Prof. Dr. Marzena Fügenschuh

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Motivation

Beispiel. Addiert man zu einer Zahl 6, so erhält man das Dreifache einer zweiten Zahl. Addiert man zur zweiten Zahl 9, so erhält man das Vierfache der ersten Zahl. Welche Zahlen sind es?

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 6 & = & 3y \\ y & + & 9 & = & 4x \end{array}$$

Umstellen und ordnen:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -6 \\ -4x & + & y & = & -9 \end{array}$$

Die zweite Variable eliminieren $\rightarrow$ zweite Gleichung mit 3 multiplizieren:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -6 \\ -12x & + & 3y & = & -27 \end{array}$$

Die erste Gleichung zur zweiten addieren:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -6 \\ -11x & & & = & -33 \end{array}$$

x aus der zweiten Gleichung ausrechnen und in die erste einsetzen: $x = 3$ und $y = 3$. Wir schreiben die x und y-Variable untereinander: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

Wir wollen die Lösungsverhalten eines lineares Gleichungssystems untersuchen.

1. Die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

lautet $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array}$$

besitzt keine Lösung. Wenn wir beide Seiten der zweiten Gleichung durch 2 dividieren, erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ x & + & y & = & 3. \end{array}$$

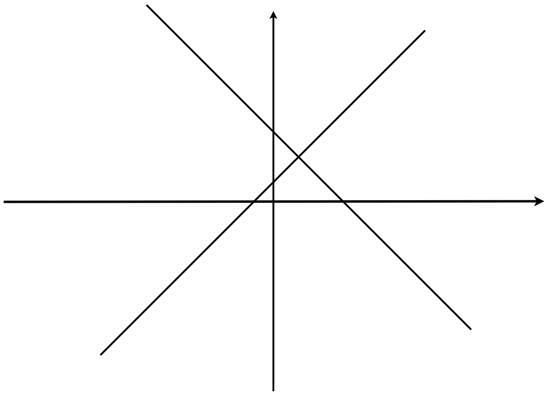


Abbildung 1: (a).

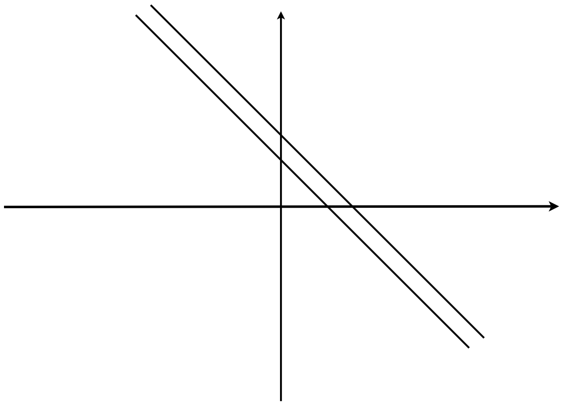


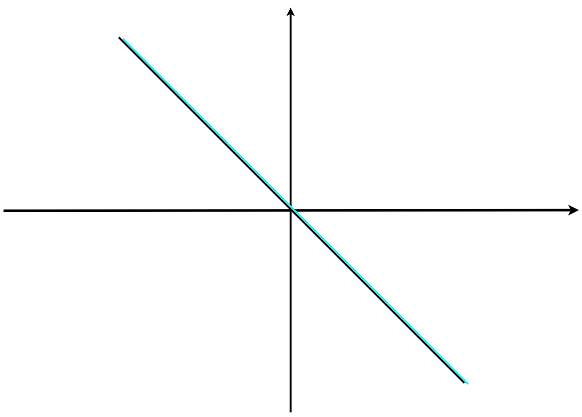
Abbildung 2: (b).

(c) Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ -x & - & y & = & 0 \end{array}$$

besteht eigentlich aus einer Gleichung: Wenn wir die zweite mit -1 multiplizieren, erhalten wir die erste Gleichung. Man spricht in diesem Falle von einem **unterbestimmten Gleichungssystem**. Da wir nur eine Gleichung haben, können wir sie lösen. Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



Da wir für jede reelle Zahl eine andere Lösung erhalten, has Gleichungssystem unendlich viele Lösungen!

1. Eine endliche Menge linearer Gleichungen mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt **lineares Gleichungssystem**. Allgemein schreiben wir ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

2. Ein n-Tupel von reellen Zahlen $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ heißt **Lösung des Gleichungssystems**, wenn es alle vorkommenden Gleichungen löst.

3. Ein Gleichungssystem, das keine Lösung besitzt, heißt **inkosistent**, während lösbare Systeme als **konsistent** bezeichnet werden.

4. Sind alle $b_1 = 0, \ldots, b_m = 0$, so nennt man das Gleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Ein homogenes Gleichungssystem ist **immer konsistent**: Es hat immer mindestens eine Lösung. Entweder nur die sog. **triviale** Lösung

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

oder diese und unendlich viele andere Lösungen.

Beispiel. In einem **homogenen** linearen Gleichungssystem steht die Null auf der rechten Seite jeder Gleichung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Setzen wir $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ so erhalten wir eine Lösung des Gleichungssystems. Ob es mehr gibt, werden wir später sehen.

Gauß-Eliminination

Gauß-Elimination ist ein Verfahren zur Lösung beliebig großer[1] linearen Gleichungssysteme. Das Verfahren basiert auf bestimmten Umformungen der Gleichungen, den so genannten **elementaren Operationen**:

1. Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedener Konstanten.
2. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.
3. Vertauschen zweier Gleichungen.
4. Änderung der Reihenfolge der Variablen.

Idee: Durch **elementare Operationen** auf den Gleichungen, die nichts an der Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystem ändern, überführen wir das Gleichungssystem in die sog. **Dreiecksform** (unter der Diagonalen stehen Nullkoeffizienten und ermitteln dann die Werte der Unbekannten durch das **Rückeinsetzen**.

[1]Gemeint ist die Anzahl der Variablen und Gleichungen

Wir lösen das folgende Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

1. **Zahlenschema.** Wir überführen das Gleichungssystem in ein Zahlenschema:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

2. **Elimination**

   (1) Zunächst eliminieren wir die Koeffizienten von x_1 in der zweiten und dritten Zeile. Dazu nutzen wir **ausschliesslich** die erste Zeile.

   Wir multiplizieren die erste Zeile mit -3 und die zweite Zeile mit 2 und addieren die erste zur zweiten Zeile.

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & 1 & -2 & 10 & \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ 5 & 4 & 3 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & -2 & 10 & \\ \mathbf{0} & 1 & 10 & -28 & \end{array}$$

   Wir multiplizieren die erste Zeile mit -5 und die dritte Zeile mit 2 und addieren die erste zur dritten Zeile.

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & 1 & -2 & 10 & \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 2 \cdot III - 5 \cdot I \\ \hline 2 & 1 & -2 & 10 & \\ \mathbf{0} & 1 & 10 & -28 & \\ \mathbf{0} & 3 & 16 & -42 & \end{array}$$

   Die Elimination in der ersten Spalte ist abgeschlossen.

   (2) Wir eliminieren jetzt in der zweiten Spalte. Es müssen nur Einträge unterhalb des Diagonalelements in der zweiten Spalte eliminiert werden. Jetzt nutzen wir ausschliesslich die zweite Zeile!

   Wir ziehen das dreifache der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & 1 & -2 & 10 & \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 2 \cdot III - 5 \cdot I \\ \hline 2 & 1 & -2 & 10 & \\ 0 & 1 & 10 & -28 & \\ 0 & 3 & 16 & -42 & III - 3 \cdot II \\ \hline 2 & 1 & -2 & 10 & \\ 0 & 1 & 10 & -28 & \\ 0 & \mathbf{0} & -14 & 42 & \end{array}$$

   Die Elimination in der zweiten Spalte ist abgeschlossen. Wir haben nur Nullen unter der Diagonalen, die Elimination ist also abgeschlossen.

3. **Rückwärtseinsetzen**

Aus dem letzten Schritt erhalten wir das folgende Gleichungssystem in vollständiger Dreiecksform:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 10x_3 & = & -28 \\ & & & & -14x_3 & = & 42 \end{array}$$

Wir rechnen x_3 und setzen in die zweite Zeile ein. Dann rechnen wir x_2 aus. Anschliessend setzen wir x_3 und x_2 in die erste Zeile und rechnen x_1 aus.

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & \frac{42}{-14} = -3 \\ x_2 & = & -28 - 10 \cdot (-3) = 2 \\ x_1 & = & \frac{1}{2}(10 - 2 + 2 \cdot (-3)) = 1 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

ACHTUNG: Gehen Sie immer nach dem vorgegebenen Schema vor:
Um in der **ersten Spalte** zu eliminieren, nutzen Sie die **erste Zeile**: ein Vielfaches der ersten Zeile wird zu einem Vielfachen der zweiten, dann der dritten usw. Zeile aufaddiert. Das gleiche gilt für die Elimination in jeder weiteren Spalte: Um in der zweiten Spalte zu eliminieren, nutzen Sie die zweite Zeile, usw. bis Sie die Dreiecksform erhalten.

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -3 & 2 & -1 & \\ -1 & 3 & -4 & 3 & +I \\ 2 & 5 & 1 & 1 & (-2) \cdot I \\ \hline \mathbf{1} & -3 & 2 & -1 & \\ \mathbf{0} & 0 & -2 & 2 & \\ \mathbf{0} & 11 & -3 & 3 & \end{array}$$

Soweit haben wir in der ersten Spalte eliminiert. Jetzt steht aber auf der Diagonale der zweiten Zeile eine Null. Wir können in der zweiten Spalte nicht eliminieren. Wir suchen nach der nächsten Zeile (unterhalb der zweiten Zeile!), die in der zweiten Spalte den Eintrag ungleich Null hat.

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -3 & 2 & -1 & \\ -1 & 3 & -4 & 3 & +I \\ 2 & 5 & 1 & 1 & (-2) \cdot I \\ \hline \mathbf{1} & -3 & 2 & -1 & \\ \mathbf{0} & 0 & -2 & 2 & \\ \mathbf{0} & 11 & -3 & 3 & II \leftrightarrow III \\ \hline \mathbf{1} & -3 & 2 & -1 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{11} & -3 & 3 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & 2 & \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & & 11x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ & & & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -1 \\
x_2 &= \tfrac{1}{11}(3 + 3 \cdot (-1)) = 0 \\
x_1 &= -1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 1
\end{aligned}
$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\
5x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|rl}
1 & 2 & -3 & -1 & \\
3 & -1 & 2 & 7 & \quad -3 \cdot I \\
5 & 3 & -4 & 2 & \quad -5 \cdot I \\
\hline
1 & 2 & -3 & -1 & \\
0 & -7 & 11 & 10 & \\
0 & -7 & 11 & 7 & \quad -II \\
\hline
1 & 2 & -3 & -1 & \\
0 & -7 & 11 & 10 & \\
0 & 0 & 0 & -3 &
\end{array}
$$

Die dritte Gleichung hat die Form $0 = -3$, das Gleichungssystem hat demnach keine Lösung.

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\
4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 14
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|rl}
1 & 2 & -3 & 6 & \\
2 & -1 & 4 & 2 & \quad -2 \cdot I \\
4 & 3 & -2 & 14 & \quad -4 \cdot I \\
\hline
1 & 2 & -3 & 6 & \\
0 & -5 & 10 & -10 & \\
0 & -5 & 10 & -10 & \quad -1 \cdot II \\
\hline
1 & 2 & -3 & 6 & \\
0 & -5 & 10 & -10 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & -3 & 6 & \\
0 & -1 & 2 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Die letzte Gleichung hat die Form $0 = 0$. Diese Gleichung kann weggelassen werden.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\
 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -2
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die allgemeine Form der Lösung erhalten wir durch Einsetzen eines freien Parameters für die Variable x_3 und Berechnen von x_2 und x_1.

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\
x_2 &= (-1) \cdot (-2 - 2\alpha) = 2 + 2\alpha \\
x_1 &= 6 - 2(2 + 2\alpha) + 3\alpha = 2 - \alpha
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems lautet

$$L = \{ \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 2+2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

Wir werden es im nächsten Kapitel sehen, dass diese Lösungsmenge einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ entspricht.

Sei A die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $n = m$, A ist also eine quadratische Matrix. Gilt $\det A \neq 0$, dann hat dieses Gleichungssystem genau eine Lösung. Sonst gar keine oder unendlich viele.

Insbesondere gilt es für homogene Gleichungssysteme ($A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$):

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ genau eine - die triviale - Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = 0$.

$\det A = 0 \Leftrightarrow$ unendlich viele Lösungen.

Beispiel. Zurück zum Beispiel eines homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Wir berechnen die Determinante der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} = 2 - 1 + 12 - 6 - 2 + 3 = 8 \neq 0$$

Das Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Um sich darüber zu überzeugen, lösen wir das Gleichungssystem mit Gauß-Elimination.

$$\begin{array}{rrr|ll} 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 3 & -3 & 1 & 0 & \quad -3 \cdot I \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \quad +I \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & -6 & -5 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & 0 & \quad \cdot 2 + II \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & -6 & -5 & 0 & \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$$

Achtung: Beim Rückwärtseinsetzen lautet die dritte Zeile

$$-3 \cdot x_3 = 0,$$

also $x_3 = 0$. Eingesetzt in die zweite und dann die erste Zeile erhalten wir $x_2 = x_1 = 0$.