

# Prüfung 5

Name: \_\_\_\_\_

Quadratische Gleichungen

25. Mai 2022

- 
- Für die Prüfung habt ihr **90 Minuten** Zeit.
  - *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
  - Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
  - Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
  - Resultate exakt angeben, d.h.  $\sqrt{2}$  und nicht 1.41421.
- 

**Quadratische Gleichungen (1 Punkt pro Teilaufgabe)** Gib (wo notwendig) die Definitionsmenge an, stelle die Gleichung in die Grundform und löse sie nach  $x$  auf, resp. gib die Lösungsmenge an:

1.  $2x^2 - 6x - 20 = 0$

4.  $\frac{1}{x^2 - 20} = \frac{1}{x}$

2.  $\frac{2-x}{2+x} = \frac{x-8}{x+8}$

5.  $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 16\left(x + \frac{1}{2}\right) + 15 = 0$

3.  $(2x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 4$

6.  $(x+1)^2 + (x+3)^2 = (3x-5)^2$

**Textaufgabe I (3 Punkte)** Ein Schüler kauft eine Anzahl Bücher, jedes zum gleichen Stückpreis und bezahlt dafür Fr. 156.80. Er verkauft sie zu Fr. 12.– pro Stück weiter und verdient dabei im Ganzen gerade so viel, wie er für ein Buch bezahlt hat. Wie viele Bücher hat er gekauft?

**Textaufgabe II (3 Punkte)** Eine Klasse geht auf einen Schulausflug und hat einen Bus für Fr. 336.– gemietet. Da am Ausflugstag drei Schüler fehlen, muss der Fahrpreis pro Schüler um Fr. 2.– erhöht werden. Wieviele Schüler wollten ursprünglich am Ausflug teilnehmen?

*Tipp:* Bei beiden Textaufgaben ist die unbekannte Variable so zu wählen, dass sie genau der fragten Grösse entspricht.

**Viel Erfolg!**

# Lösungen

## Quadratische Gleichungen

1.

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x - 20 &= 0 && |: 2 \\x^2 - 3x - 10 &= 0 && | \text{ Faktorisieren} \\(x + 2)(x - 5) &= 0 \\x_1 &= -2 \\x_2 &= 5\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{2+x} &= \frac{x-8}{x+8} && \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8, -2\} \\ \frac{2-x}{2+x} &= \frac{x-8}{x+8} && | \cdot (2+x) \\ 2-x &= (2+x) \frac{x-8}{x+8} && | \cdot (x+8) \\ (x+8)(2-x) &= (2+x)(x-8) \\ -x^2 - 6x + 16 &= x^2 - 6x - 16 && | +x^2 + 16 \\ 2x^2 &= 32 && |: 2 \\ x^2 &= 16 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ x &= \pm 4\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(2x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) &= 4 \\ 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x - 2 \cdot 2 &= 4 && | +4 \\ 2x^2 &= 8 && |: 2 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2 - 20} &= \frac{1}{x} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{20}, 0, \sqrt{20}\} \\
 \frac{1}{x^2 - 20} &= \frac{1}{x} & | \cdot x, \cdot (x^2 - 20) \\
 x &= x^2 - 20 & | -x \\
 x^2 - x - 20 &= 0 & | \text{Faktorisieren} \\
 (x - 5)(x + 4) &= 0 \\
 x_1 &= 5 \\
 x_2 &= -4
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 4 \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - 16 \left( x + \frac{1}{2} \right) + 15 &= 0 & | \text{Ausmultiplizieren} \\
 4 \left( x^2 + x + \frac{1}{4} \right) - 16x - 8 + 15 &= 0 \\
 4x^2 + 4x + 1 - 16x - 8 + 15 &= 0 \\
 4x^2 - 12x + 8 &= 0 & |: 4 \\
 x^2 - 3x + 2 &= 0 & | \text{Faktorisieren} \\
 (x - 1)(x - 2) &= 0 \\
 x_1 &= 1 \\
 x_2 &= 2
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 (x + 1)^2 + (x + 3)^2 &= (3x - 5)^2 & | \text{Ausmultiplizieren} \\
 x^2 + 2x + 1 + x^2 + 6x + 9 &= 9x^2 - 30x + 25 \\
 7x^2 - 38x + 15 &= 0 & | \text{a/b/c-Formel anwenden} \\
 x_{1,2} &= \frac{38 \pm \sqrt{1444 - 420}}{14} \\
 x_1 &= 5 \\
 x_2 &= \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

**Textaufgabe I** Die unbekannte Variable  $x$  ist die *Anzahl gekaufter (und damit auch verkaufter) Bücher*. Der Erlös durch den Verkauf ist somit  $12x$  und der Gewinn ist gleich

dem Kaufpreis eines Buches, d.h.  $\frac{156.80}{x}$ . Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\underbrace{12x}_{\text{Erlös}} - \underbrace{156.80}_{\text{Aufwand}} = \underbrace{\frac{156.80}{x}}_{\text{Gewinn}}$$

die wie folgt gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} 12x - 156.80 &= \frac{156.80}{x} && | \cdot x \\ 12x^2 - 156.80x &= 156.80 && | -156.80 \\ 12x^2 - 156.80x - 156.80 &= 0 && | \text{a/b/c-Formel anwenden} \\ x_{1,2} &= \frac{156.80 \pm \sqrt{(156.80)^2 + 4 \cdot 12 \cdot 156.80}}{24} \\ x_1 &= 14 \\ x_2 &= \dots (\text{Ist negativ und hat keine Relevanz}) \end{aligned}$$

Somit hat der Schüler 14 Bücher gekauft.

**Textaufgabe II** Die unbekannte Variable  $x$  ist die Anzahl Schüler:innen, welche *ursprünglich* auf den Ausflug wollten. Daraus lässt sich direkt der ursprüngliche Preis pro Schüler:in bestimmen:  $\frac{336}{x}$ . Neu gehen 3 Personen weniger auf den Ausflug, also  $(x - 3)$  und der Preis pro Schüler:in ist um Fr. 2.– höher, also  $\frac{336}{x} + 2$ . Da sich der Mietpreis des Busses nicht verändert hat, muss folgendes gelten:

$$\underbrace{(x - 3)}_{\text{Anz. Schüler neu}} \cdot \underbrace{\left(\frac{336}{x} + 2\right)}_{\text{Ticketpreis neu}} = 336$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt lösen:

$$\begin{aligned} (x - 3) \left( \frac{336}{x} + 2 \right) &= 336 && | \text{Ausmultiplizieren} \\ 336 + 2x - \frac{3 \cdot 336}{x} - 6 &= 336 && | \cdot x \\ 336x + 2x^2 - 1008 - 6x &= 336x \\ 2x^2 - 6x - 1008 &= 0 && | \text{a/b/c-Formel anwenden} \\ x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 2 \cdot 1008}}{4} \\ x_1 &= 24 \\ x_2 &= \dots (\text{Ist negativ und hat keine Relevanz}) \end{aligned}$$

Also wären ursprünglich 24 Schüler:innen beim Ausflug dabei gewesen.