XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Правильный треугольник со стороной *n* (*n* — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на *n*2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на *n* равных фигур, каждая из которых состоит из *n* единичных треугольников. Докажите, что *n* делится на 4. (Олимпиада «Cono Sur», 2012, shortlist)

**2.** Докажите, что для каждого нечётного *n* > 1 существуют три взаимно простых в совокупности натуральных числа *a*, *b*, *c* таких, что *a*2+2*b*2+4*c*2 = 3*n*. (Олимпиада «Cono Sur», 2012, shortlist)

**3.** В треугольнике *ABC* выполняется равенство *BC* = 2*AC*. На стороне *BC* выбрана точка *D* так, что ∠*CAD* = ∠*CBA*. Прямая *AD* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *E*. Докажите, что угол *BEC* прямой. (К. Сухов, модификация задачи отбора команды Киева на Всеукраинскую олимпиаду, 2014)

**4.** Хулиган Вася разрезал прямоугольный портрет директора школы по прямой. После этого он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Потом он сделал то же с одним из новых кусков и т.д. После ста таких разрезаний появился директор школы и поставил Васе по двойке за каждый четырёхугольный кусок и по две двойки за каждый треугольный. Докажите, что Вася получил больше 100 двоек. (Украина, областной тур, 2011/12)

**5.** 1007 черных и 1007 белых шаров, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2014, складывают в мешок на глазах у Васи (так что Вася видит, какого цвета шар с каждым номером). Затем Вася один раз в минуту вслепую вынимает из мешка один шар и кладёт его на стол, после чего при желании может взять со стола два разноцветных шара (если найдёт) и спрятать их в сундук — тогда он получает количество очков, равное разности большего и меньшего чисел на этих двух шарах. Сколько очков Вася может заработать наверняка за 2014 минут? (Турция, второй этап, 2014)

**6.** На доске написаны пять различных положительных чисел. Оказалось, что для любых трёх разных чисел *a*, *b*, *c* на доске число *ab*+*bc*+*ca* рационально. Докажите, что отношение любых двух чисел на доске рационально. (Саудовская Аравия, отбор на ММО, 2014)

**7.** На полоске написаны по порядку числа от 1 до 2014. Полоску разрезали на несколько частей, и оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному *k*, второй части — 2*k*, третьей — 3*k* и т.д. При каких *k* это возможно? (Сообщил С. Волчёнков)

**8.** В четырехугольнике *ABCD* выполнены равенства ∠*BCA*+∠*CAD* = 180° и *AB* = *AD*+*BC*. Докажите, что ∠*BAC*+∠*ACD* = ∠*CDA*. (Сербия, муниципальный этап, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Правильный треугольник со стороной *n* (*n* — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на *n*2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на *n* равных фигур, каждая из которых состоит из *n* единичных треугольников. Докажите, что *n* делится на 4. (Олимпиада «Cono Sur», 2012, shortlist)

**2.** Целые числа *a*, *b*, *c* удовлетворяют условию *ab*+*bc*+*ca* = 1. Докажите, что число (1+*a*2)(1+*b*2)(1+*c*2) — точный квадрат. (Украина, 2009)

**3.** В треугольнике *ABC* выполняется равенство *BC* = 2*AC*. На стороне *BC* выбрана точка *D* так, что ∠*CAD* = ∠*CBA*. Прямая *AD* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *E*. Докажите, что угол *BEC* прямой. (К. Сухов, модификация задачи отбора команды Киева на Всеукраинскую олимпиаду, 2014)

**4.** Хулиган Вася разрезал прямоугольный портрет директора школы по прямой. После этого он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Потом он сделал то же с одним из новых кусков и т.д. После ста таких разрезаний появился директор школы и поставил Васе по двойке за каждый четырёхугольный кусок и по две двойки за каждый треугольный. Докажите, что Вася получил больше 100 двоек. (Украина, областной тур, 2011/12)

**5.** 1007 черных и 1007 белых шаров, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2014, складывают в мешок на глазах у Васи (так что Вася видит, какого цвета шар с каждым номером). Затем Вася один раз в минуту вслепую вынимает из мешка один шар и кладёт его на стол, после чего при желании может взять со стола два разноцветных шара (если найдёт) и спрятать их в сундук — тогда он получает количество очков, равное разности большего и меньшего чисел на этих двух шарах. Докажите, что Вася сможет набрать не менее 4000 очков. (Турция, второй этап, 2014)

**6.** Положительные вещественные числа *a* и *b* таковы, что число ** рационально. Докажите, что число ** также рационально. (omg04\_3.pdf)

**7.** На полоске написаны по порядку числа от 1 до 2014. Полоску разрезали на несколько частей, и оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному *k*, второй части — 2*k*, третьей — 3*k* и т.д. При каких *k* это возможно? (Сообщил С. Волчёнков)

**8.** В четырехугольнике *ABCD* выполнены равенства ∠*BCA*+∠*CAD* = 180° и *AB* = *AD*+*BC*. Докажите, что ∠*BAC*+∠*ACD* = ∠*CDA*. (Сербия, муниципальный этап, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** В диком лесу жили 6 вурдалаков, 17 единорогов и 55 пауков. Вурдалак ест пауков и единорогов, но не ест других вурдалаков, паук ест единорогов, но не ест вурдалаков и других пауков, а единорог не может есть никого. Когда вурдалак съедает паука, он превращается в единорога, а когда съедает единорога, он превращается в паука. Кроме того, когда паук съедает единорога, он становится вурдалаком. Какое наибольшее количество существ может оставаться в лесу, когда никто никого не в состоянии съесть? (Сербия, окружной этап, 2014)

**2.** На бумажной полоске написаны по порядку числа от 1 до 605. Полоску разрезали на несколько частей. Каждая из частей содержит нечетное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число *k*, на второй части — число 2*k*, третьей — 3*k* и т.д. При каких *k* это возможно? (Сообщил С. Волчёнков, модификация от С.Берлова и Ко)

**3.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 2014×2014 таким образом, чтобы в любом квадрате 1008×1008 на обеих диагоналях были отмеченные клетки? (Baltic Way, 2014)

**4.** В шахматном турнире принимали участие шестиклассники и семиклассники, причём шестиклассников было в 3 раза больше, чем семиклассников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что шестиклассники набрали вместе на 20% очков больше, чем семиклассники. Сколько школьников могло участвовать в турнире? За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков? (Вариация на тему фольклора)

**5.** Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой? (KoMaL–2014)

**6.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы? (С. Берлов)

**7.** Для целых чисел *a* и *b* докажите неравенство *a*2+*b*2+*a*2*b*2 ≥ 3(*a*+*b*)2/4. (А. Храбров)

**8.** В четырехугольнике *ABCD* выполнены равенства ∠*BCA*+∠*CAD* = 180° и *AB* = *AD*+*BC*. Докажите, что ∠*BAC*+∠*ACD* = ∠*CDA*. (Сербия, Општинско, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** В диком лесу жили 6 вурдалаков, 17 единорогов и 55 пауков. Вурдалак ест пауков и единорогов, но не ест других вурдалаков, паук ест единорогов, но не ест вурдалаков и других пауков, а единорог не может есть никого. Когда вурдалак съедает паука, он превращается в единорога, а когда съедает единорога, он превращается в паука. Кроме того, когда паук съедает единорога, он становится вурдалаком. В какой–то момент в лесу оказалось, что никто никого не в состоянии съесть. Животные какого вида могли остаться в тот момент? (Сербия, окружной этап, 2014; упрощение)

**2.** На бумажной полоске написаны по порядку числа от 1 до 605. Полоску разрезали на несколько частей. Каждая из частей содержит нечетное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число *k*, на второй части — число 2*k*, третьей — 3*k* и т.д. При каких *k* это возможно? (Сообщил С.Волчёнков, модификация от С.Берлова и Ко)

**3.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 2015×2015 таким образом, чтобы в любом квадрате 1008×1008 на обеих диагоналях были отмеченные клетки? (Baltic Way, 2014)

**4.** В шахматном турнире принимали участие шестиклассники и семиклассники, причём шестиклассников было в 3 раза больше, чем семиклассников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что шестиклассники набрали вместе на 20% очков больше, чем семиклассники. Докажите, что наибольшее количество очков в этом турнире набрал семиклассник. За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков? (Вариация на тему фольклора)

**5.** Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой? (KoMaL–2014)

**6.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы? (С. Берлов)

**7.** Для целых чисел *a* и *b* докажите неравенство *a*2+*b*2+*a*2*b*2 ≥ 3(*a*+*b*)2/4. (А. Храбров)

**8.** В четырехугольнике *ABCD* выполнены равенства ∠*BCA*+∠*CAD* = 180° и *AB* = *AD*+*BC*. Докажите, что ∠*BAC*+∠*ACD* = ∠*CDA*. (Сербия, Општинско, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх. (Болгарские олимпиады-2014)

**2.** Решите уравнение , где *n* — натуральное, а *p* — простое. (Сербия, Општинско, 2014)

**3.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 15×15 таким образом, чтобы в любом квадрате 8×8 на обеих диагоналях были отмеченные клетки? (Baltic Way, 2014)

**4.** Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что весы работают неправильно. Почему он сделал такой вывод? (А. Штерн)

**5.** Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какая цифра могла стоять перед этой девяткой? (KoMaL–2014; упрощение)

**6.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы? (С. Берлов)

**7.** На доске написаны три одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил три различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова три одинаковых числа? (С. Берлов)

**8.** Малыш подарил Карлсону пакетик с шоколадными конфетами и пакетик с карамельками. Карлсон сначала съел три четверти всех шоколадных конфет и две трети всех карамелек, а потом съел две трети оставшихся шоколадных конфет и три четверти оставшихся карамелек. Фрекен Бок установила, что Карлсон получил в подарок меньше 200 конфет, а не съеденными осталось больше 15 конфет (карамельки — тоже конфеты). Сколько конфет съел Карлсон? (Болгарские олимпиады)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой? (KoMaL–2014)

**2.** На ленте написаны подряд числа 1, 2, 3, …, *n*. Для каких натуральных *n* эту ленту можно разрезать на 3 куска таким образом, чтобы на всех кусках было нечётное количество чисел, при этом на первом куске число, стоящее в середине, было вдвое меньше, чем аналогичное среднее число во втором куске и втрое меньше, чем аналогичное среднее в третьем куске? (С. Волчёнков)

**3.** На доске написаны 5 одинаковых натуральных чисел. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил 5 различных чисел. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова 5 одинаковых чисел? (С. Берлов)

**4.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы? (С. Берлов)

**5.** Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что так не бывает. Почему он сделал такой вывод? (А. Штерн)

**6.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 10×10 таким образом, чтобы в любом квадрате 6×6 на обеих диагоналях были отмеченные клетки? (Baltic Way, 2014)

**7.** В диком лесу жили 6 троллей, 17 вампиров и 85 злых хомячков. Когда хомячок ловит тролля, то тут же сжирает его и превращается в вампира. Когда хомячок ловит вампира, то сжирает его и превращается в тролля. А когда вампир ловит тролля, то сжирает его и превращается в злого хомячка. Через некоторое время в лесу остались существа только одного вида. Какого? (Сербия, Окружно, 2014)

**8.** В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх. (Болгарские олимпиады)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какая цифра могла стоять перед этой девяткой? (KoMaL-2014)

**2.** На бумажной ленте написаны числа 1, 2, 3,…, 2014. Ленту разрезали на несколько кусков и на каждом куске подсчитали среднее арифметическое чисел. Оказалось, что значения этих средних: *k*, 2*k*, 3*k*, … При каких *k* это возможно? (С. Волченков)

**3.** На доске написаны 3 одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил 3 различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова 3 одинаковых числа? (С. Берлов)

**4.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы? (С. Берлов)

**5.** Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что так не бывает. Почему он сделал такой вывод? (А. Штерн)

**6.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 11×11 таким образом, чтобы любой ряд из шести клеток, идущих подряд в направлении, параллельном любой из диагоналей, содержал отмеченную клетку? (Baltic Way, 2014)

**7.** В диком лесу жили 6 троллей, 17 вампиров и 85 злых хомячков. Когда хомячок ловит тролля, то тут же сжирает его и превращается в вампира. Когда хомячок ловит вампира, то сжирает его и превращается в тролля. А когда вампир ловит тролля, то сжирает его и превращается в злого хомячка. Через некоторое время в лесу остались существа только одного вида. Какого? (Сербия, Окружной этап, 2014)

**8.** 9 теннисистов, все разного возраста, сыграли однокруговой турнир. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх. (С. Берлов)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Кролик написал на длинной полоске бумаги все четырёхзначные числа, делящиеся на 17, в порядке возрастания. Винни-Пух просматривает этот ряд чисел и, как только находит пару соседних чисел с разными цифрами в разряде сотен, получает от Кролика воздушный шарик. Сколько шариков получит Винни-Пух в результате? (USA Online Math Open 2014)

**2.** В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх. (Болгарские олимпиады-2014)

**3.** На доске написаны три одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил три различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова три одинаковых числа? (С. Берлов)

**4.** На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были равными? (С. Берлов)

**5.** Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что весы работают неправильно. Почему он сделал такой вывод? (А. Штерн)

**6.** Малыш подарил Карлсону пакетик с шоколадными конфетами и пакетик с карамельками. Карлсон сначала съел три четверти всех шоколадных конфет и две трети всех карамелек, а потом съел две трети оставшихся шоколадных конфет и три четверти оставшихся карамелек. Фрекен Бок установила, что Карлсон получил в подарок меньше 200 конфет, а не съеденными осталось больше 15 конфет (карамельки — тоже конфеты). Сколько конфет съел Карлсон? (Болгарские олимпиады)

**7.** На клетчатой бумаге нарисовали шестиугольник и частично закрасили его серым цветом (см. рисунок). Какая часть шестиугольника имеет большую площадь: закрашенная или незакрашенная? (С. Усов)

**8.** Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 11×11 таким образом, чтобы любой ряд из шести клеток, идущих подряд в направлении, параллельном любой из диагоналей, содержал отмеченную клетку? (Baltic Way, 2014)