# Prüfung 12

Name: ______________________

Gebrochen rationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen 23. Mai 2024

---

- Für die Prüfung habt ihr 45 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine persönliche, selbst geschriebene Formelsammlung ist erlaubt, ebenso ein Taschenrechner ohne CAS-Funktion!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate wenn möglich exakt angeben, $\sqrt{2}$ ist 1.41421 vorzuziehen.

---

1. (2 Punkte) Bestimme eine Polynomfunktion, welche ihre Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ hat und ausserdem durch den Punkt $P(2, -1)$ verläuft.

2. (2 Punkte) Bestimme Nullstellen, Polstellen und Asymptote der folgenden Funktion:
$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^2 + 1}$$

3. Ein Ball fällt aus 5 m auf den Boden und springt dann mehrmals wieder auf. Nach jedem Aufprall erreicht er jeweils 60% der vorhergehenden Höhe.
   a) (2 Punkte) Erstelle eine Funktion, welche die Höhe nach dem $n$-ten Aufprall beschreibt.
   b) (2 Punkte) Nach welchem Aufprall springt er weniger als 1 cm hoch?

**Viel Erfolg!**

## Lösungen

1. Da 4 Punkte gegeben sind, suchen wir ein Polynom vom Grad 3, also eine Funktion der Form:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{mit } a_3 \neq 0$$

Zu dessen Bestimmung kommt a) das Erstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems oder b) die Verwendung der Produktform in Frage. In meinen Augen ist a) die aufwändigere und fehleranfälligere Methode, daher zeige ich b).

Wir suchen also etwas in der Form:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

wobei die $x_1, x_2, x_3$ die gegebenen Nullstellen und $a$ ein noch zu bestimmender Parameter ist. Nach Einsetzen der Nullstellen erhalten wir

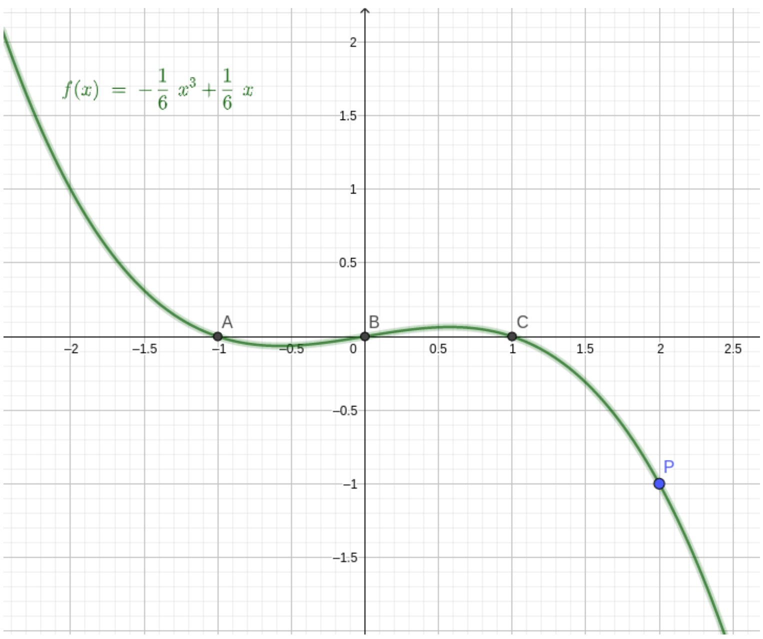
$$f(x) = a(x + 1)x(x - 1) = ax(x^2 - 1)$$

Ausserdem ist bekannt, dass $f(2) = -1$, also

$$2a(4 - 1) = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

Die Funktion lautet also:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x}}$$



2. Die Nullstellen von $f(x)$ sind die Nullstellen des Zählerpolynoms, also:

$$2x^3 - 6x^2 = 0$$
$$2x^2(x-3) = 0$$

Also ist $x_1 = 0$ eine *doppelte Nullstelle* und $x_2 = 3$ eine *einfache Nullstelle*.

Die Polstellen von $f(x)$ sind die Nullstellen des Nennerpolynoms, also:

$$x^2 + 1 = 0$$

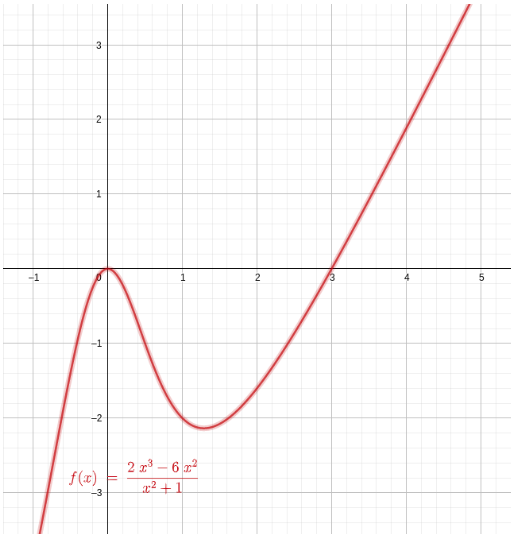
Und das hat keine Lösungen in $\mathbb{R}$, folglich hat diese gebrochen rationale Funktion *keine* Polstellen.

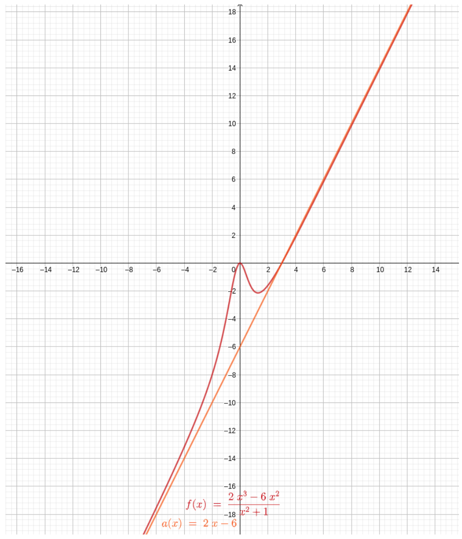
Die Asymptote schliesslich ist der polynomiale Anteil nach der Polynomdivision[1], also:

$$(2x^3 - 6x^2) : (x^2 + 1) = \underbrace{2x - 6}_{\text{Asymptote}} - \underbrace{\frac{2x-6}{x^2+1}}_{\text{Rest}}$$

Die Asymptote wird als Funktionsgleichung angegeben, also:

$$a(x) = 2x - 6$$




[1]Ich habe nur die Division und ihr Resultat angegeben, aus Gründen der Übersichtichkeit aber den Divisionsvorgang weggelassen.

3. Um die Funktion zu ermitteln, erstellt man am besten eine Tabelle, mit der man das Verhalten nach $0, 1, 2, \ldots, n$ Aufpralle darstellt:

| Aufprall | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Höhe [m] | 5 | $5 \cdot 0.6$ | $5 \cdot (0.6)^2$ | $\cdots$ | $5 \cdot (0.6)^n$ |

Die in Aufgabe a) gesuchte Funktion (Höhe nach $n$ Aufprallern) lautet also wie folgt:

$$h(n) = 5 \cdot (0.6)^n$$

Für die Aufgabe b) könnte man nun mechanisch hintereinander die Werte $1, 2, 3, \ldots$ für $n$ in der Funktionsgleichung einsetzen *oder* eine Logarithmusgleichung lösen – ich werde es auf die zweite Weise lösen:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (0.6)^n &= 0.01 && \mid :5 \\ (0.6)^n &= 0.002 && \mid \ln() \\ n \cdot \ln(0.6) &= \ln(0.002) && \mid :\ln(0.6) \\ n &= \frac{\ln(0.002)}{\ln(0.6)} \\ &\approx 12.1658\ldots \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Ball beim $\underline{\underline{\text{13. Aufprall}}}$ nicht höher als 1 cm springt.