- ## Funzione di trasferimento

Si applica alla sola classe dei s. lineari tempo-invarianti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) \leftarrow \text{FDT}$$

FDT descrive il legame ingresso/uscita forzato, cioè quando la CI è nulla.

$x(0) = 0$

IN VAR. DI STATO NEL DOMINIO DEL TEMPO — NEL DOMINIO DELLE TRASFORMATE

Da legame differenziale a legame algebrico

Nell'ottica del controllo non è rilevante perché imporremo l'A.S. nel fare il progetto del controllore

$$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Caso $n = 2$, x è un vettore

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + d\, u(t) \end{aligned}$$

TdL imponendo cond. iniz. $= 0$

$$\begin{aligned} &\rightarrow s X_1(s) - \cancel{x_1(0)} = a_{11} X_1(s) + a_{12} X_2(s) + b_1 U(s) \\ &\rightarrow s X_2(s) - \cancel{x_2(0)} = a_{21} X_1(s) + a_{22} X_2(s) + b_2 U(s) \\ &\rightarrow c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + d \cdot U(s) \end{aligned}$$

Vogliamo esplicitare la dipendenza di $X_1(s)$ e $X_2(s)$ in funzione di $U(s)$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} \qquad Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

$$sI\,X(s) = A X(s) + B U(s) \longrightarrow (sI - A) X(s) = B \cdot U(s)$$

se $(sI - A)$ è invertibile, trovo $X(s)$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

per $s =$ autovalori di A la matrice non è invertibile, perciò si dice che $X(s)$ è ben definita quasi ovunque.

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] U(s)$$

La funzione di trasferimento è $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ che esprime il legame forzato con cond. iniziali nulle.

Dato $u(t)$ $t \geq 0$, $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) \xrightarrow[(x(0)=0)]{*G(s)} Y_F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_F(t),\ t \geq 0$

raz. fratta — Heaviside

Struttura di $G(s)$ F.D.T.

$$G(s) = C \frac{1}{\det(sI - A)} M_{(sI-A)} B + D$$

Matr. dei compl. alg. di $(sI-A)$ trasposta, ha elementi che sono polinomi in s di grado $\leq n-1$

$\det(sI - A)$ ← pol. caratt. di A di grado n

$G(s)$ sarà della forma $\dfrac{\tilde{N}(s)}{D(s)} + D$

polinomio grado $\leq n-1$

polinomio caratteristico

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Raz. fratta con grado di $D(s) \leq n$

$G(s)$ è strettamente propria se $D = 0$ cioè il sistema è strett. propri

è propria se $D \neq 0$ cioè il sistema è proprio

Le radici di $D(s)$ si chiamano POLI

radici di $N(s)$ si chiamano ZERI

OSS: L'insieme dei POLI di $G(s)$ è sottoinsieme degli autovalori di A: $\{\text{Poli di } G(s)\} \subseteq \{\text{Autov. di } A\}$

es: calcolo $G(s)$ di un sis. lineare

$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + u(t)$ $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ \ 1) \quad D = (\gamma)$

$\dot{x}_2(t) = x_2(t)$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \gamma u(t)$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = [1 \ \ 1]\underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma$$

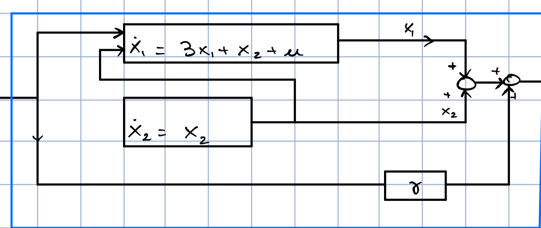
$$= \frac{1}{(s+3)(s-1)}[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} s-1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma = \frac{1}{s+3} + \gamma$$

si dice che un autovalore del sistema risulta "nascosto" nella relazione del legame ingresso/uscita forzato

Poli di $G(s) = \{-3\} \subseteq \{-3; 1\}$ con $\lambda = 1$ nascosto, non avrà nessuna influenza nel movimento forzato dell'uscita.

Domanda: dalla $G(s)$ posso dedurre le prop. di stab. del sistema? No, perché i poli sono degli autovalori ma non sono tutti: c'è l'autovalore nascosto. In questo caso $p = -3$ e mi porterebbe a sbagliare dicendo che il sistema è A.S. senza aver valutato che un λ è 1.

Perché non compare l'autov. 1? schema a blocchi:



Non si vede $\lambda = 1$ perché x_2 non viene influenzato da $u(t)$. Si dice che questa parte non è raggiungibile: è un problema per il controllo.

È un sistema instabile e non posso controllarlo perché u non può agire su $\dot{x}_2$

Nemmeno la retroazione può regolare, ad anello chiuso, questo sistema.

In questo caso x_2 si dice parte non raggiungibile da $u(t)$.

Es. (F.D.T.)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_2(t) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \ \ 3) \quad D = (0)$$

$$G(s) = C(sI-A)B + D = (0 \ \ 3)\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = (0 \ \ 3)\frac{1}{(s-1)(s+10)}\begin{pmatrix} s+10 & 2 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUTOV. NASCOSTO

$$= (0 \ \ 3)\begin{pmatrix} s+12 \\ s-1 \end{pmatrix}\frac{1}{(s-1)(s+10)} = \frac{3\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+10)}$$

$m = 2 \quad p = -10$ ← parte nascosta non accessibile nel legame I/O, che è 1

y dipende da x_2, x_2 non dipende da x_1 e quindi x_1 si dice non osservabile da $y(t)$

le proprietà di non osservabilità e non raggiungibilità si notano dal sistema

- Se, calcolando la FDT, i poli sono in numero minore dell'ordine del sistema, ci saranno parti nascoste che sono o non osservabili o non raggiungibili, ed occorre calcolare l'A.S. di queste parti nascoste.

- Guadagno $\mu = G(s)|_{s=0}$

Il rapporto tra l'uscita e l'ingresso in condizioni di equilibrio: $\begin{cases} 0 = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\mu}\bar{u} \end{cases}$