XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** При каких натуральных *n* существуют различные ненулевые числа *a*1, *a*2, ..., *an* такие, что набор чисел *ai*– совпадает с набором чисел *ai*? (Турция, второй этап, 2014)

**2.** Диагонали трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD* пересекаются в точке O под прямым углом. Известно, что *AB* > *CD* и ∠*A* = 90°. Биссектриса угла *A*O*D* пересекает *AD* в точке *E*, а прямая, проходящая через точку *E* параллельно *AB*, пересекает прямую *BC* в точке *F*. Докажите, что *EF* = *AD*. (IMOT, 2011)

**3.** Аяз выкладывает в ряд 52 карты обычной колоды, 26 красных и 26 чёрных. Если между двумя картами одного цвета нет других карт, их можно убрать. Сколько существует первоначальных расположений, при которых Аяз сможет убрать все карты? (Саудовская Аравия, отбор на ММО, 2014)

**4.** В треугольнике *ABC* *AD* — биссектриса. Точка *E* на стороне *AC* такова, что ∠*EBC* = ∠*BCA*+∠*BAC*. Докажите, что *ED* — биссектриса угла *BEC*. (Фольклор)

**5.** Числа *x* ≥ 5, *y* ≥ 6 и *z* ≥ 7 удовлетворяют условию *x*2+*y*2+*z*2 ≥ 125. Найдите наименьшее возможное значение *x*+*y*+*z*. (Аргентина, 2013)

**6.** Натуральные числа *a*, *b*, *c* и *d* попарно взаимно просты. Число   
(*a*+*b*–*c*–*d*)(*a*–*b*+*c*–*d*)(*a*–*b*–*c*+*d*) делится на каждое из чисел *x* = *ab*+*cd*, *y* = *ac*+*bd* и *z* = *ad*+*bc*. Докажите, что хотя бы одно из чисел *x*, *y* и *z* чётно. (Олимпиада "Co*n*o Sur", 2012, shortlist)

**7.** Сумма чисел *x*1, *x*2, ..., *x*1007 равна 20142. Известно, что

. Найдите *x*6. (Сирия, 2012)

**8.** В стране *n* городов, некоторые из которых соединены беспосадочными  
авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что *n*−1 — точный квадрат. (Белоруссия, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 1914 и 2014 камней? (С. Волчёнков)

**2.** Диагонали трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD* пересекаются в точке O под прямым углом. Известно, что *AB* > *CD* и ∠*A* = 90°. Биссектриса угла *A*O*D* пересекает *AD* в точке *E*, а прямая, проходящая через точку *E* параллельно *AB*, пересекает прямую *BC* в точке *F*. Докажите, что *EF* = *AD*. (IMOT, 2011)

**3.** По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты. (Вариация на тему задачи из высшей лиги)

**4.** В треугольнике *ABC* *AD* — биссектриса. Точка *E* на стороне *AC* такова, что ∠*EBC* = ∠*BCA*+∠*BAC*. Докажите, что *ED* — биссектриса угла *BEC*. (Фольклор)

**5.** Числа *x* ≥ 5 и *y* ≥ 6 удовлетворяют условию *x*2+*y*2 ≥ 125. Найдите наименьшее возможное значение *x*+*y*. (Аргентина, 2013; упрощение)

**6.** Сумма цифр одного натурального числа равна 10, а другого — 20. Какую наименьшую сумму цифр может иметь их разность (вычитается из большего числа меньшее)? (А. Голованов)

**7.** Сумма чисел *x*1, *x*2, ..., *x*1007 равна 20142. Известно, что

. Найдите *x*6. (Сирия, 2012)

**8.** В стране *n* городов, некоторые из которых соединены беспосадочными  
авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что *n*−1 — точный квадрат. (Белоруссия, 2014)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты. (Вариация на тему задачи из старшей группы)

**2.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 1914 и 2014 камней? (С. Волчёнков)

**3.** Дано натуральное число *n*. Оказалось, что сумма цифр числа 3*n* не меньше утроенной суммы цифр числа *n*. Докажите, что сумма цифр числа 4*n* не меньше суммы цифр числа *n*. (С. Берлов)

**4.** В стране *n* городов, некоторые из которых соединены беспосадочными  
авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что *n*−1 — точный квадрат. (Белоруссия, 2014)

**5.** Докажите, что если число 23*a*2+*ab*−*b*2 делится на 31, то число *a*−2*b* также делится на 31. (Д. Карпов, А. Пастор, А. Храбров)

**6.** Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты? (К. Кноп, олимпиада С.-Пб. ЮМШ, 2014)

**7.** Для любых положительных чисел *a* и *b* докажите неравенство (2*a*+*b*)4 ≥ (2*a*−*b*)4+64*a*2*b*2. (А. Храбров)

**8.** На стороне *AC* треугольника *ABC* выбрана такая точка *E*, что ∠*EBC* = ∠*BCA*+∠*BAC*. На стороне *BC* выбрана произвольная точка *D*. Докажите, что *AD*+*DE* > *AB*+*BE*. (А. Пастор по мотивам геометрии из старшей лиги)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты. (Вариация на тему задачи из старшей группы)

**2.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 2013 и 2014 камней? (С. Волчёнков)

**3.** Дано натуральное число *n*. Оказалось, что сумма цифр числа 3*n* не меньше утроенной суммы цифр числа *n*. Докажите, что сумма цифр числа 4*n* не меньше суммы цифр числа *n*. (С. Берлов)

**4.** Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке? (По мотивам эстонских олимпиад)

**5.** Докажите, что если число 7*a*2+*ab*−*b*2 делится на 29, то число *a*−2*b* также делится на 29. (Д. Карпов, А. Пастор, А. Храбров)

**6.** Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты? (К. Кноп, олимпиада С.-Пб. ЮМШ, 2014)

**7.** Для любых положительных чисел *a* и *b* докажите неравенство (2*a*+*b*)4 ≥ (2*a*−*b*)4+64*a*2*b*2. (А. Храбров)

**8.** На стороне *AC* треугольника *ABC* выбрана такая точка *E*, что ∠*EBC* = ∠*BCA*+∠*BAC*. На стороне *BC* выбрана произвольная точка *D*. Докажите, что *AD*+*DE* > *AB*+*BE*. (А. Пастор по мотивам геометрии из старшей лиги)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Есть два натуральных числа. Если прибавить их произведение к большему числу, получится 391. Какое число получится, если прибавить это произведение к меньшему числу? (Cayley contest)

**2.** Дан клетчатый квадрат 16×16. Вася выделил в нём 800 клетчатых прямоугольников. Может ли так случиться, что ни один из этих прямоугольников не накрывает другой? (Вариация задачи из высшей лиги 6-го класса)

**3.** Дано натуральное число *n*. Оказалось, что сумма цифр числа 3*n* не меньше утроенной суммы цифр числа *n*. Докажите, что сумма цифр числа 4*n* не меньше суммы цифр числа *n*. (С. Берлов)

**4.** Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке? (По мотивам эстонских олимпиад)

**5.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 2013 и 2014 камней? (С. Волчёнков)

**6.** Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты? (К. Кноп, олимпиада С.-Пб. ЮМШ, 2014)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**7.** Целые числа *a* и *b* удовлетворяют условию |*a*|+|*b*| = 1000. Какое наибольшее значение может принимать выражение |*a*−1000|+|*b*+1000|? (А. Храбров)

**8.** Разрежьте нарисованную справа фигуру на 5 частей и сложите из получившихся кусков квадрат. (С. Волченков по фольклорным мотивам)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Вася задумал натуральное число *a*, меньшее 1000, а Петя хочет его узнать. Для этого он называет какое-то натуральное число *b*, а Вася берёт число *ab*, раскладывает его на простые множители и называет Пете набор степеней, в которых эти простые числа входят в разложение *ab*, но при этом неизвестно, какому простому числу какая степень соответствует. Например, если Вася задумал 20, а Петя назвал 36, то Вася может дать ответ в виде: 2,1,4. Как Пете подобрать число *b* так, чтобы узнать Васино число? (С. Берлов по мотивам бразильской олимпиады)

**2.** Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты? (К. Кноп, олимпиада С.-Пб. ЮМШ, 2014)

**3.** Дан клетчатый квадрат 16×16. Вася выделил в нём 1200 клетчатых прямоугольников. Может ли так случиться, что ни один из этих прямоугольников не накрывает другой? (По мотвам Ирана-2014)

**4.** Дано натуральное число *n*. Оказалось, что сумма цифр числа 3*n* не меньше утроенной суммы цифр числа *n*. Докажите, что сумма цифр числа 4*n* не меньше суммы цифр числа *n*. (С. Берлов)

**5.** На окружности отмечено 17 точек. Некоторые из отрезков, соединяющих отмеченные точки, покрашены. Оказалось, что у любого четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках покрашено не больше одной стороны. Каково наибольшее возможное количество покрашенных отрезков? (С. Берлов)

**6.** Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке? (По мотивам эстонских олимпиад)

**7.** Учительница математики написала на доске четырёхзначное число, в котором все цифры различны и не равны нулю, и вызвала к доске шестиклассников Петрова и Сидорова. Один из них отличник, и делает только верные утверждения, а другой двоечник и делает только неверные утверждения. Каждый сделал по 2 утверждения. Петров сказал: «Одна из цифр этого числа равна сумме всех остальных. Вторая цифра самая большая». Сидоров сказал: «Вторая цифра не меньше трёх. Первая цифра делится на все остальные». Какое число написала учительница? (Найдите все возможные варианты ответа). (А. Штерн)

**8.** Все клетки квадрата 3×3 как-то раскрашены в черный и белый цвета. На какую-то белую клетку прилетела божья коровка. С любой белой клетки она может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а с черной – никуда не может. После каждого перехода все клетки, соседние по стороне с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска квадрата, которая позволит коровке посетить каждую клетку не менее 10 раз? (А. Говорова; усиление)

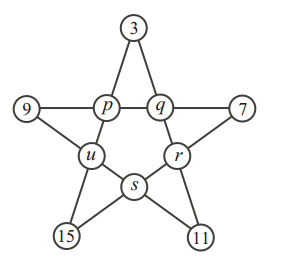
XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Имеется много карт, каждая из которых либо король, либо дама, либо валет. Карт пиковой масти среди них нет. Можно ли разложить по кругу 10 кучек по три карты разной масти так, чтобы двух одинаковых кучек не было, никакие две соседние кучки не содержали одинаковых карт, а любые две не соседние кучки содержали хотя бы по одной одинаковой карте? (Тайвань-2014)

**2.** Даня смотрит на равенство: 202 × \_\_ + 212 × \_\_ + 222 × \_\_ = 2014 и хочет вписать на подчёркнутые места цифры так, чтобы сделать равенство верным. Объясните, почему у Дани ничего не получится. (Олимпиада С.-Пб ЮМШ, 2014)

**3.** В вершинах пятиконечной звёздочки расставлены числа 3, 7, 11, 15, 9. В пяти вершинах внутреннего пятиугольника в некотором порядке расставлены числа 19, 21, 23, 25, 27. При этом вдоль каждого из пяти отрезков стоят четыре числа с одной и той же суммой. Какое число может стоять в вершине пятиугольника, соседней с теми вершинами звёздочки, в которых стоят числа 3 и 7? (Cayley contest)

**4.** На гранях игрального кубика написаны натуральные числа от 1 до 6. Верно ли, что из восьми одинаковых игральных кубиков можно ли сложить куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа? (Эстонские олимпиады)

**5.** Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты? (К. Кноп, олимпиада С.-Пб. ЮМШ, 2014)

**6.** В клетки таблицы 3×3 вписаны числа. Могут ли суммы чисел в строках и суммы чисел в столбцах быть шестью последовательными натуральными числами? (Фольклор)

**7.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 10 и 19 камней? (С. Волчёнков)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

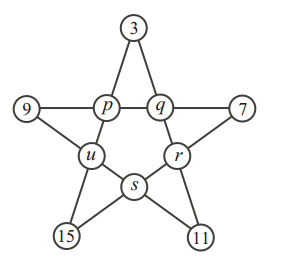
**8.** Разрежьте нарисованную справа фигуру на 5 частей и сложите из получившихся кусков квадрат. (С. Волченков по фольклорным мотивам)

XLIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЯРОСЛАВЛЬ, 29.11-05.12.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Имеется много карт, каждая из которых либо король, либо дама, либо валет. Карт пиковой масти среди них нет. Можно ли разложить по кругу 10 кучек по три карты разной масти так, чтобы двух одинаковых кучек не было, никакие две соседние кучки не содержали одинаковых карт, а любые две не соседние кучки содержали хотя бы по одной одинаковой карте? (Тайвань-2014)

**2.** Учительница математики написала на доске четырёхзначное число, в котором все цифры различны и не равны нулю, и вызвала к доске шестиклассников Петрова и Сидорова. Один из них отличник, и делает только верные утверждения, а другой двоечник и делает только неверные утверждения. Каждый сделал по 2 утверждения. Петров сказал: «Одна из цифр этого числа равна сумме всех остальных. Вторая цифра самая большая». Сидоров сказал «Вторая цифра не меньше трёх. Первая цифра делится на все остальные». Какое число написала учительница? (Найдите все возможные варианты ответа) (А. Штерн)

**3.** В вершинах пятиконечной звёздочки расставлены числа 3, 7, 11, 15, 9. В пяти вершинах внутреннего пятиугольника в некотором порядке расставлены числа 19, 21, 23, 25, 27. При этом вдоль каждого из пяти отрезков стоят четыре числа с одной и той же суммой. Какое число может стоять в вершине пятиугольника, соседней с теми вершинами звёздочки, в которых стоят числа 3 и 7? (Cayley contest)

**4.** Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке? (По мотивам эстонских олимпиад)

**5.** Четыре клетки квадрата 2×2 как-то раскрашены в черный и белый цвета. На белую клетку залезла божья коровка. С любой белой клетки она может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а с черной – никуда не может. После каждого перехода обе клетки, соседние с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска квадрата, которая позволит коровке ползать вечно? (А. Говорова)

**6.** Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 10 и 19 камней? (С. Волчёнков)

**7.** Есть два натуральных числа. Если прибавить их произведение к большему числу, получится 391. Какое число получится, если прибавить это произведение к меньшему числу? (Cayley contest)

**8.** Волшебник-недоучка умеет превращать мячик в два мячика и бирюльку, либо три мячика в четыре кубика и бирюльку. Он зашел в комнату, где лежали только мячики, и через некоторое время там оказались 2012 кубиков, 1000 бирюлек и ни одного мячика. Сколько мячиков было в комнате сначала? (С. Усов)