POLITECNICO DI MILANO

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Ingegneria Informatica – Allievi da E a O)
Prof. Maria Prandini

Anno Accademico 2013/14

Appello del 18 luglio 2014

NOME ....

COGNOME ....

MATRICOLA ....

FIRMA ....

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

1. Si consideri il sistema non lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

1.1 Determinare lo stato $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]'$ e l'uscita di equilibrio $\bar{y}$ associati all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1 - 4\bar{x}_2^2 = 0 \\ -\bar{x}_2 + 1 = 0 \\ \bar{y} = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = 2 \\ \bar{y} = -1 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Calcolare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$, $t \geq 0$, associato all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e alla condizione iniziale $x_1(0) = \bar{x}_1 + \epsilon$ e $x_2(0) = \bar{x}_2$, dove ϵ è un parametro reale. Calcolare $y_\infty = \lim_{t \to +\infty} y(t)$. Giustificare quanto ottenuto.

Inizializzo $\dot{x}_2$ all'equilibrio, applico $\bar{x}_2$ e vedo che non dipende da x_1

$x_2(t) = \bar{x}_2 = 1$, $t \geq 0$

$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4$

$$x_1(t) = (2+\varepsilon)e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-\tau)} \cdot (-4)\, d\tau = (2+\varepsilon)e^{2t} + \left[e^{2t} \int_0^t -4 e^{-2\tau}\, d\tau = e^{2t} \left[+2 e^{-2\tau} \right]_0^t \right] =$$

$$= (2+\varepsilon)e^{2t} + 2 + 2e^{2t} = \varepsilon e^{2t} + 2$$

$y(t) = -2 - \varepsilon e^{2t} + 1 = -1 - \varepsilon e^{2t}, t \geq 0$

oppure

a) $x_{1,a}(0) = 2$ $\quad v_a(t) = -4$, $t \geq 0 \to x_{1,a}(t) = 2$

$x_1(t) = 2 + \varepsilon e^{2t}$

b) $x_{1,b}(0) = \varepsilon$ $\quad v_b(t) = 0$, $t \geq 0 \to x_{1,b}(t) = \varepsilon e^{2t}$

$y(t) = -2 - \varepsilon e^{2t} + 1 = -1 - \varepsilon e^{2t}$

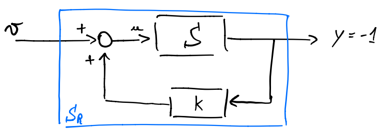
$$\lim_{t \to +\infty} y_\varepsilon(t) = \begin{cases} +\infty & \varepsilon < 0 \\ -1 & \varepsilon = 0 \\ -\infty, & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

1.3 Verificare che lo stato di equilibrio calcolato al punto 1.1 è instabile.

1.4 Al sistema non lineare descritto dalle equazioni (1) viene applicata la retroazione algebrica sull'uscita

$$u(t) = ky(t) + v(t),$$

dove k è un parametro reale.
(a) scrivere le equazioni del sistema retroazionato con ingresso v ed uscita y;



$$S_R : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + k(-x_1(t) + x_2(t)) + v(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

(b) al sistema retroazionato viene applicato l'ingresso costante $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$. Determinare (se è possibile) k e $\bar{v}$ in modo che il sistema retroazionato ammetta lo stato $\bar{x} = [\bar{x}_1\ \bar{x}_2]'$ calcolato al punto 1.1 come stato di equilibrio <u>asintoticamente stabile</u> associato a $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$.

$$\begin{cases} 4 - 4 \cdot 1 = 0 \quad \checkmark \\ -1 + K(-1) + \bar{v} = 0 \longrightarrow \bar{v} = 1 + K \end{cases}$$

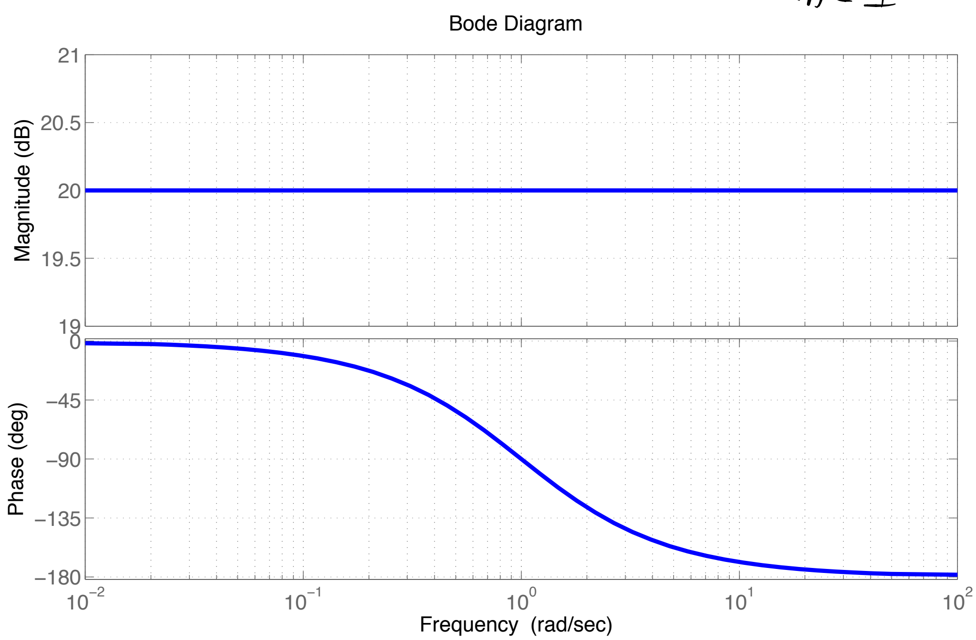
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -K & -1+K \end{bmatrix} \xrightarrow[\det(\lambda I - A)]{} \left| \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 8 \\ K & \lambda + 1 - K \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 2)(\lambda + 1 - K) - 8K = \lambda^2 + \lambda - \lambda K - 2\lambda - 2 + 2K - 8K =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(1+K) - 2 - 6K$$

$$\begin{cases} -1 - K > 0 \longrightarrow K < -1 \\ -2 - 6K > 0 \longrightarrow K < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow k < -1 \quad \text{per avere } S \text{ A.S.}$$

2. In figura sono riportati i diagrammi di Bode esatti della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare del primo ordine.

$n = 1$



2.1 Dire, motivando la risposta, quanto valgono tipo, guadagno, poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema. Scrivere l'espressione di $G(s)$. É possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema da $G(s)$?

$\underbrace{g = 0}_{\text{perchè parte piatto}}$

$\underbrace{\mu = 10}_{\text{parte da 20 e capisco il segno dalla fase}}$

$p = -1$

$z = 1$

$$G(s) = 10 \frac{(1-s)}{(1+s)}$$

Il S è A.S. perchè $n=1$ e l'unico polo è -1

2.2 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime $y_\infty(t)$ associata all'ingresso $u(t) = 5 + sen(t) + cos(100t)$. In quanto tempo $y(t)$ tende a $y_\infty(t)$?

Applico principio sovrapposizione effetti:

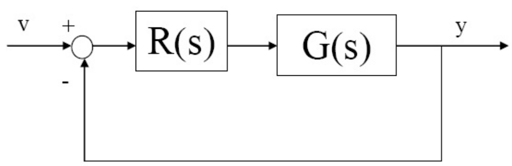
$$y_\infty(t) = 50 + |G(i1)|\, sen(t + \measuredangle G(i1)) + |G(i100)| \cos(100t + \measuredangle G(i100))$$

$$= 50 - 10\cos(t) - 10\cos(100t)$$

$$T_a = 5\tau_d = 5\,udt$$

2.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema allo scalino $u(t) = sca(t)$ (specificare valore iniziale, finale e tempo di assestamento).

2.4 Il sistema viene retroazionato come in figura.



Posto $R(s) = \frac{k}{s}$, funzione di trasferimento di un sistema lineare di ordine 1, dire, motivando la risposta: $\mu_R = 1$

(a) per quali valori di $k > 0$ il criterio di Bode è applicabile. A tale scopo disegnare il diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata a $L(s) = R(s)G(s)$ con $k = 1$.

1) No λ con $\mathrm{Re} \geq 0$ ✓

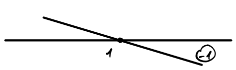
2) $L(s) = R(s)G(s)$ no poli con $\mathrm{Re} > 0$

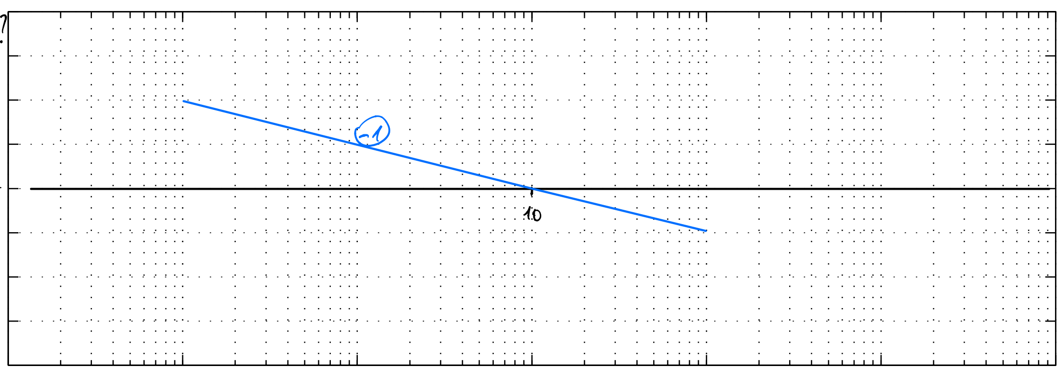
3) ω_c ben definita?

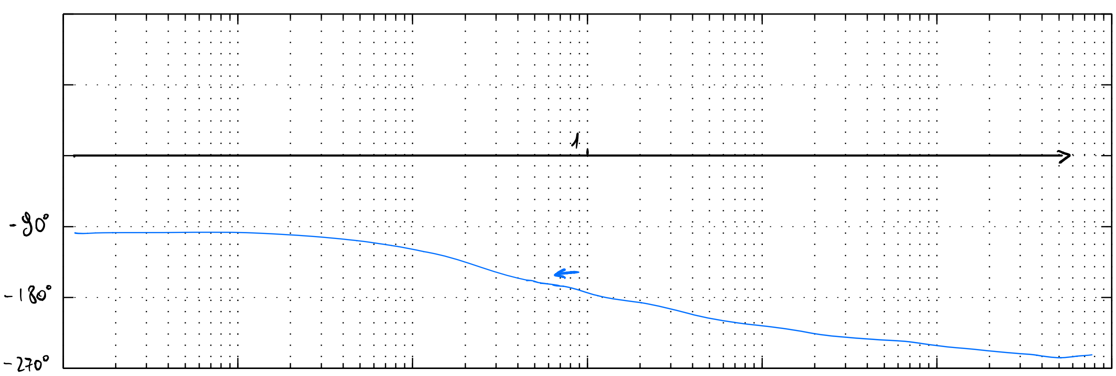
$L(s) = 10 \cdot \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{k}{s}$

$k=1$

$R(s) = \frac{1}{s}$ che ha diag. Bode







(b) per quali valori di $k > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

K è >0 e fase non cambia, $\frac{1}{s}$ dà contributo -90 uniforme

2) $\varphi_m > 0 \iff 0 < K < \frac{1}{10}$

3. Si consideri il sistema lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento

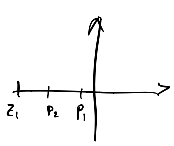
$$G(s) = \frac{10(1 + 0.01s)}{(1 + 50s)(1 + 0.05s)^2}$$

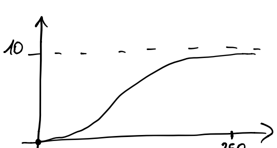
3.1 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta del sistema allo scalino $u(t) = sca(t)$ (specificare valore iniziale, finale e tempo di assestamento).

1 zero : -10^2

3 poli : $p_1 = -\frac{1}{50}$ $\quad p_2 : -20$

$\mu = 10$





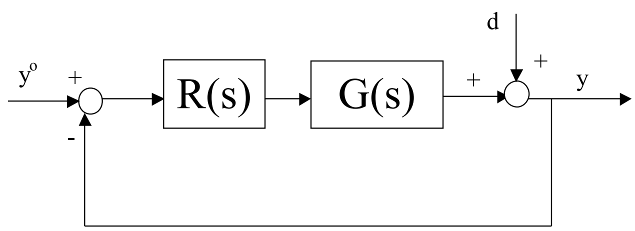
parte da 0 perchè è strett. proprio

$T_a = 5\tau_d = 250$ udt

3.2 Determinare la funzione di trasferimento di un modello di ordine ridotto del sistema che abbia le stesse caratteristiche per quanto riguarda la risposta allo scalino.

$\tilde{G}(s) = \dfrac{10}{1+50s}$ stesso guadagno e tempistica ⇐ qui la deriv. prima non è $=0$ ma è trascurabile rispetto alla scala dei tempi

3.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene inserito nello schema di controllo in figura:



Determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ di un regolatore PI in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) l'errore $e(t) = y°(t) - y(t)$ a transitorio esaurito è nullo quando $y°(t) = Asca(t)$ e $d(t) = Bsca(t)$, dove $A \in [-1, 1]$ e $B \in [0.5, 1]$;

ii) i transitori si esauriscono in circa 50 unità di tempo, senza oscillazioni ripetute;

ii) il disturbo sinusoidale $d(t) = sen(\omega t)$ alle pulsazioni $\omega \leq 0.01$ viene attenuato sull'uscita y di un fattore maggiore o uguale a 10.

Scrivere $R(s)$ nella forma standard: $R(s) = k\left(1 + \dfrac{1}{sT_I}\right)$.

1) Integratore nell'anello : $g_L = 1 \rightarrow I$

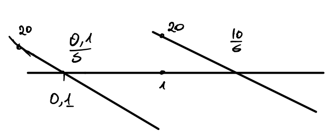
2) $\varphi_m > 70°$ $\quad F(s) \simeq \dfrac{\mu_F}{1+\frac{s}{\omega_c}}$ $\quad \omega_c \simeq 0{,}1$

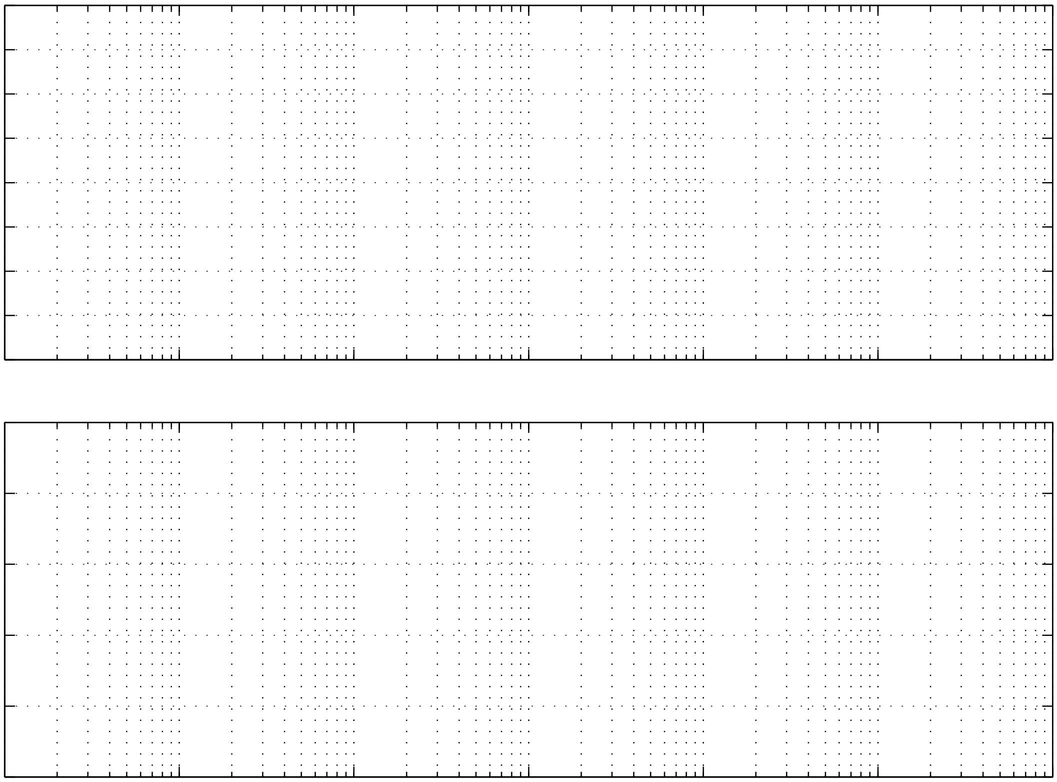
3) Per essere attenuato un disturbo in linea d'andata deve stare nella banda passante

$|L(i\omega)|_{dB} > 20 \quad \omega \leq 0{,}01$

$R(s)$ P.I. : $R(s) = K \dfrac{sT_I + 1}{s+T_I}$ $\quad \omega_c \simeq 0{,}1$

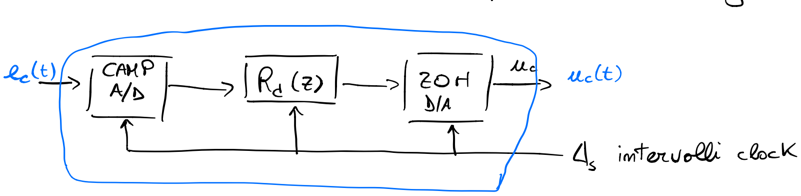
$R(s) = \dfrac{1+50s}{s} \cdot \dfrac{1}{100}$





4. Descrivere in modo sintetico la struttura di un regolatore realizzato in tecnologia digitale per il controllo in retroazione di un sistema lineare a tempo continuo.

Schema con convertitori e filtro anti aliasing da inserire nello schema di controllo:



$[0, \omega_c]$ $\quad \Delta_s$ T.C. $\omega_N \frac{\pi}{\Delta_s} \simeq 5\omega_c$

$\omega_F \simeq \frac{1}{2}\, \omega_N$