UNIVERSITATEA DIN BUCURESTI
FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA

Algebra octavelor lui Cayley

REFERAT GEOMETRIE

Niculae P. Ștefan
Grupa 131

București
2013, An 1 Semestru II

Cuprins

Introducere

Algebra Cayley este algebra octonionilor cu coeficienți reali. În următoarele capitole vom vedea atât informații tehnice cât și istorice.

Vom vedea construcția și definiția octonionilor, relațile cu alte sisteme numerice și proprietățile acestora.
Vom vedea și de ce se numesc numere Cayley, care este povestea descoperirii lor dar și aplicații concrete, exemplificând cu rotațiile din geometrie.

Istorie

Algebra Cayley sau algebra octonionilor ($\mathbb{O}$) este cea mai mare din cele 4 algebre normate[1], celelalte fiind numerele Reale($\mathbb{R}$), numerele Complexe ($\mathbb{C}$) și Cuaternionii ($\mathbb{H}$).

Octonionii au fost decoperiți in anul 1843 de către John T. Graves, fiind inspirat de marea descperire a cuaternionilor de către prietenul său William Hamilton. Graves i-a numit *octave*.

Ei au fost descoperiți, în mod independent, de Arthur Cayley fiind cunoscuți și ca Numere Cayley sau Algebra Cayley.

[1] Algebra A peste un corp se numește normată $<=>$ $\forall\, x, y \in A$ $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$

Definiție

Algebra Cayley este definită de octonioni. Aceștia pot fi considerați octeți de numere reale. Fiecare octonion fiind o combinație liniară a octonionilor unitate: $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, unde e_0 este elementul scalar sau real, care poate fi indentificat cu numărul real 1. Astfel fiecare octonion $x \in \mathbb{O}$ poate fi scris sub forma:

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 + x_7e_8$$

cu $x_i \in \mathbb{R}$.

Adunarea (și scăderea) octonionilor se face prin adunarea coeficienților termenilor corespunzători, ca și în cazul cuaternionilor.
Înmultirea este mai complexă. Este distributivă[2] față de adunare și produsul fiecărui termen se obține prin înmulțirea coeficienților și cu ajutorul tablei înmulțirii octonionului unitate:

×	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	$-e_0$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	$-e_0$	e_6	e_2	$-e_4$	$-e_5$
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-e_0$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-e_0$	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-e_0$

Tabelul formează o matrice aproape antisimetrică, exceptând elementele de pe diagonala principală, rândul și coloana pentru care e_0 este un operand.

[2] $x(y + z) = xy + xz$ și $(y + z)x = yx + zx$

Tabelul poate fi rezumat prin următoarele relații:

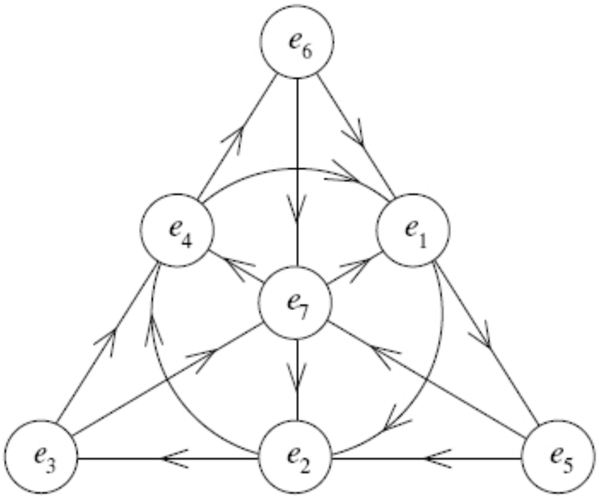
$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k$$

unde ε_{ijk} este un tensor complet antisimetric cu valoarea +1 atunci când ijk = 123, 145, 176, 246, 257, 347, 365 și

$$e_i e_0 = e_0 e_i = e_i;\ e_0 e_0 = e_0$$

cu e_0 elementul scalar si $i, j, k = \overline{1,7}$.

Mai ușor de ținut minte tabelul este cu acest mnemonic:



Unde fiecare linie este definită de un triplet e_i, e_j, e_k cu semnificația că $e_i e_j = e_k$ în direcția indicată și $e_i e_j = -e_k$ în direcția inversă. Mai trebuie reținut că e_0 este identitatea multiplicativă și că $e_1, \dots, e_7$ sunt rădăcinile pătrate ale lui -1.

Construcție

Vom nota $e_0 = 1$.
Din tabla înmulțirii observăm

- $e_1, \dots, e_7$ sunt rădăcinile pătrate ale lui -1.
- e_i *și* e_i sunt anticomutative când $e_i \neq e_j$, adică $e_i e_j = -e_j e_i$
- considerând indicii în $\mathbb{Z}_7$, ei ciclează astfel: $e_i e_j = e_k \rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$
- dublarea indicelui păstrează identitatea: $e_i e_j = e_k \rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$

Un mod mai sistematic de definire a octonionilor este prin intermediul Construcției Cayley-Dickson.
La fel cum numerele complexe pot fi definite de perechi de numere reale și cuaternionii pot fi definiți ca perechi de numere complexe, așa și octonionii pot fi definiți ca perechi de cuaternioni. Astfel, produsul a două perechi de cuaternioni (a, b)*și* (c, d) este definit prin

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$$

unde $\bar{z}$ denotă conjugarea cuaternionului[3] z. Această definiție este echivalentă cu cea mai de sus, atunci când cei opt octonioni unitari sunt identici cu perechile

$$(1,0), (i, 0), (j, 0), (k, 0), (0,1), (0, i), (0, j), (0, k)$$

[3] Conjugata cuaternionului $q = a + bi + cj + dk$ este $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Proprietăți

$\mathbb{O}$ este un spațiu vectorial de dimensiune 8, satisfăcând toate axiomele aferente.

Conjugatul unui octonion

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 + x_7 e_8$$

este

$$\bar{x} = x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_4 e_4 - x_5 e_5 - x_6 e_6 - x_7 e_7 - x_7 e_8$$

Conjugarea este o involuție[4] a lui $\mathbb{O}$ și satisface $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$.
Partea reală a lui x este dată de $\frac{x+\bar{x}}{2} = x_0 e_0$.
Partea imaginară de $\frac{x-\bar{x}}{2} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 + x_7 e_8$
Mulțimea octonionilor pur imaginari, notată $Im(\mathbb{O})$ generează un subspațiu de dimensiune 7 al lui $\mathbb{O}$.

Produsul unui octonion cu conjugatul său, $x\bar{x} = \bar{x}x$, este mereu un număr real pozitiv sau nul:

$$x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2$$

Folosindu-ne de aceasta, norma unui octonion poate fi definită ca

$$\| x \| = \sqrt{x\bar{x}}$$

aceasta fiind una standard euclidiană peste $\mathbb{R}^8$.

Existența normei peste $\mathbb{O}$ implică existența unui invers pentru fiecare element nenul al lui $\mathbb{O}$. Inversul lui $x \neq 0_{\mathbb{O}}$ este dat de identitatea

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\| x \|^2}$$

care satisface $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

[4] f este involuție <=> $f^{-1} = f$, adică aplicată de doua ori ne readuce la elementul inițial

Înmulțirea octonilor nu este nici comutativă, $e_i e_j = -e_j e_i \neq e_j e_i\ \forall i \neq j$, și $i, j \neq 0$ nici asociativă $(e_i e_j) e_k = -e_i(e_j e_k) \neq e_i(e_j e_k)$ pentru i, j, k distincte nenule sau $e_i e_j \neq \pm e_k$. Satisface o formă mai slabă asociativitate, este alternativă:

$$x(xy) = (xx)y\ , (yx)x = y(xx)$$

Din cauza neasociativității, octonionii nu au o reprezentare matriceală, precum cuaterinonii.
Octonionii păstrează însă proprietatea normei $\| xy \| = \| x \| \| y \|$, astfel $\mathbb{O}$ devine o algebră normată neasociativă. Este chiar cea mai mare dintre cele existente, nicio algebră de dimensiune mai mare definitie prin construcția Cayley-Dickson (de exemplu Sedenionii, algebra 16 dimensională peste corpul numerelor Reale) nu satisface această proprietate. Toate au divizori ai lui zero[5].

Subalgebra generată de oricare două elemente din $\mathbb{O}$ este izomorfă cu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, sau\ \mathbb{H}$.

Demonstrație:

Teorema lui Artin:

Fie A = (A_R, $*$) o algebră peste inelul R.

A este alternativă ↔ subalgebra generată de $\{x, y\}$ este asociativă
$\forall\ x, y \in\ A_R$.

Teorema lui Frobenius:

Fie A o algebră peste $\mathbb{R}$ fără divizori ai lui zero.

A este izomorfă cu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, sau\ \mathbb{H}$.

$\mathbb{O}$ este alternativă $\xrightarrow{Artin}$ > subalgebra A generată de oricare două elemente din $\mathbb{O}$ este asociativă.
A este asociativă $\xrightarrow{Frobenius}$ > A este izomorfă cu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, sau\ \mathbb{H}$.

Putem demonstra asta și intuitiv: Alegem două elemente din $\mathbb{O}$.
Fără a diminua generalitatea, presupunem că sunt elemente ale bazei $\{1, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5, \mathrm{e}_6, \mathrm{e}_7\}$.
Deci ne uităm la algebra generată de $\{e_i, e_j\}\ cu\ 0 \leq i \leq j \leq 7$.

---

[5] a este divizor al lui zero <=> $\exists x \neq 0\ a.î.\ ax = 0$

Rămâne să identificăm posibilele tipuri de perechi *(i, j):*

- $i = j = 0$
- $i = 0,\ j \neq 0$
- $i = j \neq 0$
- $i \neq j \neq 0, adic$ă $1 \leq i < j \leq 7$

În cazul *I* este vorba de $\{e_0, e_0\} = \{1, 1\}$, adică elementul real de două ori care nu poate genera altceva decât pe $\mathbb{R}$.

În cazul *II* este vorba de $\{e_0, e_i\} = \{1, e_i\}$. Cum $e_i^2 = -1\ \forall i = \overline{1,7}$, observăm imediat că aceste două elemente generează o submulțime izomorfă cu $\mathbb{C}$.

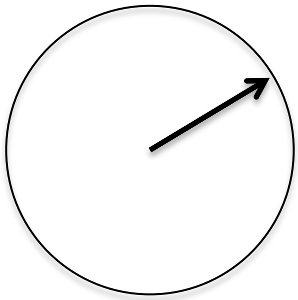
În cazul *III* alegem același element nereal de două ori, $\{e_i, e_i\}$. Cum $e_i^2 = -1$ înseamnă că $e_i^4 = 1$ deci ajungem din nou în cazul *II*, izomorfism cu $\mathbb{C}$.

În cazul *IV* alegem două elemente diferite, ambele nereale $\{e_i, e_j\}$. Știm că $e_i e_j = e_k$ *și* $e_j e_i = -e_k$ dar și că $e_k e_j = e_i\ \forall\ i, j, k = \overline{1,7}$ (se poate observa ușor de pe mnemonicul de mai sus, unde *i, j și k* reprezintă nodurile celor trei laturi ale triunghiului, cercului din centru și respectiv celor trei mediane).
Astfel din orice două elemente nereale îl scoatem pe un al treilea. Ca și în cazul *III*, elementul real este și el prezent.
Acum este ușor de văzut că $e_i e_j e_k = e_k e_k = -1$, ceea ce împreună cu $e_i^2 = e_j^2 = e_k^2 = -1$ formează exact propretatea de bază a cuaternionilor. Deci subalgebra generată este izomorfă cu $\mathbb{H}$.

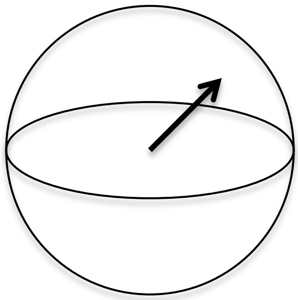
În plus, două elemente din $\mathbb{O}$ nu îl pot genera pe $\mathbb{O}$ deoarece algebra $\mathbb{O}$ nu este asociativă și acest lucru contrazice Teorema lui Artin.

Aplicații

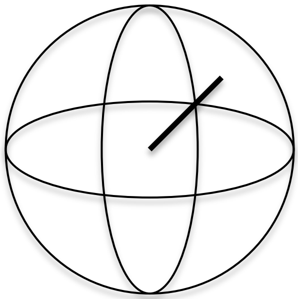
Pentru a înțelege mai bine octonionii este necesar să înțelegem intuitiv dar mai ales conceptual structurile predecesoare, anume numerele reale, complexe și cuaternionii.
Pentru a le înțelege intuitiv ne vom ajuta de niște aplicații concrete ale acestora.
Pentru a înțelege conceptul vom apela la imagini sugestive și imaginația cititorului.



Rotații pe o axă



Rotații pe doua axe

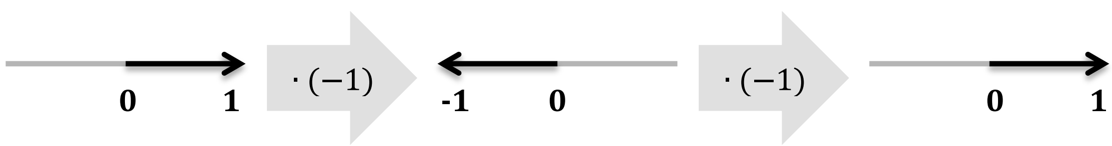


Rotații pe trei axe

Numere reale

Numerele reale au fost folosite pentru a rezolva ecuații pătratice, de forma $ax^2 + bx + c$ însă prin jurul secolului XV, matematicienii au dat de o problemă: uneori, rădăcinile aveau valori negative. Mult timp au fost ignorate aceste rezultate până când Hamilton[6], la vârsta de 30 de ani a observat un lucru foarte interesant. Dacă păstrăm aceste valori negative, nu ne atingem de ele, iar la momentul folosirii le ridicăm la pătrat, rezultatul va fi cel corect. Numai că nu avea un mod de a reprezenta acest fapt. Așa că a scris aceste numere ca $x + y\sqrt{-1}$ unde x *și* y erau numere reale deja bine cunoscute.
Mai apoi a observat că aceste numere pot fi transpuse în plan și ele reprezintă chiar sistemul de coordonate.

Acum să ne întoarcem la aplicația practică: Hamilton a observat că operația de înmulțire aplicată unui număr real reprezentat în plan nu face altceva decât să depărteze numărul de *zero,* fie spre dreapta în cazul numerelor pozitive, fie spre stânga în cazul celor negative. Însă mai important, la înmulțirea cu *-1*, numerele se întorc în direcția cealaltă.

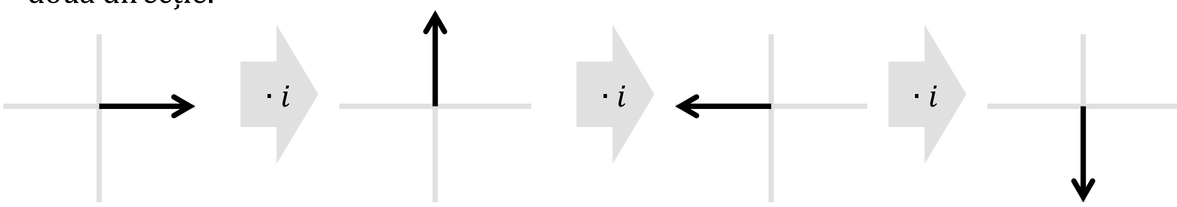


Răsucirea numerelor la înmulțirea cu -1

[6] William Rowan Hamilton (1805–1865), matematician irlandez

Numere complexe

Înmulțirea numerelor reale a fost mult timp studiată, partea interesantă apare la înmulțirea cu aceste noi numere, înmulțirea cu $\sqrt{-1}$. Se dovedește că numerele complexe, la fel cum aduc și planului o nouă dimensiune, așa aduc și rotației o a doua direcție.



Răsucirea numerelor la înmulțirea cu -1

Motivul pentru care acestea modelează o rotație este unul foarte natural: dacă luam un obiect și îi aplicăm un sfert de răsucire apoi încă un sfert în aceeași direcție vom ajunge cu obiectul în direcție exeact opusă celei inițiale. Astfel am spart procesul de rotire în două mai mici, iar pentru a face asta nu ne sunt suficiente numerele reale, avem nevoie de o nouă dimensiune.

După descoperirea numerelor complexe s-a pus problema operațiilor cu ele. Adunarea nu aduce mari probleme: prima componentă se adună cu prima și a doua – cu a doua. Înmulțirea însă este mai problematică. Sigur că am putea născoci o regulă nouă pentru două numere complexe și să o numim înmulțire. De ce nu chiar înmulțirea fiecărei componente cu cea corespunzătoare? Legea

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ab + cdi$$

pare destul de bună. Este comutativă, este asociativă și urmează exemplul dat de adunare.

Asta a încercat și Hamilton să facă însă foarte rapid s-a lovit de o problemă: împărțirea. Dacă încercăm să aplicăm această ”înmulțire” naivă, odată ce am obținut produsul, utilizând unul dintre factori, nu îl mai putem obține pe celălalt. Pe lângă aceasta, la împărțirea numerelor reale, singurul număr nepermis este *zero*. Cu această metodă de ”înmulțire” o infinitate de numere nu ar fi permise; atât toate numerele care au *zero* ori pe prima ori pe a doua componentă.

Și asta este ceea ce a căutat Hamilton: o lege care permite împărțirea și mai mult, permite împărțirea în așa fel încât unul dintre numere să poată fi nul. Și a găsit-o:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bd)i$$

Cuaternioni

Hamilton nu a fost însă mulțumit cu această descoperire și a încercat să meargă mai departe. Îndată ce a reușit să înmulțească perechi de numere, a trecut la căutarea unei legi de înmulțire a doi tripleți. Această căutare i-a răpit mult timp din viață, așa cum scrie într-o scrisoare către fiul său: *În fiecare dimineață, la coborârea mea la micul dejun, tu și fratele mai mic William Edwin, obișnuiați a mă întreba: "Ei bine, tata, poți multiplica tripleti?" Nu aveam încotro, eram mereu obligat să răspund, cu o clătinare tristă a capului: "Nu, pot doar a le aduna și a le scădea."*
În 16 octombrie 1843, când se plimba cu soția sa de-a lungul Canalului Roial din Dublin a avut o scânteie de genialitate: și-a dat seama că poate înmulți liste de câte patru numere. Și chiar atunci, într-un faimos act de vandalism matematic, a sculptat în peretele Podului Broom, de peste Canal formula:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Chiar și în ziua de azi în acest loc se află o placă cu această inscripție.

Această lege descoperită avea un defect, necomutativitatea. Se dovedește însă a fi o proprietate fundamentală în schimb, nu un defect. Putem vedea de ce imaginându-ne o carte așezată pe o masă, în poziție culcată cu coperta din față în sus, căreia îi aplicăm următorii pași:

1. Întoarcem cartea cu cealaltă copertă în sus, răsucind-o 180°,
2. Ridicăm cartea 90° spre stângă, așezată vertical pe cotor.

Aplicând pașii în ordine inversă (pornind tot din poziția inițială):

1. Ridicăm cartea 90° spre stângă, așezată acum pe cotor,
2. Întoarcem cartea, răsucind-o 180°, fiind acum așezată cu cotorul în sus.

Se observă imediat că cele doua două poziții sunt diferite. Așadar putem folosii cuaternionii ca un bun model pentru rotații în trei dimensiuni.

Necomutativitatea rotirii în 3D

Octonioni

Printre matematicienii timpului se număra și John Graves, bun prieten al lui Hamilton. Graves a fost cel care i-a stârnit interesul lui Hamilton de la bun început în căutarea acestor noi algebre, el a fost cel care i-a sugerat că numerele complexe pot fi văzute ca perechi de numere obijnuite.
Când Hamilton i-a povestit lui Graves despre cuaternioni, acesta a venit imediat cu întrebarea *Dacă ai reușit să înmulțești liste de patru numere, de ce nu de mai multe*? În 1843, chiar în ziua Crăciunului Hamilton a primit de la Graves o scrisoare dându-i de veste că a reușit să creeze un sistem de numere pe care noi azi îi numim octonioni, anume liste de 8 numere. Hamilton i-a răspuns, scriindu-i *Numai pentru că este mai mare, nu înseamnă că este mai bun! Eu am un cal cu patru picioare, nu știu dacă al tău cu opt picioare va alerga de două ori mai repede.*
Hamilton a și găsit un ”defect” al octonionilor: neasociativitatea la înmulțire. Odată cu cuaternionii pierdem comutativitatea, acum pierdem si asociativitatea. Însă la fel ca și la cuaternioni, acest ”defect” se dovedește a fi o proprietate importantă fără de care octonionii nu ar mai putea fi folosiți în studiul teoriei corzilor sau a logicii cuantice.

Algebra octonionilor peste corpul Numerelor Reale este cunoscută însă ca Algebra Cayley și nu Algebra Graves. Asta pentru că pe vremea aceea pentru a publica o lucrare matematică era necesar ca un membru al societății matematice să fi prezentat în prealabil ideea în fața membrilor societății. Hamilton i-a promis lui Graves că va vorbi despre octonioni la una din întâlnirile Academiei Roiale Irlandeze, însă fiind atât de încântat de cuaternioni, a tot amânat.
Câțiva ani mai târziu, în 1845 Arthur Cayley a și a publicat o lucrare despre aceștia înainte ca Graves să primească vreun merit. După aceasta Hamilton a vorbit despre octonioni spunând că Graves i-a descoperit primul însă ei au rămas cunoscuți ca numere Cayley.

Concluzie

Am arătat cu putem construi numerele complexe ca perechi de numere naturale, cuaternionii ca perechi de numere complexe și octonionii ca perechi de cuaternioni. Se poate merge și mai departe, la algebre 16 dimensionale, însă proprietățile importante se pierd și acestea nu mai au aplicații atât de evidente în geometrie sau probleme concrete și cu siguranță nu în rotații.

Dacă numerele naturale sunt cel mai ușor de înțeles intuitiv iar numerele reale sunt numai la un pas distanță, fără ajutorul unei reprezentări în plan, numerele complexe ar fi destul de greu de imaginat. Cuaternionii, având nevoie de o a patra dimensiune ne sunt deja foarte greu de înțeles la nivel de concept iar octonionii având opt dimensiuni cu atât mai complecsi. Așadar este destul de greu să dăm exemple concrete ale utilității acestora fără o înțelegere aprofundată a domeniului de aplicabilitate.

Octonionii sunt însă un sistem de numere foarte interesant care generează o importantă algebră, Algebra Cayley.

Bibliografie

1. Hazewinkel, Michiel, 2001, „Cayley numbers”, Encyclopaedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers
2. Conway, John Horton; 2000, On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, A. K. Peters, Ltd
3. math.ucr.edu/home/baez/octonions/octonions.html
4. en.wikipedia.org/wiki/Octonion
5. plus.maths.org/content/os/issue32/features/baez/index
6. math.stackexchange.com/questions/2189/what-are-some-real-world-uses-of-octonions