1	2	3	Σ
0	8	3	11

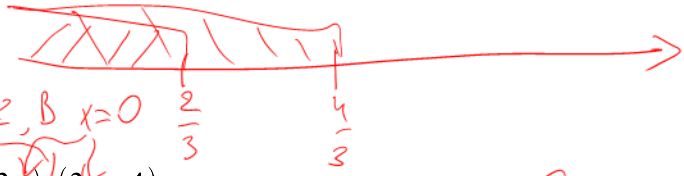
1. Aufgabe

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der Ungleichung:

$$\frac{2x+1}{2-3x} \le \frac{2x+3}{3x-4}$$

$x \notin \{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$

$I\,(x<\frac{2}{3} \wedge x<\frac{4}{3})$



z.B. x=0

$\frac{2x+1}{2-3x} \le \frac{2x+3}{3x-4} \quad |(2-3x)\cdot(3x-4)$

$2\cdot(-4) = -8 < 0$

Sie multiplizieren die Ungleichung mit einer Zahl < 0 ! Ungleichungszeichen ändern

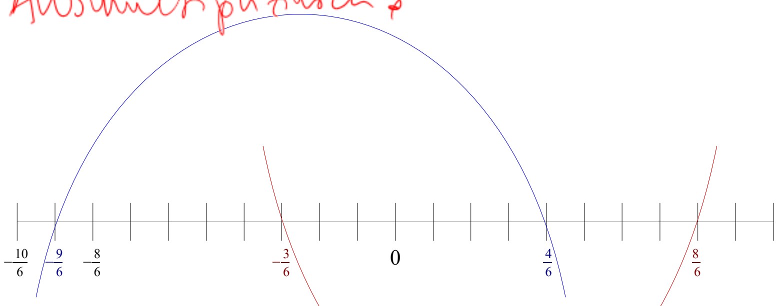
$(2x+1)(3x-4) \le (2x+3)(2-3x)$

$-\frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \qquad -\frac{3}{2} \quad \frac{2}{3}$

$-\frac{3}{6} \quad \frac{8}{6} \qquad -\frac{9}{6} \quad \frac{4}{6}$

$\frac{8}{6}-(-\frac{3}{6})=\frac{11}{6} \qquad \frac{4}{6}-(-\frac{9}{6})=\frac{13}{6}$

Ausmultiplizieren!



Was ist die Lösung?

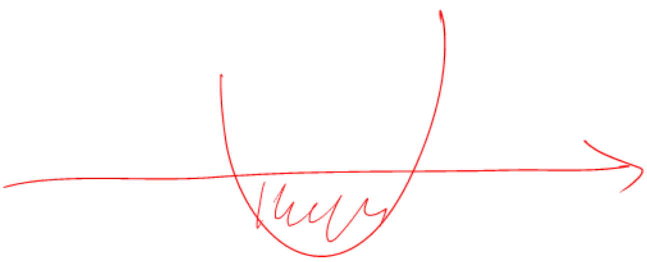
$x \in [-\frac{3}{6}, \frac{4}{6}[$

$(2x+1)(3x-4) \le (2x+3)(2-3x)$

$6x^2 - 8x + 3x - 4 \le -6x^2 + 4x - 6x + 6$

$12x^2 - 3x + 2 \le 0$

$x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \le 0$



(keine Lösung zu dieser Aufgabe gefunden)

Das ist eine quadratische Ungleichung!

Op.

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass die folgenden Junktoren dem Assoziativgesetz (A * B) * C ⇔A * (B * C) gehorchen (* steht stellvertretend fur den jeweiligen Junktor).

1. Aquivalenz ↔
2. Implikation →
3. Negation der Disjunktion (weder noch) ↓ (Peirce-Pfeil)

Die Aussagen sind jeweils wahr genau dann, wenn der Wert in der letzten Spalte immer 1 ist:

a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

A	B	C	A ↔ B	B ↔ C	(A ↔ B) ↔ C	A ↔ (B ↔ C)	((A ↔ B) ↔ C) ↔ (A ↔ (B ↔ C))
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

✓ 2

Konjunktive Normalform:

Formel	Umstellung
Entweder $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ oder $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	
$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$? $\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)$ $\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)$	Darstellung als paarweise Implikation Implikation

6

b) $(A \rightarrow B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

A	B	C	A → B	B → C	(A → B) → C	A → (B → C)	((A → B) → C) ↔ (A → (B → C))
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

✓ 3

Disjunktive Normalformen:

Formel	Umstellung
$(A \rightarrow B) \rightarrow C$ $\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \rightarrow C$ $\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee C$ $\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee C$	Implikation in der Klammer Implikation De Morgansches Gesetz
$A \rightarrow (B \rightarrow C)$ $\Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \vee C)$ $\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C$	Implikation in der Klammer Implikation

c) $(A \downarrow B) \downarrow C \Leftrightarrow A \downarrow (B \downarrow C)$

A	B	C	$A \downarrow B$	$B \downarrow C$	$(A \downarrow B) \downarrow C$	$A \downarrow (B \downarrow C)$	$((A \downarrow B) \downarrow C) \leftrightarrow (A \downarrow (B \downarrow C))$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1

3

Konjunktive Normalformen:

Formel	Umstellung
$(A \downarrow B) \downarrow C$ $\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C)$ $\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$	Darstellung als verschachteltes “Nicht oder” De Morgansches Gesetz
$A \downarrow (B \downarrow C)$ $\Leftrightarrow \neg(A \vee \neg(B \vee C))$ $\Leftrightarrow \neg A \wedge (B \vee C)$	Darstellung als verschachteltes “Nicht oder” De Morgansches Gesetz

3. Aufgabe

In Soho ist ein Mord geschehen. Als Tater kommen Patrick, Steven, Diana und Mary in Frage – möglicherweise waren auch mehrere von ihnen an der Tat beteiligt. Die polizeilichen Ermittlungen ergeben:

1. Wenn es Patrick war, so war Steven ein Mittater und Diana ist unschuldig.
2. Diana oder Steven waren an der Tat beteiligt, aber es kann ausgeschlossen werden, dass Steven ohne Patrick gemeuchelt hat.
3. Mary ist nur dann eine Taterin, wenn auch Steven und Diana dabei waren.
4. Wenn aber Diana an dem Mord beteiligt sein sollte, dann ist auf jeden Fall Steven ein Mittäter und Mary ist unschuldig.

Well, whodunit?

Person	Formel	Regel zur Umstellung	Erklärung
Diana	$(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(D \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$ 1. u. 2. Umstellung: $(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $((D \vee S) \wedge (S \rightarrow P)) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$ 3. Umstellung: $(D \vee S) \wedge (D \rightarrow S \wedge \neg M) \wedge$ $(S \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M)$	1. De Morgansches Gesetz: $\neg(S \wedge \neg P) \Leftrightarrow \neg S \vee P$ 2. Implikation: $\neg S \vee P \Leftrightarrow S \rightarrow P$ 3. Assoziativgesetz	Die gegebene Argumentation führt zu dem Kettenschluss, dass Dianas Beteiligung an dem Mord ein Widerspruch wäre. Ich sehe das nicht. ...
Steven	$(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(D \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$		„Diana oder Steven waren an der Tat beteiligt.“ Da Dianas Beteiligung bereits ausgeschlossen wurde, muss Steven ein Täter sein.
Patrick	$(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(D \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$ 1. u. 2. Umstellung: $(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $((D \vee S) \wedge (S \rightarrow P)) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$	(wie oben) 1. De Morgansches Gesetz: $\neg(S \wedge \neg P) \Leftrightarrow \neg S \vee P$ 2. Implikation: $\neg S \vee P \Leftrightarrow S \rightarrow P$	Stevens Tatbeteiligung impliziert Patricks Mittäterschaft.
Mary	$(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(D \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$		Durch Dianas Nichtteilnahme an dem Mord ist Marys Teilnahme ausgeschlossen.

Formel	Identitäten
$(P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(D \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M) \wedge$ $(D \rightarrow S \wedge \neg M)$	Assoziativgesetz De Morgansches Gesetz, Implikation
$(D \vee S) \wedge (D \rightarrow S \wedge \neg M) \wedge$ $(S \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow S \wedge \neg D) \wedge$ $(\neg S \vee \neg D \rightarrow \neg M)$	Kettenschluss, Komplementarität
$(P \rightarrow S \wedge 1) \wedge$ $(0 \vee S) \wedge \neg(S \wedge \neg P) \wedge$ $(\neg S \vee 1 \rightarrow \neg M) \wedge$ $(0 \rightarrow S \wedge \neg M)$	Implikation Neutralität, De Morgansches Gesetz Implikation, De Morgansches Gesetz Implikation
$(\neg P \vee S) \wedge$ $S \wedge (\neg S \vee P) \wedge$ $(S \wedge 0 \vee \neg M) \wedge$ $(1 \vee S \wedge \neg M)$	Absorbtion Distributivgesetz, Komplementarität, Neutralität Permanenz, Neutralität Permanenz
$S \wedge P \wedge \neg M \wedge 1$	

Steven und Patrick sind die Mörder. Mary nicht, aber was mit Diane

Es müsste rauskommen

$S \wedge P \wedge \neg M \wedge \neg D$!

Sie machen die Sache viel zu compliziert

3