Prof.ssa Prandini Maria (10 CFU)

Deib 2° piano

maria.prandini@polimi.it

Lun 15-17

home.deib.polimi.it/prandini/FDA_inf.htm

Lun 9:30 - 12:15
Mer 10:30 - 13:15
Gio 9:30 - 12:15

Esercitazioni principalmente di mercoledì (Ing. Alessandro Falsone)

Laboratori: 2 esercitazioni di tipo sperimentale
3h l'una

Calendario su corsi.dei.polimi.it/labgolgi

Via Golgi

(Mar 23/05 14:15-17:15 ; Mar 20/06 14:15 - 17:15)

5 appelli d'esame (niente itinere)
1° 23/06/2017
poi luglio, due a settembre, uno a febbraio

Libri Bolzern, Scattolini, Schiavoni - Fondamenti di controlli automatici

esercizi:
- Papadopoulus, Prandini: Fondamenti di Automatica - Esercizi
- Web

lab:
+ slide
+ Matlab
+ simulatore

Prerequisiti Algebra delle matrici, Numeri complessi, Elettrotecnica base, eq. differenziali lineari

* test di autovalutazione online

Temi d'esame online: esercizi, forse teoria, domande di laboratorio.

Automatica - spiegare metodi e strumenti per risolvere i problemi di controllo con analisi e progettazione

Problema di controllo: si vuole imporre ad un sistema fisico un comportamento desiderato

L'automatica trova occupazione in vari settori: controlli di produzione, veicoli, robotica, elettronica di consumo, biomedica...

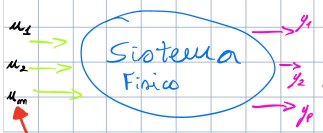
Corso diviso in 2 parti:
- 1ª parte Modellistica (matematica)
- 2ª parte Analisi dei sistemi di controllo

Dato un sistema fisico con una o più variabili di controllo, agendo su queste con delle specifiche sull'andamento otterrò l'andamento desiderato.

- Misura
  - sensori (o trasduttori)
- Sistema di attuazione che consente di agire sulle variabili di controllo
- Leggi di controllo (algoritmi, cuore o parte intelligente del sistema)

L'obiettivo del corso è studiare le leggi di controllo

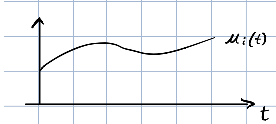
- ANALISI DI SISTEMI
- PROGETTO DI SISTEMI DI CONTROLLO



una porzione di realtà con una legge di evoluzione interna che interagisce con l'esterno

Variabili di uscita

Variabili di ingresso



$t \in \mathbb{R}$

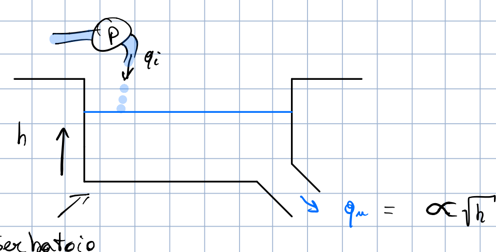
Sistemi a tempo continuo

$m = p = 1$ SISO: Single input, single output

se $m > 1$, $p > 1$ MIMO: Multiple input/output

SIMO
MISO

Esempio (serbatoio)

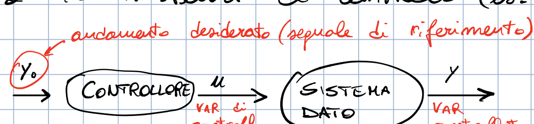


$q_u = \alpha\sqrt{h}$ Legge di Torricelli

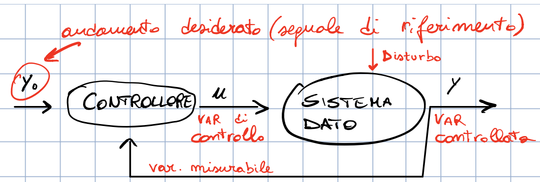
$m = 1$
$p = 1$
Sistema SISO

1) Dato un sistema ne analizzo le proprietà

2) Progetto il sistema di controllo (es. Volume costante)



Sistema di controllo in anello aperto: il sistema non utilizza nessuna informazione su y poiché non c'è misura di y per decidere quale azione applicare. Sistema senza retroazione, senza feedback (feedforward)



Sistema di controllo in anello chiuso: se opportunamente progettato, è più performante

- Supponiamo una fuoriuscita nel serbatoio che non possiamo controllare: q_d
  Differenza tra q_i (ingresso) e q_d (disturbo) è che q_d è una variabile non manipolabile o disturbo D (MISO)

Agendo sulle variabili manipolabili ottengo l'andamento desiderato ← COMPENSAZIONE

Per ricavare il modello matematico, ci si basa sulle leggi fisiche, in questo caso di Conservazione del Volume

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_i(t) - q_u(t)$$

se si equivalgono diventa costante, positiva se cresce e negativa se decresce

q_u: portata volumetrica in uscita

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_i(t) - \alpha\sqrt{\frac{V(t)}{S}}$$

è il nostro modello matematico, relazione tra ingresso e uscita del serbatoio (S: sezione)

$\frac{\text{Volume}}{\text{Sezione}} = \text{livello}$

$$\dot{y}(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{S}}\sqrt{y(t)} + u(t)$$

una certa $u(t)$ ha un certo impatto su y

È IL MODELLO MATEMATICO (Non lineare) DEL SISTEMA SERBATOIO

Se voglio conoscere l'andamento sapendo l'ingresso, ho bisogno dell'informazione aggiuntiva (V o h) che viene anche detta Stato del sistema, condizione interna, volume iniziale

DEF. Sistema dinamico | sistemi per i quali il valore assunto dalla variabile effetto y all'istante $\bar{t}$ dipende dalla storia passata della variabile causa u sono detti SISTEMI DINAMICI.

$n=1$, # di var. di stato (o ORDINE DEL SISTEMA) (eq. differenziale)

Un sistema che non è dinamico è detto STATICO, o ALGEBRICO (non ha più una relazione differenziale)

Non serve sapere lo stato di un sistema algebrico $u=V$, $i=y$, R

$$y(t) = \frac{u(t)}{R} \qquad y(t) = h(u(t))$$

Uscita = funzione lineare $h(t)$

FORMA STANDARD PER MODELLO MAT DI SISTEMA DINAMICO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \leftarrow \text{eq. di stato} \\ y(t) = g_1(x(t), u(t)) & \text{Trasformazione di uscita} \end{cases}$$

$x = h(t)$

$y = S \cdot h$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{\alpha}{S}\sqrt{x(t)} + \frac{u(t)}{S} \\ y(t) = S \cdot x(t) \end{cases}$$

sistema non lineare

eq. diff. primo ordine non lineare

La trasformazione di uscita non dipende* da $u(t)$: il sistema è STRETTAMENTE PROPRIO; altrimenti è detto PROPRIO

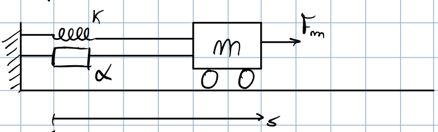
* L'uscita dipende dall'ingresso tramite $x(t)$, quindi indirettamente y dipende dall'ingresso

DEF. Sistema dinamico è lineare quando $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ sono combinazione lineare delle variabili di stato e variabili di ingresso.

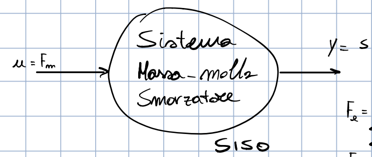
SISTEMA DINAMICO DI ORDINE $m=1$ NON LINEARE STRETTAMENTE PROPRIO

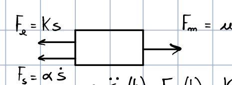
- Non lineare perché il 2° membro dell'eq. di stato non è una comb. lineare di x e u
- Strettamente proprio perché nella trasformazione di uscita non compare u

Esempio: Ammortizzatori (MASSA - MOLLA - SMORZATORE)



POSIZIONE DI RIPOSO DELLA MOLLA





$m \cdot \ddot{s}(t) = F_m(t) - K \cdot s(t) - \alpha\,\dot{s}(t)$

Ci interessa la posizione nell'ottica del controllo

È un sistema dinamico di ordine 2

$X_1 = s = y$

$X_2 = \dot{s} = \dot{y}$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{\alpha}{m}\dot{y}(t) - \frac{K}{m}y(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

riscrivo un'equaz. differenziale di ordine 2 come sistema di eq. diff. 1° ordine

n° colonne = n° righe $(n \times n \cdot n \times 1 = n \times 1)$

EQ. DI STATO
$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = \underbrace{X_2(t)}_{f_1(x(t),u(t))} \\ \dot{X}_2(t) = \underbrace{-\frac{\alpha}{m}X_2(t) - \frac{K}{m}X_1(t) + \frac{1}{m}u(t)}_{f_2(x(t),u(t))} \end{cases} \iff \begin{cases} \underset{n\times1}{\dot{X}(t)} = f(x(t),u(t)) = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{x(t)} + \underset{n\times m}{B} \cdot \underset{m\times1}{u(t)} \\ \underset{p\times1}{y(t)} = g(x(t),u(t)) = \underset{p\times n}{C} \cdot \underset{n\times1}{x(t)} + \underset{p\times m}{D} \cdot u(t) \end{cases}$$

Siccome il sistema è lineare, $f(x(t),u(t))$ può essere scritta come una matrice A per il vettore $\bar{x}$ e B per $u(t)$.

TRASF. DI USCITA $\quad y(t) = \underbrace{x_1(t)}_{g(x(t),u(t))}$ LINEARE STRETTAMENTE PROPRIO

Vettore di stato $\quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \qquad f(x(t),u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x(t),u(t)) \\ f_2(x(t),u(t)) \end{bmatrix}$

A nella prima riga avrà i coefficienti che moltiplicano x_1 e x_2 nell'equazione di stato

$$\underset{2\times2}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix}$$

la matrice A si può scrivere solo se il sistema è lineare

$$\underset{2\times1}{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \qquad \underset{1\times2}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{1\times1}{D} = [0]$$

← strettamente proprio

8/03

DEF: Movimento dello stato

Si dice M. dello stato associato alla condizione iniziale $x(t_0)=x_0$, e all'ingresso $u(t)=\tilde{u}(t)$, $t \geq t_0$, l'andamento corrispondente $x(t)=\tilde{x}(t)$, $t \geq t_0$.

Movimento dell'uscita . . . $y(t)=\tilde{y}(t)$, $t \geq t_0$ andamento corrispondente

Quando $u(t)=0$, $t \geq t_0 \rightarrow$ MOVIMENTO LIBERO DELLO STATO/USCITA ← massa-molla senza ingresso, forza applicata

$x(t)=0$, $t \geq t_0 \longrightarrow$ MOVIMENTO FORZATO DELLO STATO/USCITA ← massa-molla e applico un ingresso => non c'è condizione iniziale

Nei sistemi lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)$$ Sistema Dinamico lineare
$$y(t)=C\,x(t)+D\,u(t)$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Dato un sistema dinamico lineare, si considerino i movimenti di stato e uscita seguenti:

a) $x_a(t)$, $y_a(t)$ associati a $x(t_0)=x_{0a}$ e $u(t)=u_a(t)$, $t \geq t_0$

b) $x_b(t)$, $y_b(t)$ " $x(t_0)=x_{0b}$ e $u(t)=u_b(t)$, $t \geq t_0$

Il movimento può essere preso come somma dei mov. libero e forzato nel caso particolare di un ingresso nullo e una condizione iniziale nulla.

Allora vale la seguente proprietà:

Il movimento di stato e uscita associato a $\alpha x_{0a}+\beta x_{0b}$ e $\alpha u_a(t)+\beta u_b(t)$ è

$x(t)=\alpha x_a(t)+\beta x_b(t)$, $t \geq t_0$

$y(t)=\alpha y_a(t)+\beta y_b(t)$, $t \geq t_0$ $\quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall x_{0a}, u_a(t)$ e $x_{0b}, u_b(t)$

Condizione necessaria dei sistemi lineari

DIM. $x(t)=\alpha x_a(t)+\beta x_b(t)$

$x(t_0)=\alpha x_a(t_0)+\beta x_b(t_0)=\alpha x_{0a}+\beta x_{0b}$

Calcoliamo la derivata di $(\alpha x_a(t)+\beta x_b(t))$

Perché è una relazione lineare

$$\alpha\dot{x}_a(t)+\beta\dot{x}_b(t)=\alpha[Ax_a(t)+Bu_a(t)]+\beta[Ax_b(t)+Bu_b(t)]=A(\alpha x_a(t)+\beta x_b(t))+B(\alpha u_a(t)+\beta u_b(t))$$

combinazione lineare dei coefficienti

Il movimento di stato/uscita associato a $x(t_0)=x_0$ e $u(t)=\tilde{u}(t)$, $t \geq t_0$, in un sist. dinamico lineare è dato da

$x(t)=x_L(t)+x_F(t)$, $t \geq t_0$

mov. libero ass. $x(t_0)=x_0$ — mov. forzato ass. a $u(t)=\tilde{u}(t)$, $t \geq t_0$

e $y(t)=y_L(t)+y_F(t)$, $t \geq t_0$

Movimenti di equilibrio associati allo stato di equilibrio

DEF. Stato di equilibrio

Dato un sistema dinamico descritto da $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x(t_0) = \bar{x} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$ si dice stato di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \geq t_0$ se il movimento dello stato associato per $t > t_0$ è $x(t) = \bar{x}$ (MOV. DI EQ)

Supponiamo di avere una $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ con $u(t) = \bar{u}, t \geq t_0$. Allora se $x(t_0) = \bar{x}$, $x(t) = \bar{x}, t \geq 0$, esiste un valore di equilibrio espresso dal legame differenziale: $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

derivata di una costante

$\dot{x}(t) = \underbrace{-\frac{\alpha}{S}\sqrt{x(t)} + \frac{1}{S}u(t)}_{f(x(t),u(t))}$ Nel serbatoio

Portata volumetrica costante: $u(t) = \bar{q}_i, t \geq t_0$

$0 = -\frac{\alpha}{S}\sqrt{\bar{x}} + \frac{1}{S}\bar{q}_i \longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{\bar{q}_i}{\alpha}\right)^2$

Allora se $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

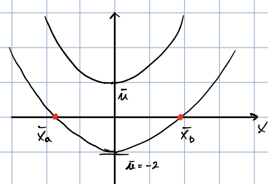
$u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \longrightarrow \exists\, \bar{x}$ st. di eq.?

$\hookrightarrow \exists\, \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$f(x, u) = x^2 + u$

$f(\bar{x}, 1) = 0$

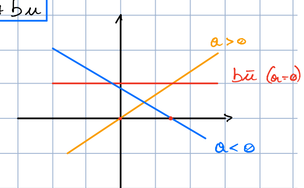
$\bar{x}^2 + 1 = 0$ Non esiste nessun stato di equilibrio per ingresso posit.



Alcune funzioni hanno infinite soluzioni di equilibrio (seno), altre ne hanno 1 o più, altre ne hanno 0.

Nel caso lineare, $\dot{x}(t) = \underbrace{a\,x(t) + b\,u(t)}_{f(x(t),u(t))}$

$f(x, u) = \boxed{a x + b u}$



$\dot{X}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$

$u(t) = \bar{u}, t \geq t_0 \longrightarrow \exists\, \bar{x}$ st. di eq?

$A\bar{x} + B\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se A è invertibile esiste

$A\bar{x} = -B\bar{u}$ se A è invertibile, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_d$ $(\det A \neq 0)$

$\exists!\ \bar{x}$ stato di eq.

$\bar{X} = -A^{-1} B \bar{u}$

A non invertibile: una riga è comb. lin. delle altre $\Longrightarrow$ si può ridurre solo se al secondo membro c'è 0 o una soluzione comb. lineare delle stesse righe, così o ci sono infiniti equilibri o nessuno.

Ripasso di algebra lineare:

$\begin{cases} \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = -3 \\ 2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = -5 \end{cases}$

$A\bar{x} = -B\bar{u}$

$\begin{bmatrix} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1\bar{u} \\ -b_2\bar{u} \end{bmatrix}$

$\underset{n \times n}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = 0$

poiché alla seconda eq. c'è -5 che non è com. lin. dell'altra, non ci sono soluzioni

Se ci fosse stato -6, ci sarebbero infinite soluzioni (∞^{n-p} con n rango e p rango ridotto)