$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\quad \alpha, \lambda > 0 \qquad f_X(x) = \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tx}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\,dx < +\infty \iff \forall\, \lambda - t > 0 \iff \forall t : t < \lambda$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda-t)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\rho^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\rho x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx}_{=1} = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}, \quad t < \lambda$$

CONSEGUENZE:

(1) $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, $\alpha_1, \alpha_2, \lambda > 0$ e X ed Y SONO INDIPENDENTI

Allora: $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$

DIM $\quad m_{X+Y}(t) \underset{\substack{\uparrow \\ X \perp\!\!\!\perp Y \text{ [già visto]}}}{=} m_X(t)\, m_Y(t) = \dfrac{\lambda^{\alpha_1}}{(\lambda-t)^{\alpha_1}} \cdot \dfrac{\lambda^{\alpha_2}}{(\lambda-t)^{\alpha_2}} = \dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\lambda-t)^{\alpha_1+\alpha_2}}$

$\rightarrow X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$

(2) $E(X) = m'_X(t)\big|_{t=0} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

(3) $Var(X) = \mu_2 - (\mu_1)^2 \qquad \mu_2 = E(X^2) = m''_X(t)\big|_{t=0} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$

$\rightarrow Var(X) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \dfrac{\alpha^2}{\lambda^2} = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

(4) se $\alpha = 1 \longrightarrow f_X(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(1)} I_{(0,+\infty)}(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$

$\longrightarrow \Gamma(1, \lambda) = esp(\lambda)$

(5) estendo (1) a $X_1 \dots X_m$ v.a. ind. $\sim esp(\lambda) = \Gamma(1,\lambda) \Rightarrow X_1 + \dots + X_m \sim \Gamma(m, \lambda)$

$\Gamma(m, \lambda)$ si chiama distribuzione di Erlang ($\alpha = m \in \mathbb{N}$)

ES: Tempo di vita di una batteria sia $X \sim esp(\lambda)$. Possiedo m batterie identiche se un apparecchio funziona con una sola batteria e sostituisco immediatamente la batt. scarica con quella nuova, che distribuzione ha il tempo di funz. tot. dell'apparecchio?

$X_i \sim esp(\lambda)$ $\quad i: 1 \dots m$, $m = \#$ BATTERIE

Allora $\quad T$ = Tempo di funz. apparecchio $= X_1 + X_2 + \dots + X_m$

Posso pensare che $X_1 \dots X_m$ siano indip.

$\Rightarrow T \sim \Gamma(m, \lambda)$.

(6) $\alpha = \dfrac{m}{2}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si chiama $\chi^2(m)$ cioè chi-quadro con m gradi di libertà.

Se $C_m \sim \chi^2(m)$ $\qquad f_{C_m}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} I_{(0,+\infty)}(x)$

se $m = 1$ $\qquad f_{C_1}(x) = \dfrac{x^{-1/2} e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} I_{(0,+\infty)}(x) \sim Z^2 \qquad Z \sim N(0,1)$

PROPRIETÀ DELLA V.A. $C_m \sim \chi^2(m)$:

(1) f_{C_m} vedi sopra

(2) $C_{m_1} \sim \chi^2(m_1)$ e $C_{m_2} \sim \chi^2(m_2)$, $C_1 \perp\!\!\!\perp C_2 \longrightarrow C_1 + C_2 \sim \chi^2(m_1 + m_2)$

CONSEGUENZA DELLA PROP. (2) DELLE Γ

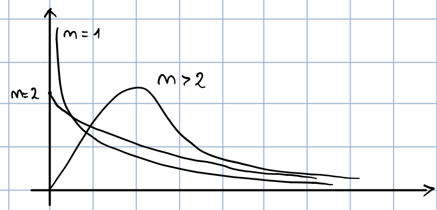
(3) $Z_1 \dots Z_m$ i.i.d. $\sim N(0,1)$ ALLORA $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \dots + Z_m^2 \sim \chi^2(m)$

(4) $E(C_m) = \dfrac{m/2}{1/2} = m \qquad Var(C_m) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = \dfrac{m/2}{1/4} = 2m$

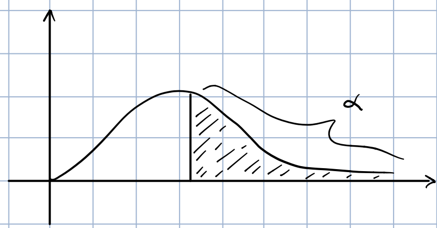
(5) Grafici Qualitativi

$m = 2 \longrightarrow$

$C_2 \sim exp(1/2)$

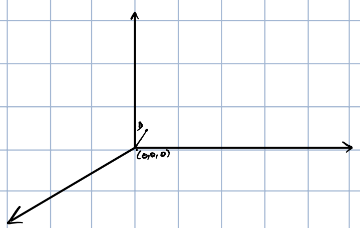


$\alpha \in (0,1)$



DEF: Dati $C_m \sim \chi^2(m)$ e $\alpha \in (0,1)$ si chiama quantile di coda destra o punto percentuale il numero $\chi^2_{\alpha,m}$ tale che $P(C_m > \chi^2_{\alpha,m}) = \alpha$

ESEMPIO: Oggetto in $\mathbb{R}^3$. Errori di misurazione siano indipendenti in ogni direzione e ciascuna direzione sia una v.a. Gaussiana di param. $\mu = 0$, $\sigma^2 = 4$. Voglio calcolare $P(D > 6)$



D_x, D_y, D_z = errori di misura nelle tre direzioni

$\longrightarrow D_x, D_y, D_z$ sono i.i.d. $\sim N(0,4)$

$\longrightarrow D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \longrightarrow P(D > 6) = P(D^2 > 36)$ PERCHÈ $D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{D_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{2}\right)^2 \sim \chi^2(3) \qquad \text{(Per prop. (3) della } \chi^2\text{)}$$

$\rightarrow P(D > 6) = P(D^2 > 36) = P(D^2/4 > 9) = ?$

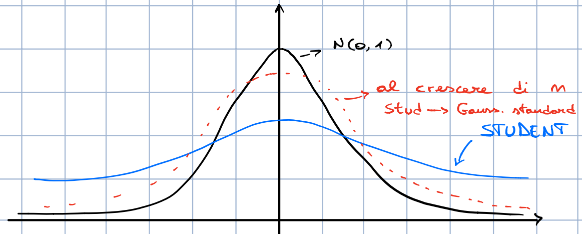
Distribuzione t di Student

DEF: $Z \sim N(0,1)$ e $C_m \sim \chi^2(m)$, Z e C_m indipendenti

DEFINIAMO $T_m := \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{C_m}{m}}}$, TALE V.A. T_m è ASS. CONT., E LA SUA DENSITÀ È LA t DI STUDENT CON

m gradi di libertà

$$f_{T_m}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\left(\frac{m+1}{2}\right)} = c_m \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{(m+1)}{2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$



al crescere di m $f_m \approx f_Z$

$$\lim_{m \to +\infty} f_{T_m}(x) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$T_m = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_m}{m}}} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{Z}{1}$$

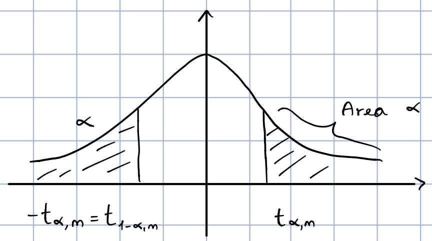
$C_m = V_1^2 + \ldots + V_m^2$ (con $V_1 \ldots V_m$ i.i.d. $\sim N(0,1)$)

$\Rightarrow \dfrac{C_m}{m} \xrightarrow[m \to \infty]{} E(V_1^2) = 1$

(2) $E(T_m) = 0$ $(m > 1)$

$Var(T_m) = \dfrac{m}{m-2}$ $(m > 2)$

DEF: Dati $T_n \sim t(n)$ con t di STUDENT con n gradi e $\alpha \in (0,1)$. IL PUNTO PERCENTUALE DI LIBERTÀ DI ORDINE α PER LA T_n È QUEL VALORE $t_{\alpha,n}$ TALE CHE $P(T_n > t_{\alpha,n}) = \alpha$



PROPRIETÀ DEI $t_{\alpha,n}$

$$t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n} \quad \forall \alpha \ \forall n$$

$$t_{0.9,10} = -t_{0.1,10}$$

Distribuzione di Fisher

DEF: $n, m \in \mathbb{N}$, $C_n \sim \chi^2(n)$, $C_m \sim \chi^2(m)$, $C_n \perp C_m$

$$F_{n,m} = \frac{\frac{C_n}{n}}{\frac{C_m}{m}} = \frac{m}{n}\,\frac{C_n}{C_m}$$ È UNA V.A. ASS. CONT.

$$f_{F_{n,m}}(x) = ? = c_{n,m}\,\frac{1}{x}\left(\frac{n^n\, m^m\, x^n}{(m+nx)^{m+n}}\right)^{1/2} I_{(0,+\infty)}(x)$$

DEF: DATI $F_{n,m}$ e $\alpha \in (0,1)$ si chiama punto percentuale di ordine α per una distribuzione di Fischer con n e m gradi di libertà quel valore $F_{\alpha,n,m}$ tale che $P(F_{n,m} > F_{\alpha,n,m}) = \alpha$

PROPRIETÀ $\quad F_{\alpha,n,m} = \dfrac{1}{F_{\alpha,m,n}}$

INFATTI $\quad F_{m,n} = \dfrac{\frac{C_m}{m}}{\frac{C_n}{n}} = (F_{n,m})^{-1}$

$$\alpha = P(F_{n,m} > F_{\alpha,n,m}) = P\left(F_{m,n} < \frac{1}{F_{\alpha,n,m}}\right) = 1 - P\left(F_{m,n} > \frac{1}{F_{\alpha,n,m}}\right)$$

$$\longrightarrow \ 1-\alpha = P\left(F_{m,n} > \frac{1}{F_{\alpha,n,m}}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{F_{\alpha,n,m}} = F_{1-\alpha,m,n}$$