Prüfung 13

Name: ______________________

Ableitungen, Ableitungsregeln, Tangenten — 7. Juli 2022

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, nicht aber der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

Ableitungen (2 Punkte pro Teilaufgabe) Bestimme $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = 4x^{18}$
2. $f(x) = -8x^2 - 6x^3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2x^6} - \dfrac{3}{x^7}$
5. $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$
6. $f(x) = (x^2 - 4x)(x^3 + 2)$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x + 4}$
8. $f(x) = 2x^3 - \dfrac{4x^2 + 4x}{x - 1}$

Ableitungsregeln (3 Punkte) Die folgende Funktion

$$f(x) = \frac{3}{2x^3}$$

kann man als Potenzfunktion, aber auch als Quotienten (Bruch) zweier Funktionen verstehen. Zeige, dass man sowohl mit der Regel zur Ableitung der Potenzfunktion, als auch mit der Quotientenregel auf die gleiche Ableitungsfunktion kommt.

Steigungen (3 Punkte) In welchen Punkten haben die Funktionen f und g die gleiche Steigung?

$$f(x) = x^2 - x + 4 \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$$

Tangente (4 Punkte) Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1;?)$:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Viel Erfolg!

Lösungen

Ableitungen

1. $f'(x) = 72x^{17}$
2. $f'(x) = -16x - 18x^2$
3. $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6}$
4. $f'(x) = -\dfrac{3}{x^7} + \dfrac{21}{x^8}$
5. $f'(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$
6. $f'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 4x - 8$
7. $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 12x^2 - 4}{(x+4)^2}$
8. $f'(x) = \dfrac{6x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 8x + 4}{(x-1)^2}$ oder

   $f'(x) = 6x^2 - \dfrac{4x^2 - 8x - 4}{(x-1)^2}$

Ableitungsregeln Lösung mit der Regel für die Potenzfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2x^3} = \frac{3}{2} \cdot x^{-3} \\ f'(x) &= \frac{3}{2} \cdot (-3)x^{-4} = \underline{\underline{-\frac{9}{2x^4}}} \end{aligned}$$

Lösung mit der Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{wobei: } u(x) = 3 \qquad u'(x) = 0$$

$$v(x) = 2x^3 \qquad v'(x) = 6x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{0 \cdot 2x^2 - 3 \cdot 6x^2}{4x^6} \\ &= -\frac{18x^2}{4x^6} && \mid \text{Kürzen!} \\ &= \underline{\underline{-\frac{9}{2x^4}}} \end{aligned}$$

Steigungen Wenn die zwei Funktionen in einem bestimmten Punkt x_0 die gleiche Steigung haben sollen, müssen ihre Ableitungsfunktionen in diesem Punkt den gleichen Funktionswert haben. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \\ 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Funktionswerte von f und g bei $x_0 = 1$ bestimmen:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 1 + 4 \\ &= 4 \\ \\ g(1) &= \frac{1}{3}1^3 - 5 \\ &= -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

Also sind dies die Punkte $A(1; 4)$ (für f) und $B(1; -{}^{14}\!/_{3})$ (für g).

Wichtig: Ich habe diese Aufgabe etwas unsauber formuliert! «In welchen Punkten…» bestimmt nicht eindeutig, dass für *ein bestimmtes* x die beiden Funktionen die gleiche Steigung haben müssen. Daher gibt es die 3 Punkte für alle geschenkt.

Tangente Eine Tangente ist eine Gerade und hat daher eine denkbar einfache Funktionsgleichung. Wir suchen also eine *lineare Funktion* $t(x) = mx + q$, so dass Folgendes gilt:

$$\begin{cases} t(1) = f(1) \\ t'(1) = f'(1) \end{cases}$$

Wobei

$$t'(x) = m \qquad \text{und} \qquad f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

Nun setzen wir den Wert 1 für x in die beiden Gleichungen ein und erhalten:

$$\begin{aligned} m + q &= 1 + 1 - 4 - 4 \\ m &= 3 + 2 - 4 = 1 && \mid \text{Dies in 1. Gl. einsetzen} \\ \\ 1 + q &= -6 \\ q &= -7 \end{aligned}$$

Somit hätten wir die gesuchte Funktionsgleichung bestimmt:

$$t(x) = x - 7$$

Und ein Blick auf GeoGebra bestätigt uns darin.