Risposta allo scalino

↳ mov. forzato dell' uscita

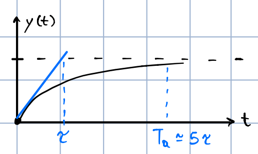
$G(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$, $\tau > 0$ $\quad p = -\frac{1}{\tau}$

Uso Heaviside per trovare l' antitrasformata

Ricaviamo $Y_F(s) = G(s)\,\frac{1}{s}$ ← $\mathcal{L}(sca(t))$ $= \frac{\mu/\tau}{s(1+s\tau)/\tau} = \frac{\mu/\tau}{s(s+1/\tau)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+\frac{1}{\tau}}$ $\quad s(s-p)$ $\quad \begin{cases} \alpha = \mu \\ \beta = -\mu \end{cases}$

$y_F(t) = \alpha + \beta e^{pt}$ $\qquad y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$G(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$ $\quad \mu$ ← Guadagno, τ ← COST. DI TEMPO $\qquad \tau > 0$



$t \geq 0$

$y(t) = C\,x(t)$ perchè il sistema è strett. proprio

OSS: Data la FdT alimentata da un ingresso, l' ingresso forzante avrà un contributo nei vari fratti: $\frac{\alpha}{s}$ in questo caso. Gli altri termini sono dovuti ai poli della FdT, che danno contributo di tipo $e^{p_m t}$ per ogni polo p_m.

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

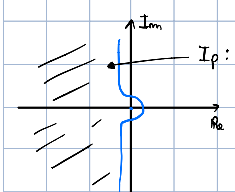
$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ $\qquad gr\,D(s) > gr\,N(s)$ ← Condizione : $Y(s)$ strettamente propria

$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s)$ $\qquad$ Valore asintotico della antitrasformata di Laplace in $t = 0$

es. di applicazione: $y(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[G(s)\,\frac{1}{s}\right] = 0$ $\qquad \forall G(s)$ strett. propria

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Ipotesi aggiuntiva: una FdT ammette sempre limite per $t \to \infty$? No, ad es. se è un sin o cos, ma c'è una condizione su $Y(s)$ che garantisce che l' antitrasformata ammette sempre limite.



Ip: Radici di $D(s)$ a parte reale < 0 oppure in $s = 0$

$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)$

$= \lim_{s\to 0} s\left[G(s)\,\frac{1}{s}\right] = G(0) = \mu$

Ipotesi per applicare il teorema:

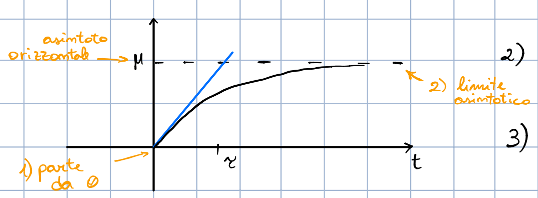
$Y(s) = \frac{\mu}{s(1+s\tau)}$ $\quad \tau > 0$ $\quad s_1 = 0$ ✓, $s_2 = -\frac{1}{\tau} = p$ ✓ $\Big\}$ poli a $Re < 0$ o $Re = 0$

Casi in cui l' ipotesi non è soddisfatta non ammettono limite all' infinito

es. $\frac{1}{s^2+4}$ $\qquad s_{1,2} = \pm 2i$ $\quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$

TRACCIAMENTO QUALITATIVO RISP. SCALINO (senza passare per l' antitrasformata)

$G(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$ $\qquad \tau > 0 \qquad \mu > 0$



1) $y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = 0$

2) $y_\infty = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = G(0) = \mu$

3) Calcolo la pendenza con cui arriva a μ : è la $\mathcal{L}[\dot{y}(t)]$ a cui applico il TVI che mi dice quanto vale $\dot{y}(t=0)$, se è zero calcolo $\ddot{y}$

$\mathcal{L}\left[\dot{y}(t)\right](s) = s\,\underbrace{Y(s)}_{=\frac{1}{s}G(s)} - \overbrace{y(0)}^{=0\ (TVI)} = G(s) \Rightarrow \dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) = \frac{\mu}{\tau}$

verifico condizione TVI (cioè $G(s)$ raz. fratta e strett. propria)

Caso di FdT a 2 poli reali:

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

$p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ $\quad$ $\tau_1 > 0 \quad \tau_2 > 0$

$p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ $\quad$ $\tau_2 > \tau_1 > 0$ $\quad$ $\tau_{dominante} = \tau_2 \leftarrow$ tempistica + lenta

T è la costante di tempo dello zero $\longleftarrow$ $z = -\frac{1}{T}$ $\quad T \neq 0$

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{\mu(1+sT)/\tau_1\tau_2}{s\frac{(1+s\tau_1)}{\tau_1}\frac{(1+s\tau_2)}{\tau_2}} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s-p_1} + \frac{\alpha_3}{s-p_2}$$

forzante + 2 contributi dei poli

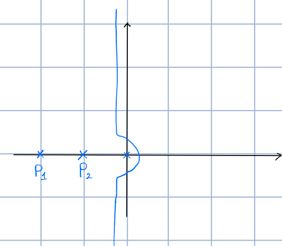
Divido N e D per τ_1 e τ_2 per far comparire "s-a" al D (così è fratto semplice)

Nessuno dei poli è complesso, non ci aspetteremo un andamento oscillatorio nella FdT. Al più possono dare origine ad una sovra/sotto elongazione

1) $y(0) = \lim_{s \to \infty} \left[sY(s) = sG(s)\frac{1}{s} \right] = 0$

con un sistema strettamente proprio la risposta forzata parte da 0

2) $y_\infty = \lim_{s \to 0} sY(s) = G(0) = \mu$



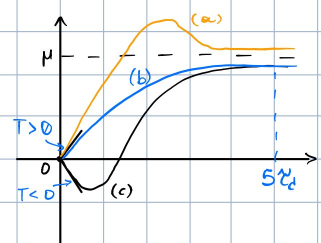
$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

Guadagno

Cost. di tempo

3) $\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = sY(s) - y(0) = G(s) \leftarrow$ è strettamente propria (TVI)

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} sG(s) = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2}$$

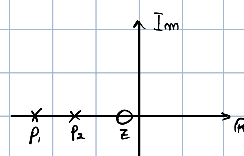


$\mu > 0$

Segno di T:

1) $T > 0 \implies z = -\frac{1}{T} < 0$ la derivata è positiva, la risposta cresce

- $T > \tau_1 > \tau_2 > 0$



(a) Sovraelongazione: questo caso si manifesta quando lo zero è più vicino all'asse immaginario rispetto ai poli

(b) Crescita data dalla combinazione di due esponenziali (tutte le altre situazioni)

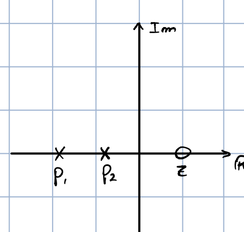
NOTA: Se lo zero si trova molto vicino a uno dei poli il sistema si comporta come uno a singolo polo

2) $T < 0 \implies z = -\frac{1}{T} > 0$

(c) Sottoelongazione iniziale, o risposta inversa, che è tanto più pronunciata quanto $-1/T$ si avvicina all'origine del piano $\mathbb{C}$

- $T > \tau_2 > \tau_1 > 0$

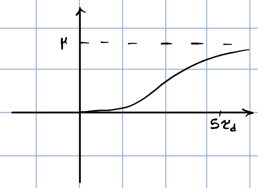
I sistemi A.S. con tutti i poli a parte reale < 0 e con almeno uno zero con $Re(z_i) > 0$ sono detti Sistemi a fase non minima



La risposta allo scalino ha un transitorio in cui l'andamento in segno è opposto a quello di regime

3) $T = 0$ Il sistema è a soli due poli reali: se $T=0 \Rightarrow \dot{y}(0) = y(0) = 0$

Potranno esserci due casi a seconda del valore della $\ddot{y}(0)$ per la concavità:



$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)](s) = s\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) - \dot{y}(0) = sG(s)$

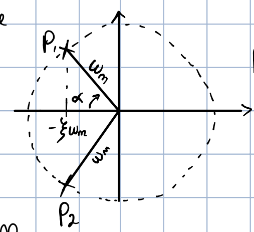
$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,[\underbrace{sG(s)}_{\frac{\mu s^2}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}}] = \frac{\mu}{\tau_1\tau_2}$

Oss: se la differenza tra p_1 e p_2 è molto elevata, il sistema può essere visto come un sistema del primo ordine, dove prevale la componente più lenta, cioè il polo più grande.

Caso con poli complessi coniugati:

$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $0 < \overset{\text{csi}}{\xi} < 1$ SMORZAMENTO dei poli, $\omega_n > 0$ Pulsazione naturale

Calcolo dei poli:



$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \underbrace{\sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2}}_{\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} = -\xi\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ← $\xi < 1$ Complessi coniugati

μ Guadagno, valore di regime della risposta allo scalino unitario

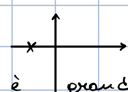
ξ caratterizza l'entità delle oscillazioni, ω_n interviene nella parte oscillatoria. ξ è positivo per avere radici a $Re < 0$ al denominatore $\Rightarrow$ AS. STAB.

$|p_1| = |p_2| = \omega_n$ modulo dei poli

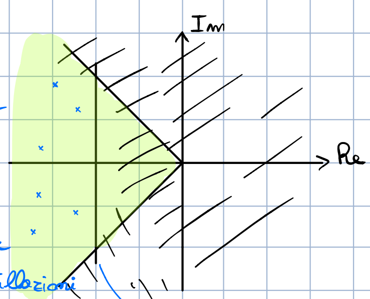
Fase: $\omega_n\cos(\alpha) = \xi\omega_n$
$\Rightarrow \cos(\alpha) = \xi \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\xi)$

Se $\xi = 0$ i poli saranno opposti e sull'asse immaginario ($\alpha = \pm 90°$)

Se $\xi = 1$, i poli sono coincidenti e reali ($\alpha = 0°$)



Se ξ è piccolo (tende ad avere i poli vicino all'asse Im) le oscillazioni saranno di intensità più elevata; se ξ invece è grande (le radici sono reali), le oscillazioni scompaiono. Nell'ambito del controllo, i poli dovranno essere nel semipiano $Re < 0$ per avere l'A.S. e non troppo vicini a Im per evitare oscillazioni elevate che possono danneggiare i componenti. $\tau = \frac{1}{|Re(p)|}$, più un polo si trova lontano più il suo contributo si esaurisce rapidamente, con oscillazioni o meno a seconda che sia o meno reale. Più ξ è elevato e vicino a 1 più le oscillazioni sono trascurabili. Più è piccolo più sono elevate le oscillazioni: ξ dovrà stare all'interno di un settore conico.



Risposta allo scalino:

$Y(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$

$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\underbrace{Y(s)}_{G(s)} = 0$

$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\underbrace{Y(s)}_{G(s)} = G(0) = \mu$

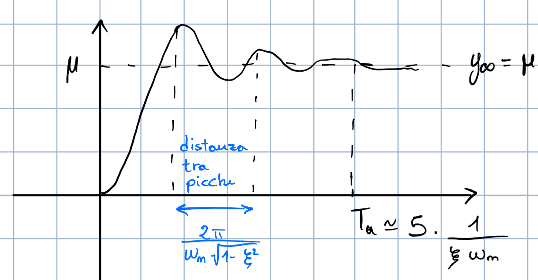
$\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = sG(s) \Rightarrow \ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s) = \mu\omega_n^2$
$\mu > 0$

$Y(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{\underbrace{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}_{(s-p_1)(s-p_2)}} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s-p_1} + \frac{\gamma}{s-p_2}$

Mi aspetto un andamento oscillatorio (poli cc)

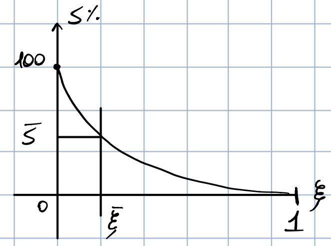
$y(t) = \underset{\mu}{\alpha} + \beta e^{p_1 t} + \gamma e^{p_2 t}$ tendono a zero perché $p_1, p_2 < 0$

$e^{p_1 t} = e^{-\xi\omega_n t}\, e^{i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t}$



$S\% = \frac{Y_{MAX} - Y_\infty}{Y_\infty} \cdot 100$
sovraelongazione massima percentuale (primo picco)

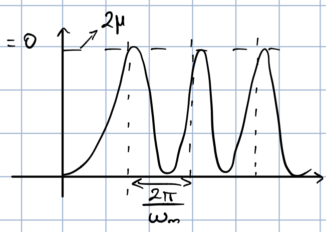
$S\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100$ dipende da ξ ed è monotona decrescente



Vogliamo $\xi > \bar{\xi}$ in modo da avere le oscillazioni limitate sotto una certa soglia.

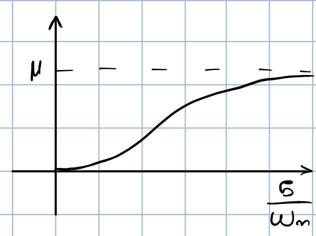
CASI LIMITE:

$\xi = 0$



Contributi $e^{i\omega_n t} \Rightarrow$ somma di seni e coseni

$\xi = 1^-$



Non c'è più la parte immaginaria e scompaiono le oscillazioni

---

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_K(s) + \gamma$$

sviluppo in fratti semplici

gr $D(s) > 2$

posso vedere il sistema con fdt $G(s)$ come parallelo tra sistemi con fdt $G_1, G_2, \dots, G_K$