Prüfung 07

Name: ____________________

Trigonometrie

31. August 2023

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine persönliche, selbst geschriebene Formelsammlung ist erlaubt, ebenso ein Taschenrechner ohne CAS-Funktion!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate wenn möglich exakt angeben, $\sqrt{2}$ ist 1.41421 vorzuziehen.

Trigonometrische Beziehungen (6 Punkte, 1 Punkt pro Teilaufgabe) Verbinde die Terme auf der linken Seite mit dem entsprechenden Term auf der rechten Seite. *Beachte:* Nicht alle Terme links haben einen entsprechenden Term rechts! Korrekte Antworten geben +1 Punkt, fehlerhafte Antworten dagegen −1 Punkt.

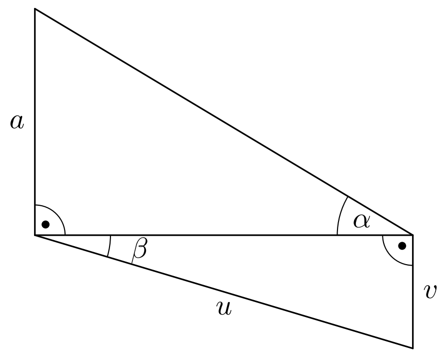
A)	$\sin(\alpha)$	1)	$-\tan(\alpha)$
B)	$\tan(\alpha+\beta)$	2)	$\sin(\alpha + \pi/2)$
C)	$\cos(\alpha+2\pi)$	3)	$\sin(\alpha - 2\pi)$
D)	$\tan(-\alpha)$	4)	$\cos(\alpha + \pi/2)$
E)	$\cos(\alpha)$	5)	$\cos(\alpha - \pi/2)$
F)	$\sin(\alpha)$	6)	$\tan(\alpha) + \tan(\beta)$

Vereinfachungen (8 Punkte, 2 Punkte pro Teilaufgabe) Vereinfache folgende Ausdrücke:

1. $\dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$
2. $\tan(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$
3. $\dfrac{1}{\tan^2(\alpha)} + 1$
4. $(1+\sin(\alpha))(1-\sin(\alpha))$

Geometrische Form (6 Punkte) Hier kommt erwartungsgemäss der Taschenrechner zum Einsatz. Die Resultate bitte auf 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt runden.

In folgender Figur sind gegeben: $a = 4\,cm$, $\alpha = 20°$, $\beta = 15°$. Berechne die Länge der Seiten u und v. Die Zeichnung ist *nicht* massstabsgetreu!



Viel Erfolg!

Lösungen

Trigonometrische Beziehungen

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

A) - 3) oder 5) (vergl. auch F)
B) - (geht nicht)
C) - 2) (vergl. auch E)
D) - 1)
E) - 2) (vergl. auch C)
F) - 3) oder 5) (vergl. auch F)

Vereinfachungen

1. $\dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{1-\cos^2(\alpha)} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{(1-\cos(\alpha))(1+\cos(\alpha))} = \underline{\underline{\dfrac{1}{1+\cos(\alpha)}}}$

2. $\tan(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\cos(\alpha) = \underline{\underline{\sin(\alpha)}}$

3. $\dfrac{1}{\tan^2(\alpha)}+1 = \dfrac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}+1 = \dfrac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}}}$

4. $(1+\sin(\alpha))(1-\sin(\alpha)) = (1-\sin^2(\alpha)) = \underline{\underline{\cos^2(\alpha)}}$

Geometrische Form

Die Figur besteht aus zwei Dreicken, die jeweils über eine ihrer Katheten zusammen verbunden sind. Wir bezeichnen diese Kathete mit b. Dann gilt im oberen Dreieck:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ b &= \frac{a}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

Im unteren Dreieck gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{b}{u} \\ u &= \frac{b}{\cos(\beta)} \end{aligned}$$

Sowie:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{v}{b} \\ v &= b\cdot\tan(\beta) \end{aligned}$$

Also ergeben sich für die gesuchten Grössen u und v folgende Gleichungen:

$$u = \frac{\frac{a}{\tan(\alpha)}}{\cos(\beta)} = \frac{a}{\tan(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$$
$$v = \frac{a}{\tan(\alpha)} \cdot \tan(\beta) = \frac{a \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha)}$$

Setzen wir für a, α und β Zahlen ein und rechnen es aus, so erhalten wir:

$$u \approx \underline{\underline{11.378}} \qquad v \approx \underline{\underline{2.945}}$$