Prüfung 06

Name: ____________________

Funktionen – lineare Fkt., quadratische Fkt., Polynom-Fkt. 29. August 2024

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

---

1. (4 Punkte) Gegeben ist folgende lineare Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$$

Beantworte dazu folgende Fragen:

a) Bestimme den Funktionswert an der Stelle $x = 4$

b) Bestimme die Stelle auf der x-Achse, bei der gilt: $f(x) = 0$

c) Berechne die Steigung des Graphen von f

d) Berechne eine zweite Funktion g, die senkrecht auf f steht und durch den Punkt $A(1, 1)$ verläuft.

2. (4 Punkte) Gegeben ist die folgende quadratische Funktion mit Parameter a:

$$f(x) = ax^2 - 3x - 4$$

Für die ersten drei Fragen sei $a = 1$ (Lösungsweg ist wichtig):

a) Bestimme die Lage des Scheitelpunktes.

b) Bestimme die Lage(n) der Nullstelle(n).

c) Bestimme die Schnittpunkte mit der linearen Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

d) Wie gross müsste man a wählen, damit diese Funktion nur eine (1) Nullstelle hat. *Hinweis:* für quadratische Gleichungen gibt es eine Bedingung, die man hier nutzen kann.

3. (2 Punkte) Bestimme eine Polynomfunktion f, welche die folgenden Bedingungen erfüllt und durch den Punkt $P(0, 4)$ verläuft.

$$f(-3) = 0 \qquad f(-1) = 0 \qquad f(1) = 0$$

Viel Erfolg!

Lösungen

1. a)

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}x - 3 &= 0 && \mid +3 \\ \frac{1}{2}x &= 3 && \mid \cdot 2 \\ x &= \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

   c) Als Steigung wird der Koeffizient der unabhängigen Variablen x bezeichnet; die Steigung ist also gleich 1/2 oder 0.5.

   d) Wir wählen als Ansatz für die Funktion g:

$$g(x) = ax + b$$

   Da $g \perp f$ sein muss, gilt $a = -\frac{1}{m}$, wobei m die Steigung von f ist (siehe Aufgabe 2c). Somit ist $a = -2$ und

$$g(x) = -2x + b$$

   Da g durch den Punkt $A(1, 1)$ verläuft, gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= -2 \cdot 1 + b && \mid +2 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

   Die finale Version von g lautet somit:

$$\underline{\underline{g(x) = -2x + 3}}$$

2. a) Für den Scheitelpunkt stellen wir die Funktionsgleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die *Scheitelpunktform* um:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x - 4 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} && \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)}} \end{aligned}$$

b) Für die Nullstelle(n) bestimmen wir die Lösung(en) der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= 0 && \mid \text{Faktorisieren} \\ (x+1)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-1, 4\}}}$

c) Für die Schnittpunkte mit der gegebenen Funktion g gilt es folgende Gleichung zu lösen – was wiederum auf eine quadr. Gleichung führt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 3x - 4 &= \frac{1}{2}x + 1 && \mid -\frac{1}{2}x \quad -1 \\ x^2 - 3.5x - 5 &= 0 && \mid \text{Lösungsformel anwenden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.589 \\ x_2 &= -1.089 \end{aligned}$$

Dies sind allerdings erst die x-Koordinaten der Schnittpunkte! Für die jeweiligen y-Koordinaten setzen wir die beiden Werte bei $g(x)$ ein, da hier der Rechenaufwand kleiner ist:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= 3.295 && \Rightarrow \underline{\underline{S_1(4.589, 3.295)}} \\ g(x_2) &= 0.455 && \Rightarrow \underline{\underline{S_2(-1.089, 0.455)}} \end{aligned}$$

d) Die letzte Frage führt uns wieder zu den quadr. Gleichungen. Genauer: wie gross muss a sein, damit folgende Gleichung *nur eine Lösung* hat:

$$ax^2 - 3x - 4 = 0$$

Nur eine Lösung haben quadr. Gleichungen, deren Diskriminante gleich Null ist. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ b^2 - 4ac &= 0 && \mid \text{Werte für } b \text{ und } c \text{ einsetzen} \\ (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot (-4) &= 0 \\ 9 + 16a &= 0 && \mid -9 \\ 16a &= -9 && \mid : 16 \\ a &= -\frac{9}{16} = \underline{\underline{-0.5625}} \end{aligned}$$

3. Da in der Aufgabe 3 Nullstellen gegeben sind, lässt sich ein erster Ansatz mit Hilfe der Produkt-, resp. Nullstellenform machen. Nach diesem Schritt sind wir schon ziemlich am Ziel, es gilt noch den einzigen unbekannten Parameter zu bestimmen: den Faktor a.

   $$f(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$$

   Mit der Information, dass $f(0) = 4$ ist, lässt sich a jedoch einfach bestimmen:

   $$\begin{aligned} 4 &= a \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) \\ 4 &= -3a && |: (-3) \\ a &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

   Und wir erhalten unsere gesuchte Polynomfunktion:

   $$f(x) = -\frac{4}{3}(x+3)(x+1)(x-1)$$

   oder auch

   $$f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{4}{3}x + 4$$

   und da ich nirgends geschrieben habe, in welcher Form die Poly.funktion stehen muss, sind beide Lösungen korrekt.