Prüfung 10

Name: ____________________

Funktionen

18. Januar 2023

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

---

1. (3 Punkte) Gegeben ist folgende Funktion:

   $$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x - 8$$

   Bestimme von folgenden Punkten die fehlende Koordinate, so dass die Punkte auf dem Graphen von f liegen:

   a) $A(0, ?)$
   b) $B(?, 0)$
   c) $C(-1, ?)$
   d) $D(?, -1)$
   e) $E(-2, ?)$
   f) $F(?, -2)$

   Achtung: Definitions- und Wertemenge beachten!

2. (2 Punkte) In welchem Punkt schneiden sich die Graphen der folgenden Funktionen:

   $$f(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = -\frac{1}{3}x - 4$$

3. (5 Punkte) Ein Ball wird auf einer Höhe von 2 m horizontal geworfen und und landet in einer horizontalen Entfernung von 2 m auf dem Boden. Die Flugbahn habe die Form einer Parabel.

   a) (2 Punkt) Bestimme die Funktionsgleichung der Flugbahn, welche die Flughöhe in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung vom Wurfpunkt angibt.
   b) (1 Punkt) Wie hoch ist der Ball nach 1 m horizontaler Entfernung?
   c) (2 Punkte) Wie gross ist die horizontale Entfernung, wenn er eine Höhe von 1 m hat?

4. (4 Punkte) Gesucht ist eine Polynomfunktion f, für welche gilt:

   $$f(-2) = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = 0$$

   und die ausserdem durch den Punkt $Q(4, 2)$ geht.

   a) (2 Punkte) Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Funktion?
   b) (2 Punkte) Welche der folgenden Eigenschaften hat diese Funktion:

      A) gerade, B) ungerade, C) monoton wachsend, D) monoton fallend.

Viel Erfolg!

Lösungen

1. Um alle Fragen schnell beantworten zu können, ist es am Einfachsten, wenn von der gegebenen Funktion f auch die Umkehrfunktion f^{-1} bekannt ist. Also:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 8 && \mid +8 \\ y + 8 &= 2x && \mid : 2 \\ \frac{y+8}{2} &= x && \mid \text{(Variablentausch)} \\ y &= \frac{x+8}{2} \end{aligned}$$

Damit wäre die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{2}$ und wir können die einzelnen Fragen beantworten:

a) $f(0) = -8$ $A(0, -8)$
b) $f^{-1}(0) = 4$ $B(4, 0)$
c) $f(-1) = -10$ $C(-1, -10)$
d) $f^{-1}(-1) = 3.5$ $D(3.5, -1)$, aber dieser Punkt kann nicht auf dem Graphen liegen, da $3.5 \notin \mathbb{Z}$
e) $f(-2) = -12$ $E(-2, -12)$
f) $f^{-1}(-2) = 3$ $F(3, -2)$

2. Im Schnittpunkt muss gelten: $f(x) = g(x)$, also

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -\frac{1}{3}x - 4 && \mid -1 \\ 2x &= -\frac{1}{3}x - 5 && \mid +\frac{1}{3}x \\ \frac{7}{3}x &= -5 && \mid \cdot \frac{3}{7} \\ x &= -\frac{15}{7} \end{aligned}$$

Anschliessend diesen Wert in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, ergibt:

$$g\left(-\frac{15}{7}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) - 4 = \frac{5}{7} - 4 = -\frac{23}{7}$$

Der gesuchte Schnittpunkt liegt also bei $\underline{\underline{\left(-\frac{15}{7}, -\frac{23}{7}\right)}}$.

3. a) Mit der Produktform kommt man am besten/schnellsten zur Lösung, denn es gilt ja $f(2) = 0$ und wegen der Symmetrie gilt auch $f(-2) = 0$. Ein erster Entwurf sieht also wie folgt aus:

$$f(x) = a(x - 2)(x + 2)$$

Da ausserdem $f(0) = 2$ gelten muss, kommen wir auf $f(0) = a(-2)(2) = -4a = 2$, also muss $a = -\frac{1}{2}$ sein. Die Funktionsgleichung lautet also

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$$

oder ausmultipliziert

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2}}$$

b) In diesem Fall suchen wir einfach den Funtionswert bei $x = 1$, resp. $f(1)$:

$$f(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

c) Dieser Fall ist etwas komplizierter: wir suchen nämlich ein x, so dass $f(x) = 1$ ist oder ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{2}x^2 + 2 && \mid +\frac{1}{2}x^2 \quad -1 \\
\frac{1}{2}x^2 &= 1 && \mid \cdot 2 \\
x^2 &= 2 && \mid \sqrt{()} \\
x &= \pm\sqrt{2} && \mid \text{(Wobei die negative Lösung wegfällt)} \\
x &= \underline{\underline{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

4. Es sind ingesamt 4 Punkte gegeben, durch welche die Polynomfunktion verlaufen soll: $A(-2,0)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$ und natürlich $Q(4,2)$. Wir suchen also ein Polynom 3. Grades.

a) Auch diese Aufgabe lässt sich mit der Produktform am Elegantesten lösen. Wir kennen ja drei Nullstellen und können als ersten Entwurf der Funktion schreiben:

$$f(x) = m(x+2)x(x-2)$$

Nun geht es darum, m zu bestimmen. Dies gelingt mit den Angaben des 4. Punktes, denn es gilt $f(4) = 2$, also

$$\begin{aligned}
2 &= m(4+2)4(4-2) \\
2 &= 48m \\
m &= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

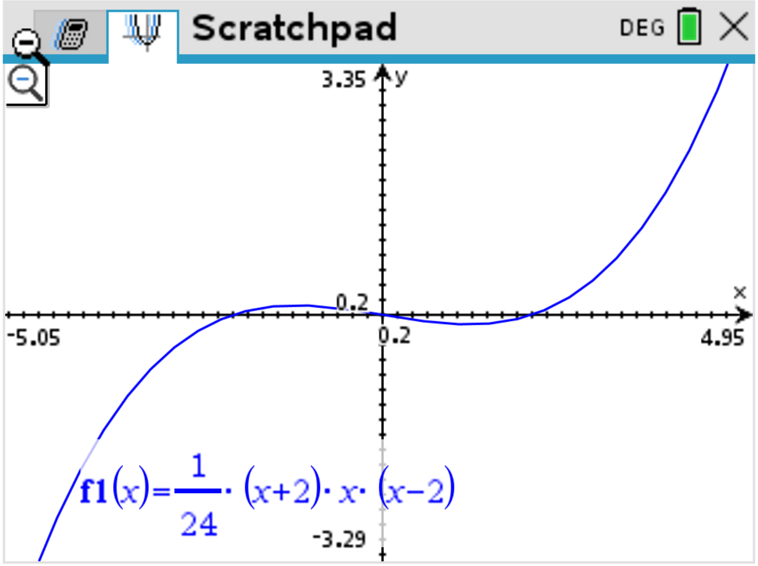
Also hätten wir:

$$f(x) = \frac{1}{24}(x+2)x(x-2)$$

oder ausmultipliziert:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{6}x}}$$

b) Schliesslich hilft ein Blick auf den Graphen der Funktion, um die 4 letzten Fragen zu beantworten:



Diese Funktion ist...

A) nicht gerade (sie ist nicht spiegelsymmetrisch gegenüber der y-Achse)

B) ungerade (denn sie ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs)

C) und D) *weder* monoton wachsend *noch* monoton fallend.