XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Пусть *AL* — биссектриса треугольника *ABC*. Точка *N* на стороне *AB* такова, что *LN* || *AC*, *K* — точка пересечения *CN* и *AL*. Докажите, что если *BN* = *AC*, то *CL* = *CK*. (А. Антропов)

**2.** У двух игроков A и B имеется неограниченный запас фигурок трёх видов: (1) (2) (3) **.** Они по очереди (начинает A) ставят фигурки на доску размером 2013×2014 клеточек, причём A при своём ходе должен поставить одну фигурку вида (1), а B — по одной фигурке каждого из видов (1), (2) и (3) (фигурки можно поворачивать). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре? (Олимпиада "Cono Sur", 2012)

**3.** Длины сторон *n*-угольника (*n* ≥ 3) равны *a*1, *a*2, …, *an*, а периметр равен *p*. Докажите, что . (Индия, региональная олимпиада)

**4.** Найдите все натуральные *n* > 1 такие, что для каждого целого *k*, 0 ≤ *k* < *n*, найдётся число, кратное *n*, сумма цифр которого даёт остаток *k* при делении на *n*. (Brazil National Olympiad, 2014)

**5.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам, вместе взятым. Оказалось, однако, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась. (Белоруссия, 2014)

**6.** Решите уравнение *m*6+5*n*2 = *m*+*n*3 в натуральных числах. (Турция, отбор на юниорскую Балканиаду, 2014)

**7.** В треугольнике *ABC* с *AB* > *AC* точки *P* и *Q* — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла *A* из точек *B* и *C* соответственно. Докажите, что прямые *BQ*, *PC* и перпендикуляр к *AP*, восставленный в точке *A*, пересекаются в одной точке. (Фольклор)

**8.** Для каждой пары натуральных чисел *a*, *b* введена операция *a*⊕*b* с таким свойствами: 1) *a*⊕*a* = *a*+2; 2) *a*⊕*b* = *b*⊕*a*; 3) . Найдите 3⊕5. (Киев, районный тур, 2008/09)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Пусть *AL* — биссектриса треугольника *ABC*. Точка *N* на стороне *AB* такова, что *LN* || *AC*, *K* — точка пересечения *CN* и *AL*. Докажите, что если *BN* = *AC*, то *CL* = *CK*. (А. Антропов)

**2.** У двух игроков A и B имеется неограниченный запас фигурок трёх видов: (1) (2) (3) **.** Они по очереди (начинает A) ставят фигурки на доску размером 2013×2014 клеточек, причём A при своём ходе должен поставить одну фигурку вида (1), а B — по одной фигурке каждого из видов (1), (2) и (3) (фигурки можно поворачивать). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре? (Олимпиада "Cono Sur", 2012)

**3.** Длины сторон *n*-угольника (*n* ≥ 3) равны *a*1, *a*2, …, *an*, а периметр равен *p*. Докажите, что . (Индия, региональная олимпиада)

**4.** Числа от 1 до 63 разбиты на 10 групп, в каждой группе подсчитано произведение входящих в неё чисел. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель получившихся произведений? (А. Голованов по мотивам Чешско-польско-словацкого математического соревнования для юниоров, 2014)

**5.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам, вместе взятым. Оказалось, однако, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась. (Белоруссия, 2014)

**6.** Докажите, что ни при каком натуральном *n* число 2(*n*2+1)−*n* не является точным квадратом. (Чешско-польско-словацкое математическое соревнование для юниоров, 2012)

**7.** В треугольнике *ABC* с *AB* > *AC* точки *P* и *Q* — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла *A* из точек *B* и *C* соответственно. Прямые *BQ* и *PC* пересекаются в точке *D*. Докажите, что угол *DAP* — прямой. (Фольклор)

**8.** Для каждой пары натуральных чисел *a*, *b* введена операция *a*⊕*b* с таким свойствами: 1) *a*⊕*a* = *a*+2; 2) *a*⊕*b* = *b*⊕*a*; 3) . Найдите 3⊕5. (Киев, районный тур, 2008/09)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На 41 клетке шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 26 убрать с доски так, что разноцветные короли не будут бить друг друга. (А. Пастор, А. Храбров, неверный перевод с сербского)

**2.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным женщинам, вместе взятым. Оказалось, что для каждой женщины можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась. (Белоруссия, 2014)

**3.** Докажите, что для любого натурального числа *k*, меньшего 20142014, существует число *n*, делящееся на 20142014, сумма цифр которого даёт остаток *k* при делении на 20142014. (Польша, 2008, второй тур, частный случай)

**4.** В ряд стоит *n* > 2 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких *n* он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена? (По мотивам Crux-2014)

**5.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**6.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 50. Делитель *d* натурального числа *n* называется *значительным*, если *d* < *n* и *d*2 > *n*. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный делитель? (По мотивам USA Online Math Open 2014)

**7.** Для чисел *x* > 1 докажите неравенство . Здесь [*a*] обо­значает целую часть числа *a*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *a*. (А. Храбров)

**8.** Пусть *AL* — биссектриса треугольника *ABC*. Точка *N* на стороне *AB* такова, что ∠*BNL* = ∠*BAC*. *K* — точка пересечения *CN* и *AL*. Докажите, что если *BN* = *AC*, то *CL* = *CK*. (А. Антропов)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На 41 клетке шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 26 убрать с доски так, что разноцветные короли не будут бить друг друга. (А. Пастор, А. Храбров, неверный перевод с сербского)

**2.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если её муж подарил какой-то из остальных женщин не меньше роз, чем ей. Оказалось, что для каждой женщины есть мужчина, который ей подарил столько же роз, сколько ее муж. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась. (Белоруссия, 2014, радикальное упрощение)

**3.** Числа *A* и *B* записываются одними восьмёрками, может ли сумма цифр числа *AB* равняться миллиону? (Вариация на тему задачи из 6 класса)

**4.** По кругу стоит *n* > 2 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких *n* он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена? (По мотивам Crux-2014)

**5.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**6.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 50. Делитель *d* натурального числа *n* называется *значительным*, если *d* < *n* и *d*2 > *n*. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный делитель? (По мотивам USA Online Math Open 2014)

**7.** Для чисел *x* > 1 докажите неравенство . Здесь [*a*] обо­значает целую часть числа *a*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *a*. (А. Храбров)

**8.** Пусть *AL* — биссектриса треугольника *ABC*. Точка *N* на стороне *AB* такова, что ∠*BNL* = ∠*BAC*. *K* — точка пересечения *CN* и *AL*. Докажите, что если *BN* = *AC*, то *CL* = *CK*. (А. Антропов)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** В стране Лемурии ходят две валюты: динары и сольдо. Если лемур заплатит 20 динаров, то ему дадут холодильник и 4 сольдо сдачи. Если лемур заплатит 15 динаров, то ему дадут холодильник и 1 сольдо сдачи. Сколько динаров сдачи получит лемур, если заплатит за холодильник 14 сольдо? (Омские олимпиады)

**2.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если её муж подарил какой-то из остальных женщин не меньше роз, чем ей. Оказалось, что для каждой женщины есть мужчина, который ей подарил столько же роз, сколько ее муж. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась. (Белоруссия, 2014, радикальное упрощение)

**3.** Число *A* записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа 8*A* составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа *A*? (AMC)

**4.** В ряд стоит несколько (больше двух) лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. Докажите, что такими переключениями он может добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет выключена. (По мотивам Crux-2014)

**5.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**6.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 30. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный простой делитель? (USA Online Math Open 2014)

**7.** Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им (Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый? (Олимпиада С.-Пб ЮМШ, 2014)

**8.** Существуют ли такие натуральные *x* и *y*, при которых (*x*2+*x*+1)2+(*y*2+*y*+1)2 —квадрат натурального числа? (Белоруссия, II этап, 8 класс, 2012−13)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** По кругу стоит *n* > 2 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких *n* он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена? (По мотивам Crux-2014)

**2.** Существуют ли четыре различных натуральных числа таких, что если к произведению любых двух из них добавить единицу, то получится квадрат натурального числа? (Baltic Way, 2014, SL)

**3.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**4.** В футбольном турнире участвуют 6 команд. Чемпионат проходит в 5 туров, в каждом туре команды разбиваются на пары и играют друг с другом, любые две команды в течение чемпионата играют ровно 1 раз. После очередного тура больше всех очков имела команда «Тамбовские волки». Капитан этой команды обнаружил, что если эта команда в оставшихся турах наберёт ровно *n* очков, то выиграет турнир. Верно ли, что если эта команда наберёт больше *n* очков, то тоже выиграет турнир? (В футболе за победу даётся 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. В случае делёжки мест победитель определяется жребием.) (По мотивам KoMaL-2014)

**5.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно. (По мотивам USA Online Math Open 2014)

**6.** На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа. (Эстония, 2006)

**7.** Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам в сумме. Оказалось, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась. (Белоруссия, 2014)

**8.** Число *A* записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа 8*A* составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа *A*? (AMC)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** По кругу стоит *n*> 2 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких *n* он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена? (По мотивам Crux-2014)

**2.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно. (По мотивам USA Online Math Open 2014)

**3.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**4.** На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа. (Эстония, 2006)

**5.** Клетчатый прямоугольник разбит на уголки из трёх клеток. Докажите, что каждый из этих уголков можно окрасить в синий или красный цвет таким образом, чтобы никакие два одноцветных уголка не имели общего отрезка длины 2. (С. Берлов)

**6.** Число *А* записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа 8*А* составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа *А*? (AMC)

**7.** Хулиган Вася на экзамене по математике получил прямоугольный бланк, взял ножницы и начал резать его на части прямолинейными разрезами. Каждым разрезом он режет какой-нибудь из имеющихся кусков на две части. За время экзамена Вася успел сделать ровно 2014 разрезов. Вася утверждает, что среди полученных кусков оказалась ровно 403 восьмиугольника? Мог ли он оказаться прав? (По мотивам румынских олимпиад)

**8.** Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им (Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый? (Олимпиада С.-Пб ЮМШ, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно. (По мотивам USA Online Math Open 2014)

**2.** Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза? (А. Штерн)

**3.** На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа. (Эстония, 2006)

**4.** В стране Лемурии ходят две валюты: динары и сольдо. Если лемур заплатит 20 динаров, то ему дадут холодильник и 4 сольдо сдачи. Если лемур заплатит 15 динаров, то ему дадут холодильник и 1 сольдо сдачи. Сколько динаров сдачи получит лемур, если заплатит за холодильник 14 сольдо? (Омские олимпиады)

**5.** Число *А* записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа 8*А* составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа *А*? (AMC)

**6.** Хулиган Вася на экзамене по математике получил прямоугольный бланк, взял ножницы и начал резать его на части прямолинейными разрезами. Каждым разрезом он режет какой-нибудь из имеющихся кусков на две части. За время экзамена Вася успел сделать ровно 2014 разрезов. Вася утверждает, что среди полученных кусков оказалась ровно 403 восьмиугольника? Мог ли он оказаться прав? (По мотивам румынских олимпиад)

**7.** Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им (Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый? (Олимпиада С.-Пб ЮМШ, 2014)

**8.** По кругу стоит *n*> 2 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких *n* он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена? (По мотивам Crux-2014)