арифметическое чисел равно 100. В левой стопке карточек больше чем в правой. Обязательно ли в левой стопке найдется карточка, на которой написано число, меньшее чем 200? (А. Шаповалов, А. Скопенков)

**7.** Различные целые числа *a* и *b* удовлетворяют неравенствам |*a*−1| ≥ |*b*| и |*b*−1| ≥ |*a*|. Докажите, что числа |*a*| и |*b*| отличаются на 1. (Сербия, Општинско, 2014, радикальное упрощение)

**8.** Дан выпуклый пятиугольник *ABCDE*. Известно, что ∠*CAE* = ∠*CEA*, ∠*ACB* = ∠*CED*, ∠*CAD*+∠*ECD* = 90° и *BC* = *ED*. Докажите, что *AB*+*BC*> *AD*. (А. Пастор)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться? (А. Шаповалов)

**2.** На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, Државно, 2013; модификакция)

**3.** Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток? (Из 6-го класса)

**4.** Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Новый атаман разделил монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 74 монеты. Сколько монет делили разбойники? (Белоруссия, III этап, 9 класс, 2010; упрощение)

**5.** На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа. (По мотивам эстонской олимпиады 2012-13)

**6.** Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь? (Из 6-го класса)

**7.** Целые числа *a* и *b* удовлетворяют условиям |*a*−1| = |*b*| и |*b*−1| = |*a*|. Найдите *a*+*b*. (Сербия, Општинско, 2014; радикальное упрощение)

**8.** Можно ли расставить числа 1, 2, …, 8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны? (А. Шаповалов)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Денежные купюры разного достоинства и разных стран лежат в двух кошельках. Средняя стоимость купюры равна 100 рублей. В левом кошельке купюр больше, чем в правом. Обязательно ли в левом кошельке найдется купюра стоимостью менее 200 рублей? (А. Шаповалов, А. Скопенков)

**2.** Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться? (А. Шаповалов)

**3.** Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны? (А. Шаповалов)

**4.** На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа. (По мотивам эстонской олимпиады 2012-13)

**5.** На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета? (По мотивам Crux-2012)

**6.** Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число *k* и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Докажите, что Вася мог так подобрать число *k*, что произведение всех 2016 выписанных чисел будет квадратом натурального числа. (По мотивам KoMaL-2014)

**7.** На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга. (Сербия, Државно, 2013; усиление)

**8.** Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида 3*n*2+*n*+11, где *n* — натуральное число? (Сербия, 2008)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь? (Омские олимпиады)

**2.** Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться? (А. Шаповалов)

**3.** Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны? (А. Шаповалов)

**4.** На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа. (По мотивам эстонской олимпиады 2012-13)

**5.** Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток? (Болгарские олимпиады 2014-15)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ½ | 32 |  |  |
|  | 2 | 8 | 2 |
| 4 | 1 |  |  |
|  |  | \* | 16 |

**6.** В каждой клетке таблицы 4×4 было записано по числу, не равному 0, так, что произведение чисел во всех строчках и столбцах было одинаковым. Школьник Вася оставил числа в восьми клетках (см. рисунок), а остальные стёр. Какое число стояло в клетке, помеченной звёздочкой? (Болгарские олимпиады 2014-15)

**7.** На окружности выбрано 10 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 10 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета? (По мотивам Crux-2012)

**8.** Каждый день три дворовые футбольные команды "Драчуны", "Забияки" и "Задиры" играют между собой по одной игре. За победу команде начисляют 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Могло ли так получиться, что через несколько дней меньше всех игр проиграли "Задиры", больше всех игр выиграли "Забияки", а больше всех очков набрали "Драчуны"? (С. Токарев)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь? (Омские олимпиады)

**2.** Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться? (А. Шаповалов)

**3.** Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны? (А. Шаповалов)

**4.** На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа. (По мотивам эстонской олимпиады 2012-13)

**5.** Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток? (Болгарские олимпиады 2014-15)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ½ | 32 |  |  |
|  | 2 | 8 | 2 |
| 4 | 1 |  |  |
|  |  | \* | 16 |

**6.** В каждой клетке таблицы 4×4 было записано по числу, не равному 0, так, что произведение чисел во всех строчках и столбцах было одинаковым. Школьник Вася оставил числа в восьми клетках (см. рисунок), а остальные стёр. Какое число стояло в клетке, помеченной звёздочкой? (Болгарские олимпиады 2014-15)

**7.** Три брата Петя, Вася и Толя забыли, сколько лет их папе. Они обозначили его возраст через *x* и сделали следующие заявления. Петя: «Число *x* делится на 3. Число *x* чётное». Вася: «Число *x* делится на 3. Последняя цифра числа *x* равна 5». Толя: «Число *x* делится на 5. Сумма цифр числа *x* равна 12». Папа внимательно выслушал трёх сыновей и сказал: «Каждый из вас один раз сказал правду, а один раз ошибся. Если понимать под числом *x* возраст Вашего дедушки, то тоже окажется, что каждый из вас один раз сказал правду, а один раз ошибся. И то же самое получится, если понимать под числом *x* возраст Вашего прадедушки». Сколько лет папе, дедушке и прадедушке? Известно, что папа очень умный и никогда не ошибается, а прадедушка ещё не достиг столетнего возраста. (Болгарские олимпиады 2014-15)

**8.** Каждый день три дворовые футбольные команды "Драчуны", "Забияки" и "Задиры" играют между собой по одной игре. За победу команде начисляют 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Могло ли так получиться, что через несколько дней меньше всех игр проиграли "Задиры", больше всех игр выиграли "Забияки", а больше всех очков набрали "Драчуны"? (С. Токарев)