Elemente der Mengenlehre

Lineare Algebra, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Marzena Fügenschuh

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Mengendarstellung

$\emptyset$ - die leere Menge

$$\begin{aligned}
V &= \{a, e, i, o, u, y\} \\
A &= \{a, b, \ldots, z\} \\
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \\
P &= \{1, 4, 9, 16, \ldots\} = \{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\} \\
U_{\mathbb{N}} &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5 \ldots\} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{k \in \mathbb{Z}}\, n = 2k - 1\} \qquad \text{ungerade Zahlen} \\
\mathbb{Q} &= \{\tfrac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{rationale Zahlen} \\
M &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x = 0\} = \{-1, 0, 1\}.
\end{aligned}$$

$$-1 \in M, \qquad \text{aber } \; 2 \notin M.$$

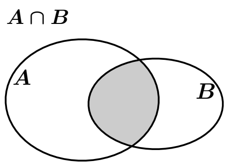
-1 ist ein Element der Menge M, aber 2 nicht.

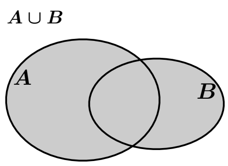
Mengenrelationen

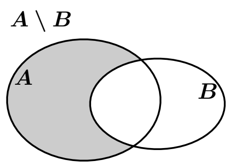
Gleichheit	$A = B$	Die Mengen stimmen überein, besitzen genau die gleichen Elemente.
echte Inklusion (Teilmenge)	$A \subset B$	Alle Elemente, die sowohl zu A gehören sind auch in B und es gibt mindestens ein Element in A, das zu B nicht gehört.
Inklusion (Teilmenge)	$A \subseteq B$ $A \subset B$ oder $A = B$	Alle Elemente, die zu A gehören sind auch in B

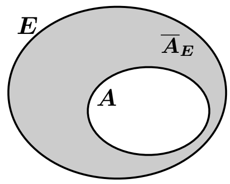
Mengenoperationen

Durchschnitt	$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\}$	Alle Elemente, die sowohl zu A wie auch zu B gehören.
Vereinigung	$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$	Alle Elemente aus den beiden Mengen A oder B.
Differenz	$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\}$	Alle Elemente die zu A aber nicht zu B gehören.
Komplement	$\overline{A} = \{x \,|\, x \in A\}$	Alle Elemente, die nicht zu A gehören.









Das kartesische Produkt

Das **kartesische Produkt** $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, d.h.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a,b) \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\} \neq B \times A \\ |A \times B| &= |A| \cdot |B| \\ A \times \emptyset &= \emptyset = \emptyset \times B \end{aligned}$$

Potenzmenge

Die **Potenzmenge** ist die Menge aller Teilmenge einer Menge. Es ist eine Menge von Mengen.

$$\begin{aligned} A &= \{x, y, z\} \\ \mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, A\} \\ |A| &= 3 \\ |\mathcal{P}(A)| &= 2^3 \\ x &\in A \\ \{x\} &\subset A \\ \{x\} &\in \mathcal{P}(A) \\ \{\{z\}, \{x,y\}\} &\subset \mathcal{P}(A) \end{aligned}$$

Intervalle

Intervalle sind für Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es gelten folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} && \text{positiver Halbstrahl} \\ \mathbb{R}_0^+ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} && \text{nichtnegativer Halbstrahl} \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \wedge x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} && \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall} \\ ]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} && \text{rechts-unendliches Intervall} \\ ]a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} && \text{rechts-unendliches Intervall} \\ ]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\} && \text{links-unendliches Intervall} \\ ]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\} && \text{links-unendliches Intervall} \end{aligned}$$

Betrag

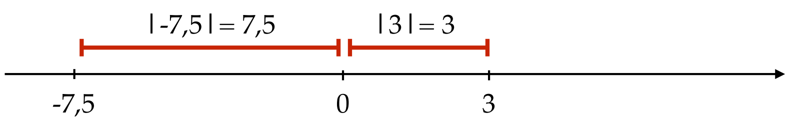
Der **Betrag** einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

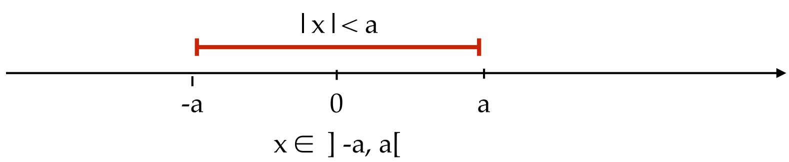
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

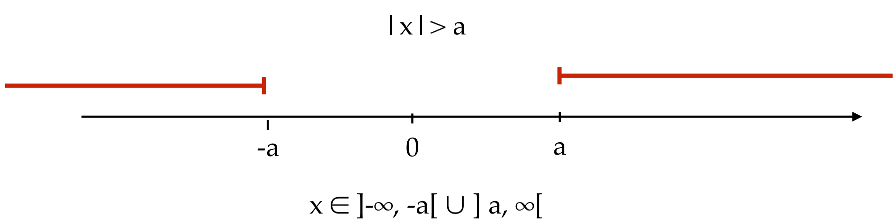
Geometrisch entspricht der Betrag einer Zahl dem Abstand des Punktes auf der Zahlengerade von der Null.

BEISPIEL

$$|3| = 3\,, \qquad |-7,5| = 7,5\,, \qquad |0| = 0.$$







Beim Lösen von (Un)Gleichungen mit Betrag müssen immer zwei Fälle betrachtet werden: (1) Der gesamte Ausdruck im Betrag kleiner Null und (2) Der gesamte Ausdruck im Betrag größer oder gleich Null. Erst dann kann der Betrag verlassen werden, dabei wird im Fall (1) der ganze Ausdruck im Betrag negiert ($\rightarrow$ den ganzen Ausdruck in die Klammer setzen und Minus davor).