Lineare Algebra, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Marzena Fügenschuh

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Logische Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, von dem auf irgendeine Weise festgestellt werden kann, dass er **Wahres** oder **Falsches** aussagt. Eine **Aussagevariable** ist eine Variable, die die zwei Werte annehmen kann: 0 (false, falsch) oder 1 (true, wahr).

Verknüpfungen von Aussagen (Junktoren)

Negation
(nicht x)

x	$\neg x$
0	1
1	0

Konjunktion
(x und y)

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion
(x oder y)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikation
(wenn x, dann y)

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Äquivalenz
(genau dann x, wenn y)

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nach abnehmender **Bindungsstärke** geordnet lautet die Reihenfolge: $\neg$, $\wedge$ $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Sie kann durch eine Klammersetzung beeinflusst werden.

Die **aussagenlogischen Formel** unterliegen dem folgenden Bildungsgesetz:

1. Einzelne Aussagen sind Formeln;
2. 0, die immer falsche Aussage, und 1, die immer wahre Aussage, sind Formeln;
3. Zwei verknüpfte Formeln bilden wiederum eine Formel.

Auf diese weise entstehende Ausdrücke werden **Formeln der Aussagenlogik** genannt. Formeln, die gemäß dieser Vorschriften gebildet werden, heißen **syntaktisch korrekt**.

Ordnet man jeder Aussagevariablen einer Formel einen bestimmten Wahrheitswert (0 oder 1), so nennt man das eine **Belegung** der Variablen mit Wahrheitswerten. Probiert man alle möglichen Belegungen durch, so erhält man eine **Wahrheitstafel** für die Gesamtformel.

BEISPIEL
Die Wahrheitstafel für die Formel $x \leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$:

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$x \leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Die 3., 4. und 5. Spalte sind Zwischenergebnisse in der Reihenfolge der Hierarchie der Bindungsstärke.

Logische Identitäten

Eine Formel heißt

1. **allgemeingültig** oder eine **Tautologie**, wenn sie bei beliebigen Wahrheitswerten der in ihr vorkommenden Aussagen immer den Wert **1** annimmt.
2. **unerfüllbar** oder eine **Kontradiktion**, wenn sie bei beliebigen Wahrheitswerten der in ihr vorkommenden Aussagen immer den Wert **0** annimmt.
3. **erfüllbar**, wenn sie für mindestens eine Belegung der Variablen den Wahrheitswert 1 liefert.

Tautologie: $x \to (y \to x)$

x	y	$x \to (y \to x)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Kontradiktion: $x \wedge \neg(y \to x)$

x	y	$x \wedge \neg(y \to x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Erfüllbar: $y \leftrightarrow (y \to x)$

x	y	$y \leftrightarrow (y \to x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Zwei aussagenlogische Formeln F_1 und F_2 heißen **semantisch äquivalent** oder auch **logisch identisch**, falls $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist. Die semantische Äquivalenz wird mit $F_1 \Leftrightarrow F_2$ bzw. $F_1 \equiv F_2$ bezeichnet.

BEISPIEL
Es gilt $x \to y \Leftrightarrow \neg x \vee y$, denn:

x	y	$\neg x$	$x \to y$	$\neg x \vee y$	$(x \to y) \leftrightarrow (\neg x \vee y)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Für beliebige Aussagen x, y, z gelten folgende logische Identitäten:

1) Konjunktion und Disjunktion sind **kommutativ**:

$$\begin{aligned} x \wedge y &\Leftrightarrow y \wedge x, \\ x \vee y &\Leftrightarrow y \vee x. \end{aligned}$$

2) Konjunktion und Disjunktion sind **assoziativ**:

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge z &\Leftrightarrow x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z, \\ x \vee y \vee z &\Leftrightarrow x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z. \end{aligned}$$

3) **Distributivgesetze**:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z), \\ x \wedge (y \vee z) &\Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

4) **Komplementarität**:

$$\begin{aligned} x \wedge \neg x &\Leftrightarrow 0, \\ x \vee \neg x &\Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

5) **Neutralität**:

$$\begin{aligned} x \wedge 1 &\Leftrightarrow x \\ x \vee 0 &\Leftrightarrow x. \end{aligned}$$

6) **Absorption**:

$$\begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &\Leftrightarrow x, \\ x \wedge (x \vee y) &\Leftrightarrow x. \end{aligned}$$

7) **Permanenz**:

$$\begin{aligned} x \wedge 0 &\Leftrightarrow 0, \\ x \vee 1 &\Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

8) **Idempotenz**:

$$\begin{aligned} x \wedge x &\Leftrightarrow x, \\ x \vee x &\Leftrightarrow x. \end{aligned}$$

9) **Gesetze von de Morgan**[1]:

$$\begin{aligned} \neg(x \vee y) &\Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y, \\ \neg(x \wedge y) &\Leftrightarrow \neg x \vee \neg y. \end{aligned}$$

10) **Implikation und Äquivalenz**

$$x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y, \tag{1}$$

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \Leftrightarrow (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y). \tag{2}$$

Normalformen

BEISPIEL
Ersetzen wir die Implikation in der Formel

$$(\neg x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$$

durch zweifaches anwenden der Identität (1):

$$(\neg x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z).$$

So erhalten wir die so genannte konjunktive Normalform. Wir wenden nun das Distributivgesetz an und vereinfachen:

$$\begin{aligned} (\neg x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) &\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x \wedge \neg x)}_{0} \vee (y \wedge \neg x) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &\Leftrightarrow (y \wedge \neg x) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z). \end{aligned}$$

So erhalten wir die disjunktive Normalform.

[1] Gesetze von de Morgan besagen, dass jede Konjunktion durch eine Disjunktion ausgedrückt werden kann und umgekehrt.

1. Eine Formel in **disjunktiver Normalform DNF** hat die Gestalt
$$F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n,$$
wobei jedes F_i nur mittels Konjunktion von Aussagevariablen bzw. deren Negation aufgebaut ist.
2. Eine Klausel in DNF wird **Minterm** genant. Sobald eine Klausel den Wahrheitswert 1 annimmt, hat die ganze Formel den Wert 1.
3. Eine Formel in **konjunktiver Normalform DNF** hat die Gestalt
$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n,$$
wobei jedes F_i nur mittels Disjunktion von Aussagevariablen bzw. deren Negation aufgebaut ist.
4. Eine Klausel in KNF wird **Maxterm** genannt. Es müssen alle Klausel den Wahrheitswert 1 annehmen, damit die ganze Formel den Wert 1 haben kann.
5. Kommt in jeder Klammer einer Normalform (DNF oder KNF) genau einmal entweder eine Aussagenvariable oder ihr Negation vor, so nennt man die Form **kanonische Normalform** (KDNF oder KKNF).

BEISPIEL
Wir bringen die folgende Formel in KNF in die kanonische Form:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \qquad \text{(KNF)} \\ &= (\neg x \vee y \vee 0) \wedge (\neg x \vee 0 \vee z) \\ &= (\neg x \vee y \vee (\neg z \wedge z)) \wedge (\neg x \vee (\neg y \wedge y) \vee z) \\ &= \underline{(\neg x \vee y \vee z)} \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge \underline{(\neg x \vee y \vee z)} \\ &= (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \qquad \text{(KKNF)} \end{aligned}$$

Analog funktioniert das bei DNF. Bei fehlenden Variablen erweitert man aber mit $\wedge 1$.

Von Wahrheitstafel zu den kanonischen Normalformen

Normalformel (insbesondere die kanonischen) bitten ein Mittel, um aus einer Wahrheitstafel einer unbekannten Formel, diese unbekannte Formel herzuleiten.

BEISPIEL (**Digitale Abstimmungsmaschine**)
Wir betrachten die Wahrheitstafel:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Nun wollen wir eine aussagenlogische Formel herleiten, die dieser Wahrheitstafel entspricht.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Wir betrachten zunächst die Belegungen in der Wahrheitstafel, die den Wahrheitswert 1 liefern. Zu jeder solchen Belegung betrachten wir eine weitere Formel F_i, die für diese Belegung den Wert 1 und sonst 0 liefert.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Verknüpft man die Formeln F_1, F_2, F_3, F_4 mit Disjunktion, so erhält man eine logisch identische Formel zur gesuchten Formel F.

$$F = F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4$$

Nun bleibt es die Vorschriften für die einzelnen Formeln F_1, F_2, F_3, F_4 zu ermitteln. Da jede Formeln F_i eine einzige 1 in der Wahrheitstafel besitzt, werden die Aussagevariablen bzw. deren Negation entsprechend mit Konjunktion verknüpft. Fangen wir mit der letzten Formel an, so ist es leicht einzusehen, dass

$$F_4 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

gilt. Analog erhalten wir

$$F_1 = \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, \quad F_2 = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3, \quad F_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3.$$

Die Formel $F(x_1, x_2, x_3)$ lautet somit:

$$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \qquad (1)$$

2. Ein anderer Weg, eine Formel für $F(x_1, x_2, x_3)$ zu ermitteln, führt über die Betrachtung, wann F die Werte 0 annimmt. Zu jeder solchen Belegung betrachten wir eine weitere Formel F_i, die für diese Belegung den Wert 0 und sonst 1 liefert.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Verknüpft man die Formeln F_1, F_2, F_3, F_4 mit Konjunktion, so erhält man eine logisch identische Formel zu der gesuchten Formel F.

$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$$

Nun bleibt es die Vorschriften für die einzelnen Formeln F_1, F_2, F_3 zu ermitteln. Da jede Formeln F_i eine einzige 0 in der Wahrheitstafel besitzt, werden die Aussagevariablen bzw. deren Negation entsprechend mit Disjunktion verknüpft. Wir erhalten:

$$F_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3, \quad F_2 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3, \quad F_3 = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3, \quad F_4 = \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

Die Formel $F(x_1, x_2, x_3)$ durch die obige Wahrheitstafel beschrieben kann daher auch folgend ausgedrückt werden:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3). \tag{2}$$

Vereinfachen von den kanonischen Normalformen

Der letzte Schritt ist nun die langen kanonischen Normalformen zu verkürzen.

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3) &= (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\
&\Leftrightarrow (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \wedge \underbrace{(x_3 \vee \neg x_3)}_{1} \\
&\Leftrightarrow (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)
\end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir aus den zwei letzten Klauseln die Variable x_3 eliminiert. Die letzte Klammer eignet sich aber auch ganz gut, um aus der ersten Klausel die Variable x_1 und aus der zweiten x_2 zu eliminieren. Deswegen wenden wir das Idempotenzgesetz an und vervielfachen entsprechend die letzte Klammer.

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3) &= (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\
&\quad \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\
&\Leftrightarrow \left[(x_2 \wedge x_3) \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee x_1)}_{1}\right] \vee \left[(x_1 \wedge x_3) \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_2)}_{1}\right] \vee \left[(x_1 \wedge x_2) \wedge \underbrace{(x_3 \vee \neg x_3)}_{1}\right] \\
&\Leftrightarrow (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)
\end{aligned}$$

Ein anderer, oft einfacherer Weg, KDNF bzw. KKNF zu vereinfachen, erlaubt das so genannte **Karnaugh-Veitch-Diagramm**[2].

[2]Schlagen Sie bei Interesse den Begriff in der Literatur nach. Z. B. *.Digitaltechnik, Lehr- und Übungsbuch für Elektrotechniker und Informatiker* von Klaus Fricke, Online-Zugriff über die Beuth-Bibliothek.