Trasformate di Laplace e calcolo della FDT

Es 1 Dato $S: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 9u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = (0)$

a) Calcolare la FDT da u a y (dev'essere sempre specificato il legame ingresso/uscita per la FdT)

2 modi: a.1) formula

a.2) proprietà della trasformata di $\mathcal{L}$.

a.1) $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ = $C(sI-A)^{-1}B + D = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = (1 \;\; 1)\dfrac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

ingresso, uscita forzata

$= \dfrac{1}{(s+1)^2}(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} s+1 \\ 9(s+1) \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{(s+1)^2} 10(s+1) = \dfrac{10}{s+1}$ ← 1 polo!

Ma il sistema di partenza è del 2° ordine => c'è un autov. nascosto

a.2) Scriviamo S nel dominio delle trasformate:

$\mathcal{L}[\dot{x}_1(t)](s) = s\underbrace{\mathcal{L}[x_1(t)](s)}_{X_1(s)} - \cancel{x_1(0)} \to \emptyset$ cond. iniz. forzata

$\begin{cases} sX_1(s) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) = -X_2(s) - 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases}$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ $\quad Y(s) = G(s)U(s)$

Dobbiamo trovare $X_1(s)$ e $X_2(s)$: $X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s)$, $X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s)$

$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) + \dfrac{9}{s+1}U(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s)$

$Y(s) = G(s)U(s) \longrightarrow G(s) = \dfrac{10}{s+1}$

$v(t) = a t^k e^{pt} \leftrightarrow V(s) = a\dfrac{k!}{(s-p)^{k+1}}$

b) Determinare il mov. forzato dell'uscita quando $u(t) = 2e^{-3t}$ $t \geq 0$

$y_f(t) \longleftrightarrow Y(s) \leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s) \leftrightarrow U(s) \leftrightarrow u(t)$

$U(s) = 2 \cdot \dfrac{1}{s+3}$

Quindi $Y(s) = G(s)U(s) = \dfrac{10}{s+1}\cdot\dfrac{2}{s+3} = \dfrac{20}{(s+1)(s+3)}$ ← non moltiplicare, serve in forma fattorizzata

$= \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+3}$ $\quad \dfrac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+3)(s+1)}$

$\begin{cases} A3 + B = 20 \\ As + Bs = \emptyset \end{cases}$ $\begin{cases} B = 20 - A3 \\ As + 20s - A3s = \emptyset \end{cases}$ $\begin{cases} s(A-3A) = -20s \\ B = 20 - 3A \end{cases}$ $\begin{cases} -2A = -20 \to A = 10 \\ B = -10 \end{cases}$

$Y(s) = \dfrac{10}{s+1} - \dfrac{10}{s+3}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{10}{s+1} - \dfrac{10}{s+3}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{10}{s+1}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{10}{s+3}\right](t) =$

$y_f(t) = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$ $\quad t \geq 0$

X casa provare a farlo con la formula di Lagrange

c) Verificare $y_f(t)$ con TVI, TVF (teorema val. iniz. e teo. val. fin.

TVI: $y_f(0) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to \infty} s\dfrac{20}{(s+1)(s+3)} = 0$

TVF: $y_F(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\, 20}{\underline{\underline{(s+1)(s+3)}}} = 0$ ← poli tutti $Re < 0$

$y_F(0) = 10 e^{-0} - 10 e^{-3\cdot 0} = 10 - 10 = 0$

$y_F(\infty) = 0$

$\tilde{u}(t) = 2 e^{-3t}$

$\tilde{y}(t) = 10 e^{-t} - 10 e^{-3t}$

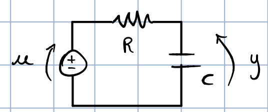
d) Calcolare $y(t) = ?$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u(t) = e^{-3t}$ $t \geq 0$

$y(t) = \underbrace{y_L(t)}_{C e^{At} x_0 \,=\, 3e^{-t}} + \underbrace{y_F(t)}_{=\, 5e^{-t} - 5e^{-3t}}$

Notiamo che $\tilde{u}(t)$ di prima è $2e^{-3t}$, quindi il nuovo ingresso è la metà dell' ingresso di prima. Poichè il sistema è lineare, l' uscita y_F è $\frac{1}{2}\tilde{y}_F(t)$

$y(t) = 8e^{-t} - 5e^{-3t}$

Es. 2 Data la rete elettrica



$C \frac{dv_c}{dt} = i = \frac{u - v}{R}$ $\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC} v + \frac{1}{RC} u$ $\quad x = v$, $y = v$

$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC} x + \frac{1}{RC} u \\ y = x \end{cases}$

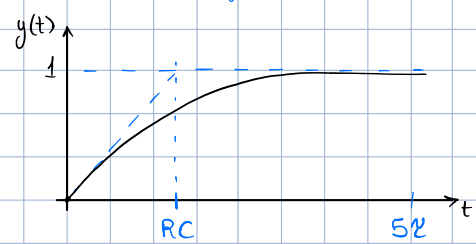
1) Calcolare la FdT del sistema (da u a y)

$s X(s) = -\frac{1}{RC} X(s) + \frac{1}{RC} U(s)$, $\quad Y(s) = X(s)$

$X(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} U(s) = Y(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$

2) Calcolare l' andamento qualitativo della risposta a scalino del sistema

Dobbiamo tracciare un grafico dell' uscita quando $u(t) = \mathrm{sca}(t) \cdot A$ con $A = 1$ (scalino unitario)



Applichiamo TVF e TVI

TVF: $y(\infty) = \lim_{s\to 0} \left[s\, Y(s) = s\, G(s) \cdot U(s) = s\, G(s) \frac{1}{s} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right] = 1$

TVI: $y(0) = \lim_{s\to\infty} \left[s\, Y(s) = s\, G(s) \frac{1}{s} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right] = 0$

Posso calcolare $\dot{y}(0)$, derivata iniziale: $\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = s \cdot \mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) = s\, Y(s)$

TVI: $\dot{y}(0) = \lim_{s\to+\infty} \left[s\, \mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = s \cdot s \cdot Y(s) \right] = \lim_{s\to+\infty} \left[s^2 G(s) U(s) = s\, G(s) = \frac{s/RC}{s + 1/RC} \right] = \frac{1}{RC}$ Pendenza iniziale

$\lambda = -\frac{1}{RC}$ $\quad \tau = -1/\lambda = RC$

3) Espressione analitica $y(t)$ $\boxed{\text{FORZATO!}}$

$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/RC} = \frac{A(s + 1/RC) + Bs}{s(s + 1/RC)}$

$\begin{cases} A/RC = 1/RC \rightarrow A = 1 \\ As + Bs = 0 \rightarrow A = -B \end{cases}$

$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \longleftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s) \right](t) = \mathrm{sca}(t) - e^{-t/RC} = 1 - e^{-t/RC}$ $\quad t \geq 0$

Es. 3

$G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+10)}$ Rappresenta un sistema del II ordine

autovalori

TIP: tutti i poli sono autovalori ma non viceversa

$\Rightarrow$ No autovalori nascosti

1) Risposta (forzata) allo scalino unitario ($u(t) = sca(t)$ $t \geq 0$)

$U(s) = \dfrac{1}{s}$ $\qquad Y(s) = G(s)\, U(s)$

TVF: $y(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} \left[s\, Y(s) = \cancel{s}\, G(s) \dfrac{1}{\cancel{s}} \right] = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{1}{(s+1)(s+10)} = \dfrac{1}{10}$

TVI: $y(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \left[s\, Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+10)} \right] = 0$

TVI: $\dot{y}(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \left[s \cdot \mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = s^2\, Y(s) = s\, G(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+10)} \right] = 0$

TVI: $\ddot{y}(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \left[s\, \mathcal{L}[\ddot{y}(t)](s) = s^3\, Y(s) = s^2\, G(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)(s+10)} \right] = 1 > 0$

$\lambda_1 = -1 \qquad \tau_1 = -1/\lambda_1 = 1$ ← C. di tempo dominante

$\lambda_2 = -10 \qquad \tau_2 = -1/\lambda_2 = 1/10$

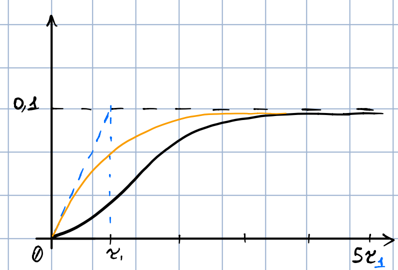
Per tracciare il grafico:
- TVF a regime
- TVI + derivate per l'inizio
- costante di tempo

2) Dato $\tilde{G}(s) = \dfrac{\mu}{1 + s\tau}$ determinare μ, τ t.c. $\tilde{y}(t)$ sia simile a $y(t)$

TVF: $\tilde{y}(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} \left[s\, \tilde{Y}(s) = s\, \tilde{G}(s) \dfrac{1}{s} = \dfrac{\mu}{1+s\tau} \right] = \mu = 0,1$

TVI: $\tilde{y}(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \left[s\, \tilde{Y}(s) = \dfrac{1}{1+s\tau} \right] = 0$

TVI: $\dot{\tilde{y}}(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \left[s^2\, \tilde{Y}(s) = \dfrac{\mu s}{1+s\tau} \right] = \dfrac{\mu}{\tau}$ ← non parte più con pendenza $\emptyset$

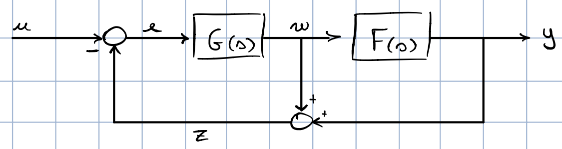


Proviamo $\boxed{\tau = \tau_1 = 1}$ $\qquad \tilde{G}(s) = \dfrac{0,1}{s+1}$

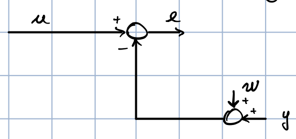
↑ approssimazione a polo dominante di $G(s)$

Dato un sistema complesso, calcolo il polo dominante e l'approssimazione deve avere stesso valore a regime e costante di tempo dominante

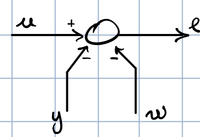
Es. 4 Dato lo schema a blocchi



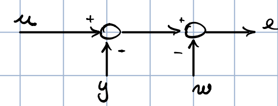
1) Calcolare la FdT da u a y



$\equiv$

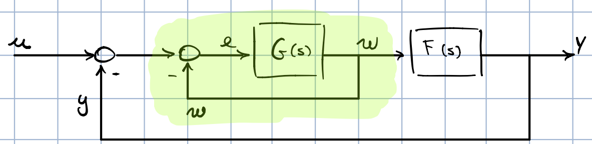


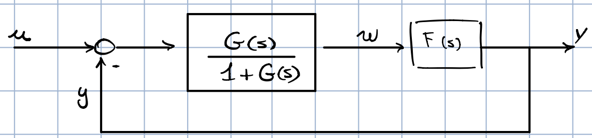
$\equiv$



$e = u - (w + y)$
$= u - w - y$

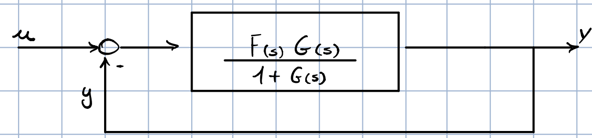
$e = u - y - w$
$= (u - y) - w$

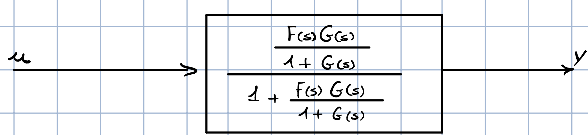




(1)

$\Rightarrow$





$e = u - z = u - w - y = u - w - F(s)w = u - (1+F(s))\, w = u - \underline{(1+F(s))\, G(s) \cdot e}$

$w = G(s) \cdot e$

$y = F(s) \cdot w$

$\rightarrow [1 + (1+F(s))\, G(s)]\, e = u \Rightarrow e = \dfrac{1}{1 + (1+F(s))\, G(s)}\, u$

$y = F(s) \cdot G(s)\, e = \dfrac{F(s)\, G(s)}{1 + (1+F(s))\, G(s)}\, u$

$S(s) = \dfrac{F(s)\, G(s)}{1 + (1+F(s))\, G(s)}$

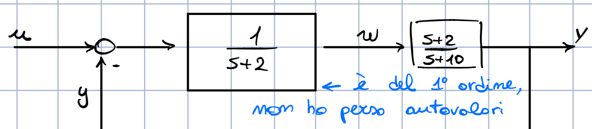
Consiglio: All'inizio fallo in questo modo, con i segnali

2) $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad F(s) = \dfrac{s+2}{s+10}$ sis. lin I ordine, discutere stab. di $S(s)$

$$S(s) = \frac{\dfrac{s+2}{(s+1)(s+10)}}{1 + \left[1 + \dfrac{s+2}{s+10}\right]\dfrac{1}{s+1}} = \frac{\dfrac{s+2}{(s+1)(s+10)}}{1 + \dfrac{2(s+6)}{(s+10)(s+1)}} = \cdots = \frac{s+2}{(s+1)(s+10)} \cdot \frac{(s+1)(s+10)}{\underset{(s+2)(s+11)}{\overset{\shortparallel}{s^2+13s+22}}} = \frac{1}{s+11}$$

Abbiamo perso un autovalore $\Rightarrow$ la FdT ha un polo solo

Possiamo risalire a un passaggio nello schema a blocchi, il (1) da cui otteniamo:



L'autovalore nascosto è -2 che ho perso nel calcolo della cascata.

$\Rightarrow$ L'altro polo è -2, il sistema è A.S.