Prüfung 14

Name: ______________________

Differenzialrechnung

16. August 2023

- Für die Prüfung habt ihr 90 Minuten Zeit.
- *Bitte alleine arbeiten, d.h. keine Kommunikationsmittel benutzen!*
- Eine persönliche, selbst geschriebene Formelsammlung ist erlaubt, ebenso ein Taschenrechner ohne CAS-Funktion!
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein, sonst gibts keine Punkte.
- Resultate wenn möglich exakt angeben, $\sqrt{2}$ ist 1.41421 vorzuziehen.

Erster Teil (30 min) – *ohne* technische Hilfsmittel

Die Lösungen dieses Teils sind nach 30 min abzugeben. Für die maximale Anzahl Punkte sind 10 Aufgaben korrekt zu lösen.

Ableitungen (1 Punkt pro Teilaufgabe) Bestimme $f'(x)$ der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = x^2 - x^3$
2. $f(x) = \sqrt{3x}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = (2x^3 + 1)^2$
5. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$
6. $f(x) = (3 - 4x + x^3)^4$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$
10. $f(x) = \cos(x^3)$
11. $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$
12. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$

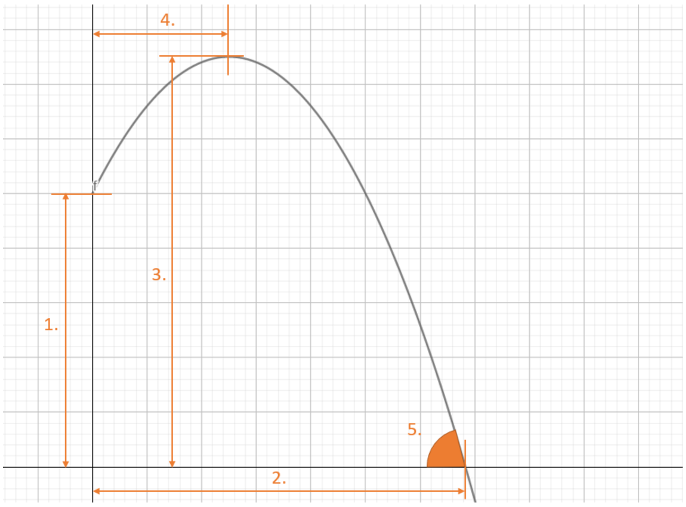
Zweiter Teil (60 min) – *mit* technischen Hilfsmittel

Von den 3 folgenden Aufgaben sind zwei auszuwählen und vollständig zu lösen. Jede Teilaufgabe gibt 5 Punkte.

Flugbahn Die Flugbahn eines Balles (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) erfülle die folgende Funktionsgleichung, wobei x die horizontale Distanz vom Abschlagpunkt und y die Flughöhe über dem Boden sei:

$$y = -2x^2 + 2x + 1 \qquad x \geq 0$$

Skizze:

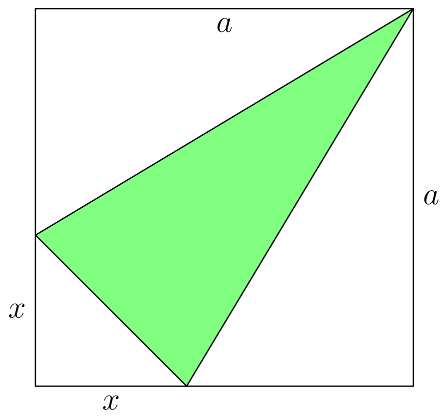


Bestimme:

1. Höhe des Abschlagpunktes über dem Boden
2. Horizontale Weite des Wurfes
3. Maximale Höhe des Wurfes über dem Boden
4. Horizontaler Abstand der maximalen Höhe vom Abschlagpunkt
5. Winkel (in Grad), unter dem der Ball auf den Boden trifft

Alle Angaben sind in Meter (m).

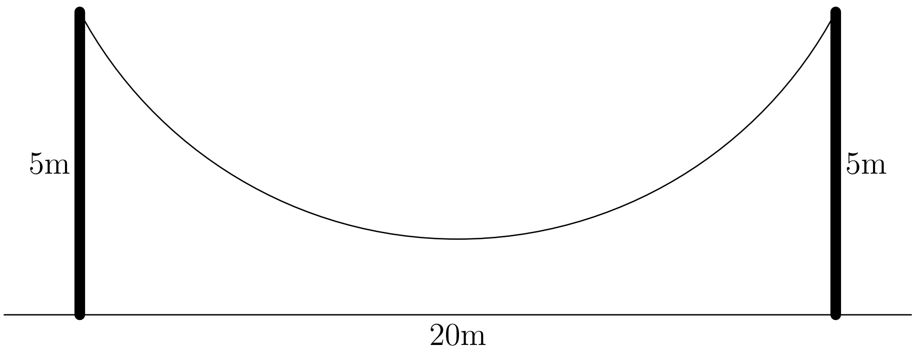
Maximale Fläche Für welche Strecke x wird der Inhalt der grün gefärbten Dreiecksfläche maximal?



Gespanntes Seil Zwei Masten mit einer Höhe von je 5 m sind in einem Abstand von 20 m aufgestellt. Ein Seil wird von der Spitze des einen Mastens zur Spitze des zweiten Mastens gespannt. Der Verlauf des Seils entspreche einer quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Am tiefsten Punkt habe das Seil einen Abstand von 1 m zum Boden. In welchem Winkel ist das Seil an den Mastspitzen zu befestigen?



Viel Erfolg!

Lösungen

Erster Teil

Ableitungen

1. $f'(x) = 2x - 3x^2$
2. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$
3. $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
4. $f'(x) = 2(2x^3 + 1) \cdot 6x^2$
5. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}} + 2x + \sqrt{x}}$
6. $f'(x) = 4(3 - 4x + x^3)^3 \cdot (-4 + 3x^2)$
7. $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$
8. $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4}$
9. $f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$
10. $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$
11. $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$
12. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(x^2) + \sqrt{x} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Zweiter Teil

Flugbahn

1. Beim Abschlag gilt: $x = 0$ eingesetzt in die Fkt.gleichung ergibt das $y = 1$

   Der Abschlagpunkt befindet sich also 1 m über dem Boden.

2. Dort wo der Ball den Bodem berührt gilt: $y = 0$. Wir suchen also die Lösungen folgender quadratischen Gleichung: $-2x^2 + 2x + 1 = 0$ und insbesondere sind wir nur an der positiven Lösung interessiert (da $x \geq 0$).

   Verwendung der quadratische Ergänzung oder der abc-Formel ergibt: $x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

3. Für diese und die nächste Aufgabe benötigen wir die Ableitung der Funktion, also:

$$f'(x) = -4x + 2$$

Beim Punkt der maximalen Höhe gilt: $f'(x) = 0$, also $-4x + 2 = 0$ und somit ist $x = \frac{1}{2}$ (Antwort auf Frage 4).

Für die Höhe an dieser Stelle setzen wir den gefundenen Wert für x in die Funktionsgleichung für f ein und erhalten:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

oder 1.5 m (Antwort auf Frage 3).

4. Für diese Frage setzen wir den bei Frage 2 gefundenen Wert in die Ableitungsfunktion ein, also:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) &= -4 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2 \\ &= -2(1+\sqrt{3}) + 2 \\ &= -2\sqrt{3} \\ &\approx -3.464 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Tangens des gesuchten Winkels, d.h. der Winkel ist ungefähr 73.898.

Maximale Fläche

1. Für die grüne Fläche findet man nach ein paar Überlegungen folgende Funktion, welche die Fläche in Abhängigkeit zu x angibt:

$$\begin{aligned} A(x) &= a^2 - a(a-x) - \frac{x^2}{2} \\ &= a^2 - a^2 + ax - \frac{x^2}{2} \\ &= ax - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

wobei $x \in [0, a]$

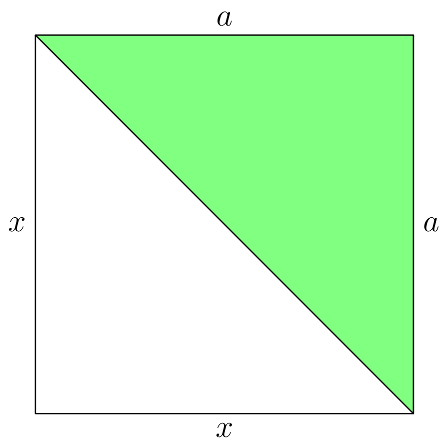
2. Für die Bestimmung des Maximums leitet man diese Formel nach x ab:

$$A'(x) = a - x$$

und bestimmt die Nullstelle:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 0 &= a - x \\ x &= a \end{aligned}$$

Die maximale Fläche ergibt sich also, wenn das Dreieck wie folgt gebildet wird:



Gespanntes Seil Als erstes müssen wir eine konkrete Funktion finden, welche den Verlauf des Seils beschreibt. Dazu legen wir die Abbildung in Gedanken auf ein Koordinatensystem, welches den Ursprung am Boden unter der tiefsten Stelle des Seils hat. Diese Wahl ist willkürlich – auch ein anderer Ansatz (mit dem Ursprung am Fuss eines der beiden Masten) ist vorstellbar.

Nun stellen wir drei Gleichungen auf, um die Unbekannten a, b und c in der Funktionsgleichung zu bestimmen:

$$\begin{cases} a \cdot (-10)^2 + b \cdot (-10) + c = 5 \\ a \cdot 0 + \quad b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot (10)^2 + \quad b \cdot (10) + c = 5 \end{cases}$$

Aus der mittleren Gleichung folgt unmittelbar $c = 1$ und für die andere beiden Parameter finden wir $a = 1/25$ und $b = 0$. Die Funktion für das Seil lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{25}x^2 + 1$$

Und Ableitung davon

$$f'(x) = \frac{2}{25}x$$

Die Steigungen an den beiden Mastspitzen ergibt sich, wenn wir in die Ableitungsfunktion die x-Koordinate der Masten eingeben:

$$f'(-10) = -\frac{20}{25} \qquad f'(10) = \frac{20}{25}$$

Da die Steigung der $\tan()$ des dazugehörenden Winkels ist, erhalen wir für die beiden Winkel -38.66, resp 38.66 Grad. Diese Winkel sind jeweils zur Horizontalen zu verstehen.