ES 1

Sia dato il sis. lineare:

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ triangolare} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{array}$$

① MOV STATO CON $x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$ $\quad u(t) = \bar{u} \quad t \geq 0$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{at} x_{2,0} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cancel{b\, u(\tau)}^{\,\emptyset} d\tau = e^{-3t} x_{2,0} \quad t \geq 0$$

$a = -2$

$$x_1(t) = e^{at} x_{1,0} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} (x_2(\tau) + u(\tau))\, d\tau = e^{-2t} x_{1,0} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (e^{-3\tau} x_{2,0} + \bar{u})\, d\tau = e^{-2t} x_{1,0} + \int_0^t e^{-2t} e^{2\tau} (e^{-3\tau} x_{2,0} + \bar{u})\, d\tau$$

$$= e^{-2t} x_{1,0} + e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} x_{2,0}\, d\tau + e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \bar{u}\, d\tau =$$

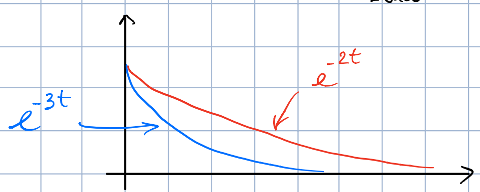
$$= e^{-2t} x_{1,0} + x_{2,0}\, e^{-2t} \left[\frac{e^{-\tau}}{-1} \right]_0^t + \bar{u}\, e^{-2t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_0^t = e^{-2t} x_{1,0} + x_{2,0}\, e^{-2t} (1 - e^{-t}) + \frac{1}{2} \bar{u}\, e^{-2t} (e^{2t} - 1)$$

$$x_1(t) = e^{-2t} x_{1,0} + e^{-2t} x_{2,0} - e^{-3t} x_{2,0} + \frac{1}{2} \bar{u} (1 - e^{-2t}) \qquad t \geq 0$$

$$x_2(t) = e^{-3t} x_{2,0}$$

② INDIVIDUARE IL MODO DOMINANTE $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3 \Rightarrow e^{\lambda_1 t} = e^{-2t}, \; e^{\lambda_2 t} = e^{-3t}$

↳ Lento



Il modo dominante è e^{-2t}

③ CALCOLARE EQ DEL SISTEMA PER $u(t) = \bar{u} = 2 \quad t \geq 0$

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + \bar{u} \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases}$$

Mov. costanti nel tempo $\Rightarrow \frac{d}{dt} = \emptyset$

$$\begin{cases} 0 = -2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 = -3\bar{x}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ 2\bar{x}_1 = \bar{u} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = \emptyset \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

④ Mov. stato a partire da $x_0 = \bar{x} + \epsilon = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$ (equilibrio perturbato)

$$x_1(t) = e^{-2t}(1 + \epsilon_1) + e^{-2t} \epsilon_2 - e^{-3t} \epsilon_2 + 1 - e^{-2t} \qquad x_2(t) = e^{-3t} \epsilon_2 \qquad t \geq 0$$

⑤ Cosa succede $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = 1 \qquad \lim_{t \to +\infty} x_2(t) = \emptyset$$

⑥ STAB. SISTEMA MEDIANTE CRITERIO AUTOVALORI

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -3$$

Asintoticamente stabile poichè gli autovalori hanno $Re(\lambda_i) < 0$

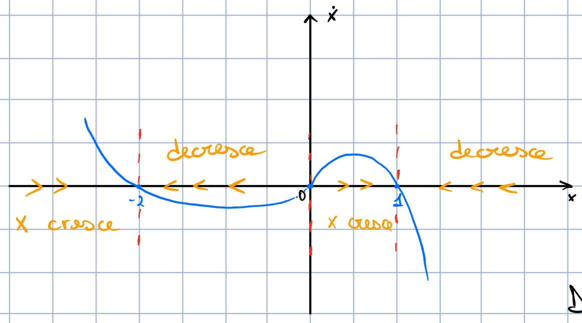
⑦ È in contrasto con ④? No, il fatto che non tenda a 0 per tutti gli ingressi $\neq 0$ serve per il controllo che imponiamo al sistema. Mov. libero tende a $\emptyset$

ES. 2 Sis. NON Lineare $S: \begin{cases} \dot{x} = 2x - x^3 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$

① Calcolare eq. di S

$\begin{cases} 0 = 2\bar{x} - \bar{x}^3 - \bar{x}^2 \\ \bar{y} = 3\bar{x} \end{cases}$ $\quad -\bar{x}(\bar{x}^2 + \bar{x} - 2) = 0 = \quad -\bar{x}(\bar{x}+2)(\bar{x}-1) = 0$ Abbiamo 3 equilibri: $\bar{x} = -2$ EQ 1, $\bar{x} = 0$ EQ 2, $\bar{x} = 1$ EQ 3

② Studio stabilità per via grafica



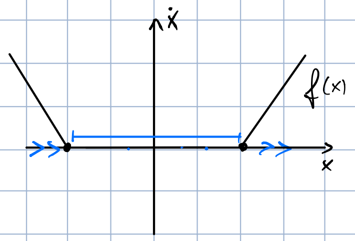
$\dot{x} = \underbrace{2x - x^3 - x^2}_{f(x,u) = f(x)} = -x(x+2)(x-1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Cosa vuol dire $\dot{x} = f(x)$? Quel che ci interessa è il segno: dove $\dot{x} > 0$ e dove $\dot{x} < 0$.
Dividiamo il grafico dove $f(x) >$ e $f(x) < 0$: dove $f(x) > 0$ la derivata sta crescendo e anche la x.

Se mi sposto da $(-2,0)$ verso dx o sx la f mi riporta in $(-2,0)$, in $(0,0)$ è uno stato di eq. instabile: verso dx mi sposta in $(1,0)$, verso sx mi sposta verso $(-2,0)$; analogamente a $(-2,0)$, anche $(1,0)$ è asintoticamente stabile e una perturbazione riporta in $(1,0)$.

ES. EQUILIBRIO STABILE



③ Modello lineare tg a $\bar{x}$

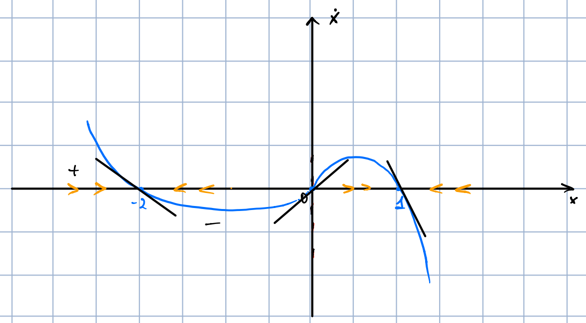
$\dot{x} = f(x) \qquad \delta x = x - \bar{x} \qquad \delta S: \ \delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \delta x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 3x^2 - 2x$ $\qquad$ EQ 1 $\bar{x} = -2$

$\delta S_1 \quad \delta\dot{x} = (2 - 3\cdot 4 + 4)\delta x = -6\delta x \qquad \lambda = -6 \qquad$ AS. STABILE

$\delta S_2 \quad \delta\dot{x} = (2 - 3\cdot 0 - 2\cdot 0)\delta x = 2\delta x \qquad \lambda = 2 \qquad$ INSTABILE

$\delta S_3 \quad \delta\dot{x} = (2 - 3 - 2)\delta x = -3\delta x \qquad \lambda = -3 \qquad$ AS. STABILE



ES. 3

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 + 2u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

① Det. i valori di α t.c. S è AS. STABILE

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \left| \begin{bmatrix} \lambda-\alpha & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \cdot (-1)^{1+2} \ldots + (\lambda+1)(-1)^{2+2}\left[(\lambda-\alpha)\lambda + 2\right] + 0 \ldots =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-\alpha)\lambda + 2(\lambda+1) =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2 - \alpha\lambda) + 2\lambda + 2 = \lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda + 2\lambda + 2$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(1-\alpha) + \lambda(2-\alpha) + 2 = 0$$

$$= \quad \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}$$

X CASA

PROVARE QUESTO METODO

$$(\lambda+1)(\lambda^2 - \alpha\lambda + 2) = 0$$

$$-\alpha > 0 \qquad \boxed{\alpha < 0}$$

② $\lim_{t \to +\infty} x(t) \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) \qquad t \geq 0$

$$\alpha = -0{,}5 \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u(t) = \bar{u} = 1$$

$$S: \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\bar{x}_1 + \bar{x}_3 \\ 0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + 2 \\ 0 = -2\bar{x}_1 \\ \bar{y} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 2 \\ \bar{x}_3 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AS. STABILE $\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y} = 2$$

ES 4 X CASA

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 12x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

① Mov. stato con $x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}$
(farlo come comb. lin. dei modi)

② $\exists\, x_0$ t.c. $x(t) \longrightarrow \infty$? (trovarne uno)

③ Accade $\forall x_0$? Trovare tutti gli x_0 per cui non accade.

④ Stabilità del sistema col criterio autovalori

Sol. ① $x_1(t) = (3x_{1,0} + x_{2,0})\, e^{-t} - (2x_{1,0} + x_{2,0})\, e^{t} \qquad t \geq 0$

$x_2(t) = (6x_{1,0} + 3x_{2,0})\, e^{t} - (6x_{1,0} + 2x_{2,0})\, e^{-t}$

② Sì $\quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ NO $\quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ -2x_{1,0} \end{pmatrix}$ ④ $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow$ INSTA.