Prüfung 11

Name: ______________________

Exponentialfunktionen, Lineare Algebra

22. Februar 2023

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

1. (4 Punkte) Ein Ball fällt aus 5 m Höhe auf den Boden und springt dann mehrmals in die Höhe. Nach jedem Aufprall erreicht er 60 % der vorhergehenden Höhe. Nach wie vielen Sprüngen erreicht der Ball erstmals nicht mehr eine Höhe von
   a) 1 cm
   b) 1 mm

2. (6 Punkte) Ein Pilz an einer Kellerwand wächst so stark, dass sich die befallene Fläche
   a) Jeden Monat verdoppelt
   b) alle 4 Monate verdreifacht

   Als er entdeckt wird ($t = 0$) beträgt die befallene Fläche 0.4 m^2. Bestimme für beide Fälle die Wachstumsfunktion in Abhängigkeit der Zeit in Monaten. Wie gross wäre die befallene Fläche in beiden Fällen nach einem Jahr?

3. (4 Punkte) Gegeben sind folgende Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Welche der folgenden Verknüpfungen sind möglich? Und falls sie möglich sind, wie lautet das Resultat?

   a) $\vec{x} + \vec{z}$
   b) $\vec{y} + 2\vec{x}$
   c) $A + 3D$
   d) $B - C$
   e) $D \cdot A$
   f) $C \cdot B$
   g) $B \cdot \vec{y}$
   h) $A \cdot \vec{x} + D \cdot \vec{z}$

4. (6 Punkte) Erstelle die Matrix folgender Abbildungen in $\mathbb{R}^2$ und transformiere damit den angegebenen Punkt:

a) Eine Spiegelung an der Geraden $y = -x$.
Zu transformierender Punkt: $Z(-1, -4)$

b) Eine Scherung, welche den Punkt $A(1, 1)$ auf den Punkt $A'(3, 2)$ abbildet.
Zu transformierender Punkt: $Z(1, -1)$.

Viel Erfolg!

Lösungen

1. Die Funktion, welche die Sprunghöhe h in Abhängigkeit der Anzahl Sprüngen x angibt, lautet:
$$h(x) = 5 \cdot (0.6)^x$$
Nun gilt es folgende Gleichungen zu lösen:
   a)
$$\begin{aligned} 5 \cdot (0.6)^x &\leq 0.01 \\ x &\geq 12.1658 \\ x &= 13 \end{aligned}$$
   Beim 13. Sprung erreicht er eine Höhe, die kleiner als die geforderten 1 cm ist.

   b)
$$\begin{aligned} 5 \cdot (0.6)^x &\leq 0.001 \\ x &\geq 16.6734 \\ x &= 17 \end{aligned}$$
   Beim 17. Sprung erreicht er eine Höhe, die kleiner ist als 1 mm.

2. Wenn sich die befallene Fläche jeden Monat verdoppelt, sieht die Wachstumsfunktion f, welche die befallene Fläche in Abhängigkeit der Zeit in Monaten t angibt, wie folgt aus:
$$f(t) = 0.4 \cdot 2^t$$
analog lautet die Funktion g (Verdreifachung alle 4 Monate):
$$\begin{aligned} g(t) &= 0.4 \cdot 3^{t/4} \\ &= 0.4 \cdot (\sqrt[4]{3})^t \end{aligned}$$
Um zu bestimmen, wie gross die befallene Fläche nach einem Jahr ist, setzt man bei beiden Funktionen für t den Wert 12 ein:
$$\begin{aligned} f(12) &= 1\,638.4 \text{ m}^2 \\ g(12) &= 10.8 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

3. a) $\vec{x} + \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{y} + 2\vec{x}$ Das geht leider nicht, da $\vec{y}$ und $\vec{x}$ nicht die gleiche Anzahl Komponenten haben.

   c) $A + 3D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B - C$ Das geht auch nicht. Um zwei Matrizen zu addieren, müssten sie jeweils die gleiche Anzahl Spalten und die gleiche Anzahl Zeilen haben.

e) $D \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 20 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

g) $B \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

h) $A \cdot \vec{x} + D \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. Bei beiden Abbildungen handelt es sich um lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^2$. Insbesondere brauchen wir keine Translation. Beide Abbildungen lassen sich also mit 2×2-Matrizen darstellen.

   a) Am einfachsten lässt sich die Matrix erstellen, wenn man die Abbildung der Basisvektoren betrachtet:

$$\vec{e_1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Die Abbildungsmatrix lautet also:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Für die Abbildung des Punktes Z berechnet man also:

$$\begin{aligned} M \cdot \vec{z} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   b) Diese Abbildung lässt sich durch zwei hintereinander durchgeführte Scherungen darstellen: Erstens eine Scherung S_1, welche den Punkt $A(1,1)$ auf den Punkt $A''(3,1)$ abbildet (siehe Abbildung 1) und anschliessend eine Scherung S_2, welche $A''(3,1)$ auf $A'(3,2)$ abbildet (siehe Abbildung 2). Beide Abbildungen zeigen, wohin die Basisvektoren abgebildet werden, ebenso, wie die Ebene verzerrt wird.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Für die Abbildung des Punktes Z berechnet man also:

$$\begin{aligned} S \cdot \vec{z} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

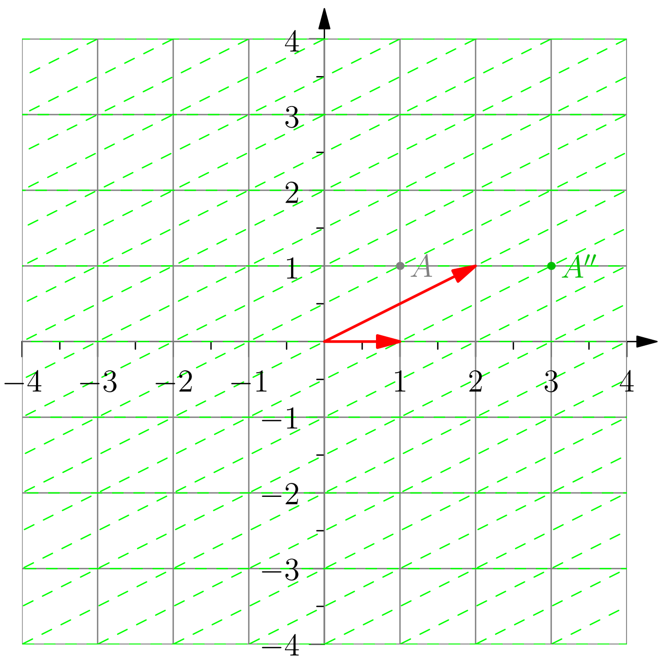

Abbildung 1: Darstellung der Scherung S_1

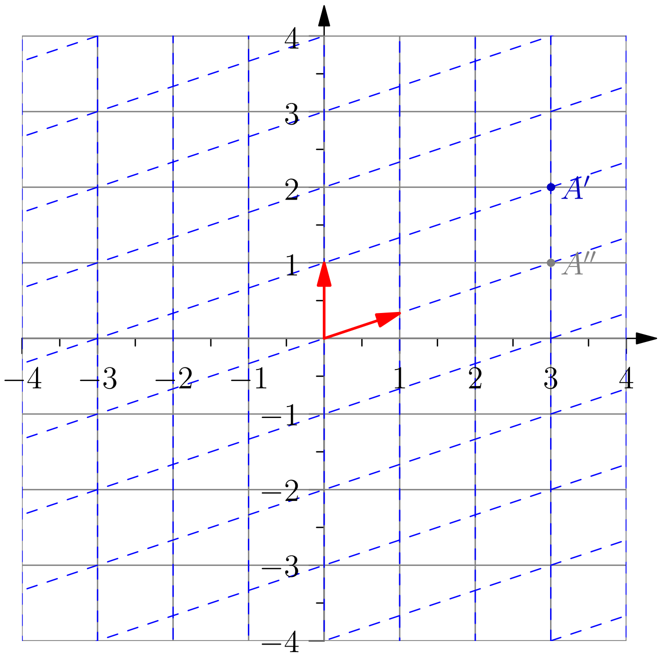

Abbildung 2: Darstellung der Scherung S_2