$f(x) \in O(g(x)) \rightarrow f(x) \leq g(x) \iff 0 \leq \lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) < \infty$
$f(x) \in \Theta(g(x)) \rightarrow c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \iff 0 < \lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) < \infty$
$f(x) \in \Omega(g(x)) \rightarrow g(x) \leq f(x) \iff 0 < \lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) \leq \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > n \\ a_0 \backslash b_0 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

$log_b\, a + log_b\, c = log_b(a \cdot c)$	teorema del prodotto
$log_b\, a - log_b\, c = log_b\left(\frac{a}{c}\right)$	teorema del rapporto
$c\, log_b\, a = log_b\, a^c$	teorema della potenza

potenze con la stessa base		
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	prodotto di potenze con la stessa base	$2^7 \cdot 2^3 = 2^{10}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	rapporto di potenze con la stessa base	$2^7 : 2^3 = 2^4$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	potenza di potenza	$(2^7)^3 = 2^{21}$
potenze con lo stesso esponente		
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	prodotto di potenze con lo stesso esponente	$10^3 \cdot 2^3 = 20^3$
$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	rapporto di potenze con lo stesso esponente	$10^3 : 7^3 = \left(\frac{10}{7}\right)^3$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	potenza di radicali	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	radice di radice	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$

1. Riflessività: $cf(n) = O(f(n))$, dove $c > 0$ è costante, anche per Ω, Θ
2. Transitività: $g(n) = O(f(n)) \land f(n) = O(h(n)) \Rightarrow g(n) = O(h(n))$, anche per Ω, Θ
3. Simmetria: $g(n) = \Theta(f(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Theta(g(n))$
4. Trasposizione: $g(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
5. Somma: $f(n) + g(n) = O(\max\{f(n), g(n)\})$, anche per Ω, Θ
6. Prodotto: $g(n) = O(f(n)) \land h(n) = O(q(n)) \Rightarrow g(n)h(n) = O(f(n)q(n))$, anche per Ω, Θ.

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\overset{\sqrt{n}}{n^{1/2}}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^2 \log n) \subset O(n^3) \subset O(2^n) \subset O(n!)$$

$$
\begin{array}{rcll}
f(n) & \in & O(f(n)) & \\
cf(n) & \in & O(f(n)) & c \text{ deve essere costante} \\
f(n)+f(n) & \in & O(f(n)) & \\
f(n)+g(n) & \in & O(f(n)+g(n)) & \\
f(n) \in O(g(n)) \implies (\ f(n)+g(n) & \in & O(g(n))\ ) & \\
f(n)g(n) & \in & O(f(n)g(n)) &
\end{array}
$$

$$
T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n \le m \le h \\ \sum_{1 \le i \le h} a_i T(n-i) + cn^\beta & \text{se } n > m \end{cases}
$$

Teorema. Se $c > 0, \beta \ge 0, a = \sum_{1 \le i \le h} a_i$ allora $\begin{cases} T(n) \in O(n^{\beta+1}) & \text{se } a = 1 \\ T(n) \in O(a^n n^\beta) & \text{se } a \ge 2 \end{cases}$

Relazioni di ricorrenza

Rel. di ric.	O-grande	esempi
$T(n) = T(n-1)+1$	$O(n)$	massimo/minimo
$T(n) = T(n-1)+n$	$O(n^2)$	insert sort
$T(n) = 2T(n-1)+1$	$O(2^n)$	Hanoi
$T(n) = T(\frac{n}{2})+1$	$O(\log n)$	ric. dic.
$T(n) = T(\frac{n}{2})+n$	$O(n)$	
$T(n) = 2T(\frac{n}{2})+1$	$O(n)$	
$T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n$	$O(n \log n)$	merge sort

Teorema. Se $a \ge 1; b \ge 2; c > 0; d, \beta \ge 0$, posto $\alpha = \log a / \log b$ allora:

$$
\begin{cases} T(n) \in O(n^\alpha) & \text{se } \alpha > \beta \\ T(n) \in O(n^\alpha \log n) & \text{se } \alpha = \beta \\ T(n) \in O(n^\beta) & \text{se } \alpha < \beta \end{cases}
$$

$\log 1 \rightarrow \log 10$

$0 \le n \le 1$

$\log 10 \rightarrow \log 100$

$1 \le n \le 2$

$$
T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ aT(n/b) + cn^\beta & \text{se } n > 1 \end{cases}
$$