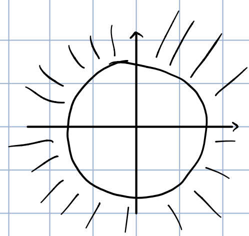
TRASFORMATA ZETA (T. di Laplace per segnali a tempo discreto)

$$f(k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}$$

$$z \in V \subseteq \mathbb{C}$$



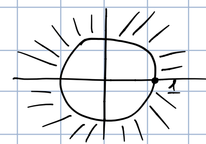
Regione di convergenza

ESEMPI:

- $f(k) = \mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{imp}(k)\, z^{-k} = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

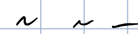
- $f(k) = \mathrm{sca}(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{1 z^{-k}}_{= (z^{-1})^k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

  $|z^{-1}| < 1 \iff |z| > 1$

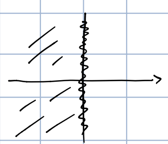


- $f(k) = a^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a^k z^{-k}}_{= (a z^{-1})^k} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ se $a = 1$ ottengo lo scalino

  $|a z^{-1}| < 1 \iff |z| > |a|$



CONTINUO



DISCRETO

PROPRIETÀ:

1) Linearità: $\mathcal{Z}[\alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k)](z) = \alpha_1 \mathcal{Z}[f_1(k)](z) + \alpha_2 \mathcal{Z}[f_2(k)](z)$

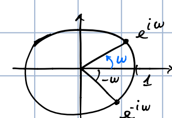
$$f(k) = \mathrm{sen}(\omega k) = \frac{e^{i\omega k} - e^{-i\omega k}}{2i}$$

$e^{i\omega k} \to (e^{i\omega})^k$, $e^{-i\omega k} \to (e^{-i\omega})^k$

$$a^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}$$

$$F(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}}\right] = \frac{z \overbrace{\frac{1}{2i}\left(-e^{-i\omega} + e^{i\omega}\right)}^{\mathrm{sen}\,\omega}}{z^2 - \underbrace{\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)}_{2\cos\omega} z + 1} = \frac{z\, \mathrm{sen}\,\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

$z^2 - 2z\cos\omega + 1 \to (z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})$



Analogia a tempo continuo: le radici stanno sulla circonferenza che svolge il ruolo di Im a T.C.

La $\mathcal{Z}$ di segnali sinusoidali la cui pulsazione differisce di multipli di 2π è la stessa

es: $\cos(\omega k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z[z - \cos(\omega)]}{z^2 - 2\cos(\omega) z + 1}$

$\mathrm{sen}(\omega k) \leftarrow$ periodico in ω di periodo 2π: $\mathrm{sen}((\omega + h2\pi)k) = \mathrm{sen}(\omega k + 2\pi \underbrace{hk}_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{sen}(\omega k) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{N}_0$

$h \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{sen}(\omega t) = -\mathrm{sen}(-\omega k) \leftarrow$ sono distinguibili solo le pulsazioni tra 0 e π

FENOMENO DELL'ALIASING

Supponiamo di avere una sinusoide a T.C. e campionarla

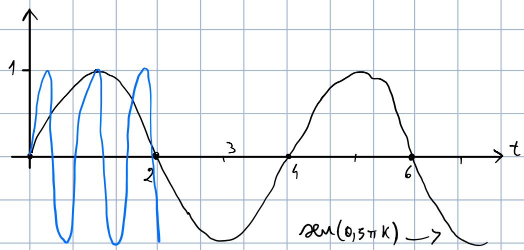
$\sin(0{,}5\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\Delta_s \leftarrow$ INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO

$\Delta_s = 1$ $\quad \sin(0{,}5\pi k)$, $k \in \mathbb{N}_0$

$t = k\Delta_s$

$$T = \frac{2\pi}{0{,}5\pi} = 4$$



I campioni sono gli stessi che ho prelevato dalla sinusoide più lenta

$\sin(2{,}5\pi t) \leftarrow T = \frac{2\pi}{2{,}5\pi} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\sin(2{,}5\pi k)$

Def: Fenomeno dell'aliasing

Sinusoidi a TC con pulsazioni diverse possono apparire uguali a TD

$$\omega\Delta_s \in [0, \pi] \iff \omega \in \left[0, \frac{\pi}{\Delta_s}\right]$$

Teorema di Shannon: dato un segnale TC a banda limitata e lo campiono con una pulsazione di campionamento nella banda $[0, 2\omega_{MAX}]$, non avrò il problema dell'aliasing.

$$\bar{\omega} \longrightarrow \tilde{\omega} = \bar{\omega} + \frac{2\pi h}{\Delta_s}$$

$$\sin(\bar{\omega}\Delta_s k) = \sin\left(\left(\bar{\omega} + \frac{2\pi h}{\Delta_s}\right)\Delta_s k\right)$$

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA ZETA:

1) Linearità

2) Anticipo unitario

$$\mathcal{Z}[\underbrace{f(k+1)}_{s(k)}](z) = z(F(z) - f(0))$$

$\sim$ z è detto operatore di anticipo unitario

$$\mathcal{Z}[f(k+1)](z) = z\sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1)\, z^{-k-1} + f(0) - f(0)$$

3) Ritardo unitario $\quad$ IP. $f(k) = 0$, $k < 0$

z^{-1}: OPERATORE RITARDO UNITARIO

$$\underbrace{\mathcal{Z}[f(k-1)](z)}_{} = z^{-1}F(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)\, z^{-k} \underset{k-1=h}{=} \sum_{h=0}^{\infty} f(h)\, z^{-h-1}$$

ANTITRASFORMATA Z $\rightarrow$ METODO DEI FRATTI SEMPLICI

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \text{gr } D(z) \geq \text{gr } N(z)$$

$$a^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{h=0}^{m} \frac{\alpha_h}{z-\beta_h}$$

$$F(z) = \sum_{h=0}^{m} \frac{\alpha_h z}{z-\beta_h}$$

$$\Big\downarrow z^{-1}$$

$$f(k) = \sum_{h=0}^{m} \alpha_h \beta_h^k$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{?}{f(k)}\, z^{-k}$$

Divido z per $z-1$:

$$\begin{array}{r|l} z & z-1 \\ \hline -z+1 & 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ +1 & \\ -1+z^{-1} & \\ \hline z^{-1} & \end{array}$$

$f(0) = 1 \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 1$

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \frac{z^{-2}}{z-1}$$

METODO DELLA LUNGA DIVISIONE

FDT DI UN SISTEMA DINAMICO LINEARE A TD

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

DESCRIZIONE LEGAME FORZATO I/O

NEL DOMINIO DELLE TRASFORMATE

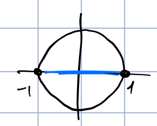
$$\mathcal{Z}[x(k+1)](z) = \mathcal{Z}[Ax(k) + Bu(k)](z)$$

$$zX_F(z) = AX_F(z) + BU(z)$$

$(zI - A)X_F(z) = BU(z)$ invertibile quasi ovunque, tranne quando z assume i valori degli autovalori di A

$$X_F(z) = (zI-A)^{-1}BU(z)$$
$$Y_F(z) = CX_F(z) + DU(z)$$
$$\underbrace{\left(C(zI-A)^{-1}B + D\right)}_{G(z)\ \text{FDT}} U(z)$$

esempio: $G(z) = \dfrac{2}{z-p}$ $\quad m_G = 1 \quad \lambda = p \quad u(k) = sca(k)$



$\lambda = p \qquad p > 0 \qquad |p| < 1$

$U(z) = \dfrac{z}{z-1} \qquad Y_F = \dfrac{2}{z-p} \cdot \dfrac{z}{z-1} \longrightarrow$ Divido per z (antitrasformata)

$$\frac{Y_F(z)}{z} = \frac{2}{(z-p)(z-1)} = \frac{\alpha_1}{z-p} + \frac{\alpha_2}{z-1} = \frac{\alpha_1(z-1) + \alpha_2(z-p)}{(z-p)(z-1)}$$

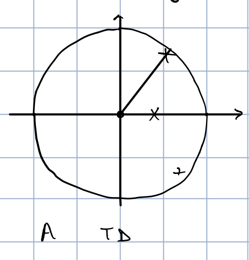
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 p = 2 \end{cases} \longrightarrow \alpha_2 = \frac{2}{1-p}, \quad \alpha_1 = -\frac{2}{1-p}$$

$$y(k) = \underbrace{\frac{2}{1-p}p^k}_{\text{Contributo polo}} + \frac{2}{1-p}, \quad k = 0,1,2\ldots$$

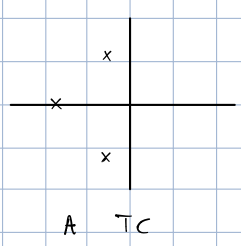
$\longrightarrow y_\infty = \mu$ GUADAGNO $= G(1)$

Se $p = 0$ vado a regime in un passo, più il polo si avvicina a 1 e più il transitorio tenderà a infinito.

Se il polo è negativo posso avere delle oscillazioni nella serie: si alternano i segni



A TD



A TC

Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z) \qquad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} f(k) z^{-k}}$$

$$f_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

Teorema del valore finale

$$f_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z), \quad F(z) = G(z) \cdot \frac{z}{z-1} \longrightarrow f_\infty = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} G(z) \frac{z}{\cancel{z-1}} \longrightarrow = G(1) = \mu$$

Se il S è AS il guadagno è $G(1)$, invece nel caso di poli/zeri in $z=1$ il guadagno generalizzato è $\mu = \left[(z-1)^{g} G(z) \right]_{z=1}$

TIPO

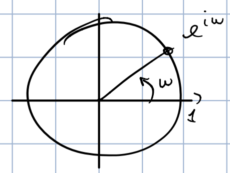
Anche a Tempo discreto vale il Teorema della risposta in frequenza e il corollario

Teorema della risposta in frequenza

Dato il S lineare a TD descritto da
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Si assuma che A non abbia autovalori in modulo uguale a 1, allora all'ingresso sinusoidale $u(k) = \alpha \,\text{sen}(\omega k + \beta)$ è associata, se la c.i. è opportuna, l'uscita $y(k)$ sarà:

$$y(k) = \alpha |G(e^{i\omega})| \,\text{sen}(\omega k + \beta + \angle G(e^{i\omega}))$$



dove $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$

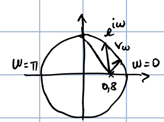
RISPOSTA IN FREQUENZA

$$G(z)\big|_{z=e^{i\omega}} = G(e^{i\omega}), \quad \omega \in [0, \pi]$$

$$G(e^{-i\omega}) = G^{*}(e^{i\omega})$$

$$G(z) = \frac{1}{z - 0{,}8}$$

$p = 0{,}8$



$$|G(e^{i\omega})| = \frac{1}{\underbrace{|e^{i\omega} - 0{,}8|}_{V_\omega}}$$

$$|\cdot|_{\omega=0} = \frac{1}{1{,}8} = \frac{5}{9}$$