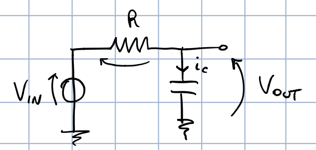
L' ELETTRONICA ANALOGICA

- La Trasformata di Laplace

ES. Risolvere il circuito



Data $V_{IN}(t)$, vogliamo calcolare $V_{OUT}(t)$

$$\begin{cases} KVL: \; V_{IN} = V_R + V_C \\ KCL: \; i_R = i_C = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dfrac{d(V_{IN} - \overbrace{V_R}^{R\cdot i})}{dt} \end{cases}$$

$i = C\dfrac{d(V_{IN}(t) - iR)}{dt}$ ← eq. diff. se l'incognita è $i(t)$

Sistemi di equazioni integrodifferenziali nelle reti complesse con elementi dinamici

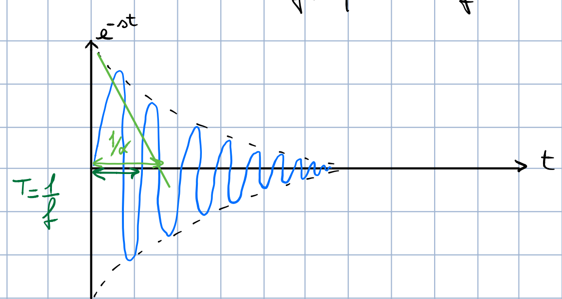
Ci viene in soccorso la Trasformata di Laplace: la DERIVATA diventa una moltiplicazione nel dominio delle s (spettrale).

DEF. $f(t) \to \boxed{\mathcal{L}} \to F(s)$, $\quad s = \alpha + j\underbrace{2\pi f}_{\omega}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt \qquad e^{-st} = e^{-(\alpha + j2\pi f)t} = e^{-\alpha t}\cdot e^{-j2\pi f t}$$

Se $\alpha = 0$, la TdL corrisponde alla Trasformata di Fourier

La funzione e^{-st} avrà un inviluppo (nel tempo) del tipo $e^{-\alpha t}$ moltiplicato per una somma di sinusoidi $e^{-j2\pi f t}$ di frequenza f la cui ampiezza si attenua:



Aggiungo a Fourier lo smorzamento dato da α (pesi diversi per le sinusoidi) per ricostruire la funzione nel dominio del tempo

$f = [Hz]$, $\quad \omega = [rad/s] = 2\pi f$

$$\frac{de^{st}}{dt} = s e^{st} \quad ; \quad \int \to \frac{1}{s}$$

$$\begin{array}{ccccc} V_{IN} & \to & \boxed{\text{Eq. diff.}} & \to & V_{OUT}(t) \\ \downarrow \mathcal{L} & & & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\ V_{IN}(s) & \to & \boxed{\text{Eq. Algebrica}} & \to & V_{OUT}(s) \end{array}$$

VANTAGGI DI T. DI LAPLACE e FOURIER
1) le eq. diff diventano algebriche ($\mathcal{L}$)
2) Capiamo quali frequenze possono essere sfruttate per manipolare i segnali ($\mathcal{F}$)

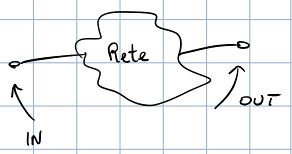
$$i = C\frac{dV_{OUT}}{dt} \to I(s) = C\cdot s\, V_{OUT}(s) = I_R = \frac{V_{IN}(s) - V_{OUT}(s)}{R}$$

$\Rightarrow V_{OUT}(s)\left(sC+\frac{1}{R}\right)=\frac{V_{IN}(s)}{R}$, $\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}(s)=\frac{1/R}{1/R+sC}=\frac{1}{1+sCR}$

Rapporto tra ingresso e uscita del circuito

È la Funzione di Trasferimento (polinomio in s)

$V_{IN}(s) \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow V_{OUT}(s)$



$\frac{OUT(s)}{IN(s)} = T(s)$

Nel caso di componenti passivi la T(s) avrà forma di polinomio in s scomposto in radici:

$T(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$

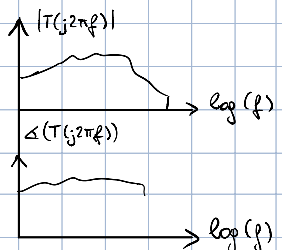
ZERI: numeri $\mathbb{C}$ che azzerano la FdT

POLI: numeri $\mathbb{C}$ che $\to \infty$ la FdT

in generale m > m

I poli sono una caratteristica della rete indipendentemente da IN/OUT. Gli zeri cambiano.
↳ Vengono da condensatori e induttori (un polo per componente)

La risposta in frequenza significa sostituire a s solo la parte Im = $j\omega$ ($\alpha = 0$) ovvero si considera solo l'asse di Fourier. $T(j\omega)$ però è $\in \mathbb{C}$, quindi posso rappresentarla come $\{\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\}$ o $\{|\cdot|, \measuredangle\}$. Diagramma di Bode è il plot del modulo e della fase.



Poli e zeri possono trovarsi in coordinate 3D e non per forza sugli assi. Rappresentando la risposta in frequenza non vedo la funzione andare a 0 o ∞ ma considero gli impatti che hanno sul plot poli e zeri (es. pendenze)

ES.

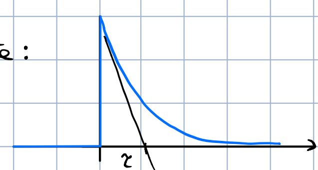
$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
	$\frac{1}{s^2}$

$\int$, $\cdot\frac{1}{s}$

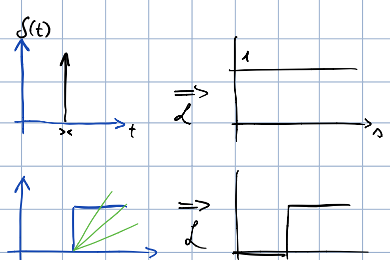
Esponenziale decrescente:

$u(t) = e^{-t/\tau}$

$u(t) = e^{-\alpha t} \to \frac{1}{s+\alpha}$

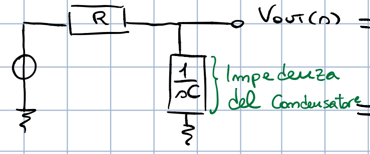


$T(s) = \frac{\quad}{(\ )(\ )(\ )}$ Contributo di più esponenziali



Tutte le frequenze contribuiscono a creare la delta

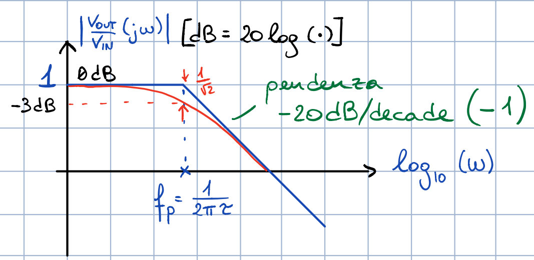
Come risolvo il circuito RC dell'esempio? Passo in Laplace: C diventa $\frac{1}{sC}$ e R rimane tale. Rimpiazzo ogni oggetto con la sua trasformata e continuo a usare Kirkoff!



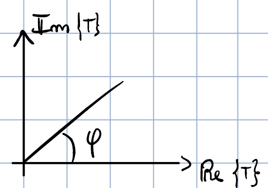
$$V_{OUT}(s) = V_{IN}(s)\,\frac{1/sC}{1/sC + R} \Rightarrow \frac{V_{OUT}(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{1}{1+s\underbrace{CR}_{\tau}} \qquad \tau = C \cdot R_{eq} = CR$$

È un filtro passa-basso, considero $s = j\omega = j2\pi f$ e faccio il Diagramma di Bode

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}(j2\pi f) = \frac{1}{1+j2\pi f \tau}$$



1) per f piccolo $\simeq \frac{1}{1}$
2) all'aumentare di f il modulo decresce
3) alla frequenza del polo ho un cambio di pendenza (perdo 45°)
4) la fase cresce e tende verso i 90°



Valutiamo $|T(f_p)| = \frac{1}{1+j\,2\pi\tau \cdot \frac{1}{2\pi\tau}} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{Re^2+Im^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = 3\text{dB}$

Dall'asintotico so che a basse frequenze $\left|\frac{V_{OUT}}{V_{IN}}\right| = 1$; infatti in DC $V_{OUT} = V_{IN}$ perchè C è un circuito aperto (DC in Bode è $\log(\omega) = -\infty$).

In $f = f_p$ le impedenze di R e C sono uguali