Prüfung 04

Name: ______________________________

Ungleichungen, Lineare Gleichungssysteme — 23. Mai 2024

- Für die Prüfung habt ihr 45 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine persönliche, selbst geschriebene Formelsammlung ist erlaubt, ebenso ein Taschenrechner ohne CAS-Funktion!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate wenn möglich exakt angeben, $\sqrt{2}$ ist 1.41421 vorzuziehen.

---

1. (1 Punkt pro Teilaufgabe) Bestimme die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

   a) $2x + 1 < 3x - 6$

   b) $10(x-1) > 7(x+1)$

   c) $10 > |5 - x|$

2. (2 Punkte pro Teilaufgabe) Bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme. Die Wahl der Lösungsmethode ist frei. Die Lösungsvariablen sind jeweils x, y und z, resp. x_n.

   a) $\begin{cases} y - 1 = x \\ x + z - 6 = 0 \\ 7 - z = y \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 20 \\ 5x_2 - 7x_3 = -14 \\ 3x_3 + 9x_4 = 7 \\ 12x_1 - 17x_4 = 68 \end{cases}$

Viel Erfolg!

Lösungen

1. a)

$$\begin{aligned} 2x+1 &< 3x-6 && \mid -2x \quad +6 \\ x &> 7 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = (7, \infty)}}$$

b)

$$\begin{aligned} 10(x-1) &> 7(x+1) \\ 10x-10 &> 7x+7 && \mid -7x \quad +10 \\ 3x &> 17 && \mid :3 \\ x &> \frac{17}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left(\frac{17}{3}, \infty\right)}}$$

c)

$$\begin{aligned} & 10 > |5-x| && \mid \text{Fallunterscheidung} \\ x \le 5: \quad & 10 > 5-x && \mid +x \quad -10 \\ & x > -5 \\ & \mathbb{L}_1 = (-5, 5] \\ x > 5: \quad & 10 > -(5-x) \\ & 10 > -5+x && \mid +5 \\ & x < 15 \\ & \mathbb{L}_2 = (5, 15) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-5, 15)}}$$

2. a)

$$\left\{ \begin{array}{l} y-1=x \\ x+z-6=0 \\ 7-z=y \end{array} \right. \qquad \text{Erw. Koeff.matrix aufstellen:} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Mit der Hauptdeterminante lässt sich sehr schnell bestimmen, ob es eine exakte Lösung gibt oder allenfalls grössere Lösungsmengen, für die man sowieso ein alternatives Lösungsverfahren anwenden müsste.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Ich verwende für den weiteren Lösungsweg nur noch die erw. Koeffizientenmatrix (wie beim Gauss-Verfahren)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{III + I} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Die gleichen Zahlen auf der zweiten und dritten Zeile sind eine weitere Bestätigung, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Wir wählen also einen freien Parameter (üblicherweise λ), den wir für x einsetzen und drücken dann y und z mit Hilfe von λ aus:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(\lambda, \lambda + 1, 6 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}}$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \qquad \text{Erw. Koeff.matrix aufstellen:} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Ich wende das Determinantenverfahren an – ob man damit Zahlen oder Variablen verarbeitet, spielt nicht so eine grosse Rolle.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = c + b - a - b = c - a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = b + c - c - a = b - a$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = a - b - c$$

Mit -1 als Wert für die Hauptdeterminante lassen sich die Lösungen direkt aufschreiben:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a-c, a-b, b+c-a)\}}}$$

Da die Hauptdeterminante ein konstanter, reeler Wert ungleich Null ist, entfallen weitere Lösbarkeitsbetrachtungen.

c)

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 20 \\ 5x_2 - 7x_3 = -14 \\ 3x_3 + 9x_4 = 7 \\ 12x_1 - 17x_4 = 68 \end{cases} \quad \text{Erw. Koeff.matrix aufstellen:} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 12 & 0 & 0 & -17 & 68 \end{array}\right)$$

Und es geht los mit Gauss-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 12 & 0 & 0 & -17 & 68 \end{array}\right) \xrightarrow{IV - 12 \cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 48 & 0 & -17 & -172 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{5 \cdot IV - 48 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 336 & -85 & -188 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV - 112 \cdot III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1093 & -972 \end{array}\right)$$

Damit wäre die geforderte Zeilenstufenform erreicht und wir beginnen von unten damit, die Werte für die einzelnen Lösungsvariablen zu berechnen.

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{972}{1093} \\ x_3 &= \frac{1}{3}\left(7 - 9 \cdot \frac{972}{1093}\right) = \frac{-1097}{3279} \\ x_2 &= \frac{1}{5}\left(-14 + 7 \cdot \frac{-1097}{3279}\right) = \frac{-10717}{3279} \\ x_1 &= 20 - 4 \cdot \frac{10717}{3279} = \frac{22712}{3279} \end{aligned}$$

Und die Lösung als Tupel geschrieben:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{22712}{3279}, \frac{-10717}{3279}, \frac{-1097}{3279}, \frac{972}{1093}\right)\right\}}}$$

Zugegeben, das war eine Aufgabe vom oberen Ende der Schwierigkeitsskala und ich habe sie *nicht* bewusst gewählt.