SEGNALI E TRASFORMATE DI SEGNALI

· TRASFORMATA DI LAPLACE

$$f(t),\ t \in \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s),\ s \in \mathbb{C}$$

trasformata

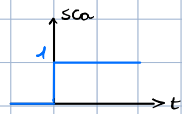
$\mathcal{L}^{-1}$ antitrasformata

Sistemi lineari descritti da equazioni differenziali verranno descritti nel dominio delle trasformate da legami algebrici

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad s \in S \subseteq \mathbb{C}$$

Trasformata di Laplace monolatera (da $-\infty$ a $+\infty$ è bilatera, ma noi consideriamo tempi da 0 a inf.)

es: $f(t) = \text{sca}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

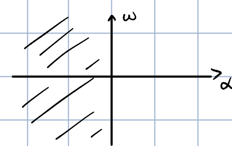


vogliamo che faccia 0

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \text{sca}(t)\, e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} \quad \text{quando} \quad \alpha > 0$$

$(e^{-st} = e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}) \qquad s = \alpha + i\omega$



semipiano Re > 0
regione di convergenza

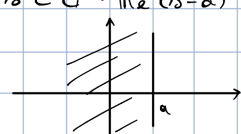
OSS:
Quando la regione di convergenza include l'asse immaginario esiste la trasformata di Fourier del segnale, cioè Laplace con $s = i\omega$, ovvero rinuncio all' α e guardo solo la parte oscillatoria.

es. $f(t) = 1, \forall t \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s}$

es: trasformata di e^{at}, $t \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{at} \cdot e^{-st}}_{e^{-(s-a)t}}\, dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

$$S = \{ s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s-a) > 0 \}$$



Perchè altrimenti, se l'esponente è positivo, non è assolutamente integrabile

Proprietà: 1) linearità

$f_1(t) \to F_1(s)$; $f_2(t) \to F_2(s)$

$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$

$F(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$ comb. lineare delle trasformate

2) derivazione nel tempo

$\mathcal{L}[\dot{f}(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$ DIM 2) integrale per parti con $\frac{df}{dt}$

3) legame differenziale lineare $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ legame algebrico (funzione di trasferimento del sistema)

es: $\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$

$x(0) = 1 \qquad u(t) = 2, \forall t \geq 0$ Voglio risolvere l'eq. diff. senza Lagrange

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)](s) = \mathcal{L}[-2x(t) + u(t)](s) \xrightarrow{2)} sX(s) - x(0) = -2X(s) + U(s)$$

$(\mathcal{L}(2) = 2 \cdot \mathcal{L}(1) = \frac{2}{s})$

$$\Rightarrow sX(s) - 1 = -2X(s) + \frac{2}{s}$$

$$sX(s) + 2X(s) = 1 + \frac{2}{s} \to (\cancel{s+2})X(s) = \frac{\cancel{s+2}}{s} \to X(s) = \frac{1}{s}$$

$x(t) = 1, t \geq 0$ perchè $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$ ANTITRASFORMATA

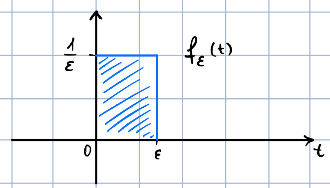
$\text{sen}(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\dfrac{t^K}{K!} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s^{K+1}}$ $\mathcal{L}\left[t\, f(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$

$\cos(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $e^{at}t^K \longleftrightarrow \dfrac{K!}{(s-a)^{K+1}}$

$f(t)\, e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$, $e^{at}\cos(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$, $e^{at}\,\text{sen}(\omega t) \longleftrightarrow \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

FUNZIONE IMPULSO (o DELTA DI DIRAC)

$f(t) = \text{imp}(t)$, $f(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$ funzione degenere definita dalla sua proprietà integrale, poichè $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 1$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

valuto $g(t)$ in $t = 0$ perchè l'impulso è $0 \ \forall t \neq 0$

Data una $g(t)$, se $h(t) = g(t) \cdot \text{imp}(t)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \text{imp}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(0)\, \text{imp}(t)\, dt = g(0)$

costante

$$\mathcal{L}\left[\text{imp}(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} \text{imp}(t)\, e^{-st}\, dt = 1 \qquad s \in \mathbb{C}$$

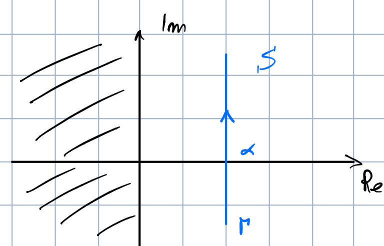
$g(t) = e^{-st}$

• ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Se $f(t)$, $t \geq 0 \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$, $s \in S$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(s)\, e^{st}\, ds$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + i\omega)\, e^{(\alpha+i\omega)t}\, d\omega$$



Se $\alpha = 0$ ho la Trasformata di Fourier, caso particolare della Trasformata di Laplace

$= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$ dice qual è il peso in frequenza dei vari contributi del segnale di una certa classe tra quelli trasformabili con Laplace

$\text{sca}(t) \longrightarrow \dfrac{1}{s}$, $e^{at} \longrightarrow \dfrac{1}{s-a}$, $e^{at}\cos(\omega t) \longrightarrow \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

Raz. fratta

$F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \leftarrow$ polinomi in s

$gr\, D(s) \geq gr\, N(s)$

$gr\, D(s) > gr\, N(s)$

F. RAZ. FRATTA STRETT. PROPRIA

$gr\, D(s) = gr\, N(s)$ PROPRIA

Metodo di Heaviside, o dello sviluppo in fratti semplici

$F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$, $t \geq 0$ $\qquad gr\, D(s) \geq gr\, N(s)$

es. 1

$$F(s) = \frac{3}{s^2+s} = \frac{3}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_1 + \alpha_2 s}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 s + \alpha_2 s = 0 \\ \alpha_1 = 3 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \qquad \alpha_2 = -3$$

$$= \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} \quad t \geq 0 \qquad f(t) = 3 - 3e^{-t} \quad t \geq 0$$

es. 2

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = -1 \text{ con m.a.} = 2$$

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} \Longleftrightarrow \frac{\beta_1 s + \beta_2}{(s+1)^2}$$

ma conviene separarli così è evidente vedere qual è la $\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 t e^{-t}$$

$$t^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{k!}{s^{k+1}} \Rightarrow t \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$e^{at} t^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \Rightarrow t e^{at} \rightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\frac{\alpha_1(s^2+1+2s) + \alpha_2(s^2+s) + \alpha_3 s}{s(s+1)^2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2s\,\alpha_1 + s\alpha_2 + \alpha_3 s = s \\ \alpha_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = -2 \\ 4s - 2s + \alpha_3 s = s \\ \alpha_1 = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha_3 = -1$$

$$f(t) = 2 - 2e^{-t} - 1te^{-t}$$

es. 3

$$F(s) = \frac{3s^2+2s+1}{s^2+s} \Rightarrow \text{cerco di riscriverla come } \gamma + \tilde{F}(s)$$

Strett. propria

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\gamma \operatorname{imp}(t) + \tilde{f}(t)$$

$$F(s) = \frac{3(s^2+s) - 3s + 2s + 1}{s^2+s} = 3 + \frac{-s+1}{s^2+s}$$

$$= 3 + \frac{1-s}{s(s+1)} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 s + \alpha_2 s = -s \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

$$F(s) = 3 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}, \qquad f(t) = 3\operatorname{imp}(t) + \operatorname{sca}(t) - 2e^{-t}$$