ESERCITATORE
ALESSANDRO FALSONE alessandro.falsone@polimi.it

## RIPASSO MATRICI

$A_{m\times m}$ → matrice complementi algebrici: $[\mathrm{cof}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(A \setminus \overset{\text{riga}}{R_i} \setminus \overset{\text{colonna}}{C_j}\right)$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ scelgo riga o colonna a piacere: 1° elem. riga/c. scelta e lo si moltiplica per il suo complemento algebrico

$a$ è in pos. 1,1: $a(-1)^{1+1}\cdot\det(d) + b(-1)^{1+2}\cdot\det(c)$

$= ad-bc$ = diag. principale − diag. secondaria SOLO PER LE 2x2

• 3x3 $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ $\det A = a(-1)^{1+1}(ei-fh)+d(-1)^{1+2}(bi-ch)+g(-1)^{1+3}(bf-ce)$

$\stackrel{!}{=} aei-afh-dbi+dch+gbf-gce$

## Inversa della matrice

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,\mathrm{cof}(A)^T$$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ $\det A = ad-bc$ supponiamo $\neq 0$ $\mathrm{cof}\,A=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\det(d) & (-1)^{1+2}\det(c)\\ (-1)^{2+1}\det(b) & (-1)^{2+2}\det(a)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}}$

scambio gli elementi sulla diag. principale e cambio il segno a quelli sulla secondaria.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

• CASO 3x3

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\det A = 0 - 3\cdot 0 + 2(4) = 8$

$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 4\\ 4 & -2 & -5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -1/4\\ 0 & 0 & 1/2\\ \frac{1}{2} & -1/4 & -5/8\end{pmatrix}^T=$

$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}\end{pmatrix}$

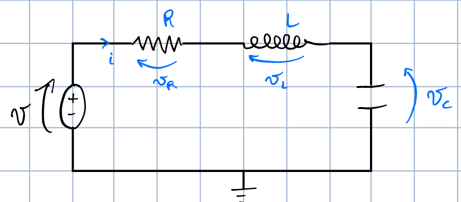
• Se $A$ è diagonale ⇒ $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_m t}\end{pmatrix}$

$A$ è diagonalizzabile ⇒ $D=TAT^{-1}$ $A=\underset{\text{Autovettori}}{T^{-1}}\,\underset{\text{Autovalori}}{D}\,T$ $e^{At}=T^{-1}e^{Dt}\,T$

Dato un sistema lineare

$S:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ $x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$ $y(t)=Cx(t)$

ES1 Rete elettrica:




① EQ DIFF DEL SISTEMA

$v_R = Ri$ $v_L = L\frac{di}{dt}$ $i = C\frac{dv_C}{dt}$

Quali sono le var di stato?
- Quali der compaiono rispetto al tempo
- Le var di cui compaiono le der. sono var di stato

$\frac{di}{dt}=\frac{1}{L}v_L$ $\frac{dv_C}{dt}=\frac{1}{C}i$

KVL = $v = v_R + v_L + v_C$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v - v_C - v_R) = \frac{1}{L}(v - v_C - Ri)$$

var di stato — var d'ingresso — var di stato

② PORTARE IL SISTEMA IN NOTAZIONE STANDARD

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$x_1 = i$ $\quad u = v$

$x_2 = v_C$ $\quad y = x_2 = v_C$ — le var di stato sono una cosa intrinseca del sistema, l'uscita è spesso arbitraria

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

③ CLASSIFICHIAMO IL SISTEMA

1) è dinamico (der. tempo)
2) è lineare (comb. lineare)
3) II ordine
4) tempo – invariante
5) strettamente proprio

④ MATRICE DINAMICA

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑤ MOV. DELLO STATO CON $R = 4\,\Omega$ $\quad C = 1F$ $\quad L = 3H$

$x_{1,0} = i_0 = 0A$

$x_{2,0} = v_{C_0} = 2V$ $\qquad \underline{v(t) = 0}$ $\quad t \geq 0$ $\to$ MOV. LIBERO

$x(t) = e^{At}x_0$ devo diagonalizzare A:

ToDo:
1) autovalori
2) autovettori
3) $T^{-1} = [v_1 \dots v_n]$
4) $e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T$

a) $\chi_A = \det(\lambda I - A) = 0$ : $\det\begin{pmatrix} \lambda + \frac{4}{3} & 1/3 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{4}{3}) + \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad (\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \qquad (\lambda_1 I - A)\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A v_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a + \frac{1}{3}b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

$$v_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) $T^{-1} = [v_1 \; v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ T: $\det(T^{-1}) = -2 \neq 0$

$$T = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/3} \end{pmatrix}$ $\qquad e^{At} = T^{-1}e^{Dt}T$

$$x(t) = e^{At}x_0 = T^{-1}e^{Dt}T\begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-t/3} \\ -e^{-t} + 3e^{-t/3} \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$

**NOTA**: il mov. libero è comb. lineare dei modi del sistema, a loro volta collegati agli autovalori del sistema lineare

## ⑥ METODO ALTERNATIVO

Poiché il mov. libero è comb. lineare dei modi del sistema:

$$x_1(t) = K_1 e^{-t} + l_1 e^{-t/3} \qquad x_{1,0} = x_1(0) = 0 \qquad \begin{cases} x_1(0) = K_1 + l_1 = 0 \\ x_2(0) = K_2 + l_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = -l_1 \\ K_2 = 2 - l_2 \end{cases}$$

$$x_2(t) = K_2 e^{-t} + l_2 e^{-t/3} \qquad x_{2,0} = x_2(0) = 2$$

4 incognite, 2 equazioni

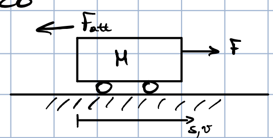
Condizione sulle derivate iniziali: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \end{cases}$ $\quad \dot{x}_1(0) = -\frac{4}{3} x_{1,0} - \frac{1}{3} x_{2,0} = -\frac{2}{3}$ $\quad \dot{x}_2(0) = x_{1,0} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -K_1 e^{-t} - \frac{l_1}{3} e^{-t/3} \longrightarrow -K_1 - \frac{l_1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \dot{x}_2 = -K_2 e^{-t} - \frac{l_2}{3} e^{-t/3} \longrightarrow -K_2 - \frac{l_2}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = -l_1 \\ -K_1 + \frac{K_1}{3} = -\frac{2}{3} \\ K_2 = 2 - l_2 \\ l_2 - 2 - \frac{l_2}{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = -l_1 \rightarrow l_1 = -1 \\ K_1 = 1 \rightarrow K_1 = 1 \\ \frac{2}{3} l_2 = 2 \rightarrow l_2 = 3 \\ K_2 = -1 \rightarrow K_2 = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = e^{-t} - e^{-t/3} \qquad t \geq 0$$
$$x_2 = 3e^{-t/3} - e^{-t}$$

## ESE 2 Sistema meccanico




① Eq. diff. $|F_{att}| = \alpha v$ NEWTON: $Ma = F - \alpha v$

② Portiamo il sistema in spazio di stato:

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = F - \alpha \frac{ds}{dt} \longrightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{F}{M} - \frac{\alpha}{M} \frac{ds}{dt} \qquad a = \dot{v} \qquad v = \dot{s} \qquad \begin{cases} u = F \\ x_1 = s \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \qquad y = s$$

$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{M} x_2 + \frac{1}{M} u$ Dinamico, II ordine, lineare, tempo-invariante, strettamente proprio

③ Calcolare il mov. libero dello stato con $\alpha = 3$, $m = 1$ e $x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow u(t) = 0$ Non siamo interessati all'azione dell'ingresso

forma triangolare

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$\dot{x}_2 = -3 x_2$ ← Non dipende da $x_1$, evolve come sistema del I ordine

$\dot{x}_2 = \underbrace{-3}_{a} x_2 \qquad x_2(t) = e^{-3t} x_{2,0} \qquad t \geq 0$

$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \cdot x_1 + x_2$ Dinamico I ordine con matrice dinamica $= 0$ + $x_2$ che non è stato di questo sottosistema

$x_2$ agisce da ingresso per $\dot{x}_1$

$$\underbrace{x_1(t)}_{\text{Lagrange}} = e^{0t} x_{1,0} + \int_0^t e^{0(t-\tau)} \cdot 1 \cdot \underbrace{x_2}_{\text{ingresso}}(\tau)\, d\tau = x_{1,0} + \int_0^t x_2(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) = x_{1,0} + \int_0^t x_{2,0} e^{-3\tau} d\tau = x_{1,0} + x_{2,0} \left[\frac{e^{-3\tau}}{-3}\right]_0^t = x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} (1 - e^{-3t})$$

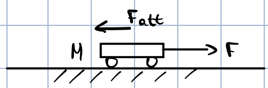
**OSS** In una Mat. triangolare posso integrare il 2° stato e sostituirlo nel primo.

ESE. X CASA (5) Calcolare il mov. forzato con gli stessi $\alpha, M$ e $u(t)=\bar{u}$ $\quad t \geq 0$

**NOTA**: mov. forzato $\Rightarrow$ stato iniziale $=0$

(6) movimento completo

(7) cosa succede $t \to +\infty$




$|F_{att}| = \alpha v$

$x_1 = s$
$x_2 = v$
$u = F$
$y = s$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{M} x_2 + \frac{1}{M} u = \underbrace{-3}_{a} x_2 + \underbrace{u}_{b=1} \\ y = x_1 \end{cases}$$

$\alpha = 3 \qquad M = 1$

(4) M. libero

$$x_1(t) = x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} - \frac{1}{3} e^{-3t} x_{2,0}$$
$$x_2(t) = e^{-3t} x_{2,0} \qquad t \geq 0$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ struttura triangolare $\Rightarrow$ calcolo del movimento può essere scomposto

(5) M. forzato

$$x_2(t) = \cancel{e^{at} x_{2,0}} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau \qquad u(t) = \bar{u} \quad t \geq 0$$

$\emptyset$

$$= \int_0^t e^{-3(t-\tau)} 1 \cdot \bar{u}\, d\tau = \int_0^t e^{-3t} e^{3\tau} \bar{u}\, d\tau = \bar{u} e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = \frac{1}{3} \bar{u} e^{-3t}(e^{3t} - 1) = \frac{1}{3} \bar{u}(1 - e^{-3t}) \quad t \geq 0$$

$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \cdot x_1 + x_2$

$$x_1(t) = \cancel{e^{at} x_{1,0}} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cdot 1 \cdot x_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{0(t-\tau)} \cdot 1 \cdot x_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{3} \bar{u}(1 - e^{-3\tau})\, d\tau = \frac{1}{3}\bar{u} \int_0^t 1\, d\tau - \frac{1}{3}\bar{u} \int_0^t e^{-3\tau} d\tau =$$

$\emptyset$

$$= \frac{1}{3} \bar{u} [\tau]_0^t - \frac{1}{3} \bar{u} \left[\frac{e^{-3\tau}}{-3}\right]_0^t = \frac{1}{3} \bar{u} t - \frac{1}{9} \bar{u}(1 - e^{-3t}) \qquad t \geq 0$$

(6) Mov. completo

$$x_1(t) = x_{1,L}(t) + x_{1,F}(t) = x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} - \frac{1}{3} e^{-3t} x_{2,0} + \frac{1}{3} \bar{u} \left[t - \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\right] \qquad t \geq 0$$
$$x_2(t) = e^{-3t} x_{2,0} + \frac{1}{3} \bar{u}(1 - e^{-3t})$$

(7) Cosa accade per $t \to +\infty$ ?

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = +\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} x_2(t) = \frac{1}{3} \bar{u}$$

(8) Analizzare la stabilità del sistema mediante autovalori.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+3 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+3) = \lambda^2 + 3\lambda \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -3$$

- Per avere asintotica stabilità, tutti gli autovalori devono avere $Re(\lambda) < 0$. In questo caso il sistema è semplicemente stabile ($\lambda_1 = 0$).

(9) È in contrasto con il punto (7) ?

No, la stabilità parla della divergenza del movimento libero del sistema.

$$\lim_{t \to +\infty} x_{1,L}(t) = x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} \qquad \lim_{t \to +\infty} x_{2,L}(t) = \emptyset$$

semp. stabile (non converge ma div. a $\emptyset$)