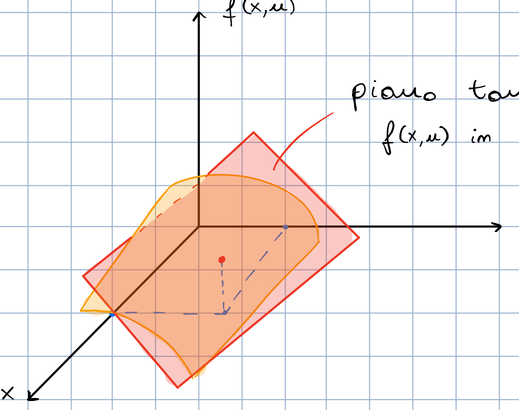
LINEARIZZAZIONE DI UN SISTEMA NON LINEARE ATTORNO AD UN EQUILIBRIO

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Sia $\bar{x}$ stato di equilibrio associato a $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$ e $\bar{y}$ l'uscita di eq. corrispondente.

$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ $\qquad$ $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$

$m = 1$



piano tangente a $f(x,u)$ in $(\bar{x}, \bar{u})$ $\triangleq$ linearizzazione della funzione

$$f(x,u) \simeq \overset{0}{\cancel{f(\bar{x},\bar{u})}} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} (x - \bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} (u - \bar{u})$$

$$g(x,u) \simeq \underbrace{g(\bar{x},\bar{u})}_{\bar{y}} + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} (x - \bar{x}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} (u - \bar{u})$$

sia $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ $\qquad$ $\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}$

$$\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta u(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta u(t)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = \overset{A}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}} \Delta x(t) + \overset{B}{\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = \overset{C}{\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}} \Delta x(t) + \overset{D}{\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}} \Delta u(t) \end{cases}$$

Sistema linearizzato attorno all'equilibrio $\bar{x}$ associato a $u(t) = \bar{u}$ $t \geq 0$ con uscita $\bar{y}$.

$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}$

$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t)$ $\quad$ perché $\bar{x}$ costante

<u>OSS</u>: Calcolare $x(t)$, $y(t)$ sapendo $\Delta \dot{x}(t)$, $\Delta y(t)$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = \tilde{x}_0 \\ u(t) = \bar{u}(t) \quad t \geq 0 \end{matrix}$$

$\dot{x} = f(x,u)$

$y = g(x,u)$

$u(t) = \bar{u}\ ,\ t \geq 0$

$\bar{x}, \bar{y}$ STATO E USCITA DI EQUILIBRIO

$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta u \longleftarrow$ SISTEMA LINEARIZZATO

Approssimazione lineare del sistema in un intorno di $\bar{x}, \bar{u}$

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}(t) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta x(t) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta x(t) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \Delta u(t) \end{cases}$$

valore all' equilibrio

$$x(t) \simeq \bar{x} + \Delta x(t)\ ;$$

approssimo, non essendo lineare

IMPONGO:

$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}$

$\Delta x(0) = x(0) - \bar{x}$

Nel caso di ordine n avrò una matrice $n \times n$ con $f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{bmatrix}$

valutata all' eq.

e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}(x,u)$ con $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}(x,u)$

OSS Se ho più equilibri avrò più sistemi linearizzati; nei sistemi non lineari l'equilibrio è proprio del movimento, non del sistema.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'A.S. DELL' EQUILIBRIO: tutti gli autovalori di $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}$ sono a parte reale < 0.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L' INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO: la matrice $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}$ ha un autovalore con $Re(\lambda_i) > 0$.

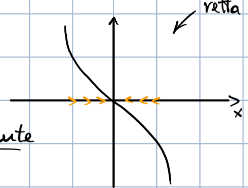
Dim. che la I è sufficiente ma non necessaria:

es.

$\dot{x}(t) = -x^3(t) + u(t)$ $\quad f(x(t), u(t)) \longrightarrow -\bar{x}^3 + 0 = 0$

$u(t) = 0,\ t \geq 0 \longrightarrow \bar{x} = ?$ $\quad \bar{x} = 0 \longrightarrow$ Valuto la stabilità col metodo grafico

$f(x, 0) = -x^3$



retta tg. $y = 0$ non è indicatore del cambio di segno in questo caso

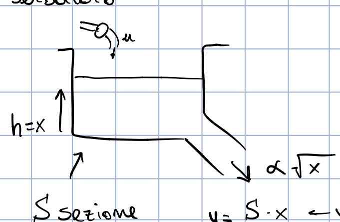
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -3x^2 \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f(x,u) = -x^3 + u$

A.S. Globalmente

La derivata parziale è il coeff. angolare della retta tangente nel punto $(0,0)$

Es serbatoio



$y = S \cdot x \leftarrow$ volume

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\alpha}{S}\sqrt{x} + \dfrac{1}{S}u \\ y = S \cdot x \end{cases}$$

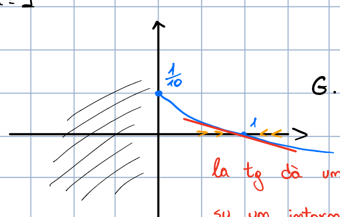
Supponiamo di avere un ingresso $u(t) = \bar{u},\ t \geq 0$ $\quad (\bar{u} \geq 0)$

$\longrightarrow$ EQ ? $\quad \bar{x} = \left(\dfrac{\bar{u}}{\alpha}\right)^2$

Metodo grafico per valutare l' equilibrio: $\alpha = 1,\ S = 10,\ \bar{u} = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{10}\sqrt{x} + \dfrac{1}{10}u \\ y = 10 \cdot x \end{cases}$$

$f(x,1) = -\dfrac{1}{10}\sqrt{x} + \dfrac{1}{10}$



G. A.S.

la tg dà una buona approssimazione su un intorno del punto

EQ. SISTEMA LINEARIZZATO ATTORNO ALL' EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta u(t) \\ \Delta y = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})} \cdot \Delta u(t) \end{cases}$$

$a = \lambda$

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}(t) = -\frac{1}{20} \cdot \Delta x(t) + \frac{1}{10} \cdot \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = 10 \cdot \Delta x(t) \end{cases}$$

$$f(x,u) = -\frac{1}{10}\sqrt{x} + \frac{1}{10}u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x^{1/2} \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \frac{1}{10}$$

$$g(x,u) = 5x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,u) = 5 \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = 0$$