



Sistema de ecuaciones no lineales

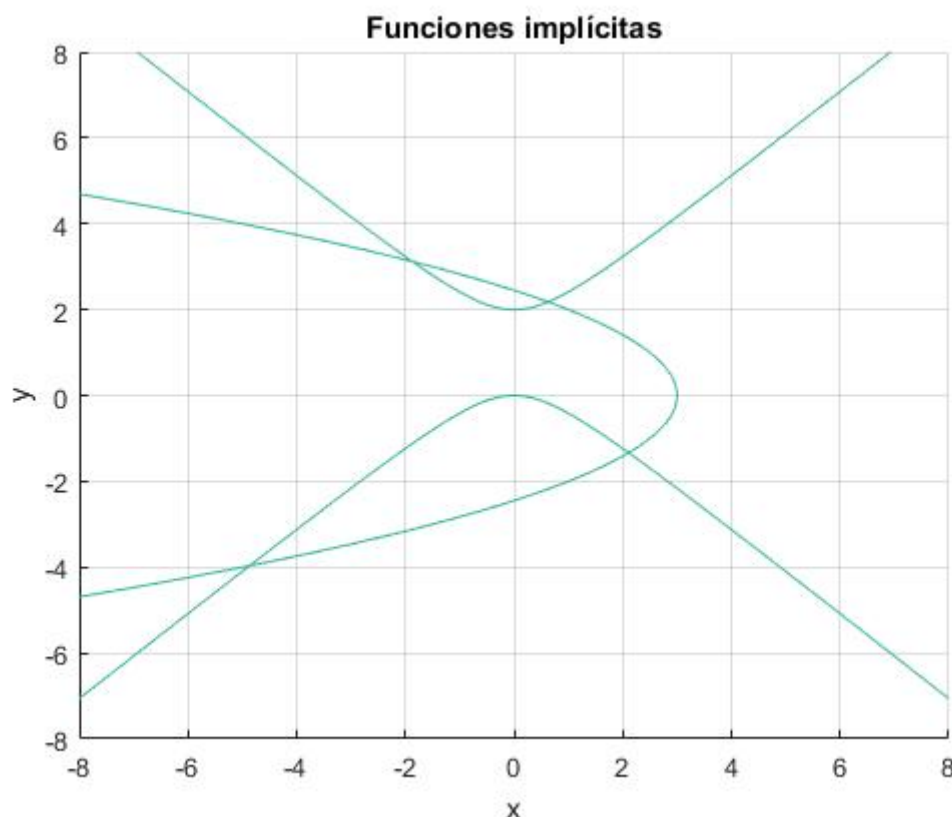
En esta página, vamos a obtener las raíces de un sistema de ecuaciones transcendentales aplicando el [procedimiento de Newton-Raphson](#). Finalmente, utilizaremos la función MATLAB *fsolve* para este propósito.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 2x + y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Representamos gráficamente las funciones implícitas mediante [ezplot](#)

```
>> hold on  
>> ezplot('x^2-y^2+2*y', [-8,8,-8,8])  
>> ezplot('2*x+y^2-6', [-8,8,-8,8])  
>> hold off  
>> title('Funciones implícitas')  
>> grid on
```



Observamos que el sistema de ecuaciones tiene cuatro raíces, vamos a obtener estas raíces aplicando el procedimiento de Newton-Raphson

Procedimiento de Newton-Raphson

Para aplicar este procedimiento para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, representamos la variable x por x_1 y la variable y por x_2 . El sistema de dos ecuaciones se escribe de una forma más general

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Supongamos que en la etapa k de proceso de cálculo partimos de un punto (x_1, x_2) cualesquiera y nos movemos a otro muy próximo $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$. Los valores de las funciones en dicho punto son f_1 y f_2 en dicho punto son aproximadamente

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2$$

$$f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2$$

Si el punto $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ es una solución del sistema de ecuaciones, entonces

$$f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0$$

Escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial para despejar Δx_1 y Δx_2

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Denominamos vector \mathbf{x} al vector (x_1, x_2) , el vector función \mathbf{F} está formado por dos elementos que son las funciones (f_1, f_2) y la matriz cuadrada de dimensión dos es el Jacobiano \mathbf{J} . Despejamos Δx_1 y Δx_2 del sistema de ecuaciones o el vector $\Delta \mathbf{x}$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = 0$$

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}$$

\mathbf{J}^{-1} es la matriz inversa de \mathbf{J} y $\Delta \mathbf{x}$ es el vector diferencia entre el vector que nos da las coordenadas del nuevo punto \mathbf{x}_{k+1} , conocidas las del punto previo \mathbf{x}_k

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}$$

Hemos obtenido una expresión similar al [procedimiento de Newton-Raphson](#) que utilizamos para calcular una raíz de la ecuación $f(x)=0$

Para un sistema de n ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

El procedimiento se escribe



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

o bien, $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \mathbf{J} \backslash \mathbf{F}$, utilizando el operador MATLAB, [división por la izquierda \](#). Se obtiene el nuevo vector \mathbf{X}' de la izquierda, a partir del \mathbf{X} previo, a la derecha de la igualdad

Para el sistema de dos ecuaciones que hemos planteado al principio de esta sección

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

El Jacobiano es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 + 2 \\ 2 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

El código MATLAB para calcular las raíces es similar al empleado para calcular una raíz de la ecuación $f(x)=0$

```
F=@(x) [x(1)^2-x(2)^2+2*x(2); 2*x(1)+x(2)^2-6];
J=@(x) [2*x(1), -2*x(2)+2; 2, 2*x(2)];
x=[0.5;2.2]; %punto inicial (vector columna;)
%x=[-4.6;-3.8]; %punto inicial (vector columna;)
for i=1:100
    dx=-J(x)\F(x);
    if sqrt(norm(dx)/norm(x))<0.001
        disp('Solución')
        disp(x+dx)
        break;
    end
    x=x+dx;
end
if i==100
    disp('Se ha sobrepasado el número de iteracciones');
end
```

En la primera línea se define el vector columna \mathbf{F} de las funciones. En la segunda, la matriz cuadrada \mathbf{J} que representa el Jacobiano. En la tercera, las coordenadas del punto inicial. En la representación gráfica de las dos funciones (figura más arriba), utilizamos el icono denominado **Data cursor** del menú de la ventana gráfica, para conocer el valor aproximado de una de las raíces (0.5, 2.2), que tomaremos como vector inicial de partida para el procedimiento de cálculo.

La función [norm](#) calcula el módulo un vector. El procedimiento concluye cuando los puntos \mathbf{x}_m y \mathbf{x}_{m+1} , están muy próximos, es decir, cuando el error relativo $|\mathbf{x}_{m+1}-\mathbf{x}_m|/|\mathbf{x}_m|$ sea menor que una cantidad prefijada

Si el procedimiento no convergiera, el programa entraría en un bucle indefinido. Limitando el número de iteracciones se asegura que siempre va a terminar.

```
0.6252
2.1794
>> F(x)
ans = 1.0e-09 *
0.3991
0.0536
```

Cuando introducimos el valor de la raíz buscada **x** en la función **F**, vemos que se obtiene un valor próximo a cero

Con **Data cursor** buscamos un valor próximo a la segunda raíz (-4.6,-3.8). Modificamos en la tercera línea de código el vector inicial que tomamos para calcular la raíz y obtenemos al correr el script modificado

```
-4.8642
-3.9659
>> F(x)
ans =    1.0e-09 *

    0.2845
    0.1122
```

El problema más importante para aplicar este procedimiento es la elección del vector inicial, cuando el número de ecuaciones es tres o más.

La función *fsolve*

MATLAB dispone de una función denominada *fsolve* que realiza un cálculo similar

```
>> F=@(x) [x(1)^2-x(2)^2+2*x(2); 2*x(1)+x(2)^2-6];
>> fsolve(F,[0.5,2.2])
ans =    0.6252    2.1794
>> fsolve(F,[-4.6,-3.8])
ans =   -4.8642   -3.9659
```

Ejemplo

Calcular las raíces del sistema de dos ecuaciones:

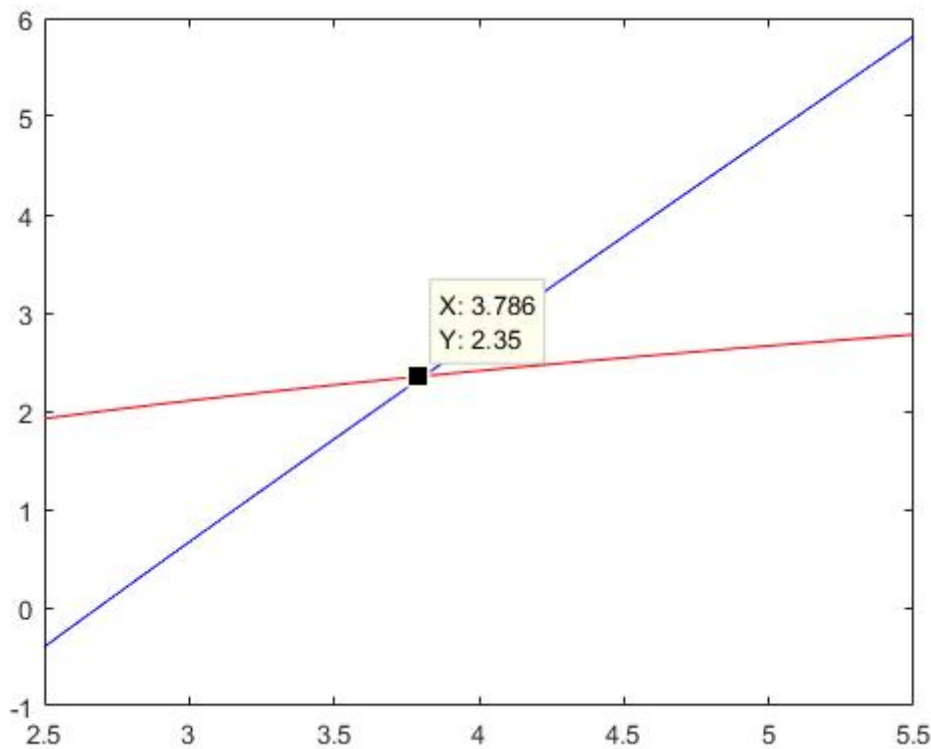
$$f_1(x,y)=2x^2-xy-5x-1=0$$

$$f_2(x,y)=x+3\log_{10}x-y^2=0$$

En la figura vemos el punto de intersección y mediante **Tools/Data Cursor** sus coordenadas aproximadas..

```
x=linspace(2.5,5.5,50);
y1=(2*x.^2-5*x-1)./x;
y2=sqrt(x+3*log10(x));
plot(x,y1,'b',x,y2,'r')
```





Vamos a utilizar la función `fsolve` de MATLAB para obtener el punto de intersección.

Definimos la función **F(x)**, donde **x** es un vector, **x(1)** representa a la variable **x** y **x(2)** representa la variable **y**. La primera ecuación, es el primer elemento del vector **F** y la segunda ecuación, es el segundo elemento de dicho vector

```
F=@(x) [2*x(1)^2-x(1)*x(2)-5*x(1)-1, x(1)+3*log10(x(1))-x(2)^2];
x0 =[3 2]; %valor inicial
[x,fval] = fsolve(F,x0);
fprintf('La solución es x=%1.3f, y=%1.3f\n',x(1),x(2));
fprintf('Valores de la función = %g\n',fval)
```

A `fsolve` tenemos que pasarle la función que hemos definido y la aproximación inicial (x_0 , y_0) que hemos encontrado anteriormente de forma gráfica. Esta función nos devuelve las coordenadas (x,y) del punto de intersección buscado y los valores de las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ en dicho punto. El comando `fsolve` devuelve algunos avisos y la solución

```
La solución es x=3.809, y=2.356
Valores de la función = 1.18398e-10
Valores de la función = -1.65512e-11
```

Ejercicios

Resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x^3 + y = 1 \\ y^3 - x = -1 \end{cases}$$

Comprobando que su solución es (1,0)

Resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} \sin(xy) + \exp(-xz) - 0.9 = 0 \\ z\sqrt{x^2 + y^2} - 6.7 = 0 \\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) + \cos z + 3.2 = 0 \end{cases}$$



Tomando $x_0=1$, $y_0=2$ y $z_0=2$ como aproximación inicial

[Grado en Ingeniería de Energías Renovables](#)

Angel Franco García, Copyright © 2016

