Devoir 1: Rapport

GIF-7005: Introduction à l'apprentissage machine

Stéphane Caron

10 Octobre 2018

Contents

Question 1

Dans cette question, il faut trouver l'estimateur du paramètre λ d'une loi exponentielle par la méthode du maximum de vraisemblance. Par la suite, il faut déterminer si cet estimateur est un estimateur sans biais.

Partie a

On commence avec l'équation de la densité de x:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

La log-vraisemblance de $p(x)$ est donnée par:

$$l(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \lambda) = nlog(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

On trouve l'estimateur du maximum de vraisemblance en dérivant l'équation précédente par rapport à λ et en égalisant à zéro:

$$\frac{dl(x_i : \lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

En posant égale àa zéro, on trouve la valeur de l'estimateur $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Partie b

Le biais d'un estimateur est donné par l'équation:

$$\text{biais}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

Commençons par trouver l'espérance de notre estimateur $\hat{\lambda}$:

$$E[\hat{\lambda}] = nE\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] = nE[Y^{-1}]$$

où $Y \sim Gamma(n, 1/\lambda)$. On peut trouver $E[Y^{-1}]$ de cette façon:

$$\begin{aligned}
E[Y^{-1}] &= \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{y^{n-1}\lambda^n \exp(-\lambda y)}{\Gamma(n)} dy \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{n-2}\lambda^n \exp(-\lambda y)}{\Gamma(n)} dy \\
&= \frac{\Gamma(n-1)\lambda}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{y^{(n-1)-1}\lambda^n \exp(-\lambda y)}{\Gamma(n-1)} dy \\
&= \frac{\Gamma(n-1)\lambda}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda}{n-1}
\end{aligned}$$

On peut ensuite trouver le biais de l'estimateur:

$$\text{biais}(\hat{\lambda}) = E[\hat{\lambda}] - \lambda = nE[Y^{-1}] - \lambda = n\frac{\lambda}{(n-1)} - \lambda = \frac{\lambda}{n-1}$$

On peut donc conclure que l'estimateur $\hat{\lambda}$ a un biais de $\frac{\lambda}{n-1}$. Il est toutefois asympotiquement sans biais.

Question 2

Question 3