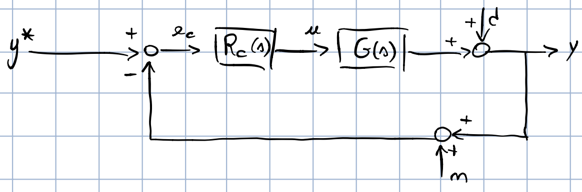
REALIZZAZIONE DIGITALE DEL CONTROLLORE

Supponiamo di aver progettato

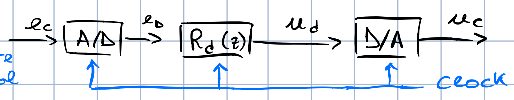


$e_c = y^* - (y + m)$

tempo continuo

Realizzazione $R_c(s)$:

Convertitore Analog/Digital



Tutti sono sincronizzati attraverso il clock

Supponiamo

$$R_d(z) = \frac{z+1}{z+\frac{1}{2}} = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \longrightarrow U_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} E_d(z)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right) U_d(z) = \left(1+z^{-1}\right) E_d(z)$$

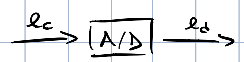
$$u_d(K) + \frac{1}{2} u_d(K-1) = e_d(K) + e_d(K-1)$$

Devo trovare e_d in modo che riproduca il legame I/O e_c / u_c

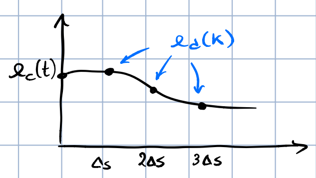
Convertitore A/D

In ingresso e_c

In uscita e_d



CAMPIONATORE



$e_d(K) = e_c(K\Delta_s)$

$K \in \mathbb{N}_0$

$e_c(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$

$e_d(K) = \operatorname{sen}(\omega \Delta_s K)$ $\qquad \omega_d \in [0; \pi]$

$\omega_d = \omega \Delta_s$

PULSAZIONI A T.C. DISTINGUIBILI : $0 \le \omega\Delta_s \le \pi \longrightarrow \omega \in \left[0; \frac{\pi}{\Delta_s}\right]$

Pulsazione di Nyquist

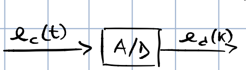
$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ (di campionamento)

Teorema di Shannon del campionamento:

Dato un segnale a t.c. $s_c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, se la sua banda è limitata e con pulsazione massima $\omega_{MAX} < \frac{\omega_s}{2} = \omega_N$, allora $s_c(t)$ può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni $s_d(K) = s_c(K\Delta_s)$, $K \in \mathbb{Z}$.

Vale inoltre $S_d(z)\Big|_{z=e^{i\omega\Delta_s}} = \frac{1}{\Delta_s} S_c(s)\Big|_{s=i\omega}$ $\qquad \omega \in [0, \omega_N]$

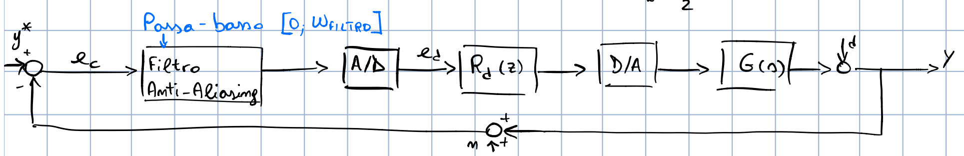
Siccome la trasformata è biunivoca, posso ricostruire il segnale a Tc



$E_d(z)\Big|_{z=e^{i\omega\Delta_s}} = \frac{1}{\Delta_s} E_c(s)\Big|_{s=i\omega}$ $\qquad \omega \in \left[0; \frac{\pi}{\Delta_s}\right]$

$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$

Passa-banda $[0, \omega_{FILTRO}]$



Conoscendo ω_N posso scegliere ω_F per soddisfare T. di Shannon

$\omega_F < \omega_N$ $\quad \boxed{\omega_F = \frac{1}{2}\omega_N}$

Come scelgo ω_N? I segnali d'interesse y^* sono quelli $[0, \omega_c]$, ω_N dovrà essere almeno ω_c.

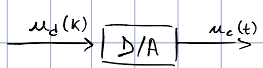
- A/D preserva info su $[0; \omega_N)$
- segnali y^* di interesse (da riprodurre sull'uscita y) in $[0; \omega_c]$

$\Rightarrow \omega_N > \omega_c$, Tipicamente $\omega_N = 5\omega_c$ o di più perchè si tiene conto del filtro

$\Delta_s = \frac{\pi}{5\omega_c}$, se vale $\tau_{CONTROLLO} = \frac{1}{\omega_c}$ $\Rightarrow T_a \simeq 5\omega_c = \frac{25}{\pi}\Delta_s$ $\quad \approx 8$

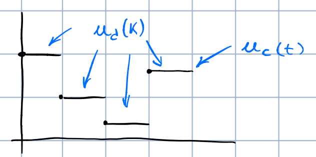
Il filtro introduce polo e sfasamento ma non interferisce nel progetto, o si tiene conto di questo già in fase di progetto, ma lo sfasamento è trascurabile.

Convertitore D/A

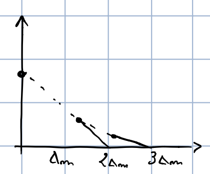


Mantenitore di ordine zero

ZOH $\rightarrow$ Zero Order Holder



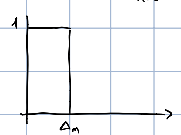
$\Delta_m = \Delta_s$



FOH

Da cosa è descritto ZOH? È il segnale $u_c(t) = u_d(K)$ quando $t \in [K\Delta_m, (K+1)\Delta_m)$

$u_c(t) = \sum_{K=0}^{\infty} u_d(K) \cdot h_0(t - K\Delta_m)$ $\quad t \geq 0$ $\leftarrow$ si ottiene diagramma costante a tratti



$h_0(t) = sca(t) - sca(t - \Delta_m)$

Ricavo il legame tra $\mathcal{L}$ (segnale in uscita) e $\mathcal{Z}$ (segnale ingresso) con la $\mathcal{L}$ di entrambi:

$$\mathcal{L}[u_c(t)](s) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} u_d(K)\, e^{-sK\Delta_m}\right)\frac{1}{s}(1 - e^{-s\Delta_m})$$

con $e^{+s\Delta_m} = z$ perchè $U_d(z) = \sum_{K=0}^{\infty} u_d(K)\, z^{-K}$

$$\mathcal{L}[h_0(t - K\Delta_m)](s) = e^{-sK\Delta_m}\,\mathcal{L}[h_0(t)](s) = e^{-sK\Delta_m}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s\Delta_m}\right)$$

$\uparrow h_0(t) = sca(t) - sca(t - \Delta_m)$

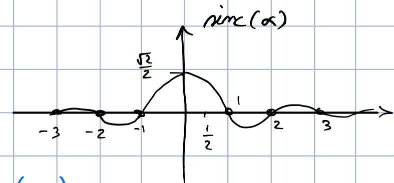
$$\Rightarrow U_c(s) = U_d(z)\Big|_{z = e^{s\Delta_m}} \cdot \frac{1}{s}(1 - e^{-s\Delta_m})$$

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta_m}}{s} \Rightarrow H_0(i\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega\Delta_m}}{i\omega} = e^{-i\omega\frac{\Delta_m}{2}}\,\frac{e^{i\omega\frac{\Delta_m}{2}} - e^{-i\omega\frac{\Delta_m}{2}}}{2i\omega}\cdot 2$$

FDT DELLO ZOH

$$= e^{-i\omega\frac{\Delta_m}{2}}\,\frac{sen\left(\omega\frac{\Delta_m}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

$sinc(\alpha) = \frac{sen(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$



ha tutti gli zeri per valori di $\alpha = 1, 2, 3 \ldots -1, -2, -3 \ldots$

$$H_0(i\omega) = e^{-i\omega\frac{\Delta_m}{2}} \cdot \frac{sen\left(\pi\frac{\omega}{\omega_s}\right)}{\pi\frac{\omega}{2\pi}\Delta_s} \cdot \Delta_s = e^{-i\omega\frac{\Delta_m}{2}} \cdot \Delta_s \cdot \frac{sen\left(\pi\frac{\omega}{\omega_s}\right)}{\pi\frac{\omega}{\omega_s}} \leftarrow sinc\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

$\uparrow$ $\omega_m = \omega_s$, moltiplico e divido per π nel seno

$H_0(i\omega) = \text{ritardo} \cdot \Delta_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$ con $\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$ che può essere approssimata a 1

$$\Longrightarrow H_0(i\omega) \simeq e^{-i\omega\frac{\Delta_s}{2}} \cdot \Delta_s \quad , \quad \omega \in [0, \omega_N]$$

ritardo $\frac{\Delta_s}{2}$

Quindi i controllori contribuiscono con un ritardo pari alla metà di ω_s

$$\xrightarrow{e_c} \boxed{A/D} \xrightarrow{e_d} \boxed{R_d(z)} \xrightarrow{u_d} \boxed{D/A} \xrightarrow{u_c}$$

$$U_c(s) = H_0(s)\, U_d(e^{s\Delta_s}) = H_0(s)\, R_d(e^{s\Delta_s})\, E_d(e^{s\Delta_s}) = \boxed{H_0(s)\, R_d(e^{s\Delta_s}) \cdot \frac{1}{\Delta_s}} \cdot E_c(s)$$

$U_c(i\omega) \simeq e^{-i\omega\frac{\Delta_s}{2}} R_d(e^{i\omega\Delta_s})\, E_c(i\omega) \longrightarrow$ il blocco dei 2 convertitori dà un ritardo di $\frac{\Delta_s}{2}$ (metà intervallo campionamento)

$\omega \in [0, \omega_N]$

Scegliere $R_d(z)$ in modo che $R_d(e^{i\omega\Delta_s}) = R_c(i\omega)$, $\omega \in [0; \omega_N]$

$$z = e^{s\Delta_s} \longrightarrow s = \frac{1}{\Delta_s} \log z$$

$$R_d(z) = R_c\left(\frac{1}{\Delta_s} \log z\right)$$

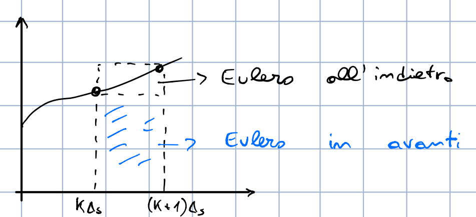
$$R_c(s) \qquad \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A x_c(t) + B e_c(t) \\ u_c(t) = C x_c(t) + D e_c(t) \end{cases}$$

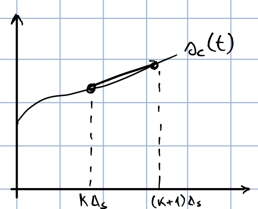
$$R_d(z) = ? \qquad e_d(k) = e_c(k\Delta_s) \qquad u_d(k) = u_c(k\Delta_s)$$

Legame tra $u_d(k)$ e $e_d(k) \longrightarrow u_d(k) = C\, x_c(k\Delta_s) + D\, \underbrace{e_c(k\Delta_s)}_{e_d(k)}$?

$$\int_{k\Delta_s}^{(k+1)\Delta_s} \dot{x}_c(t)\, dt = \int_{k\Delta_s}^{(k+1)\Delta_s} A x_c(t)\, dt + \int_{k\Delta_s}^{(k+1)\Delta_s} B e_c(t)\, dt$$

$$x_c((k+1)\Delta_s) - x_c(k\Delta_s) \simeq$$





Metodo del trapezio

$$\int_{k\Delta_s}^{(k+1)\Delta_s} s_c(t)\, dt \simeq \left(\alpha\, s_c(k\Delta_s) + (1-\alpha)\, s_c((k+1)\Delta_s)\right) \Delta_s$$

$\alpha = 1$ E

$\alpha = 0$ EI

$\alpha = \frac{1}{2}$ TUSTIN

$$x_c((k+1)\Delta_s) - x_c(k\Delta_s) \simeq \left(\alpha A x_c(k\Delta_s) + (1-\alpha) A x_c((k+1)\Delta_s)\right)\Delta_s + \left(\alpha B e_d(k) + (1-\alpha) B e_d(k+1)\right)\Delta_s$$

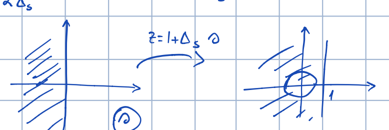
$$x_d(k) = x_c(k\Delta_s)$$

$$U_d(z) = \underbrace{\left[C \left(\frac{z-1}{z(1-\alpha)\Delta_s + \alpha\Delta_s} I - A \right)^{-1} B + D \right]}\, E_d(z)$$

$$R_c(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$R_d(z) = R_c(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{z(1-\alpha)\Delta_s + \alpha\Delta_s}} \quad , \quad s = \frac{1}{\Delta_s} \log(z) \qquad z = e^{s\Delta_s}$$

$\alpha = 1$ EA $\quad s = \frac{z-1}{\Delta_s}$, $z = \Delta_s s + 1$



$$z = \Delta_s s + 1$$

$$z = e^{s\Delta_s} = 1 + \Delta_s s + \frac{1}{2!}(\Delta_s s)^2$$ Sviluppo in serie di Taylor attorno a 0 di $e^{s\Delta_s}$

$\alpha = 0$ E.I. $$s = \frac{z-1}{z\Delta_s} = \frac{1-z^{-1}}{\Delta_s}$$

$$Re\{s\} < 0$$
$$Re\left\{\frac{z-1}{z\Delta_s}\right\} > 0$$

$$z = s z \Delta_s + 1$$
$$z = \frac{1}{1 - s\Delta_s}$$

$$Re\left\{\frac{(z-1)\,z^*}{\underbrace{z z^*}_{|z|^2}}\right\} < 0 \Rightarrow Re\left\{\left(Re\, z + i\, Im(z) - 1\right)\left(Re\, z - i\, Im\, z\right)\right\} < 0$$

$$\underbrace{(Re(z))^2}_{\alpha} - Re(z) + \underbrace{(Im(z))^2}_{\beta} < 0$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ TUSTIN $$s = \frac{z-1}{z+1}\,\frac{2}{\Delta_s}$$

$$(z+1)s = \frac{2}{\Delta_s}(z-1)$$

$$z\left(s - \frac{2}{\Delta_s}\right) = -s - \frac{2}{\Delta_s} \longrightarrow z = \frac{s + \frac{2}{\Delta_s}}{\frac{2}{\Delta_s} - s} = \frac{1 + \frac{\Delta_s}{2}s}{1 - \frac{\Delta_s}{2}s}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta_s}{2}s}\right) = -1\,\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta_s}{2}s\right)^2}\left(-\frac{\Delta_s}{2}\right) = \frac{\frac{\Delta_s}{2}}{\left(1 - \frac{\Delta_s}{2}s\right)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta_s}{2}s}\right) = +2\,\frac{\Delta_s}{2}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta_s}{2}s\right)^3}\left(+\frac{\Delta_s}{2}\right)$$

$$R_d(z) = R_c(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{z(1-\alpha)\Delta_s + \alpha\Delta_s}}$$