Movimento dello stato di un sistema lineare

$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$

$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$

SISO $\quad y \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ u(t) = \tilde{u}(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x(t) = ? \\ y(t) = ? \end{array}$

• Sistema scalare $(n=1)$

$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t)$

$x(t_0) = x_0,\ u(t) = \tilde{u}(t),\ t \geq t_0$

Formula di Lagrange per la risoluzione

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\, \tilde{u}(\tau)\, d\tau \quad , \quad t \geq t_0$$

τ variabile d'integrazione

DIM $\quad \dot{x}(\tau) = a\,x(\tau) + b\tilde{u}(\tau)$

1) Sottraggo $a\,x(\tau)$: $\quad \dot{x}(\tau) - a\,x(\tau) = b\tilde{u}(\tau)$

2) Moltiplico per $e^{-a\tau}$: $\quad e^{-a\tau}[\dot{x}(\tau) - a\,x(\tau)] = e^{-a\tau}b\tilde{u}(\tau)$ $\quad$ con $\dfrac{d}{d\tau}\left(e^{-a\tau}x(\tau)\right) = e^{-a\tau}[\dot{x}(\tau) - a\,x(\tau)]$

3) Integro tra t_0 e t: $\quad \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{d\left(e^{-a\tau}x(\tau)\right)}{d\tau}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b\tilde{u}(\tau)\,d\tau \ ; \quad e^{-at}x(t) - e^{-at_0}x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b\tilde{u}(\tau)\,d\tau$

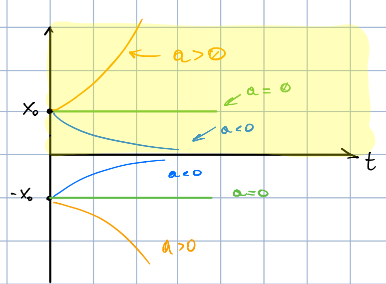
4) Moltiplico per e^{at}: $\quad x(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)}x_0}_{x_L(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\,\tilde{u}(t)\, d\tau}_{x_F(t)}$ $\quad$ FORMULA DI LAGRANGE

La formula di Lagrange permette di separare i due contributi del movimento libero e forzato.

Movimento libero: dipende solo da a nonostante il sistema dipenda da a e b.

Poniamo $t_0 = 0$ senza perdita di generalità, poiché i sistemi sono tempo-invarianti: a e b non dipendono dal tempo e/o scala temporale: $\dot{x} = f(x,u)$ e non $\dot{x} = f(x,u,t)$

Quindi $\quad x_L(t) = e^{at}x_0 \quad t \geq 0$

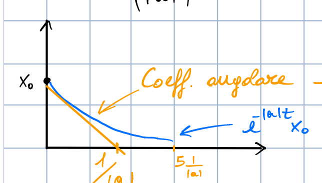


Con $a>0$ si parla di movimento libero che diverge a infinito

Ci focalizziamo su $a<0$: x_L tenderà a 0 a $t \to \infty$ ma considereremo trascurabile x_L quando $\bar{t}$ è $T_{a,1\%} = T_a \simeq 5\dfrac{1}{|a|}$ cioè quando raggiunge circa $\dfrac{1}{100}$ del valore iniziale

$$x_L\left(\frac{5}{|a|}\right) = e^{-|a|\cdot\frac{5}{|a|}}x_0 \simeq \frac{1}{100}x_0$$

Nel controllo vorremmo imporre $a<0$ e con modulo elevato per avere un sistema rapido (altamente reattivo)



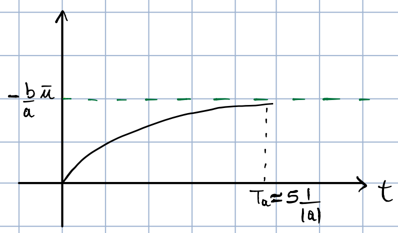
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-|a|t}x_0\right) = -|a|\,e^{-|a|t}x_0$$

$\tau = \frac{1}{|a|}$ è detta COSTANTE DI TEMPO

e^{-at} è il MODO DEL SISTEMA

Caso $a<0$, quanto ci mette il sistema ad andare a regime con un segnale costante?

$$x_F(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}\, b\,\bar u\, d\tau = \frac{b}{-a}\,\bar u\, e^{at}\int_0^t \underbrace{-a e^{-a\tau}}_{\frac{d e^{-a\tau}}{d\tau}}\, d\tau = -\frac{b}{a}\,\bar u\,(e^{-at}-1)\cdot e^{at} = -\frac{b}{a}\,\bar u\,(1-\underbrace{e^{at}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0})$$



Equilibrio del sistema

$$\left.\begin{aligned}&\dot x(t) = a\,x(t) + b\,u(t)\\ &u(t) = \bar u, \quad t\geq 0\end{aligned}\right\} \quad x(t) = e^{at}x_0 - \frac{b}{a}\,\bar u\,(1-e^{at})$$

$$0 = a\bar x + b\bar u \longrightarrow \boxed{\bar x = -\frac{b}{a}\,\bar u}$$

perturbando il sistema, esso rimane in equilibrio

se $x_0 = \bar x$ $\quad x(t) = \bar x$

$n \neq 1$

$$\begin{aligned}&\dot x(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\\ &x(0) = x_0\\ &u(t) = \tilde u(t), \quad t\geq 0\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \underbrace{\underset{n\times n}{e^{At}}\cdot \underset{n\times 1}{x_0}}_{x_L(t)} + \underbrace{\int_0^t \underset{n\times n}{e^{A(t-\tau)}}\, \underset{n\times 1}{B}\, \underset{1\times 1}{\tilde u(\tau)}\, d\tau}_{x_F(t)}, \quad t\geq 0$$

NOTA: ESPONENZIALE DI MATRICE

$$e^{At} = I_n + A\cdot t + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots$$

Oss. La derivata di quest'espressione soddisfa l'eq. di stato

Calcolo dell'esponenziale di matrice

$$A^k = \begin{bmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{bmatrix} \qquad A^{k+1} = A^k\cdot A$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1^{k+1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k+1}\end{bmatrix}$$

CASO DI A DIAGONALE ($A \in Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$)

$$A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \qquad e^{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0\\ 0 & \lambda_2 t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2!}\lambda_1^2t^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2!}\lambda_2^2t^2\end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix}\frac{1}{k!}\lambda_1^kt^k & 0\\ 0 & \frac{1}{k!}\lambda_2^kt^k\end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

$$\dot x(t) = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u(t) \qquad x_0 = \begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,2}\end{bmatrix} \qquad u(t) = \tilde u(t),\ t\geq 0$$

$$\begin{cases}\dot x_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + b_1 u(t)\\ \dot x_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + b_2\, u(t)\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1(t) = e^{\lambda_1 t}x_{0,1} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\, b_1\,\tilde u(\tau)\, d\tau\\ x_2(t) = e^{\lambda_2 t}x_{0,2} + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}\, b_2\,\tilde u(\tau)\, d\tau\end{cases}$$

Oss. Se A è diagonale, e^{At} è una mat. diagonale con l'esponenziale degli autovalori

e il movimento libero $x_L = e^{At}x_0$ è comb. lineare degli esponenziali degli autovalori, detti MODI DEL SISTEMA. Affinché abbia senso parlare di transitorio, gli autovalori devono essere negativi.

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| = 0, \ \forall x_0 \quad \text{SSE} \quad \lambda_i < 0, \ \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$$

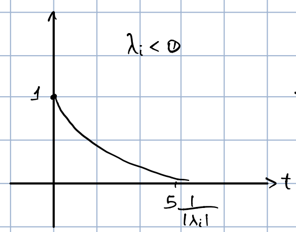
- SE $\exists \ \lambda_i > 0$, allora $\exists \ x_0$ t.c. $\lim_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| = +\infty$
- SE $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i$ e $\exists \ \lambda_h = 0$, allora $\exists x_0$ t.c. $\lim_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| \neq 0$ e $\sup_{t\geq 0} \|x_L(t)\| < \infty, \ \forall x_0$

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau$$

integrale (matrice × vettore) = integrale (vettore) = vettore degli integrali

I modi influiscono anche nel movimento forzato

Modo generico $e^{\lambda_i t}$



$e^{\lambda_i t} \leftarrow \tau_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$ costante di tempo

Ho tante costanti di tempo quanti sono i modi. La costante di tempo dominante è $\tau_d = \max_i(\tau_i)$ cioè la più grande in valore assoluto.

CASO A NON DIAGONALE MA DIAGONALIZZABILE

RIPASSO

A é $m \times m$

DEF: Autovalore

$\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalore di A se esiste $\vec{v} \in \mathbb{C}^m$, $\vec{v} \neq 0$

t.c. $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ $\quad \lambda I_m \vec{v} = A\vec{v}$

$(\lambda I_m - A)\vec{v} = 0$ $\quad \det(\lambda I_m - A) = 0$ affinché ci siano autovalori

polinomio caratteristico di A

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m \in \mathbb{R}$$

(A ha tutti elementi reali)

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_m)$$

Gli autovalori sono m e sono reali o a coppie complessi coniugati

DEF (A diagonalizzabile)

A è diagonalizzabile se esiste $T_{m\times m}$ con $\det T \neq 0$ t.c. $TAT^{-1} = A_d$ con gli autovalori sulla diagonale

A diagonale

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_m \end{bmatrix}$$

Condizione sufficiente per A diagonalizzabile: esistono m autovalori distinti

CNS: A abbia m autovettori[1] linearmente indipendenti[2]

(1) $\vec{v} \in \mathbb{C}$ si dice autovettore di A se $\exists \ \lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}$

(2) nessun vettore é comb. lineare degli altri

La matrice con gli autovettori in colonna avrà $\det \neq 0$ ed é la T^{-1} che pone A diagonale

$$\exists \ T \ m\times m \quad \det(T) \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_m \end{bmatrix} \qquad A = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} T \qquad e^{At} = T^{-1} e^{\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} t} T$$

DEF

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{K!}A^K t^K$$
$$= T^{-1} I T + T^{-1} A_d t T + T^{-1} \frac{1}{2!} A_d^2 t^2 T + \dots$$

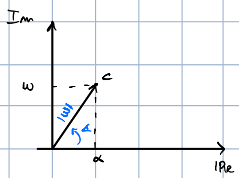
→ la matrice e^{At} ha elementi che sono comb. lineari di $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}\}$

$$A^2 = T^{-1} A_d T T^{-1} A_d T \overset{!}{=} T^{-1} A_d^2 T \qquad A^K = T^{-1} A_d^K T$$

Quindi il movimento libero $x_L(t) = e^{At} \cdot x_0$, $t \geq 0$ $= \text{C.L. DI } \underbrace{\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}}_{\text{Modi del sistema}}$

13/03

$e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$ $\qquad c = \alpha + i\omega, \quad \alpha, \omega \in \mathbb{R}$



$c = |c| e^{i\angle c} = |c|\cos(\angle c) + i|c|\sin(\angle c)$

$\alpha = |c|\cos(\angle c)$

$\omega = |c|\sin(\angle c)$

$|c| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$

NOTA: tg^{-1} restituisce un angolo $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, quindi con $\alpha < 0$ occorre aggiungere π. $\quad \angle c = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ allora $c_1 \cdot c_2 = |c_1| \cdot |c_2| e^{i\angle c_1} \cdot e^{i\angle c_2} = |c_1| \cdot |c_2| \cdot e^{i(\angle c_1 + \angle c_2)}$ prodotto dei moduli e somma delle fasi.

FORMULA DI LAGRANGE

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0$$

← MOV. ASSOCIATO A $x(0) = x_0$ E $u(t) = \tilde{u}(t)$, $t \geq 0$

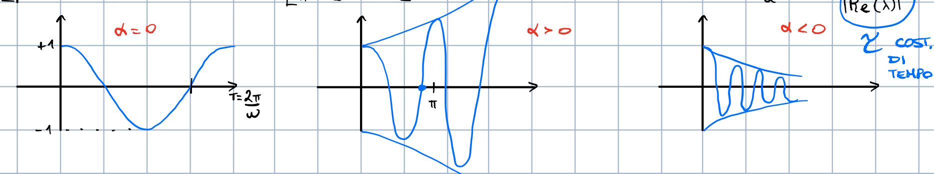
A diagonalizzabile

$\exists T \ \det T \neq 0$ T.C. $TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$ ($\in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{C}$ c.c.) $\longrightarrow e^{At} = T^{-1} e^{\overbrace{\left[\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_m\end{smallmatrix}\right]}^{A_d} t} T$, $\quad T^{-1} = [v_1 \ v_2 \dots v_m]$

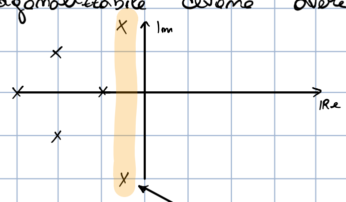
$\lambda = \alpha + i\omega$

$e^{\lambda t} = \underset{|e^{\lambda t}|}{e^{\alpha t}} \underset{\angle e^{\lambda t}}{e^{i\omega t}}$ $\qquad e^{\alpha t}\cos(\omega t)$

$T_a \simeq 5 \frac{1}{|Re(\lambda)|}$



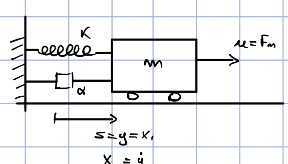
Affinché il movimento forzato abbia transitorio sufficientemente rapido, gli autovalori della matrice A dinamica diagonalizzabile devono avere parte reale negativa e molto distante dall' asse della parte immaginaria.



$x_L(t) = e^{At}x_0$, $t \geq 0$ ← C.L. DEI MODI

$\tau_i = \frac{1}{|Re(\lambda_i)|}$ $\qquad \tau_d = \max_i \tau_i \longrightarrow T_a \simeq 5\tau_d$

ESEMPIO (massa - molla - smorzatore)



smorzatore, $\alpha \cdot \vec{v}$

$$m \cdot \ddot{y}(t) = u(t) - K \cdot y(t) - \alpha \dot{y}(t)$$
$$\ddot{y}(t) = -\frac{K}{m} y(t) - \frac{\alpha}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Determinare mov. libero dell' uscita associato a $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K}{m}x_1(t) - \frac{\alpha}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$C = [1 \quad 0]$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $\quad y(t) = Cx(t) + \cancel{Du(t)}$ ($=0$ strett. proprio)

$x_\ell(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0$

$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0, \quad t \geq 0$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -\alpha/m \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A = \det(\lambda I - A) = \lambda\left(\lambda + \frac{\alpha}{m}\right) + \frac{K}{m} = \lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{K}{m}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

1) $\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > \frac{K}{m} \longrightarrow$ Reali distinte

2) $\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow$ Reali coincidenti

3) $\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 < \frac{K}{m} \longrightarrow$ c.c.

Matrice diagonalizzabile nei casi 1) e 3)

Supponiamo $m=1$, $\alpha=3$, $K=2$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$\lambda_1 = -1 \longrightarrow e^{-t}$ (va a 0 in 5 udt)

$\lambda_2 = -2 \longrightarrow e^{-2t}$ (va a 0 in 2.5 udt)

$$e^{At} = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} T \qquad T^{-1} = [v_1 \;\; v_2]$$

CALCOLO DI V_1

$A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \beta_2 = -\beta_1 \\ -2\beta_1 - 3\beta_2 = -\beta_2 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

CALCOLO DI V_2

$A v_2 = \lambda_2 v_2 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \qquad \gamma_2 = -2\gamma_1 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$T^{-1} = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

inversa di una matrice $\quad T = \frac{1}{\det T^{-1}} \underbrace{(T^{-1})^*}_{\text{Matrice dei complementi algebrici di } T^{-1} \text{ trasposta}}$

$$T = \frac{1}{-2+1}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{e^{At}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x(0)} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y_\ell(t) = [1 \;\; 0]\, x_\ell(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

è comb. lineare di modi del sistema? Sì

II MODO PER IL CALCOLO DI $y_\ell(t)$

Sappiamo che ci sono 2 modi: e^{-t}, e^{-2t}

$\Rightarrow y_\ell(t) = \rho_1 e^{-t} + \rho_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$ $\qquad$ determinare i coefficienti ρ_1 e ρ_2

Se conosco $y_\ell(t_0)$ posso legare ρ_1 e ρ_2: $\quad y_\ell(0) = C x_\ell(0) = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$

$\Rightarrow t=0: \quad \rho_1 + \rho_2 = 1$ $\qquad$ ho bisogno di un'altra equazione

Posso determinare $\dot{y}(t)$ all'istante $t_0 = 0$: $\quad \frac{dy(t)}{dt} = C\underset{t=0,\ \dot{x}_\ell(0)}{\dot{x}(t)} = C(A\,x(0)) = \dot{y}_\ell(t)$

$$\dot{y}_\ell(0) = C\,\dot{x}_\ell(0) = C \cdot A \cdot x_\ell(0) = [1 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$-\rho_1 - 2\rho_2 = 0$

$$\begin{cases} -\rho_1 - 2\rho_2 = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 = -2\rho_2 \\ -\rho_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \longrightarrow \rho_1 = 2 \\ \longrightarrow \rho_2 = -1 \end{matrix}$$

• $m=1$ $\quad K=2$ $\quad \alpha=2$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ Autovalori distinti, complessi coniugati

MODI: $e^{(-1-i)t}$, $e^{(-1+i)t}$

$y_L(t) = e^{-(1+i)t}\rho_1 + e^{(-1+i)t}\rho_2$ $\qquad y_L(0)=1 \rightarrow \rho_1+\rho_2=1$

$\dot{y}_L(0) = C\cdot A\cdot x(0) = 0 \rightarrow (-1-i)\rho_1 + (-1+i)\rho_2 = 0 \rightarrow -\rho_1 - i\rho_1 - \rho_2 + i\rho_2 = 0$

$\begin{cases}\rho_1 = 1-\rho_2 \\ -1+\rho_2 - i + i\rho_2 - \rho_2 + i\rho_2 = 0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\rho_1 = 1-\rho_2 \\ 2i\rho_2 = 1+i\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\rho_1 = 1-\rho_2 \\ -2\rho_2 = i-1\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\rho_2 = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \rho_1 = 1+\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{cases}$ sono c.c.

$y_L(t) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{-t}(\cos(t) - i\,\text{sen}(t)) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)e^{-t}(\cos(t)+i\,\text{sen}(t))$

$= e^{-t}(\cos(t)+\text{sen}(t))$ va a 0 con oscillazioni smorzate $\quad T_a = 5$ u.d.t

$= \sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

RIASSUNTO

A diagonalizzabile $\rightarrow \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ MODI

- $\lim_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| = 0$, $\forall x(0)$ sse $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$
- se $\exists\, \lambda_i$ con $Re > 0 \Rightarrow \exists\, x(0)$ t.c. $\limsup_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| = +\infty$
- se $Re(\lambda_i) \le 0 \ \forall i$ e $\exists\, \lambda_h$ con $Re(\lambda_h) = 0 \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| < +\infty$ e $\exists\, x(0)$ t.c. $\lim_{t\to+\infty} \|x_L(t)\| \neq 0$

Esempio: A non diagonalizzabile

$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} u(t)$ $\qquad$ calcolare il mov. libero dello stato associato a $x(0)=\begin{bmatrix}x_{1,0} \\ x_{2,0}\end{bmatrix}$

$x_L(t) = e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}}\begin{bmatrix}x_{1,0} \\ x_{2,0}\end{bmatrix}$, $\quad t \ge 0$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}t} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda t & t \\ 0 & \lambda t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2!}\lambda^2t^2 & \lambda t^2 \\ 0 & \frac{1}{2!}\lambda^2 t^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{3!}\lambda^3t^3 & \frac{1}{2!}\lambda^2t^3 \\ 0 & \frac{1}{3!}\lambda^3t^3\end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix}\frac{1}{k!}\lambda^k t^k & \frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}t^k \\ 0 & \frac{1}{k!}\lambda^k t^k\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

$t + \lambda t^2 + \frac{1}{2!}\lambda^2 t^3 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}t^k + \dots$

$A^2 = \begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$

per induzione $A^k = \begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$

Calcolo l'insieme degli autovettori:

$\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} V = \lambda V$ $\quad \begin{cases}\lambda\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 = \lambda\alpha_2\end{cases}$ $\quad V = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}$

$\{\alpha_2 = 0 \longrightarrow V = \begin{bmatrix}* \\ 0\end{bmatrix}$

λ ha m.a.$=2$ e m.g.$=1$

MODI:
funzioni del tempo del sistema che combinate linearmente restituiscono il movimento libero
A diag $\Rightarrow k\,e^{\lambda t}$

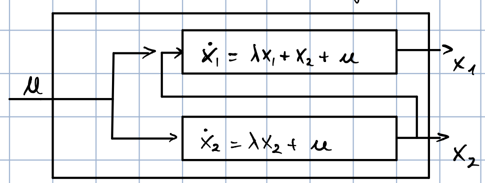
se λ non fosse <0,
- se nullo $\Rightarrow$ contributi costanti e contributo divergente
- se $>0 \Rightarrow$ divergenza

$x_L(t) = e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}t}\begin{bmatrix}x_{1,0} \\ x_{2,0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t}x_{1,0} + te^{\lambda t}x_{2,0} \\ e^{\lambda t}x_{2,0}\end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \cancel{0 x_1(t)} + \lambda x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = x_{1,0} \\ x_2(0) = x_{2,0} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_{1,L}(t) = ? \\ x_{2,L}(t) = ? \end{matrix}$$

Scompongo il sistema in sottoparti

x_1 vede x_2 come ingresso, x_2 non dipende da x_1 ma è influenzato solo da $u(t)$



$x_{2,L}(t) = e^{\lambda t} x_{2,0}, \quad t \geq 0$

$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2 + u \longrightarrow v(t) = e^{\lambda t} x_{2,0}, \quad t \geq 0$

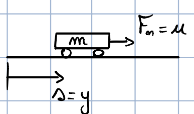
$x_1(0) = x_{1,0}$

Mov. libero di x_1 forzato dal mov. libero di x_2 ($u(t)$ è 0)

$$x_1(t) = e^{\lambda t} x_{1,0} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \underbrace{e^{\lambda \tau} x_{2,0}}_{v(\tau)} \, d\tau$$

$$= e^{\lambda t} x_{1,0} + e^{\lambda t} \int_0^t x_{2,0} \, d\tau = e^{\lambda t} x_{1,0} + e^{\lambda t} x_{2,0} t, \quad t \geq 0$$

Strutture diagonali: sottostrutture, risolvo la prima e calcolo mov. libero della seconda, che in questo caso dipende dall'altra.



Calcolare m. libero

senza attrito $\Longrightarrow$ vel costante con $\vec{F} = 0$ e cresce linearmente

A NON DIAGONALIZZABILE

È diagonalizzabile a blocchi (forma di Jordan)

Forma canonica di Jordan

$$\exists \; T_J, \; \det(T_J) \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad T_J A T_J^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_k & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix} \qquad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix} \longleftarrow \text{MINIBLOCCO DI JORDAN} \in Mat_k(m,m)$$

m è m.a. di λ_k

J_k ha una struttura triangolare superiore con λ_k ripetuto sulla diagonale e 1 ripetuto sulla sopradiagonale, 0 altrove.

Dato $[\lambda_k]$ autovalore, se la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica, la matrice è diag-bile

\# radice $\leftarrow$ pol. caratt. $\quad$ $\leftrightarrow$ \# autovettori associati

$$e^{\overbrace{T_J A T_J^{-1}}^{A_J} t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{J_k t} & \\ 0 & & & e^{J_m t} \end{bmatrix}$$

$e^{J_k t}$ ($m_k \times m_k$) $\leftarrow$ Elementi $\quad \underline{e^{\lambda_k t}, \, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k - 1} e^{\lambda_k t}}$

dimensione miniblocco (se ma = mg non c'è)

- Modi delle seguenti matrici in forma di Jordan (esponenziali dei miniblocchi di Jordan)

mg $\leq$ ma

1) $$A_J = \begin{pmatrix} [-1] & & 0 \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ 0 & & [0] \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow$ ma $= 1 \Rightarrow$ mg $= 1$

$\lambda_2 = 0 \rightarrow$ ma $= 3 \Rightarrow$ mg $= 2$

da λ_1 ho il modo e^{-t}

Autovettori l.i. associati a $\lambda_2 = 0$: 1 associato a $[0]$, 1 associato a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ m.g. $(\lambda_2) = 2$

Modi $(\lambda_2) = e^{0t}, \; t e^{0t}$

2) $$A_J = \begin{pmatrix} [-1] & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \quad$ ma $= 1 \quad$ mg $= 1 \quad e^{-t}$

$\lambda_2 = 0 \quad$ ma $= 3 \quad$ mg $= 1 \quad e^{0t}, \; t e^{0t}, \; t^2 e^{0t}$

RIASSUNTO:

$$T A T^{-1} = A_d \longrightarrow A = T^{-1} A_d T \longrightarrow e^{At} = T^{-1} e^{A_d t} T$$

$$T_J A T_J^{-1} = A_J \longrightarrow A = T_J^{-1} A_J T_J \longrightarrow e^{At} = T_J^{-1} e^{A_J t} T_J$$

OSS:

- $\lim_{t \to +\infty} \|x_L(t)\| = 0, \ \forall x(0)$ sse $\Re(\lambda_i) < 0, \ \forall i$
- se $\exists \lambda_i$ con $\Re(\lambda_i) > 0$, allora $\exists x(0)$ t.c. $\limsup_{t \to +\infty} \|x_L(t)\| = +\infty$
- se $\Re(\lambda_i) \leq 0$ e $\exists \lambda_h$ t.c. $\Re(\lambda_h) = 0$ ALLORA 2 CASI $\longrightarrow \limsup \|x_L(t)\| < +\infty \ \forall x(0)$ e $\exists x(0)$ t.c. $\lim_{t \to +\infty} \|x_L(t)\| \neq 0$

  $\longrightarrow \exists x(0)$ t.c. $\limsup_{t \to +\infty} \|x_L(t)\| = +\infty$