Modelli per i tempi di vita di apparecchiature

23 marzo 2017

Per tempo di vita di una apparecchiatura intendiamo il tempo X che intercorre tra l'inizio del funzionamento e il primo guasto.

E' ragionevole considerare X una variabile aleatoria non-negativa. D'ora in avanti supporremo anche che X sia assolutamente continua.

Vogliamo considerare modelli probabilistici per tempi di vita di apparecchiature, per esempio, soggette ad usura e non oppure in fase di rodaggio.

Tre casi: (A) Non soggetto ad usura
(B) Soggetto a usura
(C) In fase di rodaggio

Come modelliamo la nozione di non usura, usura e rodaggio?

1) non usura: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$;
2) usura: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$;
3) rodaggio: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) > \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$

Abbiamo visto che l'unica variabile aleatoria con f.d.r. continua che soddisfa 1) è la v.a. con densità esponenziale.

Se $P(X \geq 0) = 1$ e X è va ass. continua allora $Ⓐ \rightarrow X \sim Esp(\lambda)$ $\lambda > 0$

Introduciamo ora uno strumento utile ad ottenere modelli che soddisfano 2) e 3).

Intensità di rottura o hazard function

Definizione

Sia X una v.a. assolutamente continua tale che $\mathbb{P}(X > 0) = 1$, con f.d.r. F_X e densità f_X. Si definisce intensità di rottura (o hazard function) la funzione

$$\lambda(t) := \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} \qquad t > 0 \quad \text{tale che} \quad F_X(t) \neq 1$$

Consideremo così in cui è asintoto

Significato

Calcoliamo la probabilità che un apparecchio ancora funzionante al tempo t si guasti entro "un tempo infinitesimo dt":

$$\underbrace{\mathbb{P}(t < X \leq t + dt | X > t)}_{\text{Prob. condizionata}} = \frac{\mathbb{P}(\{t < X \leq t + dt\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \in (t, t + dt])}{\mathbb{P}(X > t)} \longrightarrow$$

approssimo l'incremento infinitesimo moltiplicando per dt

$$\simeq \frac{f_X(t)}{\underbrace{1 - F_X(t)}_{P(X>t)}} dt = \lambda(t) dt$$

Quindi l'hazard function rappresenta il tasso istantaneo di guasto al tempo t, dato che l'apparecchio è ancora funzionante al tempo t.

Hazard function della distribuzione esponenziale

Abbiamo visto che la distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione continua che soddisfa la proprietà di mancanza di usura (o memoria) 1): infatti se $X \sim exp(\lambda)$ allora

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s) \quad \forall s > 0, t \geq 0,$$

cioè 1) abbiamo visto che vale anche il viceversa (v.d. Dispense pag. 48). Quindi la sua intensità di guasto è costante. Infatti

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})} = \lambda = costante.$$

In altre parole la distribuzione del tempo di vita rimanente è la medesima sia nel caso in cui l'apparecchio stia funzionando da un tempo t, sia nel caso in cui esso sia nuovo e quindi la sua un'intensità di rottura al tempo t è indipendente da t e coincide con il parametro dell'esponenziale.

Come ricavare la funzione di ripartizione dalla hazard function

Si noti che, se $s > 0$ l'Hazard Function è la derivata di $\ln(1-F_X(s))$

$$\lambda(s) = \frac{f_X(s)}{1 - F_X(s)} = -\frac{d}{ds} \ln(1 - F_X(s)).$$

Integrando tra 0 e t otteniamo:

$$\int_0^t \lambda(s)ds = -[\ln(1 - F_X(t)) - \ln(1 - F_X(0))] = -\ln(1 - F_X(t)),$$

e quindi

$$1 - F_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \Rightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}, \quad t > 0.$$

Con $\lambda(t) = \lambda$ costante ottengo proprio l'esponenziale

Ne segue che la hazard function determina la funzione di ripartizione di X e quindi può essere usata per assegnare un modello per la v.a. X.

Esempio. Per $t > 0$ sia $\lambda(t) = ct$, con c costante positiva, allora

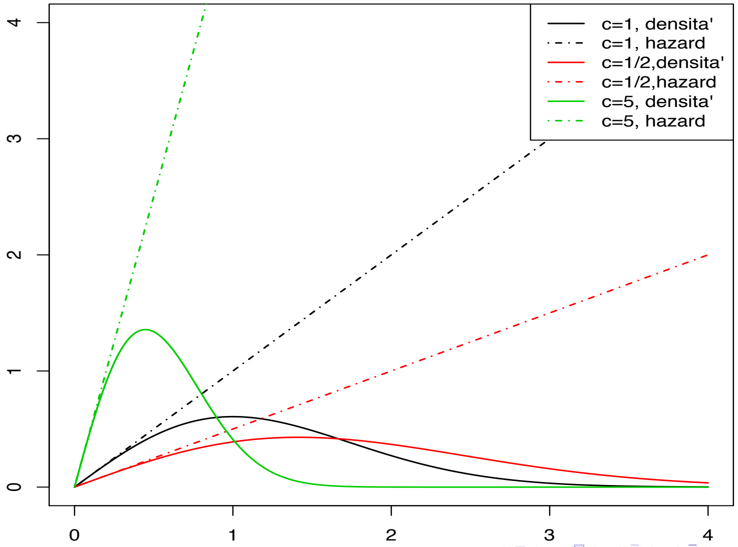
$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t csds = \frac{c}{2}t^2, \ \ t > 0 \Rightarrow F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-ct^2/2}, \ \ t > 0,$$

e

$$f_X(t) = ct\mathrm{e}^{-ct^2/2}, \ \ t > 0$$

detta distribuzione di Rayleigh.

Distribuzione di Rayleigh: hazard e funzioni di densità



Inoltre

$$\mathbb{P}(X > t+s|X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\int_0^{t+s} \lambda(u)du}}{e^{-\int_0^t \lambda(u)du}} = e^{-\int_t^{t+s} \lambda(u)du} < P(X>s) = e^{-\int_0^s \lambda(u)\,du}$$

e

$$\mathbb{P}(X > s) = e^{-\int_0^s \lambda(u)du}$$

1) λ crescente : $\lambda(t+u) > \lambda(u) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u$

$$\int_t^{t+s} \lambda(u)\,du = \int_0^s \lambda(t+u)\,du > \int_0^s \lambda(u)du$$

A questo punto è facile verificare che:

1. se $\lambda(\cdot)$ è crescente $\Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ ← modellizza un apparecchio soggetto ad usura
2. se $\lambda(\cdot)$ è decrescente $\Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$ ← rodaggio
3. se $\lambda(\cdot) = \lambda \Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) = \mathbb{P}(X > s)$. ← assenza di memoria

Esempio: distribuzione Weibull

Sia $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, $t > 0$, where $\alpha, \beta > 0$. Nota che:

if $\beta < 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ decresce con t Esponente di t negativo → funzione decrescente: modellizza il rodaggio

if $\beta = 1$, $\lambda(t) = cost$

if $\beta > 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ cresce con t. Esponente positivo ↦ funz. crescente: soggetto ad usura

$-\int_0^t \text{HazardFunc}(s)\,ds$

Inoltre

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{\overbrace{-\int_0^t \alpha\beta s^{\beta-1}\,ds}} = 1 - e^{-\alpha t^\beta} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t^\beta}, \ t > 0$$

$$f_X(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha t^\beta}, \ t > 0.$$

e indicheremo $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

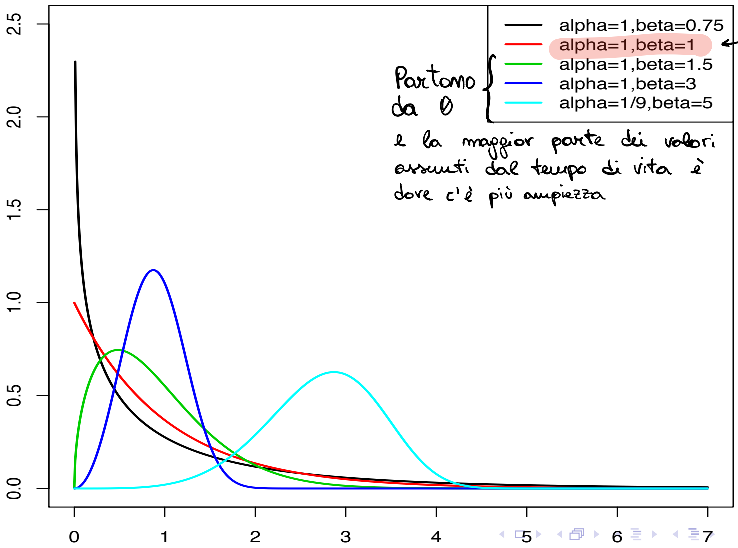
RAILEIGH hazard func: $\lambda(t) = ct$ $c > 0$

WEIBULL $\beta = 2 \to \lambda(t) = 2\alpha t$ $t > 0$ → SOGGETTI AD USURA

Prendo $2\alpha = c$ e ottengo Reileigh(c), quindi è un modello per usura

Weibull: funzioni di densità

$$f_X(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\alpha t^{\beta}}$$



esponenziale

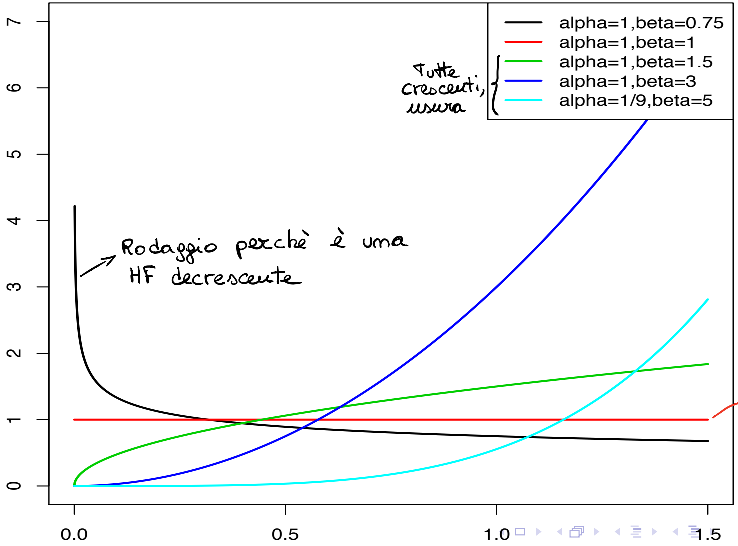
Differenza nel comportamento dipende da β

Weibull: hazard functions

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

Hazard functions corrispondenti

Non sono FDR



esponenziale

Ancora sulla Weibull

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \,\alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx = \int_0^{+\infty} \alpha \beta x^\beta e^{-\alpha x^\beta} dx$$

$$\begin{cases} t = \alpha x^\beta \\ dt = \beta \alpha x^{\beta-1} dx \end{cases}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/\beta} e^{-t}\, dt = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \int_0^{+\infty} t^{1/\beta} e^{-t}\, dt = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

Se $X \sim \mathit{Weibull}(\alpha, \beta)$ allora

$$\mathbb{E}(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione Gamma di Eulero:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Distribuzione Weibull generalizzata

Siano $\alpha, \beta > 0$.

Hazard Func: $\lambda(t) = \dfrac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1 - \lambda t^{\beta}\alpha}$ Tasso di rottura istantanea

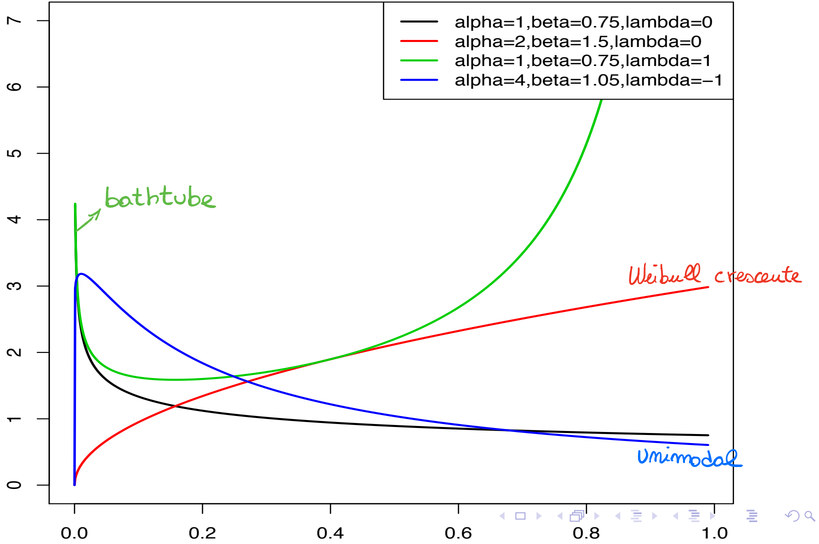
per $t \in (0, +\infty)$ se $\lambda \leq 0$, per $t \in (0, 1/(\lambda\alpha)^{1/\beta})$ se $\lambda > 0$.

Notare che per $\lambda = 0$ si ottiene l'hazard di una Weibull e
se $\beta < 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ decresce con t
se $\beta = 1$, $\lambda(t) = cost$
se $\beta > 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ cresce con t.

Ma se $\lambda > 0$ la funzione $\lambda(t)$ può non essere più monotona
Inoltre se
se $\lambda > 0$ e $\beta < 1$ bathtube hazard function (a forma di scaldabagno)
se $\lambda < 0$ e $\beta > 1$ unimodal hazard function .
(monotona)

Weibull generalizzata: hazard functions

$$\lambda(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1-\lambda t^{\beta}\alpha}$$



La funzione di ripartizione di una v.a. X con densità Weibull generalizzata, se $\lambda \neq 0$, è

α, β e λ

$$F_X(t) = \left(1 - (1 - \lambda\alpha t^\beta)^{1/\lambda}\right)$$

$$\lambda(t) = \frac{\alpha \beta t^{\beta-1}}{1 - \alpha\lambda t^\beta}$$

$$* = \frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{-\frac{d}{ds}(1-\lambda\alpha s^\beta)}{(1-\lambda\alpha s^\beta)}\, ds = -\frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\ln(1-\lambda\alpha s^\beta)\right) ds = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\lambda\alpha t^\beta)$$

$\boxed{\lambda < 0} \longrightarrow$ Voglio dedurre $F_X(t)$ per $t \in (0, +\infty)$ se $\lambda < 0$, per $t \in (0, 1/(\lambda\alpha)^{1/\beta})$ se $\lambda > 0$.

$$F_X(t) \begin{cases} 1 - e^{\underbrace{-\int_0^t \frac{\alpha\beta s^{\beta-1}}{1-\alpha\lambda s^\beta} ds}_{*}} \\ 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{\ln(1-\lambda\alpha t^\beta)^{1/\lambda}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - (1-\lambda\alpha t^\beta)^{1/\lambda} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Si ottiene la funzione di ripartizione di una *Weibull*(α, β) facendo il limite per $\lambda \to 0$. Infatti

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(1 - (1 - \lambda\alpha t^\beta)^{1/\lambda}\right) = 1 - e^{-\alpha t^\beta}$$

Se prendo una Weibull generalizzata di parametri α, β, λ la sua hazard function è $\lambda(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1-\alpha\lambda t^{\beta}}$.

Nel caso di $\lambda < 0$, voglio dedurre $F_X(t)$:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^t \frac{\alpha\beta s^{\beta-1}}{1-\alpha\lambda s^{\beta}} ds} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^t \frac{\alpha\beta s^{\beta-1}}{1-\alpha\lambda s^{\beta}} ds = \int_0^t \frac{1}{\lambda} \frac{-\frac{d}{ds}\left(1-\alpha\lambda s^{\beta}\right)}{1-\alpha\lambda s^{\beta}} ds = -\frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\ln\left(1-\lambda\alpha s^{\beta}\right)\right) ds$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1-\lambda\alpha t^{\beta}\right)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{\ln\left(1-\lambda\alpha t^{\beta}\right)^{1/\lambda}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \left(1-\lambda\alpha t^{\beta}\right)^{1/\lambda} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$