$$R(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{100}}$$

$$e \longrightarrow \boxed{R(s)} \longrightarrow u$$

$$U(s) = R(s)\,E(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{100}}\,E(s)$$

$$U(s) + \frac{s}{100}U(s) = E(s)$$

$$100\,U(s) + s\,U(s) = 100\,E(s)$$

$$\Longrightarrow \frac{du(t)}{dt} + 100\,u(t) = 100\,e(t)$$

REALIZZAZIONE DIGITALE DEL CONTROLLORE

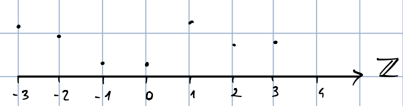
t TEMPO CONTINUO

$\downarrow$

k TEMPO DISCRETO

SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO (TD)

$s(k),\quad k \in \mathbb{Z}$



$y(k) = h(u(k)),\quad k \in \mathbb{Z}\qquad S$ STATICO

EQ. DI STATO NEI S DINAMICI

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

$\leftarrow$ parto in $k=0$, conosco lo stato del sistema, ricavo $k=1$

$\uparrow$ proprio se compare la $u(k)$

Caso lineare

STATICO: $y(k) = \alpha\,u(k)$

DINAMICO: $\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$

per i sistemi dinamici lineari, $x(k) = x_L(k) + x_F(k)$

$y(k) = y_L(k) + y_F(k)$

cioè vale il principio di sovrapposizione effetti

Formula di Lagrange per il calcolo del movimento

$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$

$x(0) = x_0,\quad u(k) = \tilde{u}(k),\quad k \in \mathbb{N}_0$

$x_L(k) = ?$

$x_L(0) = x_0,\qquad x_L(1) = A x_0,\quad x_L(2) = A^2 x_0 \quad\longrightarrow\quad x_L(k) = A^k x_0$

$x_F(0) = 0,\qquad x_F(1) = A x_F(0) + B\tilde{u}(0) = B\tilde{u}(0)$

$x_F(2) = A x_F(1) + B\tilde{u}(1) = AB\tilde{u}(0) + B\tilde{u}(1)$

$x_F(3) = A x_F(2) + B\tilde{u}(2) = A^2B\tilde{u}(0) + AB\tilde{u}(1) + B\tilde{u}(2)$

$$x_F(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B\,\tilde{u}(h),\quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow\quad x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B\,\tilde{u}(h),\quad k \in \mathbb{N}_0$$

A tempo continuo non ci sono andamenti oscillatori a ordine 1, a tempo discreto potrebbero

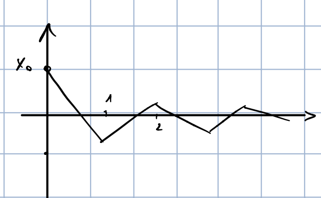
A T.C. $\quad x_L(t) = e^{At}x_0,\ t \geq 0\qquad A = [a]$

$n = 1\qquad a < 0$

A T.D. $\quad x(k+1) = -\frac{1}{2}x(k) + u(k)$

$x_L(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k x_0,\quad k \geq 0$

$\uparrow$ andamento oscillatorio



Stabilità del movimento per sistemi lineari a tempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$x(0) = x_0$, $u(k) = \tilde{u}(k)$, $k \geq 0$

$\hookrightarrow x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B\tilde{u}(h)$

$x(0) = \tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$, $u(k) = \tilde{u}(k)$, $k \geq 0$

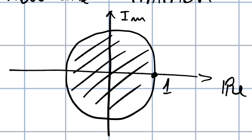
$$x_{\tilde{x}_0}(k) = A^k \tilde{x}_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B\tilde{u}(h)$$

$$x_{\tilde{x}_0}(k) - x_{x_0}(k) = A^k \tilde{x}_0 - A^k x_0$$
$$= A^k(\tilde{x}_0 - x_0) = A^k \Delta x_0$$

Se va a 0 $\forall \Delta x_0$ piccolo è A.S.

Criterio degli autovalori (per A.S.) per i sistemi a tempo discreto

Il sistema lineare con matrice dinamica A è A.S. sse gli autovalori di A sono tutti in modulo strettamente minori di 1.



Regione di A.S. a T.D. $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$

Caso A diagonale: $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ $\quad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$

MODI λ_i^k

Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, T$ t.c. $A_d = T^{-1}AT$, $\quad A^k = T A_d^k T^{-1}$

Se A è non diagonalizzabile, $\lambda_i^k, k\lambda_i^k, \dots, k^h \lambda_i^k$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

$\lambda = \dfrac{1+s}{1-s}$ TRASFORMAZIONE BILINEARE

$|\lambda| < 1 \iff Re(s) < 0$ se λ sostituito con s e la parte reale delle radici del polinomio in s è < 0, posso applicare il criterio di Routh

$s = \alpha + i\omega$ $\quad \lambda = \dfrac{1+\alpha+i\omega}{1-\alpha-i\omega}$ $\quad |\lambda| = \dfrac{\sqrt{(1+\alpha)^2+\omega^2}}{\sqrt{(1-\alpha)^2+\omega^2}}$