Prüfung 06

Name: ______________________

Exponentialgleichungen, Lineare Gleichungssysteme 29. Juni 2022

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine Seite (A4) mit Notizen und Formeln ist erlaubt, ebenso der Taschenrechner!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate exakt angeben, d.h. $\sqrt{2}$ und nicht 1.41421.

Exponentialgleichungen (2 Punkte pro Teilaufgabe) Löse die folgenden Exponentialgleichungen. Die Lösungsvariable ist immer x, d.h. ihr müsst die Gleichungen nach x auflösen. Die Wahl der Lösungsmethode ist frei.

1. $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$
2. $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1}$
3. $4^{2x+1} = 0.25^{3x+1}$
4. $\sqrt[4]{b^{x-a}} = \sqrt[5]{b^{x+a}}$
5. $3^{2x} + 3^{x+1} = 6$

Lineare Gleichungssysteme (2 Punkte pro Teilaufgabe) Löse die folgenden Gleichungssysteme und gib die Lösungsmenge an. Die Wahl der Lösungsmethode ist frei. Die Lösungsvariablen sind jeweils x und y.

1. $\begin{cases} 3x + y = 73 \\ 2x - y = 32 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x = 2 + y \\ 6 = \dfrac{24}{3x} + \dfrac{10y}{x} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} = y + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} = y - 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{2y-8}{4} + \dfrac{x+3}{20} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{4x-y}{3} - \dfrac{3x-1}{10} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Viel Erfolg!

Lösungen

Exponentialgleichungen

1.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{5}\right)^x &= 25 \\
5^{-x} &= 5^2 && \mid \text{Exponentenvergleich} \\
-x &= 2 \\
x &= \underline{\underline{-2}}
\end{aligned}$$

2. Dies war eher eine schwierige Aufgabe! Man muss beim Freilegen der x-Terme sehr vorsichtig vorgehen und dann ist das Resultat auch nicht unbedingt schön anzuschauen...

   Ich zeige zwei Lösungen: eine erste, bei welcher der Einsatz des Logarithmus so weit wie möglich herausgezögert wird:

$$\begin{aligned}
7 \cdot 3^{1-2x} &= 4^{2x+1} \\
7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^{2x}} &= 4 \cdot 4^{2x} \\
21 \cdot \frac{1}{9^x} &= 4 \cdot 16^x && \mid \cdot 9^x \quad : 4 \\
\frac{21}{4} &= 9^x 16^x \\
\frac{21}{4} &= 144^x && \mid \ln() \\
\ln\left(\frac{21}{4}\right) &= x \ln(144) && \mid : \ln(144) \\
x &= \underline{\underline{\frac{\ln(21) - \ln(4)}{\ln(144)}}}
\end{aligned}$$

   Und eine zweite, bei der gleich zu Beginn der Logarithmus zum Einsatz kommt:

$$\begin{aligned}
7 \cdot 3^{1-2x} &= 4^{2x+1} && \mid \ln() \\
\ln(7) + (1-2x)\ln(3) &= (2x+1)\ln(4) && \mid \text{Ausrechnen} \\
\ln(7) + \ln(3) - 2x\ln(3) &= 2x\ln(4) + \ln(4) && \mid +2x\ln(3) \quad -\ln(4) \\
2x\ln(4) + 2x\ln(3) &= \ln(7) + \ln(3) - \ln(4) \\
x \cdot 2(\ln(4) + \ln(3)) &= \ln(7) + \ln(3) - \ln(4) && \mid : 2(\ln(4) + \ln(3)) \\
x &= \frac{\ln(7) + \ln(3) - \ln(4)}{2(\ln(4) + \ln(3))}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
4^{2x+1} &= 0.25^{3x+1} \\
4^{2x+1} &= 4^{-(3x+1)} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\
2x+1 &= -3x-1 && \mid \; +3x \;\; -1 \\
5x &= -2 && \mid \; :5 \\
x &= \underline{\underline{-\frac{2}{5}}}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{b^{x-a}} &= \sqrt[5]{b^{x+a}} && \mid \text{Wurzel als Potenzen umschreiben} \\
b^{\frac{x-a}{4}} &= b^{\frac{x+a}{5}} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\
\frac{x-a}{4} &= \frac{x+a}{5} && \mid \; \cdot 4 \;\; \cdot 5 \\
5x-5a &= 4x+4a && \mid \; -4x \;\; +5a \\
x &= \underline{\underline{9a}}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
3^{2x} + 3^{x+1} &= 6 \\
(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x &= 6 && \mid \text{Substitution: } u = 3^x \\
u^2 + 3u - 6 &= 0 && \mid \text{Quadr. Gleichung!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6} \\
&= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+24}{4}} \\
&= -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}
\end{aligned}$$

Beachte: u_1 wird positiv sein, hingegen u_2 negativ. In der Substitution haben wir aber festgelegt, dass $u = 3^x$ ist. Da 3^x *niemals* negativ sein kann, können wir die 2. Lösung (also u_2) ignorieren.

$$\begin{aligned}
3^x &= u && \mid \text{Rücksubstitution} \\
3^x &= \frac{\sqrt{33}-3}{2} && \mid \; \log_3() \\
x &= \underline{\underline{\log_3(\sqrt{33}-3) - \log_3(2)}}
\end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

1.

$$\begin{cases} 3x + y = 73 \\ 2x - y = 32 \end{cases} \qquad | \text{ Addieren der beiden Gleichungen}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 105 && | \ :5 \\ x &= \underline{\underline{21}} && | \text{ Lösung in 1. Gl. einsetzen} \\ 63 + y &= 73 && | \ -63 \\ y &= \underline{\underline{10}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(21, 10)\}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ 6x + 7y &= 3 \end{cases} \qquad | \text{ 1. Gl.: } \cdot(-3)$$

$$\begin{cases} -6x - 15y &= -3 \\ 6x + 7y &= 3 \end{cases} \qquad | \text{ Gl. addieren}$$

$$\begin{aligned} -8y &= 0 && | \ :(-8) \\ y &= \underline{\underline{0}} && | \text{ Lösung in 1. Gl. einsetzen} \\ 2x &= 1 && | \ :2 \\ x &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

3.

$$\begin{cases} 3x = 2 + y \\ 6 = \dfrac{24}{3x} + \dfrac{10y}{x} \end{cases} \qquad \text{| 2. Gl. mit } x \text{ multiplizieren}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x = 8 + 10y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 10y = 8 \end{cases} \qquad \text{| 1. Gl. mit } -2 \text{ multiplizieren}$$

$$\begin{cases} -6x + 2y = -4 \\ 6x - 10y = 8 \end{cases} \qquad \text{| Gl. addieren}$$

$$\begin{aligned} -8y &= 4 && \text{| } :(-8) \\ y &= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} && \text{| Lösung in 2. Gl. einsetzen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 5 &= 8 && \text{| } -5 \\ 6x &= 3 && \text{| } :6 \\ x &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

4.

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} = y + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} = y - 1 \end{cases} \qquad \text{| 1. Gl. mit 2, 2. Gl mit } (-3) \text{ multiplizieren}$$

$$\begin{cases} x + 4 = 2y + 2 \\ -x - 2 = -3y + 3 \end{cases} \qquad \text{| Gl. addieren}$$

$$\begin{aligned} 2 &= -y + 5 && \text{| } +y \ -2 \\ y &= \underline{\underline{3}} && \text{| Resultat in 1. Gleichung einsetzen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= 6 + 2 && \text{| } -4 \\ x &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(4, 3)\}$$

5.

$$\begin{cases} \dfrac{2y-8}{4} + \dfrac{x+3}{20} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{4x-y}{3} - \dfrac{3x-1}{10} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \mid \text{1. Gl. mit 20, 2. Gl. mit 30 multiplizieren}$$

$$\begin{cases} 10y - 40 + x + 3 = 15 \\ 40x - 10y - 9x + 3 = 15 \end{cases} \qquad \mid \text{Gl. addieren}$$

$$\begin{aligned} 32x - 34 &= 30 && \mid \ +34 \ \ :32 \\ x &= \underline{\underline{2}} && \mid \text{Resultat in 1. Gl. einsetzen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10y - 40 + 2 + 3 &= 15 && \mid \ +35 \ \ :10 \\ y &= \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(2, 5)\}$$