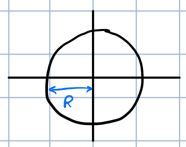
X variabile aleatoria è un numero che rappresenta ciò che mi interessa dell'esperimento aleatorio

es. 1) lancio i dadi e mi interessa la somma: X è la somma dei risultati (mi interessa solo quello)

2) gioco a freccette: $\Omega = \{\omega = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}$



$X(\omega) = d((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

↑ variabile aleatoria

DADI: $\Omega = \{(h,k) : h,k : 1 \dots 6\}$

$X((h+k)) = h+k$

Possibili valori di $X \in \{2,3,4,\dots,12\}$

Nel caso delle freccette $X \in [0,R]$ (raggio bersaglio), il range di valori assunti da X è il supporto di X, S

"La somma dei dadi vale al più 4" $= \{(h,k) \in \Omega : X(h,k) = h+k \le 4\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(1,3),(2,2)\} \in \mathcal{F}$

"La distanza dal centro del bersaglio è al più $R/2$" $= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \frac{R}{2}\} \in \mathcal{F}$

DEF: Variabile aleatoria

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Una variabile aleatoria X è una funzione da Ω in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{F}$.

NOTAZIONE: $\{X \le x\}$ significa "tutti gli $\omega \in \Omega$ t.c. $X(\omega) \le x$"

OSS. se $\{X \le x\} \in \mathcal{F}$ allora $\{X > x\} = \{\omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{F}$

$x \le y : \{x < X \le y\} = \{X \le y\} \setminus \{X \le x\} \in \mathcal{F}$

$\{x \le X \le y\} \in \mathcal{F}$ (NON OVVIO), $\{x < X < y\} \in \mathcal{F}$, $\{x \le X < y\} \in \mathcal{F}$

$x < y : \{x < X \le y\} = \{\omega : X(\omega) \in (x,y]\}$

Supponiamo di conoscere $P(X \le x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ allora $P(X > x) = 1 - P(X \le x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x < y$ $\quad P(x < X \le y) = P(X \le y) - P(X \le x)$

DEF: Sia X una var. aleatoria definita su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si chiama Funzione di ripartizione di X la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ t.c. $F_X(x) =: P(X \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

OSS. Se conosco F_X conosco tutte le probabilità che riguardano la var. ale. X

In certi casi verrà assegnata F_X

In altri dovremo dedurla dal modello $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ES. Lancio una moneta 3 volte

X = # teste uscite in 3 lanci

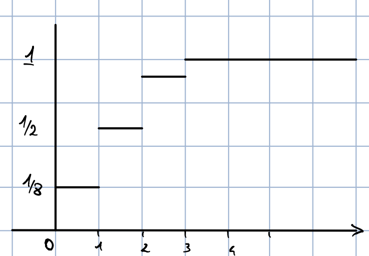
voglio dedurre F_X, $F_X(x) = P(X \le x)$?

$X \in \{0,1,2,3\}$

$x < 0 \quad \{X < x\} = \emptyset$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ P(X=0) = P(B_0) = \binom{3}{0}\frac{1}{2^3} & 0 \le x < 1 \\ P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{3}{0}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{1}\frac{1}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = \frac{7}{8} & 2 \le x < 3 \\ P(\{X \le x\}) = P(\Omega) = 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Ω = spazio di Bernoulli con $n=3$ $p=\frac{1}{2}$



PROPOSIZIONE (2.1.10)

Sia X una v.a. definita su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e sia F_X la sua funzione di ripartizione. Allora:

1) F_X è monotona non decrescente
2) F_X è continua a destra, $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4) $P(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{y \to x_0^-} F_X(y)$

OSS 1: 1) + 2) + 3) sono proprietà caratterizzanti, cioè che per qualsiasi funzione $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ per cui valgono 1)+2)+3) posso trovare $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una v.a. X t.c. $F = F_X$

Variabili aleatorie discrete

DEF: X v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una v.a. discreta se assume con probabilità 1 valori in un insieme S finito o al più numerabile

OSS. $S = \{x_k : k \in I \subseteq \mathbb{Z}\}$ + $x_h < x_k$ quando $h < k$ cioè significa che S può essere $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ ma non $\mathbb{Q}$

DEF: Sia X una v.a. discreta definita su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La densità discreta è una funzione reale $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$; $p_X(x) =: P(X = x)$

è il salto della funz. discreta