Criterio per assegnare una probabilità nel caso in cui Ω è finito o al più numerabile

ESEMPIO: (1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

(2) $\Omega = \mathbb{N}$ per es. n° di utenti ad uno sportello

Quando Ω è finito o al più numerabile useremo come $\mathcal{F}$ l'insieme delle parti: tutti i possibili sottoinsiemi di Ω che si denota con $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ quando Ω è finito. $|\Omega|$ è la sua cardinalità.

Suppongo per il momento che Ω sia finito, $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_m\}$, $|\Omega| = m \in \mathbb{N}$

Se P è una probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ allora se chiamo $P(\{\omega_K\}) = p_K$ per ogni $K : 1 \dots m$ ALLORA ho individuato una m-upla di numeri tali che: (1) $p_K \geq 0 \quad \forall K : 1 \dots m$

(2) $\sum_{K=1}^{m} p_K = \sum_{K=1}^{m} P(\{\omega_K\}) = P(\{\omega_1\} \underset{\uparrow \text{unione disgiunta}}{\cup} \dots \cup \{\omega_m\})$

$= P(\Omega) = 1$

Adesso suppongo di prendere una m-upla di valori tali che valgono (1) e (2)

$P(A) = P(\{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_K\}) = p_1 + p_2 + \dots + p_K$

$A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad A = \{\omega_1 \dots \omega_K\} \quad K \leq m$

$\ast \quad P(A) = \sum_{K : \omega_K \in A} p_K \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

Si può verificare che P definita da $\ast$ è una probabilità (cioè valgono D.1, D.2, D.3).

ESEMPIO Lancio il dado e osservo il risultato

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

È sufficiente specificare $p_1 \dots p_6$ per definire una probabilità e quindi un modello probabilistico

$p_1 \dots p_6$ deve essere tale che: $p_i \geq 0 \quad \forall i : 1 \dots 6$

(2) $\sum_{K=1}^{6} p_K = 1$

è sensato chiedere che $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = p \geq 0$. Dalla (2) $\sum_{i=1}^{6} p = 6p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6} = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}}$

$P(\text{"ESCE UN NUMERO PARI"}) = p_2 + p_4 + p_6 = 1/2$

ESEMPIO Fen. aleatorio: # di persone che accedono ad uno sportello in un dato giorno

$\Omega = \mathbb{N} \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad p_K = P(\{K\}) \qquad \Omega = \{0, \dots, m\} \quad m \in \mathbb{N}$

$\{K\}$: "sono arrivate esattamente K persone"

$p_K = P(\{K\}) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0$ parametro $\qquad K : 0, 1, 2 \dots$

MODELLO DI POISSON $\rightarrow \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\lambda^K}{K!} \overset{\text{Taylor}}{=} e^{\lambda} \Rightarrow \sum_{K=0}^{+\infty} p_K = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\lambda^K}{K!}}_{e^{\lambda}} = 1$

IL MODELLO BINOMIALE È DATO DA

$p_K = \binom{m}{K} p^K (1-p)^{m-K} \geq 0 \quad \forall K : 0 \dots m \qquad (a+b)^m = \sum_{K=0}^{m} \binom{m}{K} a^K b^{m-K}$

$\sum_{K=0}^{m} p_K \underset{\uparrow}{=} (p + 1 - p)^m = 1^m = 1$

$a = p$ e $b = 1 - p$

$\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_m\} \qquad |\Omega| = N \in \mathbb{N}$

$p_i = p \qquad \forall i : 1 \dots N \longrightarrow p = \frac{1}{N}$

Allora se $A \subset \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \frac{|A|}{N}$ Modello di probabilità uniforme

ESEMPI CLASSICI DI PROBABILITÀ UNIFORME SONO I CAMPIONAMENTI DA URNA