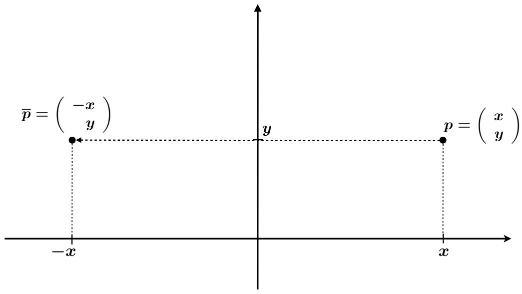
Matrizen

Lineare Algebra, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Marzena Fügenschuh

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Motivation

Spiegelung an der y-Achse



$$\begin{aligned} \overline{x} &= -x \\ \overline{y} &= y \end{aligned}$$

Dies entspricht:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= -x + 0 \cdot y \\ \overline{y} &= 0 \cdot x + y \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diese Spiegelung ist mittels linearen Gleichungen definiert. Die Koordinaten des Bildpunktes erreicht man durch Multiplikation des Ausgangspunktes mit einer Matrix.

Orthogonalprojektion auf die xy-Ebene

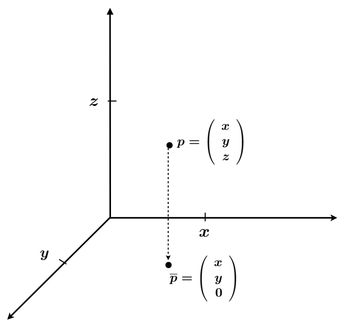


Abbildung 1: Orthogonalprojektion auf die xy-Ebene.

Bei der Orthogonalprojektion auf die xy-Ebene geht ein Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf den Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ über, siehe Abb. 1.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht:

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} & = & 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z \\ \overline{y} & = & 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z \\ \overline{z} & = & 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Möchte man mehrere ähnliche Operationen nacheinander ausführen, muss man lediglich die entsprechenden Matrizen miteinander multiplizieren. Wie genau diese Multiplikation funktioniert werden wir gleich definieren. Soweit haben wir aber gesehen, dass eine Matrix ein Zahlenschema ist, das das Rechnen strukturiert und erleichtert.

Matrizen - Definition

Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten von reellen Zahlen heißt eine reelle $\boldsymbol{m \times n}$ **Matrix**:

$$A = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das Element a_{ij}, das in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte erscheint, wird die $\boldsymbol{ij}$**-Komponente** der Matrix genannt.

Eine $m \times n$ Matrix, deren alle Elemente Null sind, wird **Nullmatrix** genannt und mit **0** bezeichnet. Ihr Größe, d.h. die Anzahl der Zeilen und der Spalten hängt üblicherweise vom Kontext ab.
Üblicherweise werden wir Matrizen mit großen Buchstaben bezeichnen $A, B, C, \dots$.

Rechnen mit Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Hinweis: A und B haben gleich viele Zeilen und Spalten.

Matrixaddition komponentenweise addieren

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation komponentenweise mit dem Skalar multiplizieren

$$2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -14 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Transponieren Vertauschen von Zeilen mit Spalten

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor

$$\boldsymbol{u^T} = (1, -2, 3)$$

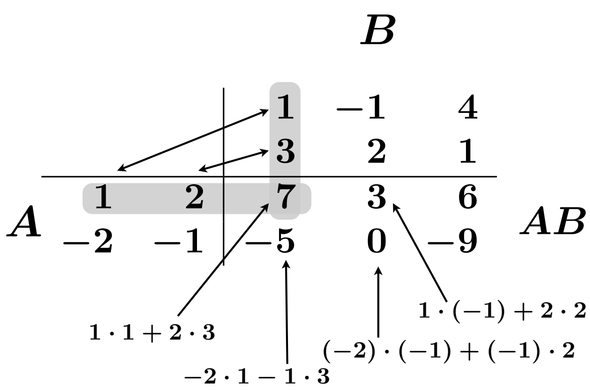
Matrixmultiplikation

Die Multiplikation $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ zweier Matrizen A und B **ist nur dann durchführbar, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix $\boldsymbol{A}$ gleich der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ ist.** Das Ergebnis ist eine Matrix mit so vielen Zeilen, wie Matrix A und so vielen Spalten wie Matrix B.

Allgemein gilt es also: Ist A eine $n \times m$ Matrix und B eine $m \times k$ Matrix, dann ist AB eine $n \times k$ Matrix.

Achtung! Matrixmultiplikation ist in der Regel nicht kommutativ. Es kommt also auf die Reihenefolge der Matrizen an.

Die Matrixmultiplikation lässt sich am einfachsten mittels des **Falks Schemas** berechnen:



D.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

kann mittels Multiplikation einer Matrix mit einem Spatenvektor dargestellt werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} \qquad \text{Kurz:} \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

A ist die sog. **Koeffizientenmatrix** des Gleichungssystems, $\boldsymbol{x}$ ist der Spaltenvektor der Unbekannten und $\boldsymbol{b}$ der Spaltenvektor der rechten Seite des Gleichungssystems.

Quadratische Matrizen

Quadratische Matrizen sind Matrizen, die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten haben. Diese Anzahl wird **Ordnung** genannt. Unter den quadratischen gibt es ein paar Spezialfälle, die eigenen Namen haben

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Untere Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obere Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix $(A = A^T)$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Für eine beliebige $n \times n$ Matrix A gilt $AE = EA = A$. Dabei ist auch E der Ordnung n.

Determinanten

Jeder quadratischen Matrix lässt sich eine Zahl zuordnen, die gewisse Eigenschaften des System, in dem die Matrix verwendet ist, wieder spiegelt.

2 × 2 Matrizen

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

3 × 3 Matrizen (Sarrus-Regel)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \\ - & - & - & & \end{array}\right.$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \quad 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot (-3)$$
$$= 3 + 24 - 10 - 18 + 20 - 3 = 22.$$

Ist die Determinante einer Matrix gleich 0, so heißt diese Matrix **singulär**, sonst **regulär**.

Inverse einer Matrix

Gibt es für eine quadratische Matrix A eine Matrix B, so dass $A \cdot B = B \cdot A = E$, so heißt A **invertierbar**. B wird **Inverse** von A genannt und mit $\boldsymbol{A^{-1}}$ bezeichnet.

Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist, d.h $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Für eine reguläre 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix}$.

Beispiel. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist regulär, weil $\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0$. Wir bestimmen die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und überprüfen:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$