

Risposta esponenziale

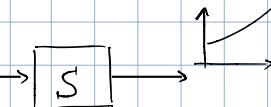
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$u(t) = \alpha_u e^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

α_u ampiezza dell'esponentiale

$$\exists x(0) = x_0 \text{ t.c. } \begin{cases} y(t) = \alpha_u e^{\beta t}, & t \geq 0 \\ x(t) = e^{\beta t} x_0, & t \geq 0 \end{cases}$$



imponiamo che $x(t)$ sia soluzione dell'eq. differenziale, vediamo se esiste x_0 per cui lo è e se è ben definito, $x(t)$ sarà della forma $e^{\beta t}$ di conseguenza anche $y(t)$ perché la trasformazione d'uscita sarà comb. lineare di esponenziali della forma $e^{\beta t}$

$$\frac{\beta e^{\beta t} x_0}{\dot{x}(t)} = A e^{\beta t} x_0 + B \alpha_u e^{\beta t}$$

$(\beta I - A)x_0 = B\alpha_u$ se β non è autovettore di A , il $\det(\beta I - A) \neq 0$ e la matrice è invertibile per calcolare x_0 .

$$x_0 = (\beta I - A)^{-1} B \alpha_u$$

$$y(t) = C \cdot e^{\beta t} x_0 + D \alpha_u e^{\beta t} = [C(\beta I - A)^{-1} B + D] \alpha_u e^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

$$G(s)|_{s=\beta}$$

$$y = \alpha_u G(s)|_{s=\beta}$$

Se alimento il sistema in ingresso con un esponentiale con esponeente che non è autovettore, con un'opportuna cond. iniz. posso ottenere in uscita lo stesso ammendimento esponenziale in uscita avrà un esponentiale della stessa forma riscalato dalla $G(s)$ con $s = \beta$

E se la c.i. non è $x(0)$? Come è a regime?

→ mov. libero → 0

Se S è A.S. (e β non è autov. di A), allora $\forall x(0)$ ottengo a regime (una volta esauriti i transitori)

$$y_\infty(t) = \alpha_u G(s)|_{s=\beta} e^{\beta t} \leftarrow \text{l'andamento esponenziale}$$

Prendiamo una c.i. $x(0) = \tilde{x}_0$ diversa da $x_0 = \alpha_u C(\beta I - A)^{-1} B$, allora posso scriverla come:

$\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$ e usare il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$a) \quad x_a(t) = x_0, \quad u_a(t) = \alpha_u e^{\beta t}, \quad t \geq 0 \rightarrow y_a(t) = \alpha_u e^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

$$b) \quad x_b(t) = \Delta x_0, \quad u_b(t) = 0, \quad t \geq 0 \rightarrow y_b(t) = C e^{\beta t} \Delta x_0, \quad t \geq 0 \leftarrow \text{mov. libero dell'uscita associato alla c.i. } \Delta x_0$$

$\text{Se A.S.} \rightarrow 0$

$t \rightarrow \infty$

Qual è l'uscita $y(t)$ del sistema quando applico $u(t) = \alpha_u e^{\beta t}$ con \tilde{x}_0 ? È $y(t) = \alpha_u e^{\beta t} + C e^{\beta t} (\tilde{x}_0 - x_0)$, $t \geq 0$

Nel caso sinusoidale, a regime otteriamo in uscita una sinusode alla stessa pulsazione con ampiezza e fase che dipenderanno da $G(i\omega)$. Se c.i. opportuna, otteriamo questo comportamento dall'istante iniziale indipendentemente dalle proprietà di stabilità. Gli zeri della $G(s)$ hanno un potere bloccante se $\beta = z \Rightarrow y(t) = 0$.

Teorema della risposta in frequenza

Dato un sistema dinamico lineare descritto da $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{con f.d.t. } G(s), \text{ all'ingresso} \\ y = Cx + Du \end{cases}$

sinusoidale $u(t) = \beta \sin(\omega t + \alpha)$ è associata, se la cond. i. è opportuna e se A non ha autovettori su Im., l'uscita $y(t) = \beta |G(i\omega)| \sin(\omega t + \alpha + \angle G(i\omega))$. Se c.i. non è opportuna il suo mov. libero $\rightarrow 0$

DIM: $u(t) = \beta \sin(\omega t + \alpha)$

$$= \frac{\beta}{2i} \left[e^{i(\omega t + \alpha)} - e^{-i(\omega t + \alpha)} \right],$$

Separo i due impresi:

$$u_1 = \frac{\beta}{2i} e^{i\omega t} e^{i\alpha} \quad u_2 = \frac{-\beta}{2i} e^{i\omega t} e^{-i\alpha}$$

Questo teorema permetterà di inter-
pretare i sis. lin. come filtri in freq-
uente

Esiste c.i. $x(0)$:

$$\begin{aligned} u_1(t) &\xrightarrow{x(0)=x_{0,1}} y_1(t) = \beta_1 G(i\omega) e^{i\omega t} \\ u_2(t) &\xrightarrow{x(0)=x_{0,2}} y_2(t) = \beta_2 G(-i\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Ampiezza dell'esponentiale
(sinusode in ingresso)

e zeri bloccanti

Applico il principio di sovrapposizione degli effetti: $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \xrightarrow{x(0)=x_{0,1}+x_{0,2}} y(t) = \beta_1 G(i\omega) e^{i\omega t} + \beta_2 G(-i\omega) e^{-i\omega t}$

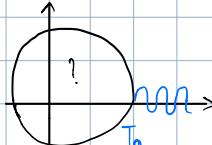
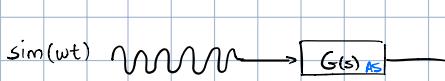
OSS: $G(-i\omega) = G^*(i\omega)$ perché $G(s)$ è a coefficienti R, se ad s sostituisco $-i\omega$ invece che $i\omega$ cambia solo il segno della parte immaginaria e l'espressione sarà simmetrica ma con fase opposta.

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i\angle G(i\omega)} \Rightarrow y(t) = \frac{\beta}{2i} e^{i\omega t} |G(i\omega)| e^{i(\omega t + \angle G(i\omega))} - \frac{\beta}{2i} e^{-i\omega t} |G(i\omega)| e^{-i(\omega t + \angle G(i\omega))}$$

$$B_1 \qquad \qquad \qquad B_2$$

Semplificando, $y(t) = \frac{\beta}{2i} |G(i\omega)| (e^{i\omega t + i\alpha + \angle G(i\omega)} - e^{-i\omega t - i\alpha + \angle G(i\omega)})$, però il risultato è che una vasta classe di segnali può essere vista come comb. lineare di segnali sinusoidali, non ci sono ipotesi di stabilità e vale anche per $\text{Re}(\lambda_i) > 0$

COROLLARIO: se il sis. è AS. allora $\forall c.i. \times (t)$ l'uscita di regime associata a $u(t) = \beta \sin(\omega t + \alpha)$ è

$$y_\infty(t) = \beta |G(i\omega)| \sin(\omega t + \alpha + \angle G(i\omega))$$


$G(i\omega) = 1$ se è uguale
 >1 se amplifica
 <1 se diminuisce

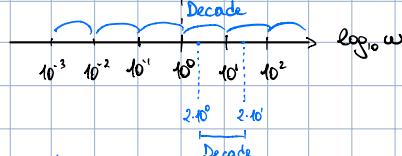
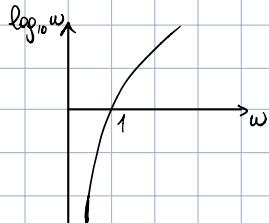
La riscalatura dipende dalla pulsazione

in ingresso: si dice che i sistemi lineari sono dei filtri in frequenza perché alcune pulsazioni le attenuano, altre passano invariate e altre ancora sono amplificate. Se S ha zeri su Im, a regime annulla le sinusoidi pari alla posizione degli zeri

Si definisce **Risposta in frequenza** di un S. lineare $G(s)|_{s=i\omega} = G(i\omega)$, $\omega \geq 0$ e $G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i\angle G(i\omega)}$.

I diagrammi di modulo e fase di $G(i\omega)$ sono i diagrammi di Bode della risposta in frequenza.

DIAGRAMMI DI BODE DEL MODULO E DELLA FASE (espresso in $\log_{10}(w)$)



$$G(s) = \mu \frac{\prod_k (1 + \zeta_k T_k)}{\prod_k (1 + \zeta_k T_k)} \frac{s^2 + 2 \sum_k \tilde{\omega}_{m,k} s + \tilde{\omega}_{m,k}^2}{s^2 + 2 \sum_k \tilde{\omega}_{m,k} s + \tilde{\omega}_{m,k}^2} \cdot \frac{1}{s^8}$$

annorizzamento
pulsazione naturale
Zeri c.c.
indici K diversi
Poli c.c.

$$T_k \rightarrow z_k = -\frac{1}{T_k} \text{ zero reale}$$

$$\zeta_k \rightarrow p_k = -\frac{1}{\zeta_k} \text{ polo reale}$$

g TIPO $\Rightarrow g > 0 \Rightarrow$ g poli in $s=0$
 $\Rightarrow g < 0 \Rightarrow$ lg|z| zeri in $s=0$
 indicativo del # poli o zeri in $s=0$

$$\mu = \left[\zeta_k G(s) \right]_{s=0}$$

Guadagno generalizzato quando ci sono poli o zeri in $s=0$

ES. $G(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s}$ fatt di un sistema strett. proprio

$$= \frac{3s+1}{s(s+2)} \text{ in } s=0 \text{ ho polo } g=1 \text{ e } \mu = \left[\frac{3s+1}{s+2} \right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{s} \frac{1+3s}{1+\frac{1}{2}s} \quad Z = -\frac{1}{3} \quad T = 3 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -2 \quad \zeta = \frac{1}{2}$$

$|G(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(i\omega)|$ forma vantaggiosa perché il prodotto di tanti contributi lo vedo come somma di \log_{10}

$$|G(i\omega)|_{dB} =$$

$$20 \log_{10} |\mu| - 20 \log_{10} |(i\omega)^g| + \sum_k 20 \log_{10} |1+i\omega T_k| - \sum_k 20 \log_{10} |1+i\omega Z_k| + \sum_k 20 \log_{10} \left| \frac{-\omega^2 + 2i\tilde{\xi}_k \tilde{w}_{m,k} \omega + \tilde{w}_{m,k}^2}{\tilde{w}_{m,k}^2} \right| - \sum_k 20 \log_{10} \left| \frac{-\omega^2 + 2i\omega \tilde{\xi}_k w_{m,k} + w_{m,k}^2}{w_{m,k}^2} \right|$$

(A) $\frac{1}{(i\omega)^g}$ dB (B)

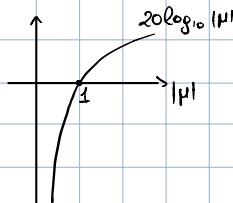
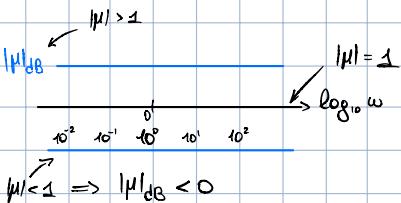
(C) disegnare un polo
è come fare il simmetrico
dello zero (è al denominatore \Rightarrow negativo -)

(D)

$$\angle G(i\omega) = \angle \mu - \angle (i\omega)^g + \sum_k \angle (1+i\omega T_k) - \sum_k \angle (1+i\omega Z_k) + \sum_k \angle \left(\frac{-\omega^2 + 2i\tilde{\xi}_k \tilde{w}_{m,k} \omega + \tilde{w}_{m,k}^2}{\tilde{w}_{m,k}^2} \right) - \sum_k \angle \left(\frac{-\omega^2 + 2i\omega \tilde{\xi}_k w_{m,k} + w_{m,k}^2}{w_{m,k}^2} \right)$$

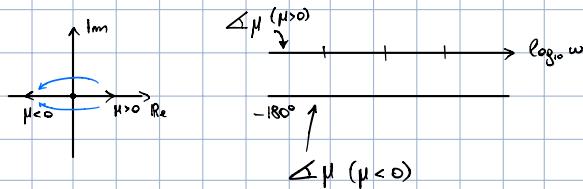
(A) $|\mu|$ (B) $(i\omega)^g$ (C)

$$(A) |\mu|_{dB} = 20 \log_{10} |\mu|$$



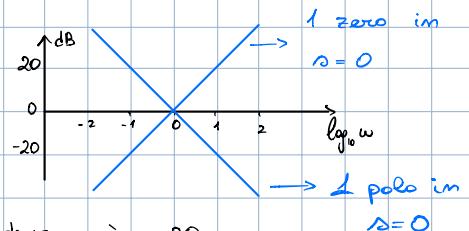
L'ordinata dipende dal modulo di μ
perché è un logaritmo.

$$\Delta \mu = \begin{cases} 0^\circ, & \mu > 0 \\ -180^\circ, & \mu < 0 \end{cases}$$



$$(B) \left| \frac{1}{(i\omega)^g} \right|_{dB} = -20 \log_{10} |i\omega|^g = -20 g \log_{10} \omega$$

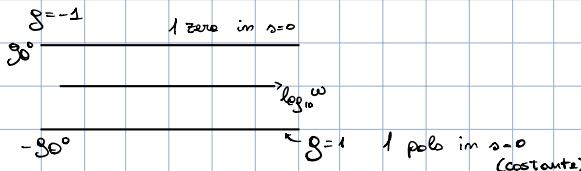
funz z lineare



Venne una retta: bastano due punti per disegnarla. A $\omega=1$, $Z(s)=0$; la pendenza è $-20g$, se $g=1$ il coeff. ang. è -20 , quindi quando incremento $\log_{10}(\omega)$ da 0 a 1, la retta si decremente di -20 . Si dice che la retta che attraversa l'asse delle ω in $\omega=1$ è a pendenza $\pm 20 \text{ dB/decade}$ perché c'è il logaritmo. Se $g=2$, -40 dB/decade . Nel caso $g=1$, polo in $s=0 \Rightarrow -20 \text{ dB/decade}$; uno zero in $s=0 \Rightarrow g=-1$ e la pendenza $+20 \text{ dB/decade}$. Poli fanno diminuire il modulo al crescere di ω , gli zeri lo fanno aumentare. Ogni zero $+20 \text{ dB/dec}$, ogni polo -20 dB/dec .

Siccome queste pendenze sono ricorrenti, si usano le pendenze normalizzate a 20 dB/dec : ad es. +2 vuol dire 40 dB/dec , -1 $\equiv -20 \text{ dB/dec}$

$$\angle \frac{1}{(i\omega)^g} = -g \angle i\omega = -g 90^\circ$$



Al variare di ω la fase resta costante \Rightarrow convenzione a $+90^\circ$

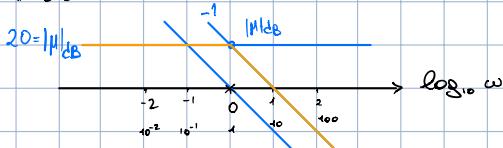
OSS: Il polo nell'origine produce un ritardo di fase, lo zero un anticipo

$$G(s) = \frac{10}{s}$$

$\mu = 1$, polo in $s=0$

$\mu = 10$, ottenuto eliminando il polo in $s=0$

$$|G(i\omega)|_{dB} = 20 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{somma di 2 contributi} \\ G(i\omega) \end{array} \right.$$

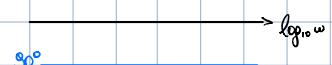


\Rightarrow sommo le due rette: traslazione di +20 dB verso l'alto

$$\angle G(i\omega) = \angle \mu + \angle \left(\frac{1}{i\omega} \right)^8$$

$$\angle 10 = 0^\circ$$

$$-90^\circ$$



$$90^\circ$$

DIA GRAMMI DI BODE

(A) μ Guadagno

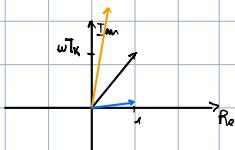
$$(1 + sT_k) \leftarrow z_k = -\frac{1}{T_k}$$

Contributo degli zeri

$$\frac{1}{s^8}$$

$$|1 + i\omega T_k|_{dB} = 20 \log_{10} |1 + i\omega T_k|$$

$$= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T_k^2}$$



$$1 + i\omega T_k \approx \begin{cases} 1 & \omega \ll 1/T_k \\ i\omega T_k & \omega \gg 1/T_k \end{cases}$$

$$T_k > 0 \quad |\omega T_k| > 1 \quad \Leftrightarrow \omega > \left| \frac{1}{T_k} \right| = |z_k|$$

$$|1 + i\omega T_k|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T_k^2} \approx \begin{cases} 0 & \omega < |z_k| \\ 20 \log_{10} (\omega |T_k|) & \omega > |z_k| \end{cases}$$

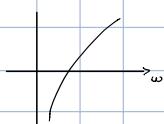
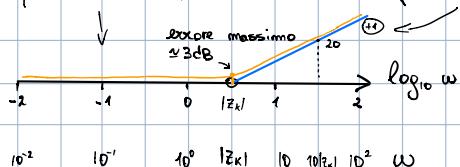
$$20 \log_{10} (\omega |T_k|) = 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |T_k|$$

↑ retta

$$= 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} |z_k|$$

Quando valutato nel punto alla pulsazione pari al modulo dello zero, quest'espressione restituisce 0: viene una spezzata continua \Rightarrow il diagramma di Bode approssimato del modulo del contributo (C) è:

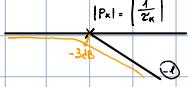
O fino a $\omega = |z_k|$ lo zero fa aumentare il modulo



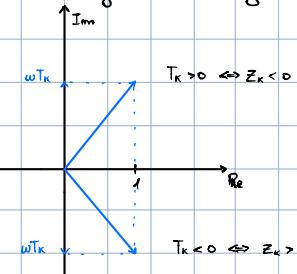
Il diagramma esatto è ben approssimato dall'asintotico soprattutto in $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$; l'errore massimo si verifica in corrispondenza della pulsazione pari allo zero per la quale la Re e Im del $1 + i\omega T_k$ sono uguali

Nel caso dei poli basta fare lo speculare rispetto l'asse ω : e il modulo $20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$

$$\text{Polo reale } \frac{1}{1 + s z_k} \leftrightarrow -20 \log_{10} |1 + i\omega z_k|$$



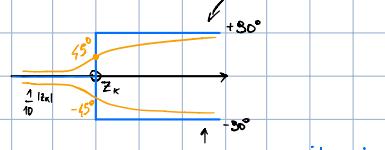
$$\bullet \angle (1 + i\omega z_k) = \arctg(\omega z_k) = \arctg(10^{\log_{10} \omega} T_k)$$



$$\approx \begin{cases} \angle 1 = 0^\circ & \omega < |z_k| \\ \angle (i\omega z_k) & \omega > |z_k| \\ \begin{cases} 90^\circ & z_k < 0, T_k > 0 \\ -90^\circ & z_k > 0, T_k < 0 \end{cases} & \end{cases}$$

Gli zeri aumentano la fase se sono reali negativi, viceversa la diminuiscono

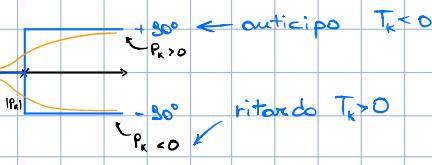
$z_k < 0 \leftarrow$ anticipo



$z_k > 0 \leftarrow$ ritardo

Per i poli: $\frac{1}{1+i\omega z_k} = \angle (1+i\omega z_k)$

$$-20 \log_{10} |1+i\omega z_k|$$



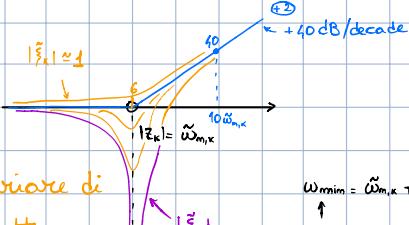
$$\frac{\omega^2 + 2\tilde{\xi}_k \tilde{\omega}_{m,k} \omega + \tilde{\omega}_{m,k}^2}{\omega^2} = (1+\alpha T_k)(1+\alpha T_k^*)$$

$$\tilde{\xi}_k = \frac{1}{z_k}, \tilde{\omega}_{m,k} = \sqrt{\omega_{m,k}}$$

$$T_k = -\frac{1}{z_k}, T_k^* = -\frac{1}{z_k^*}$$

$|\tilde{\xi}_k| < 1, \tilde{\omega}_{m,k} > 0$
smorzamento e pulsazione naturale

1) Riporto sull'asse ω la pulsazione pari al modulo degli zeri reali ($= 1$ zeri c.c.) = $\tilde{\omega}_{m,k}$



Al variare di $|\tilde{\xi}_k|$ otengo diverse curve con minimo: $|\tilde{\xi}_k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zeri c.c. ne hanno smorzamento sufficientemente piccolo ATTENUANO, se lo smorzamento è 0 gli zeri sono su Im_m , annullano una precisa pulsazione (filtro per i disturbi)

Più $\tilde{\xi}_k$ è piccolo, più $\tilde{\omega}_{min}$ si avvicina a $\tilde{\omega}_{m,k}$ e con $|\tilde{\xi}_k|=0$ è esattamente uguale a $\tilde{\omega}_{m,k}$ con arintato verticale e minimo del modulo uguale a 0.

Nel caso di poli c.c. il contributo è simmetrico: non avrò un avvolgimento ma un picco, detto picco di risonanza → un certo intervallo di pulsazioni vicino a $\tilde{\omega}_{m,k}$ viene AMPLIFICATO di

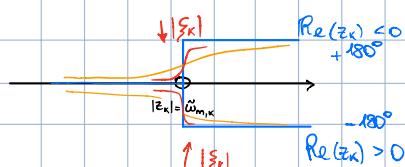
un fattore elevato tanto

più lo smorzamento

è piccolo.

$\begin{cases} -90^\circ & \text{simolo zero reale positivo} \\ +90^\circ & \text{" " " negativo} \end{cases}$

FASE



si disegna il diag. approssimato

delle zeri reali coincidenti

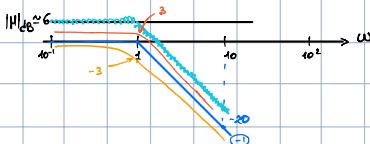
Al diminuire del modulo dello smorzamento l'approssimazione diventa più esatta, in $|\tilde{\xi}_k|=0$ è lo scilino mentre col modulo di $\tilde{\xi}_k$ crescente tende a tg^{-1} . Con $\tilde{\xi}_k=0$ $\angle \frac{(i\omega)^2 + \tilde{\omega}_{m,k}^2}{\tilde{\omega}_{m,k}^2} = \angle \frac{\omega^2 + \tilde{\omega}_{m,k}^2}{\tilde{\omega}_{m,k}^2}$

Zeri con $\tilde{\xi}_k > 0$ danno anticipo di fase (+180°), zeri con $\tilde{\xi}_k < 0$ producono ritardo di fase (-180°). Il caso con i poli è lo speculare con +180° se $\tilde{\xi}_k < 0$ e -180° se $\tilde{\xi}_k > 0$.

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \quad \delta = 0 \quad \mu = G(\infty) = 2 \quad P = -1$$

$$\rightarrow |H|_{dB} = 20 \log_{10} 2 = 2 \cdot 20 \log_{10} \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}$$



Aggiungiamo un polo $p_2 = -10^3 \rightarrow -90^\circ$ alla fase im $\omega = 10^3$

pendenza -1 → -2 im $\omega = 10^3$



Dato che i poli distano 3 decadi, il diag. asintotico è ancora una buona approssimazione con gli errori = 3 dB im entrambi i poli → se aggiungo singolarità in alta frequenza esse daranno un contributo rilevante da una decade prima

Esempio di un corso in cui ho la sovraelongazione della risposta allo scalino:

DEF: Sistema a fase minima: sistema il cui guadagno è positivo e la parte reale di poli e zeri è minore o uguale a zero. Guardando il diagramma assintotico del modulo a ogni cambio in pendenza in diminuzione corrisponde la presenza di un contributo angolare di ritardo dovuto a poli, mentre ogni cambio in aumento comporta la presenza di un contributo in anticipo degli zeri: se modulo ha pendenza $K \Rightarrow$ fase assume valore $K90^\circ$.

$$\bullet G(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)(1+10s)} \quad m=2$$

$$g=0$$

$$\mu = G(s) = 1$$

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |\mu| = 0$$

$$z_1 = -1$$

$$p_1 = -10$$

$$p_2 = -100$$

$$|G(i\omega)|_{dB}$$

$$p_1 = -10$$

$$p_2 = -100$$

$$\Delta G(i\omega)$$

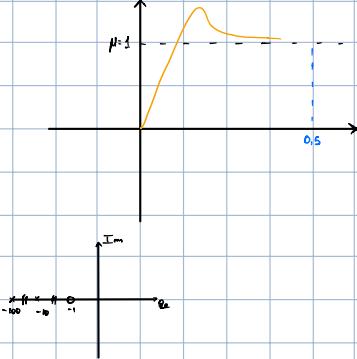
$$90^\circ$$

$$-90^\circ$$



Il diagramma $|G(i\omega)|_{dB}$ evidenzia una regione di pulsazioni ω_c se S è A.S.

($m=2$, poli negativi) e seleziono con una sinusoida con pulsazione appartenente a quell'intervallo otengo una sinusoida della stessa pulsazione ma amplificata di un fattore >1 per la trasformazione logaritmica. La sinusoida viene amplificata più del valore del guadagno e la risposta allo scalino parte da sistema strettamente proprio (TVI: $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{rat. fotta} = 0$) e assintoticamente tende a $\mu=1$ (TVF). Lo zero è più vicino all'asse immaginario \Rightarrow c'è la sovraelongazione.



OSS: C'è un insieme di pulsazioni che viene amplificato più di 1, più del valore di regime della risposta allo scalino.