# Prüfung 14

Name: ____________________

Kurvendiskussion, Ableitung trig. Funktionen, Kettenregel — 8. September 2022

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

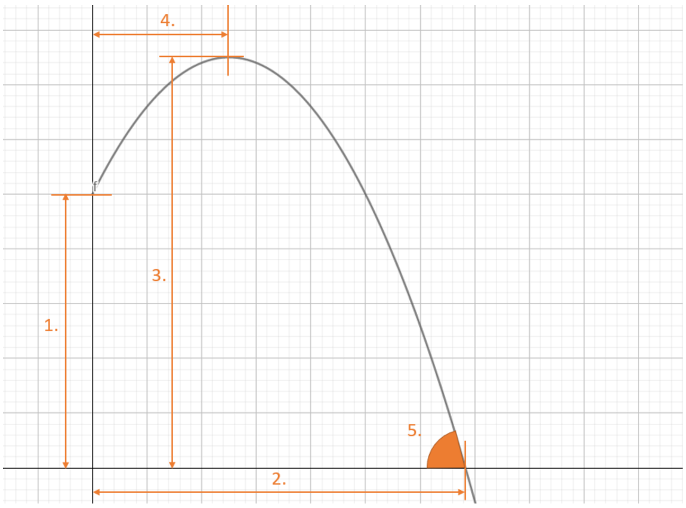
**Ableitungen (2 Punkte pro Teilaufgabe)** Bestimme $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$
2. $f(x) = \sin^2(x)$
3. $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
4. $f(x) = \cos(x^3)$
5. $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$
7. $f(x) = (2x^3 + 1)^2$
8. $f(x) = (3 - 4x + x^3)^4$
9. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$

**Kurvendiskussion (2 Punkte pro Teilfrage)** Die Flugbahn eines Balles (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) erfülle die folgende Funktionsgleichung, wobei $x$ die horizontale Distanz vom Abschlagpunkt und $y$ die Flughöhe über dem Boden sei:

$$y = -2x^2 + 2x + 1 \qquad x \geq 0$$

Skizze:



Bestimme:

1. Höhe des Abschlagpunktes über dem Boden
2. Horizontale Weite des Wurfes
3. Maximale Höhe des Wurfes über dem Boden
4. Horizontaler Abstand der maximalen Höhe vom Abschlagpunkt
5. Winkel (in Grad), unter dem der Ball auf den Boden trifft

Alle Angaben sind in Meter (m).

**Viel Erfolg!**

# Lösungen

## Ableitungen

1. $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$
2. $f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$
3. $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
4. $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$
5. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cos(x)$
6. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$
7. $f'(x) = 2(2x^3 + 1) \cdot 6x^2$
8. $f'(x) = 4(3 - 4x + x^3)^3 \cdot (-4 + 3x^2)$
9. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}x}$ oder $-\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
10. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^2) + \sqrt{x}\cos(x^2) \cdot 2x$

## Kurvendiskussion

1. Beim Abschlag gilt: $x = 0$ eingesetzt in die Fkt.gleichung ergibt das $y = 1$

   Der Abschlagpunkt befindet sich also 1 m über dem Boden.

2. Dort wo der Ball den Bodem berührt gilt: $y = 0$. Wir suchen also die Lösungen folgender quadratischen Gleichung: $-2x^2 + 2x + 1 = 0$ und insbesondere sind wir nur an der positiven Lösung interessiert (da $x \geq 0$).

   Verwendung der quadratische Ergänzung oder der abc-Formel ergibt: $x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

3. Für diese und die nächste Aufgabe benötigen wir die Ableitung der Funktion, also:

   $$f'(x) = -4x + 2$$

   Beim Punkt der maximalen Höhe gilt: $f'(x) = 0$, also $-4x + 2 = 0$ und somit ist $x = \dfrac{1}{2}$ (Antwort auf Frage 4).

Für die Höhe an dieser Stelle setzen wir den gefundenen Wert für $x$ in die Funktionsgleichung für $f$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

oder 1.5 m (Antwort auf Frage 3).

4. Für diese Frage setzen wir den bei Frage 2 gefundenen Wert in die Ableitungsfunktion ein, also:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) &= -4 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2 \\ &= -2(1+\sqrt{3}) + 2 \\ &= -2\sqrt{3} \\ &\approx -3.464 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Tangens des gesuchten Winkels, d.h. der Winkel ist ungefähr 73.898.