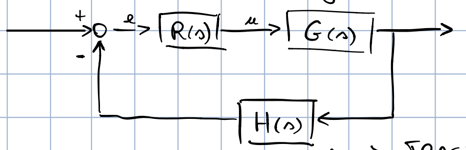
ANALISI DI STABILITÀ E DI PRESTAZIONE

ES. 1

Sia dato il seguente schema a blocchi:



→ TRASDUTTORE NON IDEALE

$G(s) = \dfrac{10}{(1+s)(1+10s)}$ $\quad R(s) = K \quad H(s) = \dfrac{1}{1+100s}$ $\quad$ Non ci sono autovalori nascosti

① Tracciare Bode della $L(s) = R(s)\,G(s)\,H(s) = 10K \dfrac{1}{(1+100s)(1+10s)(1+s)} = 10K \dfrac{1}{\left(1+\frac{s}{0{,}01}\right)\left(1+\frac{s}{0{,}1}\right)\left(1+\frac{s}{1}\right)}$
(con $K = 1$)

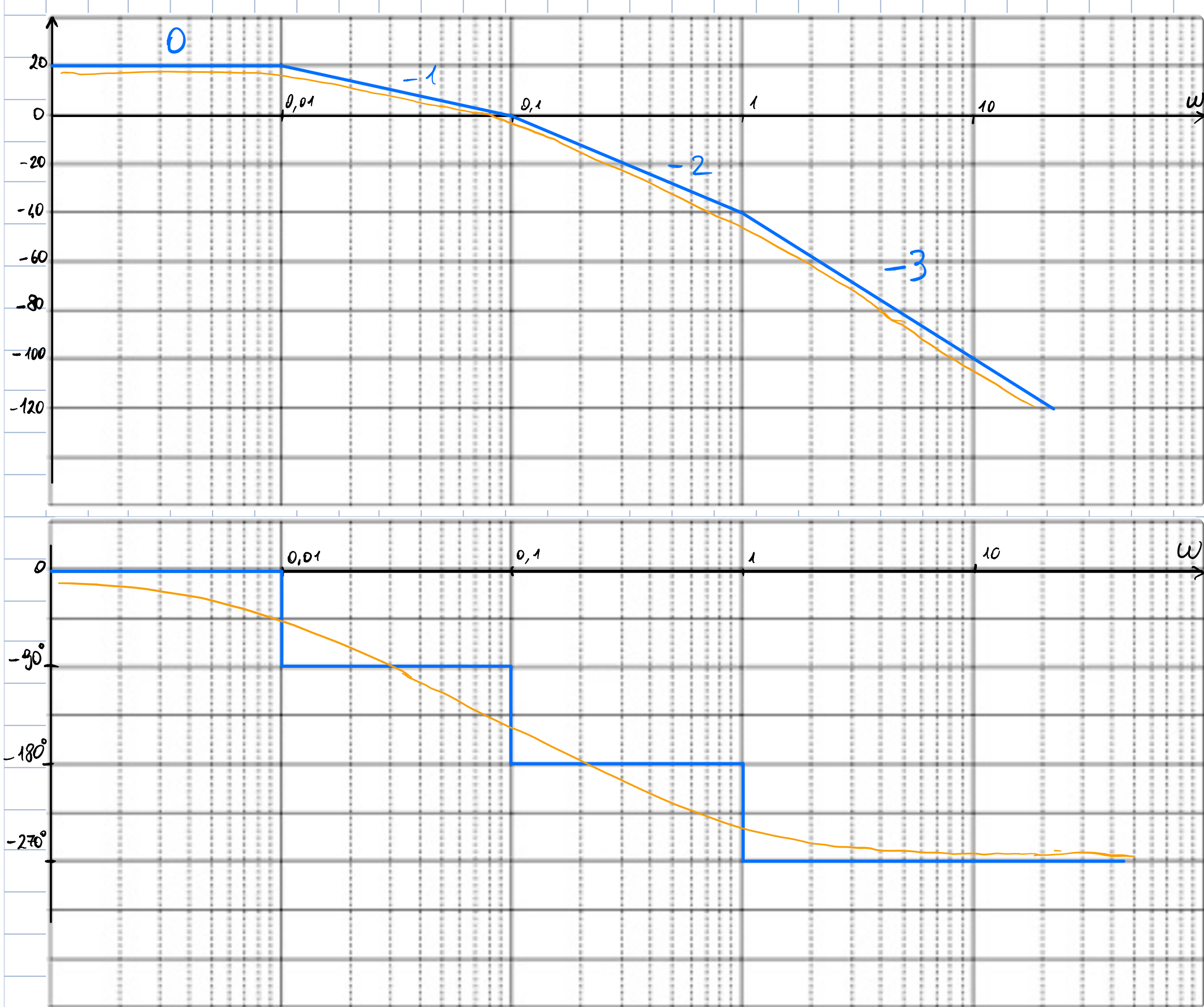
$\mu = 10 \cdot 1$ — $|\mu| = 10 = 20\,dB$; $\mu > 0$ $\;+0°$ FASE INIZ

$g = 0$ — Pendenza iniziale $-g = 0$; $-90° g = -0°$ fase iniz

$\omega_1 = 0{,}01$ Rad/s POLO SX $\Delta p = -1$ $\Delta\varphi = -90°$

$\omega_2 = 0{,}1$ Rad/s POLO SX $\Delta p = -1$ $\Delta\varphi = -90°$

$\omega_3 = 1$ Rad/s POLO SX $\Delta p = -1$ $\Delta\varphi = -90°$



② Verificare l'AS del sistema retroazionato mediante il criterio di Bode quando $K = 1$

Ip APPLICABILITÀ: • $P = 0$ (non ci sono poli con $\Re > 0$);

- Non ci sono autovalori nascosti con $Re \geq 0$
- ω_c ben definita $(\exists!\ \omega_c)$ ω_c: $|L(j\omega)| = 1 = 0\,dB$
- AS. STAB $\iff$ $\mu > 0$ $\varphi_m > 0$ $\varphi_m = 180° - |\measuredangle L(j\omega)|$

Ipotesi soddisfatte:
- $p = 0$
- No Autovalori nascosti $\Rightarrow$ No autov. con $Re \geq 0$
- $\exists!\ \omega_c$? Sì perché interseca l'asse delle ω solo in un punto e $\omega_c \simeq 0{,}1$ rad/s

$$\measuredangle L(j\omega_c) = \measuredangle(j\,0{,}1) = \measuredangle(10\cdot 1) - \measuredangle(1+j\,100\cdot 0{,}1) - \measuredangle(1+j\,10\cdot 0{,}1) - \measuredangle(1+j\,1\cdot 0{,}1) =$$
$$= 0° - \text{atan}(100\cdot 0{,}1) - \text{atan}(10\cdot 0{,}1) - \text{atan}(1\cdot 0{,}1) =$$
$$= -tg^{-1}(10) - tg^{-1}(1) - tg^{-1}(0{,}1)$$
$$\cong -90° - 45° - 0° \cong -135°$$

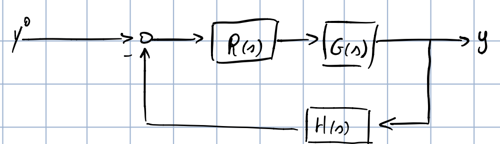
$$\varphi_m \cong 180° - |-135°| \cong 45° > 0$$

$$\mu > 0 \ \wedge\ \varphi_m > 0 \Rightarrow \text{AS STAB.}$$

③ $\exists K > 0$: il sistema retroazionato è instabile?

Se aumento K, il diagramma si sposta verso l'alto e si abbassa se diminuisco K: se K è sufficientemente piccola, il grafico scende nell'area dei dB negativi e ω_c non esiste più.
Se il grafico si alza, ω_c si sposta verso dx e anche la fase, che diventa in modulo $> 180°$ e quindi $\varphi_m < 0°$.
Quindi con un K alto il Criterio di Bode è applicabile e il sistema diventa instabile

④ Dato $y(t) = 10\,\text{sen}(0{,}001t)$, qual è l'ampiezza di regime di $y_\infty(t)$?

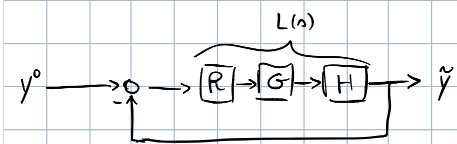


TRF: (teorema della risposta in frequenza) $y_\infty = 10\,|F(j\,0{,}001)| \cdot \text{sen}(0{,}001t + \underbrace{\measuredangle F(j\,0{,}001)}_{\text{Non ci interessa}})$

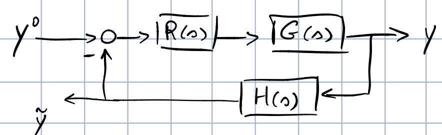
$$F(s) = \frac{Y(s)}{Y^\circ(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1+L(s)} = \frac{R(s)\,G(s)}{1+R(s)G(s)H(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)\,G(j\omega)|}{|\underbrace{1+R(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)}_{L(j\omega)\gg 1}|} \approx \begin{cases} \dfrac{|R(j\omega)G(j\omega)|}{|R(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)|} = \dfrac{1}{|H(j\omega)|} & |L(j\omega)| \gg 1 \quad \omega \ll \omega_c \\[2ex] \dfrac{|R(j\omega)\,G(j\omega)|}{|1|} = |R(j\omega)G(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \quad \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

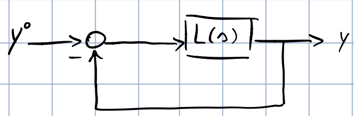
$$|F(j\,0{,}001)| \approx \frac{1}{|H(j\,0{,}001)|} = |1+j\,100\cdot 0{,}001| \approx 1$$



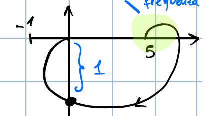
$\equiv$



Es. 2

Dato  $L(s)$ sistema AS STAB con poli reali e dato

zona in cui modulo cresce => zero in bassa frequenza



$L(j20) = -j$ $N=0$ $P=0$

1) Il sistema retroazionato è AS STAB?

• $\exists!\ \omega_c$? sì $\omega_c = 20$ rad/s

$\left.\begin{array}{l}\mu > 0 \\ \varphi_m > 0\end{array}\right\} \iff$ AS STAB

$\mu = 5 > 0$

$\varphi_m = 180° - |\angle L(j\omega_c)| = 180° - |-90°| = 90° > 0$

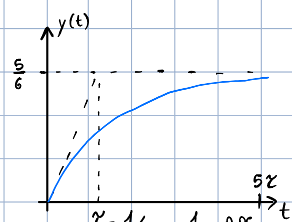
2) Risposta allo scalino unitario del sistema retroazionato

$\varphi_m > 70°$ $F(s) = \dfrac{Y(s)}{Y^\circ(s)} = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} \simeq \dfrac{\mu_F}{1+ s/\omega_c}$

$\mu_F = \dfrac{L(0)}{1+L(0)}$ $g \le 0$ $\mu_F = \dfrac{5}{1+5} = \dfrac{5}{6}$

$= 1$ $g > 0$

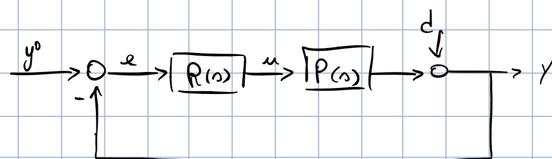
$F(s) \simeq \dfrac{5/6}{1+ s/20}$



$\tau = 1/\omega_c = \frac{1}{20} = 0{,}05$

Es. 3

Date $P(s) = \dfrac{10}{s+10}$ AS. STAB., $R(s) = \dfrac{k}{s}$ SIST I ORDINE



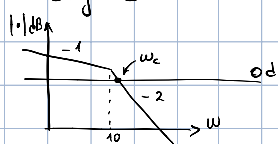
1) Stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$

$L(s) = R(s)\,P(s) = \dfrac{k}{s} \cdot \dfrac{1}{1+ s/10}$

Ip applicabilità:
- P = 0 (No poli con Re > 0)
- No autovalori nascosti con Re ≥ 0
- $\exists!\ \omega_c$? sì $\exists!\ \omega_c$ $\forall k$

ω_c senza Diag. Bode:

$|L(j\omega)|$



=> Applico C. di Bode: $\left.\begin{array}{l}\mu > 0 \\ \varphi_m > 0\end{array}\right\}$ Sistema A.S.

$\mu = k$, per $k > 0$ la 1ª condizione è soddisfatta

$\angle L(j\omega_c) = \angle(k) - \angle(j\omega_c) - \underbrace{\angle\left(1+j\frac{\omega_c}{10}\right)}_{} = 0° - 90° - (0 \div 90°) \Rightarrow \angle L(j\omega_c) \in [-90°, -180°)$

$\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ se } \omega_c \text{ molto piccola} \\ -90° \text{ se } \omega_c \gg 1 \end{array}\right.$

$\varphi_m = 180° - |\angle L(j\omega_c)| \in (0, 90)$

$\Rightarrow \boxed{\forall k > 0}$