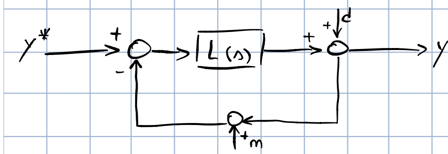
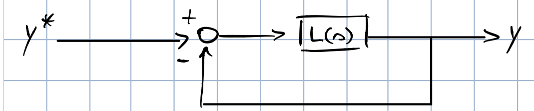
ANALISI DI SISTEMI RETROAZIONATI CON RETROAZIONE NEGATIVA UNITARIA



$L(s) = R(s)\,G(s)$

Caratteristiche che analizzeremo:
- A.S.
- Prestazioni statiche e dinamiche
  (statiche → regime)

A.S. (proprietà del sistema autonomo, senza ingressi)



Preserviamo uno degli ingressi per ora, cioè y^*

Ipotesi preliminare: $L(s)$ è strettamente propria: quando ho retroazione la FdT è strett. propria e grado del denominatore è maggiore del numeratore.
Le eventuali parti nascoste del sistema con FdT $L(s)$ sono A.S. ($Re < 0$)

⚠ Mai cancellare singolarità a $Re \geq 0$! Altrimenti non posso avere A.S.

Il # poli ad anello chiuso nel legame $y - y^*$ è uguale al # poli ad anello aperto? No.

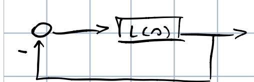
FdT $y^* \rightarrow y$: $F(s) = \dfrac{L(s)}{1 + L(s)}$ $\qquad L(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ coprimi $\longrightarrow F(s) = \dfrac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} = \dfrac{N(s)}{D(s) + N(s)}$ ← sono ancora coprimi, quindi non ci saranno ulteriori λ nascosti

⇒ Basta guardare i poli ad anello chiuso per concludere le proprietà di A.S.

$\boxed{1 + L(s)}$ ← Soluzioni: poli ad anello chiuso
Equazione caratteristica

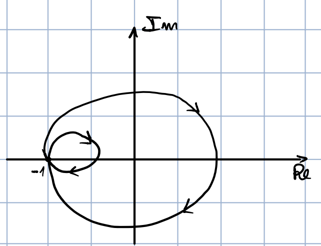
CRITERIO DI NYQUIST

Dato il sistema retroazionato:



con il sistema ad anello aperto con FdT $L(s)$ senza parti nascoste non A.S., la CNS per la sua AS è che il numero di giri compiuti dal Diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno a -1 sia ben definito e pari al numero di poli di $L(s)$ con $Re > 0$.

I giri compiuti in senso antiorario sono contati come positivi, quelli in senso orario come negativi.



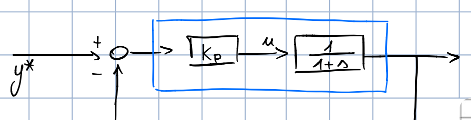
DI GIRI NON BEN DEFINITO

Applichiamo il C. di Nyquist

$$\begin{cases} L(i\bar\omega) = -1 \\ 1 + L(i\bar\omega) = 0 \end{cases} \longrightarrow i\bar\omega \text{ è soluzione}$$

⇒ Non è AS

es.

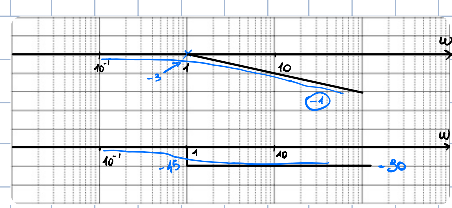


$L_{K_p}(s) = \dfrac{K_p}{1+s}$ $\qquad n_L = 1$

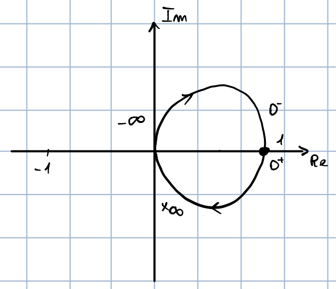
Disegno il diag. di Nyq. di $L(s)$, che è parametrica in K_p

$K_p = 1 \rightarrow L_{K_p}(s) = \dfrac{1}{1+s}$

Diag. di Bode di modulo e fase

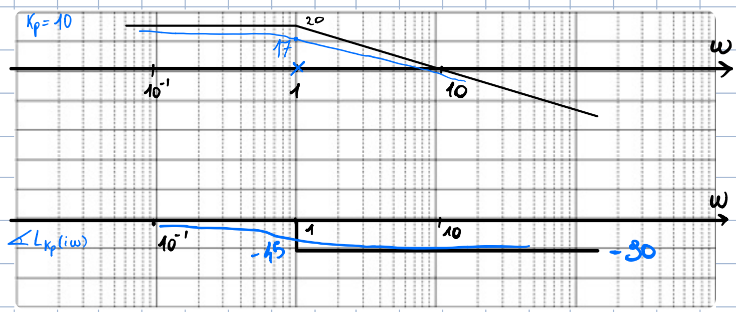


$g = 0 \qquad \mu_L = 1 \qquad p = -1$



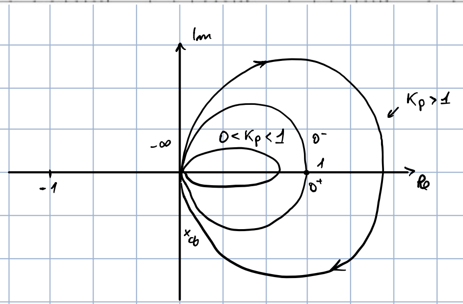
$N = 0 \leftarrow$ # giri attorno a -1 $\Longrightarrow S$ è A.S.
$P = 0 \leftarrow$ # poli con $Re > 0$
$K_p = 1$

· $K_p > 0$ la fase non cambia (fase di un numero $\mathbb{R}$ è 0 che si somma)
cambia il modulo (si sommano valori in dB)



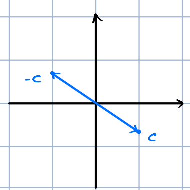
$$|L_{K_p}(i\omega)|_{dB} = \left|\frac{1}{i\omega + 1}\right|_{dB} + \underbrace{|K_p|_{dB}}$$
≥ 0 se $|K_p| \geq 1$
< 0 se $|K_p| < 1$

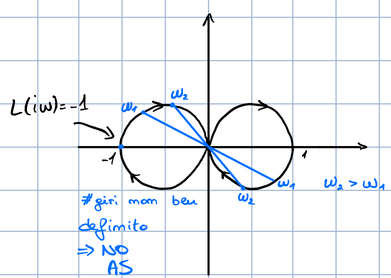
Sistema retroaz. A.S. $K_p > 0$

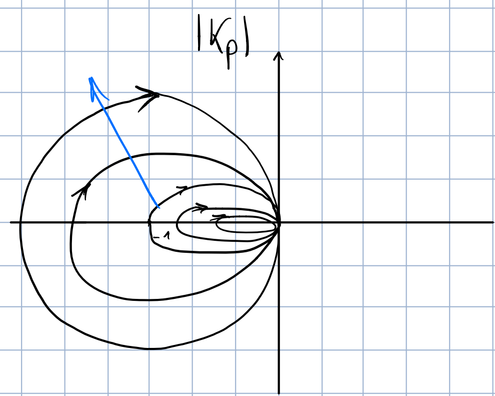


$\left.\begin{array}{l} N = 0 \\ P = 0 \end{array}\right\}$ A.S.

· $K_p = -1$







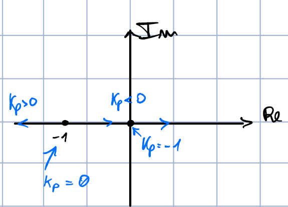
$\Longrightarrow$ AS per $K_p > -1$
NON AS per $K_p \leq -1$
AS per $-1 < K_p < 0$

CALCOLO POLI AD ANELLO CHIUSO

$$1 + L_{K_p}(\bar{s}) = 0$$
$$1 + \frac{K_p}{\bar{s} + 1} = 0$$

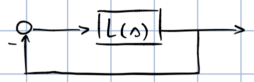
$\bar{s} + 1 + K_p = 0 \longrightarrow \bar{s} = -1 - K_p < 0 \longrightarrow \boxed{K_p > -1}$ A.S.

$K_p = -1 \longrightarrow \bar{s} = 0$ STAB. SEMPLICE perchè è l'unico autovalore e a $Re = 0$



CRITERIO DI BODE

Si consideri il sistema



Ip: 1) le eventuali parti nascoste del sistema con FdT $L(s)$ sono A.S.

2) $L(s)$ non ha poli con $Re > 0$

3) $|L(i\omega)| = 1$ per uno ed un solo valore di ω, detto pulsazione critica (ω_c)

Se valgono queste 3, allora:

CNS per l'AS del sistema retroazionato è che valgano le seguenti 2 condizioni:

1) $\mu_L > 0$ (Guadagno di $L(s) > 0$)

2) $\varphi_m = 180° - |\measuredangle L(i\omega_c)| > 0$ (Margine di fase positivo) → quanto manca alla fase di ω per arrivare a 180

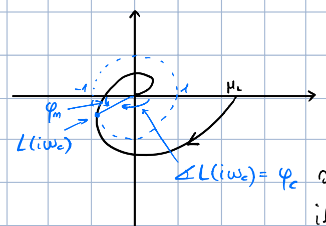


Diagramma polare di $L(s)$: parte dal guadagno ($L(i0)$) e valuto così in cui non ci sono poli con $Re = 0$. Al crescere di ω si forma il diagramma polare.

Interpretazione di fase critica e condizione 3: i punti del piano complesso che danno modulo = 1 sono tutti i punti della circonferenza di r=1 nell'origine del piano $\mathbb{C}$ che intersecano il diagramma. $|L(i\omega_c)| = 1$ in un solo punto, come stabilito dalla cond. 3

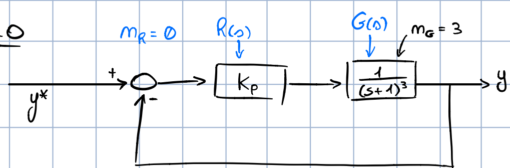
$\mu_L > 0$, vuol dire che il margine di fase è positivo: se disegno il vettore corrispondente al numero $\mathbb{C}$ $L(i\omega_c)$, evidenzio la sua fase, φ_c, la condizione "margine fase" > 0 significa che questa fase è in modulo < 180° (il diagramma polare non avrà giri attorno a −1). φ_m è il margine di fase (quanto manca a φ_c per 180°), se è < 0 e $|\varphi_c| > 180°$.

Perchè bisogna evitare −1? Perchè siccome per ipotesi $L(s)$ non ha poli con $Re > 0$, non ha A.S. per C. di Nyquist (in anello chiuso).

Il criterio di Bode è un caso particolare del Criterio di Nyquist per sistemi ad anello aperto senza poli a $Re > 0$ e le condizioni traducono la condizione di 0 giri in −1 (CNS per A.S. per Nyquist).

La condizione 3 garantisce che a un certo punto attraverso la circonferenza r=1 i poli rimangono al suo interno senza uscire.

Esempio



Per quali valori di $K_p > 1$ il sistema di controllo è AS?

Ipotesi 1 e 2 soddisfatte ✓

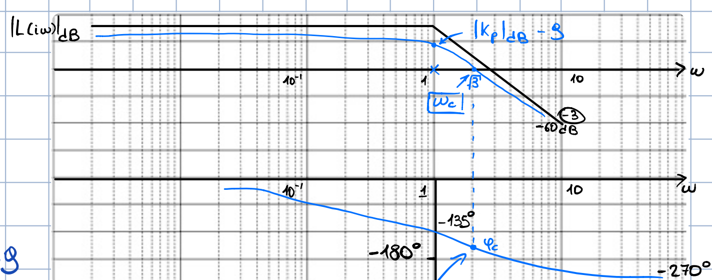
$$L(s) = \frac{K_p}{(s+1)^3}$$

$p_1 = p_2 = p_3 = -1$

∅ Poli di $L(s)$ con $Re > 0$

$$|L(i\omega)| = \left|\frac{K_p}{(i\omega+1)^3}\right| = |K_p| - |(i\omega+1)^3|$$

$$(\sqrt{\omega^2+1})^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \xrightarrow{dB} \sim 9$$

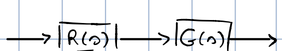


$|L(i\omega)|$ deve partire da un valore > 0 perchè altrimenti violerebbe la condizione 3, e poi attraversare l'asse a 0 dB.

φ_c sempre negativa perchè $L(s)$ strett. propria, attraversa con pendenza negativa, bilanciamento a favore dei poli ⇒ φ_c neg.

se $|\varphi_c|$ è sopra 180° ho l'AS, se è sotto non rispetta la II condizione

1) No λ nascosti con $Re \geq 0$ nel sistema ✓



2) No poli con $Re > 0$ in $L(s) = R(s)\,G(s)$ ✓

3) ω_c ben definita ✓

CNS PER A.S. SISTEMA RETROAZIONATO

1) $\mu_L = K_p > 0$ Guadagno di $L > 0$, soddisfatta perchè $K_p > 1$

2) $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| > 0$ (Margine di fase − |fase critica|) > 0

Ci aspettiamo un valore limite di K_p oltre al quale $\varphi_m \leq 0$ perchè φ_c è −270°, prima è inferiore e ci si aspetta un valore di K_p limite per cui $|\varphi_c| = 180°$

Quindi, $\exists \bar{K}_p$ t.c. $1 < K_p < \bar{K}_p \to$ Sist. di controllo è A.S.

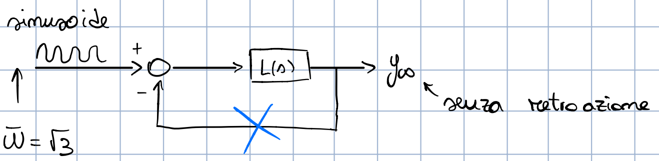
$K_p \geq \bar{K}_p \to$ " " non è A.S.

Devo calcolare $\bar{K}_p$, valore t.c. fase pulsazione critica vale $-180°$: $\bar{K}_p \to \begin{cases} \measuredangle L(\omega_c) = -180° \\ |L(\omega_c)| = 1 \end{cases}$

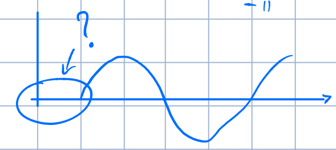
$\measuredangle L(i\bar{\omega}) = -180°$

$\measuredangle \dfrac{K_p}{(1+i\bar{\omega})^3} = -3 \arctan \bar{\omega} = -180°$, $\arctan \bar{\omega} = 60°$, $\boxed{\bar{\omega} = \sqrt{3}}$

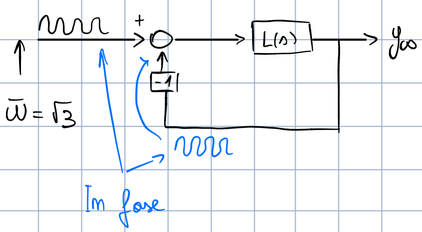
$\left| \dfrac{\bar{K}_p}{(1+i\sqrt{3})^3} \right| = 1$ $\quad \bar{K}_p = 8$ quindi per $K_p \geq \bar{K}_p = 8$ il sist. di controllo non è più A.S.



$y_\infty = |L(i\bar{\omega})| \operatorname{sen}(\sqrt{3}t + \underbrace{\measuredangle L(i\bar{\omega})}_{-\pi}) = -|L(i\bar{\omega})| \operatorname{sen}(\bar{\omega}t)$



Invece, con la retroazione, trovo il segnale in fase: interferenza costruttiva, si sommano in fase due segnali sinusoidali, riscalati di un fattore.



La condizione "margine di fase" > 0 fa sì che questo fattore sia minore di 1 (perchè ω_c viene prima di $\bar{\omega}$ e quindi si trova sotto i 0 dB (< 1)) e che si verifichi l'interferenza costruttiva ma con una sinusoide riportata in ingresso con riscalatura < 1, come una serie geometrica ρ^k con $\rho < 1$, che converge.

Quindi se K_p fa sì che questo fattore della sinusoide che viene invertita sia ≥ 1 allora si genera un fenomeno di instabilità; se invece questo è < 1 si ha ancora interferenza costruttiva, ma non si verifica il fenomeno di destabilizzazione (è la condizione sul margine di fase del Criterio di Bode).

$\Rightarrow$ Da un sistema A.S., per mezzo di retroazione, si può generare un sistema non A.S. dal punto di vista dell'evoluzione dei segnali.

Zeri sono usati per aumentare il margine di fase e garantire l'A.S.

I poli non possono essere usati perchè devono essere a $Re \leq 0$ e quindi non possono contribuire ad aumentare la fase.