Aufgaben und Lösungen zum Thema Wurzelgleichungen

Aufgaben

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Wurzelgleichungen (G = IR)

Aufgabe 1

$x+\sqrt{13-4x}-2=0$

Aufgabe 2

$\sqrt{5x-9}=\sqrt{5x+11}-2$

Aufgabe 3

$\sqrt{4x+9}=\sqrt{4x-8}+1$

Aufgabe 4

$\sqrt{x-5}+2-\sqrt{x+15}=0$

Aufgabe 5

$\sqrt{x-16}=8-\sqrt{x}$

Aufgabe 6

$\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+2$

Aufgabe 7

$\sqrt{4n-4}+\sqrt{4n+9}=13$

Aufgabe 8

$\sqrt{2y+1}+2=\sqrt{4y+1}$

Aufgabe 9

$\sqrt{3m+3}=5-\sqrt{3m-2}$

Lösungen

Aufgabe 1

$x + \sqrt{13 - 4x} - 2 = 0$

Definitionsbereich:

$D =]-\infty; \frac{13}{4}]$

$\sqrt{13-4x} = 2 - x$ $\quad\quad |()^2$

$13 - 4x = 4 - 4x + x^2$

$9 = x^2$

$x_1 = 3, x_2 = -3$

Kontrolle (!) der Lösungen liefert: $x = \mathbf{-3}$ **(die erste Lösung ist eine Scheinlösung)**

Aufgabe 2

$\sqrt{5x-9} = \sqrt{5x+11} - 2$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [\frac{9}{5}; \infty[\quad D_2 = [-\frac{11}{5}; \infty[\Rightarrow \quad D = D_1 \cap D_2 = [\frac{9}{5}; \infty[$

$\sqrt{5x-9} = \sqrt{5x+11} - 2$ $\quad\quad |()^2$

$5x - 9 = 5x + 11 - 4 \cdot \sqrt{5x+11} + 4$

$4 \cdot \sqrt{5x+11} = 24$

$\sqrt{5x+11} = 6$ $\quad\quad |()^2$

$5x + 11 = 36$

$\mathbf{x = 5}$

Kontrolle:

$\sqrt{5x-9} = \sqrt{5x+11} - 2$

$\sqrt{5 \cdot 5 - 9} = \sqrt{5 \cdot 5 + 11} - 2$

$4 = 4$ ✓ $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{IL = \{5\}}$

Aufgabe 3

$\sqrt{4x+9} = \sqrt{4x-8}+1$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [-\frac{9}{4};\infty[$ $D_2 = [2;\infty[$ $\Rightarrow$ $D = D_1 \cap D_2 = [2;\infty[$

$\sqrt{4x+9} = \sqrt{4x-8}+1$ $\quad |()^2$

$4x + 9 = 4x - 8 + 2 \cdot \sqrt{4x-8} + 1$

$2\sqrt{4x-8} = 16$

$\sqrt{4x-8} = 8$ $\quad |()^2$

$4x - 8 = 64$

$x = 18$

Kontrolle:

$\sqrt{4x+9} = \sqrt{4x-8}+1$

$\sqrt{4 \cdot 18+9} = \sqrt{4 \cdot 18-8}+1$

$9 = 9$ ✓ $\Rightarrow$ **$\mathbb{L} = \{18\}$**

Aufgabe 4

$\sqrt{x-5}+2-\sqrt{x+15}=0$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [5;\infty[\qquad D_2 = [-15;\infty[\quad \Rightarrow \qquad D = D_1 \cap D_2 = [5;\infty[$

$\sqrt{x-5}+2-\sqrt{x+15}=0$

$\sqrt{x-5}=\sqrt{x+15}-2 \qquad\qquad |()^2$

$x-5 = x+15-4\cdot\sqrt{x+15}+4$

$4\cdot\sqrt{x+15}=24$

$\sqrt{x+15}=6 \qquad\qquad |()^2$

$x+15=36$

$\mathbf{x = 21}$

Kontrolle:

$\sqrt{x-5}=\sqrt{x+15}-2$

$\sqrt{21-5}=\sqrt{21+15}-2$

$4 = 4$ ✓ $\qquad \Rightarrow \qquad$ **IL = {21}**

Aufgabe 5

$\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x}$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [16; \infty[\quad D_2 = [0; \infty[\quad \Rightarrow \quad D = D_1 \cap D_2 = [16; \infty[$

$\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x} \qquad |()^2$

$x - 16 = 64 - 16\sqrt{x} + x$

$16\sqrt{x} = 80$

$\sqrt{x} = -5 \qquad |()^2$

$\mathbf{x = 25}$

Kontrolle:

$\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x}$

$\sqrt{25-16} = 8 - \sqrt{25}$

$3 = 3$ ✓ $\quad \Rightarrow \quad$ **IL = {25}**

Aufgabe 6

$\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 2$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [-9; \infty[\quad D_2 = [0; \infty[\quad \Rightarrow \quad D = D_1 \cap D_2 = [0; \infty[$

$\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 2$

$\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 2 \qquad |()^2$

$x + 9 = x + 4\sqrt{x} + 4$

$4\sqrt{x} = 5$

$4\sqrt{x} = 5 \qquad |()^2$

$16x = 25$

$\mathbf{x = \frac{25}{16}}$

Kontrolle:

$\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 2$

$\sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \sqrt{\frac{25}{16}} + 2$

$\sqrt{\frac{169}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} + 2$

$\frac{13}{4} = \frac{13}{4}$ ✓ $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{IL = \{\frac{25}{16}\}}$

Aufgabe 7

$\sqrt{4n-4} + \sqrt{4n+9} = 13$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [1; \infty[$ $\quad D_2 = [-\frac{9}{4}; \infty[\Rightarrow \quad D = D_1 \cap D_2 = [1; \infty[$

$\sqrt{4n-4} + \sqrt{4n+9} = 13$

$\sqrt{4n-4} = 13 - \sqrt{4n+9} \qquad |()^2$

$4n - 4 = 169 - 26\sqrt{4n+9} + 4n + 9$

$26\sqrt{4n+9} = 182$

$\sqrt{4n+9} = 7 \qquad |()^2$

$4n + 9 = 49$

$n = 10$

Kontrolle:

$\sqrt{4n-4} + \sqrt{4n+9} = 13$

$\sqrt{4 \cdot 10 - 4} + \sqrt{4 \cdot 10 + 9} = 13$

$6 + 7 = 13$ ✓ $\Rightarrow$ **$\mathbb{L} = \{10\}$**

Aufgabe 8

$\sqrt{2y+1}+2=\sqrt{4y+1}$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [-\frac{1}{2};\infty[$ $D_2 = [-\frac{1}{4};\infty[\Rightarrow$ $D = D_1 \cap D_2 = [-\frac{1}{4};\infty[$

$\sqrt{2y+1}+2=\sqrt{4y+1}$

$\sqrt{2y+1}+2=\sqrt{4y+1}$ $\quad |()^2$

$2y+1+4\sqrt{2y+1}+4=4y+1$

$4\sqrt{2y+1}=2y-4$

$\sqrt{2y+1}=\frac{1}{2}y-1$ $\quad |()^2$

$2y+1=\frac{1}{4}y^2-y+1$

$\frac{1}{4}y^2-3y=0$

$y\cdot(\frac{1}{4}y-3)=0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{y_1 = 0;\ y_2 = 12}$

Kontrolle:

$\sqrt{2y+1}+2=\sqrt{4y+1}$

$\sqrt{2\cdot 0+1}+2=\sqrt{4\cdot 0+1}$

$3 \neq 1$ $\Rightarrow$ Scheinlösung!

$\sqrt{2\cdot 12+1}+2=\sqrt{4\cdot 12+1}$

$5+2=7$ ✓ $\Rightarrow$ **$\mathbb{L} = \{12\}$**

Aufgabe 9

$\sqrt{3m+3} = 5 - \sqrt{3m-2}$

Lösung:

Definitionsbereich:

$D_1 = [-1; \infty[\quad D_2 = [\frac{2}{3}; \infty[\quad \Rightarrow \qquad D = D_1 \cap D_2 = [\frac{2}{3}; \infty[$

$\sqrt{3m+3} = 5 - \sqrt{3m-2}$

$\sqrt{3m+3} = 5 - \sqrt{3m-2} \qquad |()^2$

$3m + 3 = 25 - 10\sqrt{3m-2} + 3m - 2$

$10\sqrt{3m-2} = 20$

$\sqrt{3m-2} = 2 \qquad |()^2$

$3m - 2 = 4$

$3m = 6$

$\mathbf{m = 2}$

Kontrolle:

$\sqrt{3m+3} = 5 - \sqrt{3m-2}$

$\sqrt{3 \cdot 2 + 3} = 5 - \sqrt{3 \cdot 2 - 2}$

$3 = 5 - 2$ ✓ $\quad \Rightarrow \qquad$ **$\mathbb{L} = \{2\}$**