Gruppenaufgabe 1

Die zwei Gruppenaufgaben dieses Kurses stellen Einsendeaufgaben dar: Jede Gruppe von KursteilnehmerInnen soll sich auf eine gemeinsame Lösung (samt Herleitung) einigen und diese den MentorInnen zuschicken. Sie erhalten die eingeschickte Lösung korrigiert und bewertet zurück.

Die erfolgreiche Bearbeitung beider Gruppenaufgaben (Bewertung mit der Note 4,0 oder besser) ist Voraussetzung für die Klausurzulassung.

Teilaufgabe 1:

Welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig, (ir)reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv haben die folgenden Relationen?

Dabei ist **N** die Menge der natürlichen Zahlen und **Z** die Menge der ganzen Zahlen.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen für oder gegen diese Eigenschaften jeweils.

a) $\mathbf{Rel} = \{ (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x + 2y \text{ ist ungerade} \}$

b) $\mathbf{Rel} = \{ (x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x < 10 - y \}$

c) $\mathbf{Rel} = \{ (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x = -|y| \}$

d) $\mathbf{Rel} = \{ (x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid |x^2 - y^2| \text{ ist Primzahl} \}$

Hinweis zu d): Für $x, y \in \mathbf{N}$ gilt: $|x^2 - y^2| = (x + y)\cdot|x - y|$. Außerdem ist 1 keine Primzahl.

Teilaufgabe 2:

Auf der Menge **Z** der ganzen Zahlen sei die folgende Relation **Rel** definiert:

$$\mathbf{Rel} = \{ (x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 3 \text{ teilt } 5x - 2y \}$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, was sind die Äquivalenzklassen dieser Relation?

Teilaufgabe 3:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Eine Äquivalenzrelation kann niemals zugleich eine Ordnungsrelation sein.

b) Sei $\mathbf{Rel} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ eine Ordnungsrelation in der Menge **A**. Dann ist auch die zugehörige inverse Relation $\mathbf{Rel}^{-1}$ eine Ordnungsrelation in **A**.