Prüfung 9

Funktionen　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　16. Dezember 2021

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner und (neu) GeoGebra.
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.
- Nach der Prüfung eure Lösung einscannen und das Dokument als PDF unter eurem Namen (z.B. `Mühlebach_Stefan.pdf`) auf Teams hochladen.

---

1. (3 Punkte) Gegeben ist folgende Funktion:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x - 8$$

Bestimme von folgenden Punkten die fehlende Koordinate, so dass die Punkte auf dem Graphen von f liegen:

a) $(0, ?)$
b) $(?, 0)$
c) $(-1, ?)$
d) $(?, -1)$
e) $(-2, ?)$
f) $(?, -2)$

Tipp: Definitionsmenge beachten.

2. (2 Punkte) In welchem Punkt schneiden sich die Graphen folgender Funktionen:

$$f(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = -\frac{1}{3}x - 4$$

Tipp: Was kann man über Funktionswerte in einem Schnittpunkt sagen?

3. (4 Punkte) Gesucht ist eine Polynomfunktion f, für welche gilt:

$$f(-2) = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = 0$$

und die ausserdem durch den Punkt $(4, 2)$ geht. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Tipp: Produkt- resp. Nullstellenform!

4. (4 Punkte) Bestimme von folgender gebrochenrationaler Funktion die Pol- und Nullstellen und bestimme die Asymptote (als Funktion):

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 2}{x + 1}$$

Tipp: Nullstellen führen zum Ziel. Ausserdem: Polynomdivision.

Viel Erfolg!

Lösungen

1. Um alle Fragen schnell beantworten zu können, ist es am Einfachsten, wenn von der gegebenen Funktion f auch die Umkehrfunktion f^{-1} bekannt ist. Also:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 8 && \mid +8 \\ y + 8 &= 2x && \mid : 2 \\ \frac{y+8}{2} &= x && \mid \text{(Variablentausch)} \\ y &= \frac{x+8}{2} \end{aligned}$$

   Damit wäre die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{2}$ und wir können die einzelnen Fragen beantworten:

   a) $f(0) = -8 \qquad (0, -8)$
   b) $f^{-1}(0) = 4 \qquad (4, 0)$
   c) $f(-1) = -10 \qquad (-1, -10)$
   d) $f^{-1}(-1) = 3.5 \qquad (3.5, -1)$, aber dieser Punkt kann nicht auf dem Graphen liegen, da $3.5 \notin \mathbb{Z}$
   e) $f(-2) = -12 \qquad (-2, -12)$
   f) $f^{-1}(-2) = 3 \qquad (3, -2)$

2. Der Schnittpunkt liegt bei $f(x) = g(x)$, also bei

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -\frac{1}{3}x - 4 && \mid -1 \\ 2x &= -\frac{1}{3}x - 5 && \mid +\frac{1}{3}x \\ \frac{7}{3}x &= -5 && \mid \cdot\frac{3}{7} \\ x &= -\frac{15}{7} \end{aligned}$$

   Anschliessend diesen Wert in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, ergibt:

$$g\left(-\frac{15}{7}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) - 4 = \frac{5}{7} - 4 = -\frac{23}{7}$$

   Der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $\left(-\dfrac{15}{7}, -\dfrac{23}{7}\right)$.

3. Mit dem gegebenen Tipp (Produktform) können wir eine erste Lösung hinschreiben:

$$f(x) = m \cdot (x + 2)(x - 0)(x - 2)$$

Ausserdem wissen wir, dass $f(4) = 2$ sein muss, also

$$\begin{aligned} m(4+2)4(4-2) &= 2 \\ 48m &= 2 && |: 48 \\ m &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{24}(x+2)x(x-2)$$

oder (ausmultipliziert):

$$f(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{6}x$$

4. Für die Nullstellen der Funktion bestimmen wir die Nullstellen des Zählerpolynoms, d.h. wir lösen folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 2 &= 0 && |: 2 \\ x^2 - x - 1 &= 0 && | \text{ (p/q-Formel anwenden)} \end{aligned}$$

Das ergibt die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$, d.h. die Nullstellen liegen bei

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Für die Polstellen bestimmen wir die Nullstellen des Nennerpolynoms, d.h. wir lösen folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 && | -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also einen Pol bei -1.

Für die Asymptote schliesslich müssen wir die Polynomdivision durchführen:

$$(2x^2 - 2x - 2) : (x+1) = 2x - 4 + \frac{2}{x+1}$$

Der nicht-rationale Teil der Lösung (d.h. $2x - 4$) ist die Funktionsgleichung der Asymptote. Also lautet die Funktionsgleichung der Asymptote:

$$a(x) = 2x - 4$$