Stefan Berger
Martin Huschina

1. Aufgabe (8 Punkte):
Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:
1. A + 2B
2. $A \cdot B^T$
3. C^{-1}
4. $\det(B^T \cdot A)$

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

			5	-1
			0	2
			1	1
2	-1	0	10	-4
3	0	1	16	-2

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$C^{-1} = \frac{1}{det\, C} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

4.

		2	-1	0
		3	0	1
5	-1	7	-5	-1
0	2	6	0	2
1	1	5	-1	1

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7	-5	-1	7	-5
6	0	2	6	0
5	-1	1	5	-1

0 -50 +6
0 -14 -30

$$det\left(B^T \cdot A\right) = 0 - 50 + 6 + 0 + 14 + 30 = 0$$

2. Aufgabe (6 Punkte):

Bestimmen Sie zur Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ alle Matrizen B mit der Eigenschaft $AB-BA=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+b_3 & b_2+b_4\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+b_2 & b_1\\ b_3+b_4 & b_3\end{pmatrix}$$

$$b_1+b_3-b_1-b_2=0$$
$$b_2+b_4-b_1=-1$$
$$b_1-b_3-b_4=1$$
$$b_2-b_3=0$$

b_1	b_2	b_3	b_4		
0	-1	1	0	0	I<->II
-1	1	0	1	-1	
1	0	-1	-1	1	
0	1	-1	0	0	
-1	1	0	1	-1	
0	-1	1	0	0	
1	0	-1	-1	1	III+I
0	1	-1	0	0	
-1	1	0	1	-1	
0	-1	1	0	0	
0	1	-1	0	0	III+II
0	1	-1	0	0	IV+II
-1	1	0	1	-1	
0	-1	1	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	

$-b_1 + b_2 + b_4 = -1$

$-b_2 + b_3 = 0$

$b_3 = \lambda$

$b_4 = \mu$

$b_1 = 1 + \lambda + \mu$

$b_2 = \lambda$

$b_3 = \lambda$

$b_4 = \mu$

$$L=\begin{pmatrix}1+\lambda+\mu\\ \lambda\\ \lambda\\ \mu\end{pmatrix} \qquad =\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

3. Aufgabe (6 Punkte):
Die Firma Steely Dan möchte Stahl herstellen. Neben anderen Rohstoffen werden Eisenerz und Steinkohle benötigt. Den Rohstoffbedarf in den ersten drei Wochen zeigt die folgende Tabelle (Angaben jeweils in Tonnen).

	1. Woche	2. Woche	3. Woche
Eisenerz	8	11	12
Steinkohle	9	14	12

Drei verschiedene Lieferanten können die Rohstoffe liefern. Die Preise (in Euro pro Tonne) sind in der folgenden Tabelle gelistet.

	Ruhrpott AG	Eisenerz & Söhne	Reinkohle & Co.
Eisenerz	213	215	250
Steinkohle	120	160	110

1. Stellen Sie eine Matrix A für den Rohstoff verbrauch in den drei Wochen auf.
2. Stellen Sie eine Matrix B für die Preise der drei Lieferanten auf.
3. Steely Dan kann wochenweise bei unterschiedlichen Lieferanten kaufen, muss jedoch beide Rohstoffe beim selben Lieferanten kaufen. Beispiel: Erste Woche alle Rohstoffe bei Ruhrpott, zweite Woche alle bei Reinkohle usw. Berechnen Sie die Matrix C, die zu jeder Woche angibt, was der Kauf bei dem jeweiligen Lieferanten kosten würde.

1.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 9 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

2.

$$B=\begin{pmatrix} 213 & 215 & 250 \\ 120 & 160 & 110 \end{pmatrix}$$

3.

$$C=B^T\cdot A$$

$$C=\begin{pmatrix} 213 & 120 \\ 215 & 160 \\ 250 & 110 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 9 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

		8 9	11 14	12 12
213	120	2784	4023	3996
215	160	3160	4605	4500
250	110	2990	4290	4320

$$C=\begin{pmatrix} 2784 & 4023 & 3996 \\ 3160 & 4605 & 4500 \\ 2990 & 4290 & 4320 \end{pmatrix}$$