**NOU**

**3000** DE PROBLEME PENTRU APROFUNDAREA ȘI CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR

# CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

## pentru clasa a 7-a

Ioana Monalisa MANEA

IOANA MONALISA MANEA

# CULEGERE DE PROBLEME

**PENTRU CLASA a VII-a**

**EDIȚIA XVIII**

**revizuită și adăugită în conformitate cu programa școlară pentru clasa a VII-a**

EDITURA ED.AS.UNICUM
BUCUREȘTI

Senior redactor : Mihaela Merylu Zamfirache

**Lucrarea este avizată cu numărul 74896 / 2002 în cadrul Comisiei Naționale de Matematică pentru a fi utilizată în clasă și la pregătirea suplimentară a elevilor**

**Referent științific : prof. Elena Matrosenco**

**Referent științific : prof. Marius Modoiu**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**MANEA, IOANA MONALISA**
**Culegere de probleme de matematică pentru clasa a VII-a /**
Manea Ioana Monalisa. - Ed. a 18-a rev. - București :
ED.AS.UNICUM, 2013
ISBN 978-606-93132-3-7
51(075.33)(076)

## CUPRINS





**Pentru informații și comenzi telefon 021.320.96.86.; 0722.438.539**

**Tiparul executat la S.C. MEDIAPRINT S.R.L.**

## Cuvântul autorilor

Călăuziți de principiul „Educația nu se face prin umilire", am încercat să elaborăm o culegere de probleme de matematică care să fie pe înțelesul vostru, al elevilor din clasele V-VIII, cu fraze scurte, clare și concise, desprinse din realitatea cotidiană. În acest mod cartea devine accesibilă și prietenoasă, motivantă și atrăgătoare, optimistă și folositoare. Dorim să vedem din partea ta cum gândești soluția rezolvării problemei.

Cele **3000** de subiecte din carte sunt structurate pe trei nuveluri de complexitate progresivă și sunt prezentate într-un singur volum pentru ambele semestre. Nu am neglijat nici problemele de perspicacitate și logică atât de dragi ție. Le vei găsi la sfârșitul lecției și au fost create pentru a vă relaxa. Sunt prevăzute în capitole separate atât probleme de lucrări semestriale dar și pentru pregătirea concursurilor școlare.

Fiecare capitol începe cu un sumar de **noțiuni teoretice** și se încheie cu **teste recapitulative**.

Ne-am străduit să-ți motivăm așteptările, stimulându-ți curiozitatea, pentru ca în final să ai satisfacția învingătorului.

Noi, autorii, dorim să venim în întâmpinarea ta, alăturându-ne efortului depus de către profesorul tău și să te ajutăm, ca buni prieteni, să urci treptele cunoașterii matematicii. Curaj! Nu ești singur și nu uita că „Dacă vrei poți!".

La acest nou început de an școlar îți urăm : „Mult succes!".

# *Capitolul I*
# TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

## Testul 1
### Partea I
1). Rezolvați : $(-4)^2 - 7 \cdot (-2) =$ .....

2). Dacă $1 - 2x = -3$ atunci x este : a). $-1$ b). 1 c). $-2$ d). 2

3). Dacă într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei are 2,8 cm atunci ipotenuza are ..... cm.

4). Dacă 20% din x este 2,3 atunci x = .....

5). Pe o hartă cu scara de 1 : 50000, distanța dintre două sate are 18 cm. Cât este distanța reală dintre sate ?

6). Dacă probabilitatea de a extrage un loz câștigător dintr-o cutie cu 150 lozuri este de $\frac{2}{25}$, atunci numărul lozurilor necâștigătoare este .....

7). Un triunghi isoscel cu un unghi de $150^0$ are celelalte unghiuri egale cu .....

8). Două unghiuri alterne interne sunt .....

9). [24; 28] = .....

### Partea a II-a
10). Raportul a două numere este $\frac{5}{7}$ și diferența dintre triplul primului și jumătate din al doilea este 46. Aflați numerele.

11). Aflați măsura unui unghi dacă complementul și suplementul lui sunt invers proporționale cu 7 și 2.

12). Un număr de bomboane se împarte în mod egal unor copii. Dacă se împarte la 8 copii rămân 7 bomboane, dacă se împarte la 6 copii rămân 5 bomboane. a). Verificați dacă pot fi 47 de bomboane. b). Găsiți cel mai mic număr de bomboane care îndeplinește condițiile.

13). Demonstrați că : $(2^{n+1} \cdot 5^n + 1) \vdots 3$.

14). Într-un $\triangle ABC$, dreptunghic în B, cu $m(\sphericalangle C) = 30^0$, se duce bisectoarea exterioară AD a unghiului $\sphericalangle A$, $D \in BC$, și paralela $BE \| AD$, $E \in (AC)$. Demonstrați că BE este mediană în $\triangle ABC$.

## Testul 2
### Partea I
1). C.m.m.d.c. pentru 216 și 144 este .....

2). Numărul divizorilor naturali ai numărului 36 este .....

3). Suplementul lui $17^0 14' 3''$ este .....

4). Unghiurile unui triunghi sunt direct proportionale cu 1; 6; 11. Cel mai mic unghi are .....

5). Dacă $\frac{x+3}{2x-1} = 1$ atunci x = .....

6). Un triunghi isoscel cu un unghi de $60^0$ este .....

7). Dacă 5% din x este 15 atunci 16% din x este .....

8). Dacă din 5 kg lămâi se obţin 2 litri de suc atunci din 7 kg de lămâi se vor obţine ..... litri de suc.

9). Două unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei sunt .....

**Partea a II-a**

10). După o reducere cu 12% un obiect costă 352 lei. Aflaţi preţul obiectului înainte de reducere.

11). Calculaţi : $[(-3)^4 \cdot 9^5 + 3^{13}] : 3^{12} - 3^2 =$

12). Rezolvaţi : a). $\frac{x+1}{3} - 2,5 = \frac{x}{2}$ b). $13 - 2x = 7,5 - x$

13). În $\triangle ABC$, dreptunghic în $\sphericalangle A$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$ şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Arătaţi că $DC = 3 \cdot BD$.

14). Fie $\triangle ABC$ isoscel, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle B = 30^0$. Fie D simetricul lui B faţă de AC. Demonstraţi că $\triangle DBC$ este echilateral.

## Testul 3

**Partea I**

1). Rezultatul calculului : $2 \cdot (-3) + (-6) : (-2) - (-8)$ este egal cu : a). $-1$; b). 5; c). $-11$; d). $-17$

2). Cel mai mic multiplu comun al numerelor 45 şi 24 este : a). 3; b). 40; c). 180; d). 360

3). Dacă $4x = 5y$ atunci raportul $\frac{2x+3y}{x+4y}$ este egal cu : a). $\frac{21}{24}$ b). $\frac{20}{21}$ c). $\frac{22}{21}$ d). $\frac{23}{24}$

4). Un automobil a mers 2 ore cu viteza de 90 km/h şi 3 ore cu viteza de 70 km/h. Cu ce viteză medie a mers automobilul ? a). 75 km/h b). 78 km/h c). 80 km/h d). 85 km/h

5). Dacă numărul fetelor reprezintă 30% din numărul de elevi ai clasei şi sunt 21 de băieţi, atunci clasa are un număr de : a). 28 elevi; b). 29 elevi; c). 30 elevi; d). 31 elevi

6). Raportul a două numere x şi y este $\frac{2}{3}$ şi $3x + 7y = 108$. Numărul mai mare este :
a). 12 b). 8 c). 9 d). 15

7). Două unghiuri complementare sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 7. Diferenţa lor este egală cu : a). $20^0$ b). $70^0$ c). $50^0$ d). $90^0$

8). Un triunghi isoscel are două din laturi de 10 cm, respectiv 4 cm. Perimetrul său este egal cu :
a). 18 cm b). 24 cm c). 14 cm d). 20 cm

9). Dacă x este măsura unui unghi obtuz atunci este adevărat că :
a). $0^0 \le x \le 90^0$ b). $90^0 \le x \le 180^0$ c). $x = 90^0$ d). $x = 180^0$

**Partea a II-a**

10). Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia $2 \cdot \left[\left(2 - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 0,(3)\right] = \frac{x}{2}$.

11). Determinaţi toate valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{-7}{2x+1}$ este număr natural.

12). Să se afle numerele naturale a şi b dacă $2a + 5b = 18$ şi b este număr prim.

13). În $\triangle ABC$, dreptunghic în $\sphericalangle A$, $m(\sphericalangle B) = 2m(\sphericalangle C)$ şi $BC = 12$ cm. Să se afle perimetrul $\triangle ABM$ unde $M \in (BC)$ astfel încât $AM \perp BC$.

14). Triunghiul ABC isoscel, cu $(AB) \equiv (AC)$, are perimetrul egal cu 32 cm. Fie $BM \perp AC$,

$M \in (AC)$. Dacă perimetrul $\triangle BAM$ este de 24 cm, să se demonstreze că $BM = BC + MC - 8$.

## Testul 4

### Partea I

1). Rezultatul calculului $-12 : 3 + 3 \cdot (-2) - 5$ este : a). $-9$ b). $-1$ c). $-15$ d). 5

2). Mulțimea divizorilor comuni ai numerelor 18 și 24 are un număr de elemente egal cu : a). 5 b). 4 c). 3 d). 2

3). Dacă $\frac{12}{2x-1} = \frac{8}{2}$, atunci x este egal cu : a). 2 b). 3 c). 1 d). 4

4). O persoană cumpără 2 cutii de bomboane cu 20 lei/cutie și 3 cutii cu 30 lei/cutie. O cutie de bomboane costă în medie : a). 2,6 lei b). 25 lei c). 26 lei d). 10 lei

5). După o reducere de 10% un obiect costă 40,5 lei. Prețul inițial a fost : a). 36 lei b). 36,45 c). 40 lei d). 45 lei

6). Raportul a două numere x și y este $\frac{3}{5}$ iar suma lor este 40. Atunci $3x + y$ este egal cu : a). 20 b). 40 c). 70 d). 120

7). Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt invers proporționale cu numerele 0,(3) și 0,1(6). Cel mai mare unghi are măsura de : a). $15^0$; b). $25^0$ ; c). $40^0$; d). $60^0$

8). Triunghiul ABC are $(AB) \equiv (AC)$ și $m(\sphericalangle A) = 90^0$. Fie $AM \perp BC$, $M \in (BC)$ atunci $m(\sphericalangle MAC)$ este : a). $30^0$ b). $45^0$ c). $60^0$ d). $90^0$

9). Media aritmetică a măsurilor a două unghiuri ale unui triunghi este egală cu $60^0$. Atunci triunghiul este : a). echilateral b). dreptunghic c). obtuzunghic d). isoscel

### Partea a II-a

10). Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $\frac{x+3}{2} + 1{,}3x = 2 \cdot (3 - 2{,}5)^2$.

11). Să se determine valorile naturale ale lui x pentru care fracția $\frac{17}{2x-3} \in Z$.

12). Într-un bloc sunt 62 de camere reprezentând apartamente de 2 camere respectiv 4 camere. Să se afle numărul minim de apartamente din bloc. (Se exclud băile și bucătăriile).

13). În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AM \perp BC$, $M \in (BC)$, N este mijlocul ipotenuzei BC și $(MN) \equiv (BM)$. Dacă $BM = 6$ cm, să se afle $BC + AB$.

14). Într-un $\triangle MNP$, MA este mediatoarea segmentului NP, $A \in (NP)$. Perimetrul $\triangle MNP$ este egal cu 34 cm iar $MN = 12$ cm. Să se afle lungimea segmentului AP.

1). Presupunând că $2 + 2 = 5$ și $7 + 7 = 13$, cât fac $2 + 7 = ?$

2). Tatăl Anei are 4 fete : Cicha, Ciche, Cichi. Care este numele celei de-a patra ?

3). Ce apare odată în fiecare zi și o dată în fiecare minut , dar nu apare într-o secundă ?

4). Roata unei biciclete are 45 de spițe. Câte spații sunt între ele ?

5). În toate dicționarele limbii române un singur cuvânt este scris incorect. Care este acesta ?

6). Putem crea 4 triunghiuri echilaterale cu ajutorul a 4 bețe de chibrit, fiecare băț fiind o latură ?

## *Capitolul II*
## Proiecte multidisciplinare

**1).** Măsoară temperatura exterioară : dimineața, la prânz și seara, în fiecare zi, la aceeași oră, timp de o lună, toamna, iarna și primăvara. a). Întocmește un grafic din care să rezulte variația ei; b). Fă media săptămânală și lunară a acestora pentru dimineață, la prânz și seară. c). Întocmește un proiect cu aceste rezultate, comentarii și concluzii.

**2).** Măsoară umbra unui pom sau al unui băț înfipt în pământ, la prânz și seara, în fiecare zi, din lunile octombrie, ianuarie și mai.a). Întocmește un grafic din care să rezulte variația ei. b). Fă media săptămânală și lunară a acestora. c). Întocmește un proiect cu aceste rezultate, comentează și trage în final concluzii.

**3).** Sădește un pom toamna, în luna octombrie, ziua a 10-a. a). Măsoară înălțimea acestuia în fiecare lună, până când împlinește un an de la plantarea lui. b). Reprezintă, într-un sistem de coordonate, evoluția lui timp de 1 an. c). Întocmește un proiect cu aceste rezultate. Comentează și trage concluzii.

**4).** Drumul între casă și școală poate fi parcurs în 2 variante. Desenează la nivel de schiță și aproximează fiecare segment. a). Care este cel mai scurt ? b). Care dintre aceste trasee are mai multe traversări de stradă principală (cu circulație intensă). c). Întocmește un proiect din care să rezulte care este mai bun de urmat.

**5).** Notează ora exactă la care apune soarele din 2 în 2 zile, în perioada 15 septembrie-30 octombrie și 15 ianuarie-28 februarie. a). Reprezintă rezultatele pe un grafic. b). Explică variația, discutând cu profesorul de geografie. c). Elaborează un proiect.

**6).** Notează-ți cursul valutar săptămânal din septembrie până îm ianuarie și alcătuiește un grafic cu variația cursului. a). În ce săptămână a fost cel mai avantajos schimb din lei în euro ? b). În ce săptămână a fost cel mai avantajos schimb din euro în lei ? c). Cât a pierdut (sau câștigat) o persoană care a schimbat 1000 lei în euro în 20 octombrie față de 20 decembrie ?

**7).** Plantează într-un mediu umed, apoi în ghiveci, câteva boabe de fasole. a). Măsoară cât a crescut plăntuța în fiecare zi și trece rezultatele pe un grafic (dacă ai mai multe fire de fasole, desenează mai multe grafice). b). Calculează cu cât la sută a crescut o plantă în fiecare săptămână, timp de 5 săptămâni.

**8).** Fă un sondaj în clasa ta, având ca temă o întrebare de genul : „Îți place cum cântă formația X ?„ având ca răspunsuri : da, mi-e indiferent, nu, și exprimă rezultatele în procente. Desenează un grafic. Convingeți colegii care participă la sondaj ca, în următoarea lună, să asculte zilnic o melodie a formației X apoi, după o lună, repetă sondajul. Ce rezultate obții ?

**9).** Un ou costă în perioada noiembrie-mai 0,55 lei și s-au vândut 5.000.000 bucăți; în perioada mai-iulie costă 0,45 lei și s-au vandut 2.000.000 bucăți; în perioada august-octombrie costă 0,5 lei și s-au vândut 3.000.000 bucăți. Cât a costat oul, în medie, în anul 2009 ?

**10).** Trei firme producătoare de sucuri au avut următoarele vânzări într-un an : prima a vândut 120.000 hectolitri de suc, a doua cu 10% mai mult, iar a treia cu 25% mai puțin. Câți litri de suc s-au consumat într-un an pe cap de locuitor, dacă sunt 20.000.000 de cetățeni ?

**11).** Dacă avem 6.000.000 de pensionari și 4.500.000 de salariați, din 20.000.000 de locuitori, ce procent din numărul de locuitori nu cotizează la fondul de sănătate ?

# ALGEBRA

## *Capitolul III*

## Mulţimea numerelor întregi. Mulţimi

### EXERCIŢII

*

**1).** Să se precizeze care din următoarele numere sunt din Z, care din N şi care din Z – N :
$-9;\ 0;\ |-3|;\ |+4|;\ -|2|;\ -|-7|;\ 3-8;\ (-2)^1;\ (-2)^2;\ (-2)^3;\ -(-6);\ -(+6);$
$\frac{8}{4};\ \frac{-30}{6};\ \frac{-42}{-6};\ \frac{4-12}{-4};\ \frac{9-3}{6};\ \frac{1}{2};\ \frac{14}{2};\ 1{,}5\cdot 2;\ (-3)\cdot(-4)$

**

**2).** Fie mulţimile : $A=\{x\in Z \mid |x|\le 4\}$, $B=\{x\in Z \mid |x|>2\}$. Să se calculeze :
$A\cap B;\ A\cap N;\ B\cap N;\ A\cap\ (Z-N);\ B-N;\ A\cup B;\ A-B;\ (B-A)\cap N.$

**3).** Să se determine elementele mulţimilor : $A=\{x\in N \mid 2^x<16\}$ şi $B=\{x\in Z \mid |4-x|\le 2\}$.
Calculaţi : $A\cap B;\ A\cup B;\ B-A;\ A-B;\ B\cap(Z-N)$.

**4).** Determinaţi elementele mulţimilor : $A=\{x\in N \mid -8<x<5\}$; $B=\{x\in Z \mid -3\le|x|\le 1\}$;
$C=\{x\in N \mid -4\le x\le 0\}$; $D=\{x\in Z-N \mid |x+1|\le 4\}$.

**5).** Să se scrie elementele mulţimilor:
$A=\{x \mid x\in Z, -3\le x<2\}$ $\qquad$ $B=\{y \mid y\in N^*, y=2+x, x\in A\}$
Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor :
a). $B\subset A$; b). $1\in A\cap B$; c). $-1\in B-A$; d). $A-B=\{a \mid a\in Z, |a|\le 3, a\le 0\}$

**6).** Să se scrie elementele mulţimilor:
$A=\left\{x \,\middle|\, x\in N \text{ si } x<\frac{23}{5}\right\}$; $\quad B=\left\{y \,\middle|\, y\in N \text{ si } \frac{7}{2}<y<\frac{16}{3}\right\}$; $\quad C=\left\{z \,\middle|\, z\in N \text{ si } \frac{19}{3}>z>\frac{27}{7}\right\}$
Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziţiilor :
a). $C\subset A$; b). $A\cap C=\varnothing$; c). $B\cap C=\varnothing$; d). $A\cap B=\{4\}$; e). $A\cup B=\{t \mid t\in N, t<6\}$

**7).** Fie mulţimile : $A=\{x\in Z, x \mid 6\}$; $B=\{y\in Z, y=x+1, x\in A\}$;
$C=\{z \mid z\in Z, z=y^2-4, y\in B\}$; $\quad D=\left\{x \,\middle|\, x\in N. x+\frac{2}{5}\le\frac{2(x+3)}{3}\right\}$
Să se calculeze : $(A\cup B)-C$; $(D\cap B)\cup(D\cap A)$; $(A\cap N)\cap D$; $(A-N)\cap C$.

**8).** Fie mulţimile: $A=\{x \mid x\in Z, -3\le x<4\}$ şi $B=\{x \mid x\in Z, |x+1|=2\}$
Să se calculeze: a). $A\cup B$; b). $A\cap B$; c). $A-B$; d). $B-A$; e). $A\cap D_6$; f). $D_2-A$
g). $(A-N)\cup B$; h). $(B\cap N)\cup(A\cap N)$.

**9).** Să se determine mulţimile A şi B dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile:
$A\cup B=\{x \mid x\in Z, -3\le x\le 2\}$ $\quad A\cap B=\{-2; 1\}$ $\quad B-A=\{2; 0\}$

***

**10).** Să se determine mulţimile A şi B dacă :
a). $A\cap B=\{1; 3\}$ b). $2\in A$ c). $B-A=\varnothing$ d). $A-B$ are un element.

**11).** Să se determine $x\in R$, dacă : a). $\{1; 3; x\}=\{a\in N, a \mid 6\}-\{6\}$
b). $\{a\in N^*, 2(a-3)\le a-5\}=\{1; 2\}\cap\{x\}$ c). $D_{12}-D_6=\{-4; 12\}\cup\{x; 4\}$

**12).** Câte elemente are $A\cup B$ şi $A\cap B$ dacă A are 5 elemente, B are 3 elemente iar $B-A$ are un element ?

**13).** Să se determine mulțimile A și B dacă sunt satisfacute simultan condițiile :
$A \cup B = \{x \mid x \in N^* \text{ și } x \le 8\}$;   $A \cap \{1; 4; 5\} = \varnothing$;   $\{6; 8\} \cap B = \varnothing$;   $A \cap B = \{2; 3; 7\}$

## Numere întregi

*

**1).** Să se așeze în ordine crescătoare numerele :
a). $-4; |-2|; 1; |-5|; 0,3; -6; -|-7|$    b). $-3 + 5; |-4 - 1|; -10 + 7; |0|; -2^2$

**2).** Să se calculeze:
a). $-4 + 5 - 2 =$    b). $(-8) + (+6) - (-3) =$    c). $12 - 8 - 7 - (-3) =$
d). $-5 - (-4) + 3 - 10 =$    e). $3 + (-8) - 6 - (-7) =$    f). $6 - |2 - 4| - |5 + (-3)| =$
g). $||-2| - 6| - ||-4| + 5| - (-2) =$    h). $||5^3 - 10^2| - 4^2| : |-3| + |-2|^0 =$    i). $|5 - |-3|^0| : |-2|^2 - 7^0 =$

**3).** Să se rezolve în Z :
a). $x - 14 = -30$    b). $x + 15 = -6$    c). $4 - x = 8$    d). $5 - x = -20$
e). $10 + x = -21$    f). $-15 - x = 2$    g). $4x = -16$    h). $-2x = 30$
i). $-5x = -25$    j). $x : 2 = -8$    k). $x : (-3) = -4$    l). $x : (-8) = 4$
m). $12 : x = -3$    n). $-36 : x = 2$    o). $-39 : x = -3$    p). $3x + 5 = -16$
r). $4 - 5x = -11$    s). $8x - 3 = -19$

**

**4).** Să se calculeze :
a). $-5 - [3 - 8 - (4 - 5)] =$    b). $3 - (8 - 9) + (16 - 21) =$
c). $-5 - (-31 + 16) - (7 - 9) =$    d). $4 + (38 - 40) - (8 - 4) =$
e). $-3 - [-4 + (5 - 13)] =$    f). $[(-2) \cdot 7 + 5 \cdot (-5)] : (-13) =$
g). $-5 \cdot (7 - 8) + 3 \cdot (5 \cdot 8 - 7^2) =$    h). $(3 - 12) : (-3) + (5 - 15) : 5 =$
i). $8 \cdot (-3) : (-2) + 5 \cdot (-2) =$

**5).** Să se calculeze :
a). $(-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) - (-8) =$    b). $(-6) : (-2) - 7 =$
c). $4 - (-8) : 2 =$    d). $[2 - (-6)] : (-2) =$
e). $[(-10) : 5 - 3 \cdot (-1)] \cdot (-6) =$    f). $-4 \cdot (-3) : (-6) \cdot 2^3 : (-2)^2 =$
g). $[2^3 \cdot (4 - 5) + |-3^2 + 5|] : [7 - (-3)^2] =$    h). $[8 : (-4) + |-16 + 2|] : (-2)^2 + (-5)^0 =$
i). $[(-4 - 6)^3 + (-2) \cdot (-5)] \cdot |-2^2 + 3| =$    j). $[(25 - 5) : (-2)^2 - 14 : (-2)] \cdot (-1) - 2^2 \cdot (-5) =$

**6).** Să se compare numerele :
a). $-3$ cu $-5$ ;    b). $2$ cu $-8$;
c). $(-3)^2$ cu $-2$;    d). $(-2)^3 \cdot 4$ cu $(-3)^{10} \cdot 9^8 : (-27)^7$ ;
e). $|-6 : (-2)|^5 \cdot 81^4$ cu $[(+2)^5 \cdot (-2)^{16} : (2^7)^2]^4$;    f). $-18^{15} : (-36)^7 : |4 - 10|$ cu $27^2 \cdot (-3)^9$

**7).** Să se scrie numerele de mai jos ca puteri cu bazele, respectiv exponenții, indicați :
a). 8 cu baza 2;    b). 16 cu baza $(-2)$;    c). 81 cu exponentul 4;
d). 10000 cu exponentul 2;    e). $-125$ cu baza $(-5)$.

**8).** Calculați:
a). $(-1)^{327} + (-1)^{504} - (-1)^{1003} =$    b). $(-1)^n + 3(-1)^{n+1} - 4 \cdot (-1)^{n+2} =$
c). $5 \cdot (-1)^n + 4 \cdot (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n} =$
Discuție dupa $n \in N$.

**9).** Să se precizeze care din următoarele numere este din mulțimea Z – N și care din N :
a). $[42 : (-6) + 4 \cdot (-5)] : (-3)$    b). $(-4)^3 : 8 + (-3)^2$
c). $[(-5)^2 + 2 - (-2)^5] : (-1)^3$    d). $[(-2)^6 : (-2)^3 - (-3)^0] : 3$

**10).** Să se compare :

a). $a = -3 \cdot (-8) - (-5)^2$ cu $b = -|7-8|$

b). $a = (-6)^3 : (-2) : 9 - (-3)^2$ cu $b = (-4)^2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3)$

c). $a = [7 \cdot (-8) - 9 \cdot (-6)]^3$ cu $b = [(-12)^2 : 4 : (-9) + 1]^2$

**11).** Să se calculeze media aritmetică pentru numerele :

a). $a = -3 \cdot (-6) - (-4)^2 - 5$ și $b = (-3)^2 - (-4)^2$

b). $a = 2 - (-4 + 8)$; $b = -5 - (3 - 5)$; $c = (-2)^3 - (4 - 7)$

c). $a = 8^2 - (-7)^2$; $b = (-6)^2 - 7^2$; $c = (-4)^2 - (-2)^2$

**12).** Să se rezolve în Z :

a). $x + 18 = 0$; b). $x - 31 = -29$; c). $2x + 3 = 3x$;

d). $4(x+1) - 3(x+2) = -20$; e). $5 - 2 \cdot [3 - 2 \cdot (x+3)] = 3$

f). $3x - 2 \cdot [2x + 4 \cdot (4 + 5x)] = 9$; g). $3 \cdot [5 \cdot (x+3) - 2 \cdot (4 - x)] + 1 = 22$

**13).** Să se rezolve în Z :

a). $|x + 13| = 20$ b). $3 - |x| = 18$ c). $4 \cdot |x| - 2 = 10$ d). $|x+3| + 5 = 0$

e). $3 \cdot (|x| - 3) + 1 = 0$ f). $3 \cdot (|2x+1| - 3) - 2 = 4$ g). $7 \cdot |x| + 3 = |x| + 9$

h). $||3x+1| - 4| = 0$ i). $|2 \cdot |x| - 7| = 19$ j). $||x| - 10| = 7$

**14).** Să se afle x și y din :

a). $4 \cdot |x+1| + |3y - 6| = 0$ b). $|3^x - 9| + |4^y - 8^2| = 0$

**15).** Să se rezolve în N :

a). $x + 3 \le 5$ b). $4 + x < 9$ c). $3x < 18$ d). $4x < 21$

e). $14 - x < 7$ f). $4 - x < 6$ g). $x - 8 \le 2$ h). $x + 3 \le 0$

i). $x - 7 \le 0$ j). $5x \ge 0$ k). $|x| < 8$ l). $|x| \le 0$

**16).** Să se rezolve în Z :

a). $x + 15 < 0$ b). $x - 16 < -3$ c). $8x < 0$ d). $3x < -6$

e). $x + 20 \le -4$ f). $2x + 5 < -7$ g). $2x - 1 \le x + 7$ h). $2(x+3) + 4 \le x$

i). $|x| \le 3$ j). $4 - x \ge 8$ k). $5 - 2x \le 7$ l). $3 - |x| \le 0$

m). $4 + |x| \le 0$ n). $4 - |x| \ge 0$

**17).** Să se rezolve inecuațiile pe mulțimile lor de definiție :

a). $3 + 4x \le 31$, $x \in Z - N$ b). $5x - 3 \le 7$, $x \in N$ c). $4(x+1) - 3 \le -15$, $x \in \{-8; -6; -4; -2\}$

**18).** Să se calculeze : $A \cap B$, $B - A$, $A - B$ pentru mulțimile :

$A = \{x \in N \mid 24 \vdots x\}$ și $B = \{x \in Z \mid 12 \vdots x\}$

**19).** Fie mulțimile : $A = \{x \in Z \mid x \mid 15\}$; $B = \{x \in N \mid 18 \vdots x\}$; $C = \{x \in Z - N \mid x \mid 30\}$.

Calculați : $A - B$; $A \cup C$; $C - B$; $(A \cap B) - C$.

***

**20).** Să se afle x :

a). $\frac{5}{2x+1} \in N$, $x \in N$; b). $\frac{5}{2x+1} \in Z$, $x \in Z$; c). $\frac{3}{x} \in N$, $x \in Z$;

d). $\frac{15}{3x+2} \in N$, $x \in N$; e). $\frac{15}{3x+2} \in N$, $x \in Z$; f). $\frac{4}{|x|+1} \in N$, $x \in Z$ g). $\frac{36}{2^x+1} \in N$, $x \in N$.

**21).** Fie $A = \left\{ x \middle| x \in Z^* \text{ si } \frac{8}{x-2} \in Z \right\}$ și $B = \left\{ y \middle| y \in Z^* \text{ si } \frac{2y-1}{3} \le -2 \right\}$

Să se afle : $A \cap B$, $A - B$

R : $A \cap B = \varnothing$; $A - B = A$

22). Să se rezolve în $Z \times Z$ :

a). $x \cdot y = 5$  b). $2xy = 6$  c). $x \cdot y = -4$  d). $(x + 1) \cdot y = 7$

e). $(y - 1) \cdot x = -8$  f). $3(x + 2) \cdot y = 12$  g). $(x + 3)(y - 1) = 9$

## Testul 1

1). Calculați :

5 0,6p a). $-5 - 8 : 2 =$ .......  5 0,6p b). $24 : (3 - 5) + 9 =$ .......

5 0,6p c). $(4 - 2 \cdot 3) \cdot (-5) - 3 \cdot 4 =$ .......  5 0,6p d). $(-4)^2 - 4 \cdot 5 =$ .......

2).Dacă 5 0,6p a). $4 + x = 0 \Rightarrow x =$ .......  5 0,6p b). $12 - x = 16 \Rightarrow x =$ .......

5 0,6p c). $-5x = 20 \Rightarrow x =$ .......  7 0,5p d). $4x - 3 = -15 \Rightarrow x =$ .......

7 0,5p e). $5 + 2x \le 7 \Rightarrow x \in Z, x =$ .......  9 1p f). $2x + 3 = 4 + 2x \Rightarrow x \in Z, x =$ .......

7 0,8p 3). Aflați valoarea absolută a numerelor :

$a = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5 - 7 \cdot 8$  $b = |-5 + 7| \cdot |10 - 14| : (-2)$

9 1p 4). Aflați elementele mulțimilor :

$A = \{x \in Z \mid 12 \vdots x\} =$ .......  $B = \{x \in Z^* \mid |x| < 2\} =$ .......  $C = \left\{x \in N \,\middle|\, \frac{18}{x} \in N\right\} =$ .......

$A \cap C =$ .......  $B \cup C =$ .......  $B \times C =$ .......

Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor :

„ $B \subset A$ “ .......  „ $-3 \in C$ “ .......  „ $B \cap C \subset A \cap B$ “ .......

10 1p 5). Aflați soluția ecuației : $4 - 3(x - 2) = x - 2(x + 1)$.

## Testul 2

1). Calculând :

5 0,8p a). $-12 + 24 + (-50)$ se obține .......

5 0,8p b). $(-2)^3 : 4$ se obține .......

5 0,8p c). $(-10 - 8) : (-9)$ se obține .......

7 0,5p d). $[(-7)^3 \cdot (-7)^5 : 7^6 + (-50) : 2] : (-2^2)$ se obține .......

2). Să se rezolve în Z :

5 0,8p a). $-2x = 10$  5 0,8p b). $4x \le -10$

7 0,5p c). $-3(x + 2) = 2(x - 8)$  7 0,5p d). $-2(x - 6) > x + 5$

7 0,5p 3). Fie $A = \{x \mid x \in Z^*, -2 \le x < 4\}$ și $B = \{x \mid x \in N, 2x < 8\}$

a). Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor : $B \subset A$; $3 \in A \cap B$; $-2 \notin A$; $-1 \in A - B$.

b). Dacă $C = A \cap B$ și $D = \{0; 1\}$, să se scrie $C \times D$.

9 1p 4). Dacă $A = \{x \mid x \in Z$ și $x^2 < 12\}$ atunci $A = \{$.......$\}$

9 1p 5). Calculând : $[\,|-6 - 8| : (-2) + (-2)^3 + (-3)^0] : |-5 + 3|$ se obține ...

10 1p 6). Să se afle $x \in Z$ știind că :

a). $(4x + 6) \vdots 3$ și $-4 \le x < 6$  b). $15 \vdots (2x + 1)$  c). $\frac{8}{x - 3} \in N$

**1).** Un ciclist, aflat pe locul 4 înaintea ultimei manșe, termină cursa depășindu-l pe ocupantul locului trei. Pe ce loc s-a clasat ciclistul ?

**3).** Câte zile de naștere are un om la vârsta de 48 de ani ?

**4).** Sunt șapte luni de 31 de zile și patru luni de 30 de zile. Câte luni au 28 de zile ?

**5).** Ai un chibrit în mână și intri într-o cameră întunecoasă, în care se află o lumânare, o lampă de petrol și un cuptor. Ce aprinzi prima dată ?

**7).** Este posibil ca un bărbat din Africa să se căsătorească cu sora văduvei sale ?

## *Capitolul IV*

## Mulţimea numerelor raţionale

*

**1).** Să se reprezinte pe axă numerele :

a) $-3; -\frac{3}{2}; 2,5; -2\frac{1}{3}; 0,7; -2; -1,5; -2,(3)$.  b) $0; 1,(3); -2/3; 0,5; -1,5; 2,(1); 4/3; \frac{1}{2}$.

c) $-1/2; 5/4; -3/4; 7/2; -5/2; -0,75; 3,5; 1,25$.

**2).** Să se reprezinte pe axă numerele : $-\frac{5}{8}; -4; 5; \frac{10}{3}; -\frac{7}{2}; 0,15; -\frac{1}{3}; -\frac{10}{3}$

**3).** Să se specifice căror mulţimi aparţin numerele de mai jos, (N, Z – N, Q – Z) :

a) $2$; b) $-4/2$; c) $0,1$; d) $-3$; e) $0$; f) $-2,(3)$; g) $6/2$; h) $6/4$; i) $-2\frac{1}{3}$; j) $\frac{0}{2}$.

**4).** Să se găsească opusele numerelor : a). $-3,5$; b). $\frac{4}{3}$; c). $|-6|$; d). $0,18$.

**

**5).** a). Transformaţi în fracţii ordinare ireductibile : 1,8; 2,13; 0,5; 0,08; 2; 0,13; 0,145.

b). Transformaţi în fracţii ordinare ireductibile : 1,(3); 4,(6); 15,(2); 6,(23); 7,(63); 0,(18); 0,(108); 5,(036); 1,2(3); 6,0(12); 0,01(4); 5,00(8); 16,40(81); 0,3(102).

c). Transformaţi în fracţii zecimale sau periodice : $\frac{11}{3}; \frac{10}{7}; \frac{1}{6}; \frac{12}{11}; \frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{7}{22}; \frac{5}{7}; \frac{3}{14}; \frac{2}{5}; \frac{11}{8}; \frac{13}{20}$.

**6).** Să se precizeze cărei mulţimi îi aparţine fiecare din numerele de mai jos (N, Z – N, Q – Z) :

a). $0;\ 5;\ -\frac{8}{4};\ -3,8;\ -\frac{5}{2};\ \left|-\frac{4}{3}\right|;\ |-5|;\ 1,(2);\ \frac{16}{-3};\ \frac{18}{-6};\ 1\frac{1}{2};\ -|-8|;\ \frac{-15}{-5};\ -6,9$

**7).** Să se calculeze :

a) $\left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| + \left|\frac{3}{8}\right| =$  R: $\frac{9}{8}$  b) $\left|\frac{-1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| =$  R: $\frac{5}{6}$

c) $\left|-1\frac{2}{3}\right| + \left|2\frac{1}{6}\right| =$  R: $3\frac{5}{6}$  d) $\left|\frac{-5}{6}\right| : \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| =$  R: 3

e) $\left|1\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right| : \left|\frac{-7}{20}\right| =$  R: $4\frac{6}{7}$  f) $\left|-\frac{2}{3}\right|^2 - \frac{1}{3} =$  R: $\frac{1}{9}$

g) $\left|-\frac{3}{4}\right| \cdot \left|1\frac{1}{7}\right| + \left|-\frac{4}{7}\right| =$  R: $1\frac{3}{7}$  h) $\left(\left|-\frac{1}{5}\right| + \frac{6}{10}\right) : \frac{3}{5} - 1 =$  R: $\frac{1}{3}$

i) $\left(3 - \left|-\frac{2}{7}\right|\right) : |19| =$  R: $\frac{1}{7}$  j) $\left|\frac{10}{63} - \frac{1}{9}\right| \cdot 21 + |-4| \cdot \left|\frac{-5}{8}\right| =$  R: $3\frac{1}{2}$

k) $|-1.8| \cdot \left|\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right| =$  R: $\frac{1}{20}$

**8).** Să se afle $x \in Q$ : a) $|x| = 2/3$  b) $|x| = 1\frac{1}{3}$  c) $|x| = 0,3$  d) $|x| = 1,(2)$

e) $|x| = 4,5$  f) $|x| = -2$  g) $|x| + 3 = 11/2$  h) $|x| - 1/2 = 5/2$  i) $1/4 + |x| = 2$

j) $|x| - 2\frac{1}{2} = 1/3$  k) $2\ |x| = 9$  l) $3/2\ |x| = 1\frac{1}{4}$  m) $3\ |x| + 1/2 = 2$  n) $1/3 + 2\ |x| = \frac{1}{2}$

o) $2\ (|x| + 3/2) = 4$  p) $|x| - 6 = -2$  r) $3\ (|x| - 1) + 1/2 = 5\frac{1}{2}$  s) $|x| - \left|3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right| = \left|\frac{-3}{2}\right|$

**9).** a). Care este suma dintre un număr şi opusul lui ? b). Dar câtul lor ?

# Relațiile „<", „≤", „≥", „>" între numerele raționale

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- un număr rațional a este mai mare decât un număr rațional b, ceea ce se scrie a > b, dacă există $c \in Q$, astfel încât $a = b + c$.
- pe axa numerelor numărul rațional mai mare se va afla la dreapta celui mai mic
- pentru a compara două numere raționale se vor aduce la același numitor și se vor compara numărătorii astfel obținuți.

## EXERCIȚII

*

**1).** Să se compare :

a) $\frac{1}{2}$ cu 0  b) $-1\frac{2}{3}$ cu $\frac{1}{3}$  c) $-\frac{2}{5}$ cu $-\frac{3}{10}$  d) $-\frac{1}{6}$ cu $\frac{5}{-12}$  e) 1 cu $\frac{4}{5}$

f) $-1\frac{2}{3}$ cu $-1{,}7$  g) $-1{,}5$ cu $1{,}5$  h) $-\frac{2}{3}$ cu $-0,(6)$  i) $-\frac{4}{8}$ cu $\frac{-3}{6}$  j) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ cu 0,6

**

**2).** Să se compare :

a). $\frac{7}{3}$ cu $\frac{5}{2}$;  b). $-0{,}4$ cu $\frac{-5}{8}$  c). $-1,(2)$ cu $-\frac{12}{5}$  d). $-\frac{8}{9}$ cu $-0{,}9$

e). 0,1 cu 0,(1)  f). 2,(12) cu 2,1(2)  g). $-\frac{5}{3}$ cu $-1{,}6$  h). 0,8 cu $\left|-\frac{2}{3}\right|$

**3).** Să se compare :  a) $|1/2 - 5/6|$ cu $-0,(3)$  b) $-1/4 + 0{,}5$ cu $|1 - 0{,}75|$

c) $\left|0{,}4 - 1\frac{1}{5}\right|$ cu $3\frac{1}{5} - 4$  d) $0,(3) - 1$ cu $\frac{2^2 - 6}{3}$  e) $\left|1 - \frac{-3}{-4:2}\right|$ cu $1,(6) - \frac{7}{2}$

f) $\frac{-5 + 2\cdot(-3)}{-4}$ cu $-2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}$  g) $\frac{5}{(-2)^3} + \frac{1}{4}$ cu $-\frac{3{,}9 - 2{,}16}{6}$

**4).** Ordonați crescător numerele :

a) $-1$; $-1/3$; 2,5; 8/8; $-1/2$; 0,(4); 8/3.  b) 4/5; $-0{,}8$; 1,5; $-3/10$; 0; $-2$; $-1\frac{4}{10}$.

c) $-3/8$; 1/4; $-0{,}5$; 1,25; 7/2; $-3{,}5$; 9/8.

**5).** Să se ordoneze crescător :

a). $\frac{3}{5}; \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{4}; 0$  b). $-1\frac{1}{3}; -\frac{5}{4}; -\frac{6}{5}; -1; -2$  c). 0,5; 0,12; 0,243.

d). $-2{,}8$; $-2{,}16$; $-2{,}102$  e). 3,(2); 3,2; 3,(20)  f). $-\frac{8}{3}; -2,(7); \frac{-17}{6}; -\frac{5}{2}$

g). $-3{,}41$; $-3{,}4(1)$; $-3,(41)$

***

**6).** a). Să se afle cel mai mare număr rațional negativ de forma $\frac{\overline{xx}}{15}$, $x \neq 0$.

b). Să se afle cel mai mic număr rațional de forma $\frac{\overline{xy}}{-13}$, unde $\overline{xy}$ se divide cu 45, $x \neq 0$;

c). Să se afle cel mai mic număr rațional de forma $\frac{-20}{\overline{x3}}$.

## Adunarea şi scăderea

*

**1).** Să se calculeze :

a) $7/5 + 1/2 + 3/10 =$ R: 11/5 b) $1/2 + (-1/4) =$ R: 1/4

c) $5/8 + (-1/2) + (-1/4) =$ R: –1/8 d) $-7/3 + (-1/2) + 1/6$ R: –8/3

e) $2{,}6 + \left(-3\dfrac{1}{2}\right) =$ R: –9/10 f) $1\dfrac{1}{2} + \left(-2\dfrac{1}{3}\right) =$ R: –5/6

g) $2\dfrac{3}{5} + (-3) =$ R: –2/5 h) $-4 + \left(-3\dfrac{1}{2}\right) + \left(-2\dfrac{1}{4}\right) =$ R: –39/4

i) $-5{,}2 + \left(-3\dfrac{1}{5}\right) =$ R: –8,4 j) $4 + [-1{,}(3) + 1/6] =$ R: 17/6

k) $3\dfrac{1}{6} + [-3{,}(6)] =$ R: –1/2 l) $-8\dfrac{1}{5} + \left(-2 + 3\dfrac{1}{10}\right) =$ R: –71/10

**

**2).** Să se efectueze :

a) $|3{,}5| + |1/2 + 3| =$ R: 7 b) $2/3 + |1/3 + (-1/2)| =$ R: 5/6

c) $-\left|-4\dfrac{1}{2}\right| + \left|7 + \left(-5\dfrac{1}{4}\right)\right| =$ R: –11/4 d) $\left|-2\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right| + \left(-1\dfrac{3}{16}\right) =$ R: 15/16

e) $\left|1{,}5 + \left(-2\dfrac{1}{3}\right)\right| - \left|-\dfrac{4}{6}\right| =$ R: –1/6 f) $-2 + \left|\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{6}\right| =$ R: $-1\dfrac{1}{2}$

g) $-1\dfrac{2}{5} + \left|-\dfrac{6}{15} + \dfrac{1}{30}\right| =$ R: –31/30 h) $0{,}(3) + \left|-2{,}5 + 1\dfrac{1}{6}\right| =$ R: 5/3

**3).** Să se calculeze :

a) $1/6 - 1/2 =$ R: –1/3 b) $1/5 - 4/3 - 2/15 =$ R: –19/15

c) $1\dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{5}{6}\right) - \dfrac{4}{18} =$ R: 41/18 d) $-2\dfrac{1}{4} - \left(-\dfrac{1}{8}\right) - 1\dfrac{1}{2} =$ R: –29/8

e) $2 - 3\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} =$ R: –5/6 f) $5/6 - (-1{,}5 + 2) =$ R: 1/3

g) $-1{,}(3) + \left(-5\dfrac{1}{3} + 4{,}8\right) =$ R: –28/15 h) $2\dfrac{1}{3} - [-7 - 0{,}(6)] =$ R: 10

i) $-3 - \left[-\dfrac{1}{2} - \left(7 - 8\dfrac{1}{4}\right)\right] =$ R: –15/4 j) $-2{,}4 - \left[\dfrac{1}{10} + \left(-2\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}\right)\right] =$ R: 2/10

**4).** Să se calculeze:

a) $-2 - \dfrac{-3}{5} =$ b) $\dfrac{(-2)^2 - 3^2}{-10} + \dfrac{1}{(-2)^2} =$ c) $-\dfrac{2}{-3} + 1\dfrac{4}{6} =$ d) $\dfrac{-1}{8} - \left(1 - \dfrac{-3}{-4}\right) =$

e) $0{,}(2) - \dfrac{4}{-3} =$ f) $-1{,}5 - \left(-2 + \dfrac{3}{-5}\right) =$ g) $\dfrac{-2+5}{4} - \dfrac{-7}{2} =$ h) $-1 + \dfrac{-4}{-6} =$

5). Calculaţi :

a). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{29\cdot 30}=$

b). $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+.....+\frac{2}{59\cdot 61}=$

c). $\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+.....+\frac{3}{77\cdot 80}=$

d). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{7}{12\cdot 19}+\frac{9}{19\cdot 28}=$

6). Efectuaţi calculele :

a). $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+.....+\frac{1}{81\cdot 85}=$

b). $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+.....+\frac{1}{420}=$

c). $\frac{2}{8}+\frac{2}{24}+\frac{2}{48}+\frac{2}{80}+\frac{2}{120}+\frac{2}{168}=$

7). Aflaţi $n \in N$ :

a). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{57}{58}$

b). $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+.....+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{8}{17}$

c). $\frac{-1}{1\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 10}-.....-\frac{1}{n(n+3)}=\frac{-11}{34}$

8). Calculaţi : $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+.....+\frac{1}{1+2+3+.....+1000}$

9). Aflaţi n din relaţia : $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+.....+\frac{1}{1+2+3+.....+n}=\frac{100}{51}$

## Înmulţirea numerelor raţionale

*

1). Să se efectueze :

a) $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=$ b) $-\frac{5}{8}\cdot 1\frac{7}{25}=$ c) $-2\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{2}{5}\right)=$ d) $-4\frac{1}{4}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)=$ e) $-5\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)=$

f) $-1\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=$ g) $-\frac{1}{8}\cdot(-4)=$ h) $-1\frac{1}{3}\cdot(-9)=$ i) $-10\cdot\left(-1\frac{2}{5}\right)=$

**

**2).** Să se calculeze :

a) $\frac{4}{6}\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=$  b) $-2\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{6}{14}\right)\cdot 4\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{13}\right)=$  c) $-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{4}{5}\cdot(-10)=$

d) $-\frac{6}{7}\cdot(-14)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=$  e) $-1\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot 10\cdot(-4)=$  f) $\frac{7}{8}\cdot\left(-3\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{21}\right)\cdot(-3)=$

g) $\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{18}{25}\right)\cdot(-5)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=$  h) $-2\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{25}\right)\cdot\frac{2}{13}=$

**3).** Să se calculeze :

a) $\left(1-1\frac{1}{3}\right)\cdot(-6)=$  e) $\left(-1\frac{3}{5}+2\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3\frac{4}{7}-\frac{65}{14}\right)=$  b) $(-12)\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)=$

f) $\left(-2\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\right)=$  c) $\left(2+\frac{1}{3}-3\frac{4}{15}\right)\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)=$  g) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\frac{7}{8}=$

d) $\left(\frac{7}{5}-\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{14}\right)=$  h) $\left(\frac{11}{14}-\frac{1}{2}-\frac{5}{28}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{4}=$

**4).** Să se calculeze :

a) 1/2  (–2) + 3 =  R: 2

b) 3/4  (–16) – 6 =  R: –18

c) –5/8  (–10) – 1/2 =  R: 23/4

d) $-2-6\cdot\left(-1\frac{3}{4}\right)=$  R: $\frac{17}{2}$

e) $-\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{4}{5}\right)=$  R: $\frac{2}{30}$

f) $-3\frac{3}{5}\cdot\left(-4\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{5}=$  R: $\frac{74}{5}$

g) $-1\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{4}{30}\right)-\frac{1}{8}=$  R: $\frac{1}{8}$

h) $-\frac{1}{2}\cdot\left(2\frac{1}{4}-3\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}=$  R: $-\frac{1}{24}$

i) $-\frac{5}{6}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)-1\frac{17}{18}=$  R: $-\frac{5}{6}$

j) $-2+\frac{4}{10}\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot(-5)=$  R: $-\frac{13}{8}$

k) $\frac{1}{12}\cdot(-30)-2+\left(-\frac{5}{14}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)=$  R: $-\frac{22}{6}$

l) $-12\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)+\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{5}\right)=$  R: $\frac{365}{72}$

**5).** Să se efectueze :

a) $\left(-0,25+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)=$  b) $\left[0,(3)-\frac{1}{2}\right]\cdot(-1,8)=$  c) $\left[4-3\frac{1}{6}+0,2\cdot\left(-3\frac{3}{5}\right)\right]\cdot(-30)=$

d) $\left(-1,6+\frac{4}{5}\right)\cdot[2,(3)-3]=$  e) $7\frac{4}{5}\cdot\left(-1\frac{12}{13}\right)+\left(-2\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{19}\right)=$

f) $1\frac{1}{2}\cdot\left(2-3\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{6}\cdot(2,3-4,4)=$  g) $-3\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{53}+[-7,(3)]\cdot[-2,(18)]=$

h) $\left[-\frac{10}{7}+\frac{4}{21}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\right]\cdot(-1)-[5,(6)]=$ i) $\left\{0{,}7\cdot[-0,(5)]+\frac{1}{18}\right\}\cdot(-2)-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)=$

## Împărțirea numerelor raționale

*

1). Să se efectueze :

a) $-\frac{7}{18}:\left(-\frac{14}{20}\right)=$ R: $\frac{5}{9}$ b) $-\frac{5}{8}:\frac{10}{32}=$ R: $-2$

c) $1\frac{1}{3}:\left(-\frac{8}{9}\right)=$ R: $-\frac{3}{2}$ d) $-5:\left(-1\frac{1}{4}\right)=$ R: 4

e) $3\frac{1}{3}:(-15)=$ R: $-\frac{2}{9}$ f) $-2\frac{1}{6}:\left(-2\frac{3}{5}\right)=$ R: $\frac{5}{6}$

**

2). Să se efectueze:

a) $-2\frac{2}{4}\cdot\left(-\frac{14}{25}\right)\cdot\left(-2\frac{6}{7}\right):\left(-2\frac{6}{15}\right)=$ R: $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{4}{9}:\frac{2}{15}\cdot\frac{7}{20}:\left(-\frac{21}{2}\right)=$ R: $\frac{1}{9}$

c) $-6\frac{2}{5}\cdot1\frac{2}{18}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right):\left(-\frac{8}{27}\right)=$ R: $-10$ d) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right):\frac{3}{16}\cdot\left(-2\frac{1}{4}\right)=$ R: $-3$

3). Să se calculeze :

a) $\left(-1{,}5-\frac{1}{4}\right):18\frac{2}{3}=$ R: $-\frac{3}{32}$ b) $\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot(-4):\left(-\frac{1}{5}\right)=$ R: 8

c) $\left(-\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}+1=$ R: $-\frac{2}{3}$ d) $5\frac{1}{2}:(-4)+(-6):\left(-1\frac{1}{5}\right)=$ R: $\frac{29}{8}$

e) $-\frac{5}{8}:\left(-12\frac{1}{2}\right)-2\frac{1}{3}=$ R: $-\frac{137}{60}$ f) $\left(2\frac{5}{9}-3\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right):2\frac{7}{24}-2\frac{1}{6}=$ R: $-\frac{157}{66}$

g) $-\frac{5}{6}:\left(3\frac{1}{2}-4\frac{1}{3}\right)=$ R: 1 h) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$ R: $2\frac{1}{6}$

i) $2\frac{1}{5}:(-11)-2\frac{1}{10}+2\frac{1}{5}=$ R: $-\frac{1}{10}$ j) $-1\frac{1}{4}:\left(-2\frac{1}{2}\right)-4+2\frac{1}{2}=$ R: $-1$

k) $1\frac{1}{2}:(-0{,}75)-0,(3):\left(-1\frac{1}{9}\right)=$ R: $-\frac{17}{10}$

4). Să se efectueze :

a) $\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{2}{15}}=$ b) $\dfrac{-\frac{7}{6}}{14}=$ c) $\dfrac{-3}{1\frac{1}{2}}=$ d) $\dfrac{-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{10}}=$

e) $\dfrac{1}{-2\frac{1}{5}}=$ f) $\dfrac{-5:1\frac{1}{4}+2}{0.5}=$ g) $\dfrac{-2\frac{1}{2}}{10}=$ h) $\dfrac{\frac{-10}{5}}{\frac{5}{-3}}=$

i) $\dfrac{5}{-3\frac{1}{3}}=$ j) $\dfrac{-3+2\frac{1}{4}}{0,(3)}=$ k) $\dfrac{-2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}}=$ l) $\dfrac{-5+3:4\frac{1}{2}}{-13}=$

## Exerciții cu cele patru operații

**

**1).** Să se efectueze :

a) $\dfrac{2\frac{1}{5}-\frac{1}{-1\frac{1}{3}}}{}$ $=$

b) $\left[2\frac{1}{4}-0,25\cdot\left(-4\frac{2}{7}\right)\right]:(-31)+\frac{5}{14}=$

c) $1+\dfrac{19}{-3-\frac{4}{5}}-\dfrac{-1-\frac{1}{2}}{8-\frac{7}{5-1,5}}=$

d) $-20-2\cdot\left(-\frac{3}{4}-0,25\right)\cdot 3+2=$

e) $-24:(-6,4)-12:3\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$

f) $\dfrac{-\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}-\left(+\frac{1}{8}\right)}{-(-3)}=$

g) $-15:\left(-3\frac{3}{5}\right)+10\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{14}\right)=$

h) $0,5:(-0,25)+\frac{7}{5}\cdot\left(-1\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=$

i) $\left(-3\frac{2}{5}-5\frac{4}{15}\right)\cdot 0,25\cdot\frac{7}{13}-\left(7\frac{1}{2}-0,5\right):(-7)=$

j) $\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\cdot\left(-2\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}\right)=$

k) $\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-2\frac{2}{17}\right)+40,5\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 9=$

l) $1\frac{3}{4}:\left\{4-\frac{1}{3}\cdot\left[-5+3\frac{1}{3}:\left(-2\frac{2}{3}\right)\right]\right\}=$

m) $3\frac{1}{2}:\left\{3-1\frac{1}{4}\cdot\left[-3+\frac{2}{8}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right]\right\}=$

n) $[-3,4\ (-1,2)-7,28)]:(-1,2+0,4)=$

**2).** Efectuați :

a) $\dfrac{3}{1-\frac{1}{-1-\frac{1}{4}}}:\dfrac{1-\frac{1}{1-3}}{2}=$ R: $-12$

b) $\dfrac{-5\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}:(-13)}{-15\frac{1}{2}}=$ R: $\dfrac{134}{403}$

c) $\dfrac{5+\frac{1}{2}}{-11}-\dfrac{1}{4}=$ R: $-\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{5}{-2+3}+4\cdot\left(-1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}\right)=$ R: 8

e) $\dfrac{3\frac{1}{4}:(-13)-1\frac{1}{2}}{-2,(3)}=$ R: $\dfrac{3}{4}$

f) $[-3,(3)+2,5]:0,8(3)=$ R: $-1$

g) $\dfrac{3\frac{1}{2}\cdot 0{,}4-2{,}8}{-1{,}96}=$ R: $\dfrac{5}{7}$

h) $\dfrac{-1{,}5\cdot[-3,(3)]-6\frac{2}{3}}{6{,}25}=$ R: $-\dfrac{4}{15}$

i) $-2+\dfrac{1}{3}-1\dfrac{2}{3}:\left(-\dfrac{1}{6}-5\cdot 1\dfrac{1}{5}:1\dfrac{1}{2}\right)=$

j) $-5\dfrac{3}{4}:(-23)+\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]=$

k) $\left[4\dfrac{1}{3}:(-0,(1))+29\right]\cdot(-0{,}2)+4{,}5=$

l) $\left[-5{,}5-6:\left(-1\dfrac{1}{5}\right)\right]:(-0{,}75)-3=$

m) $\left|-2\dfrac{1}{3}+2\cdot\left(-2\dfrac{1}{2}\right)\right|-\left|-3\dfrac{1}{2}\right|-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=$

# Puterea cu exponent număr natural a unui număr rațional

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- vom folosi notația: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
- reguli de calcul cu puteri : $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ; $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ ; $a^m:a^n=a^{m-n}$ ; $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ ; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

## EXERCIȚII

*

**1).** Calculați :

a). $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$ ; b). $\left(-1\dfrac{2}{5}\right)^2$ ; c). $\left(-1\dfrac{1}{2}\right)^3$ ; d). $(-0{,}5)^4$; e). $[-0,(3)]^3$; f). $[-1,1(6)]^2$

**

**2).** Să se efectueze :

a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+5\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=$ R: $\dfrac{83}{16}$

b) $\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^2-5\dfrac{1}{9}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=$ R: $\dfrac{8}{27}$

c) $-5\dfrac{1}{2}:\left(-3\dfrac{2}{3}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=$ R: $\dfrac{5}{4}$

d) $-3\dfrac{1}{2}:\left(-1\dfrac{3}{4}\right)-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=$ R: $\dfrac{3}{2}$

e) $\dfrac{1}{3}:\left(-1\dfrac{1}{3}\right)+2\dfrac{2}{3}:(-4)^2=$ R: $-\dfrac{1}{6}$

f) $\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2:\left(-\dfrac{5}{3}\right)-1\dfrac{1}{3}+2=$ R: $\dfrac{1}{4}$

g) $(-3)^4:\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3-12=$ R: $-36$

h) $\left[-7\dfrac{1}{2}:(-3)-2\right]:\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+1=$ R: $-3$

i) $\dfrac{-\frac{5}{8}+\frac{1}{8}:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{-1}{2}\right)^3}=$ R: 17

j) $\dfrac{-\frac{5}{8}\cdot\left(1\frac{1}{3}-2\right)-1\frac{1}{6}}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+1}=$ R: $-\dfrac{3}{5}$

k) $\dfrac{-3\frac{1}{6}+2:\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(-1\frac{1}{2}\right)^3}=$ R: $-\dfrac{32}{81}$

**3).** Calculați :

a) $\dfrac{\left(-3\frac{1}{2}\right)^3:\left(-1\frac{3}{4}\right)-14}{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2}=$ R: $\dfrac{14}{3}$

b) $\dfrac{(-2)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3\frac{1}{3}:(-5)^2}{\left(-1\frac{1}{3}\right)^2}=$ R: $\dfrac{6}{5}$

c) $\dfrac{\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)^2\right]^4 : \left(-2\frac{1}{4}\right)^3 - 1\frac{1}{2}}{\left(-2\frac{1}{2}\right)^2} =$ R: $-\frac{3}{5}$

d) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-1\frac{1}{4}\right)^2 - \left(1-\frac{3}{4}\right)^2 =$ R: $-\frac{69}{4}$

e) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^5 + (-1)^2 =$ R: $\frac{1}{3}$

f) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(-1\frac{1}{4}\right) - 2\cdot\left(-1+\frac{2}{3}\right)^2 =$ R: $-\frac{7}{9}$

g) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^8 : \left(-\frac{3}{4}\right)^{14} - 3\cdot\left(4-2\frac{1}{2}\right)^2 =$ R: $-\frac{99}{16}$

h) $\left[\left(-5+2\frac{1}{2}\right)^3 : (+5)^3 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$ R: 10

i) $-1\frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{3}\cdot\left(2-1\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)^3 =$ R: $\frac{32}{3}$

j) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^7 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$ R: $-\frac{29}{27}$

**4).** Efectuați :

a) $\left(-\frac{5}{6}+1\right)^3\cdot(-6)^2 =$ R: $\frac{1}{6}$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right) : (-3)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^6 =$ R: $-3$

c) $(-4)^3\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4 - 7\cdot(-2)^2 =$ R: $-22$

d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5\cdot 2^8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 =$ R: $\frac{3}{4}$

e) $(-3)^5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4 : (-4)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$ R: $\frac{1}{2}$

f) $(-1,2)^2\cdot\frac{1}{6^2} + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 =$ R: $\frac{2}{25}$

**5).** Calculați :

a) $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^3\right]^8 : (-0,8)^{22} =$ R: $\frac{16}{25}$

b) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^8 : \left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^{32} =$ R: $\frac{1}{9}$

c) $\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^2\right]^3 : \left(-\frac{3}{7}\right)^4 =$ R: $\frac{9}{49}$

d) $(-3)^6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^8\cdot 3^9\left(-\frac{1}{3}\right)^7 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$ R: $-9$

e) $2^8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{2^9} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} =$ R: $-4$

f) $(-0,2)^3 : (-0,3)^3\cdot 1\frac{1}{8}\cdot(-1,2)^2 =$ R: $\frac{12}{25}$

g) $\left(-\frac{1}{9}\right)^8\cdot 9^3 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2 : 9^3 + \left\{\left[\left(-\frac{1}{9}\right)^8\right]^4\right\}^0 =$ R: 1

h) $\left(-\frac{1}{5}\right)^8 \cdot 5^7 + \left(-\frac{2}{10}\right)^3 : \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}^0 =$ R: 1

## Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional

*

**1).** Să se calculeze :

a). $2^{-3}$ ; b). $(-2)^{-4}$ ; c). $[(-3)^2]^{-1}$ ; d). $[(2^{-2})^2]^{-1}$ ; e). $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ ; f). $\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^2$ ; g). $[(0,25)^{-1}]^2$

**

**2).** Scrieți ca putere, cu bazele indicate :

a). 25; 1/625; –125 cu baza –5.

b). 32; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$; 8; $4^{-1}$ cu baza 2.

c). $27^{-3}$; $\left(\frac{1}{27}\right)^2$ ; $\frac{1}{9^4}$ ; $(9^2)^5$; 1 cu baza 3.

d). $0,25^3$; $0,125^{-2}$ ; $(0,5^{-2})^{-1}$ cu baza 2.

**3).** Calculați :

a). $2^{-1} + 4^{-2}$ b). $3^{-2} - 6^{-1}$ c). $5^{-2} - (-10)^{-1}$ d). $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e). $(0,2)^{-2} + (0,4)^{-1}$ f). $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3} - [0,(3)]^2$ g). $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-7}$ h). $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot [-0,(3)]^{-3}$

**4).** Să se calculeze :

a). $2^{-1} + (-2)^{-3} =$ b). $(-3)^{-2} + [(+3)^{-1}]^2 =$ c). $0,2^{-3} - \left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$

d). $\frac{5}{6} : 6^{-2} - 1 : 5^{-2} =$ e). $(2^{-3} + 2^{-4}) \cdot 3^{-1} =$ f). $12^{-2} \cdot (-6)^2 - 2^2 \cdot 4^{-2} =$

**5).** Efectuați :

a). $(-2)^{-1} + (-2)^{-2} + (-2)^{-3} + (-2)^{-4} =$

b). $[(-5)^{-1}]^0 + 5^{-2} - 0,2^{-1} =$

c). $4^{-3} + [(-2)^{-1}]^2 - 2^{-2} =$

d). $81^{-1} + 9^{-2} - [(-3)^{-4}]^0 =$

e). $3^2 : 7 + 7^{-2} \cdot 5^3 - \left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

f). $0,25^{-2} \cdot (0,5^{-2} + 3 \cdot 0,2^{-2}) =$

g). $[12^{-2} \cdot (3^2 + 3) + 2^{-3}] \cdot 5^{-1} =$

h). $\frac{(-4)\cdot(-8)^2\cdot 16^3}{\left(\frac{1}{32}\right)^{-10}} : 2^{-5^2} + 0,25 =$

**6).** Să se scrie sub formă de putere :

a). $(-2)^{-4} \cdot (-2)^{-2} : 2^{-3} =$ b). $6^{-3} : (-6)^{-8} : 36^2 =$ c). $3^{-10} \cdot 3^2 : (-27)^{-2} =$

d). $5^{-4} \cdot \frac{1}{25} \cdot 625^{-4} : \frac{1}{5^{12}} =$

e). $\left(\frac{1}{27}\right)^4 \cdot \left[(-3)^2\right]^3 \cdot 9 : \left(\frac{1}{3^{-1}}\right)^6 =$

f). $100^5 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^6 : \left[(-10)^{-1}\right]^{-2} \cdot \frac{1}{1000} =$

g). $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{4^8} \cdot 4^5 \cdot 4^{-6} =$

h). $\dfrac{9^3 \cdot 3^{-2} \cdot (-3)^4 \cdot 27^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^3}$

i). $(-5)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot (-5)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} =$

j). $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^2 : \left(6\frac{1}{2}-7\right)^{-7} =$

k). $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^4 : \frac{1}{36^{-1}} =$

l). $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} : \left(0,25+1\frac{1}{4}\right) : \left(\frac{16}{81}\right)^{-1} =$

m). $|-2|^{-4} \cdot \frac{1}{8^{-3}} : |-32| =$

n). $\left[|-5|^{-2}\right]^3 \cdot \left[(-5)^{-2}\right]^{-6} : \left(5 \cdot |7-12|^2\right)^{-1} =$

**7).** Să se rezolve în Q :

a). $x + 1 + 2^{-2} \cdot x = 0,5 \cdot x$

b). $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot x = 0,5^{-3}$

c). $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \cdot x + 4 = 2 \cdot (x+1)$

d). $0,2^{-2} + 0,(3)^{-3} \cdot x = -2$

e). $0,(6)^{-3} \cdot x + 0,(3)^{-1} = (0,5^{-1})^{-3}$

f). $[0,1(3)]^{-1} \cdot x - 0,5x = \left(\frac{1}{14}\right)^{-2}$

g). $\left(2\frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{2}{11}\right)^{-1} \cdot x - 0,25 \cdot x = \frac{1}{2^{-4}}$

h). $2 \cdot 3^{-1} \cdot (3,4x + 5^{-1}) + 1,5^{-2} = 0,2$

## Ordinea efectuării operațiilor

******

**1).** Să se calculeze :

a). $-1\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{4}\right) - \left(-1\frac{5}{6}\right) =$

b). $\frac{2}{5} - 1\frac{4}{10} + 2\frac{1}{3} =$

c). $\left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-1\frac{3}{4}\right) + \left(+2\frac{1}{6}\right) =$

d). $-3 + 2\frac{1}{16} - \frac{5}{12} =$

e). $\frac{7}{36} - 1\frac{5}{24} + \frac{10}{18} =$

f). $\left(-2\frac{1}{20}\right) + 1\frac{2}{15} - \left(-\frac{5}{6}\right) =$

g). $\left(-\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) + \left(\frac{4}{5}\right)^0 =$

h). $-0,7 : (-0,2) + \frac{-6}{-4} : \frac{1}{-2} =$

i). $-2,(3) : \left(-\frac{2}{3} - 0,5\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

**2).** Să se calculeze :

a). $\left[\frac{5}{8} \cdot (-2) + 2,5\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$

b). $\left[2,(3) - 1\frac{2}{5}\right] : (-7) + 1,(6) =$

c). $[2,(32) : 2,(09) + 0,(17)] : \left(\frac{-4}{11}\right) =$

d). $\left[-0,8 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + 0,4\right] : (-2)^3 =$

e). $\left[-\frac{1}{3}\cdot(-9)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(-2\frac{1}{2}\right)=$

f). $\left[1,2^2:0,16\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+(-2)^2\right]^{2001}=$

g) $\left[3,4(3)-(-1,8)^2\right]:(-0,5)=$

h) $\left[(-0,5)^3:\left(-1\frac{1}{2}\right)^2+0,0(5)\right]:(-2001)=$

i). $\left[-0,(3)-0,(6):(-0,5)^2\right]:\left(-1\frac{3}{4}\right)=$

j). $\left[5,6:(-2)^2-(-1,2)\right]:(-13)=$

k). $\left[(-1,2)^2:(-2)^3\right]:\left[-1,(6)\right]-0,7=$

**3).** Să se calculeze :

a). $\left[-1\frac{3}{4}:1\frac{1}{20}+2,(6)\right]:1\frac{2}{5}+\left[-1,1(6)\right]=$

e). $\dfrac{\dfrac{-3\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}}{0,(3)}+13,16:(-2)^2+1}{-3:\left(-\frac{1}{7}\right)}=$

b). $\left(2,19-\frac{7}{2}\right):\left[(-1,1)^2+\frac{1}{10}\right]+(-1)^{100}=$

f). $\left[\dfrac{0,(6)-\frac{5}{6}}{0,(3)}+0,5\right]\cdot\left[1,2(4)^3-\left(7\frac{3}{14}\right)^4\right]=$

c). $\left[5-(-2,2)^2\right]:(-2)^3\cdot(-5)^3+\frac{3}{2}=$

g). $\left(\frac{118}{177}+\frac{270}{405}+\frac{146}{219}\right):2=$

d). $\left[-3,5:(-0,7)+19\cdot(-2)^2\right]:(-9)+(-0,9)^2\cdot(-1)^9\cdot(-10)=$

**4).** Calculați :

a) $\frac{-7}{10}:\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{-3}{-4}:\frac{1}{-2}=$ R: 2

b) $\left[\frac{-1}{6}+\frac{2}{-3}:(-4)\right]\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^3=$ R : 0

c) $\left[\frac{-3+5:(-5)}{-4}-\frac{10-18}{3}\right]:\left(\frac{-1}{-6}\right)=$ R: 22

d) $\left[\dfrac{-1}{\frac{-7}{3}}+\frac{-5+(-2)^3}{14}\right]:\frac{1}{28}=$ R: $-14$

e) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3:\left(-1\frac{2}{3}\right)+\frac{-6}{12}\right]\cdot(-36)=$ R: $\frac{86}{5}$

f) $\left(\frac{-5}{-6}:\frac{1}{-2}+\frac{-4}{15}\right):\left(1-\frac{6}{5}\right)=$ R: $\frac{29}{3}$

g) $-2\frac{1}{3}:\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{-9}{4}=$ R: $\frac{23}{16}$

h) $\left(\frac{4}{-7}\cdot\frac{-28}{12}-\frac{-6}{5}\cdot\frac{10}{21}\right):(-2)=$ R: $-\frac{20}{21}$

i) $\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{-10:(-2)}{-9}}+\frac{4}{-5}-\frac{6}{-25}:\frac{-3+2^0}{15}=$

j) $\frac{(-2)^3+10:(-5)}{5}+\frac{-3}{-8}:\frac{27}{(-2)^4}-\left(-\frac{4}{2}\right)^3=$

k) $\frac{-6}{5}:\left(\frac{-1}{-15}\cdot\frac{-3}{2^3-3^2}\right)+\left(2-\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{-7}\right)=$

l) $\left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{4}{5}+1\right)\cdot\frac{-5}{6}=$

m) $5-\dfrac{1}{-2+\frac{1}{4}:(-2)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(\dfrac{2}{-3}\right)^0=$

n) $\dfrac{-2}{-5}\cdot\dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{1}{5}}-\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1-1\frac{2}{3}}\right):\left(\dfrac{-1}{3}\right)^3=$

o) $\dfrac{2}{-3}\cdot\left(-3\dfrac{3}{4}\right):\left(\dfrac{-10}{-7}+\dfrac{-1}{14}\right)+\left(\dfrac{1}{-11}\right)^0=$

**5).** Calculaţi :

a) $-4,8:(-2)^2=$ R: $-1,2$

b) $5,2:(-2,6)+1,(6)=$ R: $-1/3$

c) $3,5+(-2)^2:(-0,5)=$ R: $-4,5$

d) $(-1,2)^2\cdot 0,1+0,2^2=$ R: $0,184$

e) $(-3)^2\cdot[0,(3)]^3-1,(2)=$ R: $-8/9$

f) $4,(2):(-1,9)+|-0,(6)|^2=$ R: $-16/9$

g) $\dfrac{-4,8:3-(-2)^2}{\frac{1}{-0.5}}=$ R: 2,8

h) $\dfrac{2}{3}\cdot\left|-4+3\dfrac{1}{4}\right|:\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+3=$ R: $-1$

i) $\dfrac{-1,5:3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{(-0,5)^3}=$ R: 25

j) $\left[-1\dfrac{1}{2}:(-1,5)^3+2,(3)\right]\cdot 0,2=$ R: $\dfrac{5}{9}$

k) $\left[(-5)^2:\left(-2\dfrac{1}{2}\right)^2-5,3\right]:\left(-5\dfrac{1}{5}\right)=$

l) $\dfrac{\left[\frac{5}{4}\cdot 0,2-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4}{\frac{2,16:0,36}{1-(-3)^2}+1,(2)\cdot 0.(54)}=$

m) $\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5:\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-1\dfrac{1}{4}:(-5)\right]\cdot 3^{1980}=$

n) $\left[\dfrac{-4,5}{-0,03}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2-\left(-2\dfrac{1}{2}\right)^2\right]\cdot(-2)^3=$

o) $\left[196:0,07\cdot(-0,5)^2-5\dfrac{1}{3}\right]:\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=$

p) $\left[2\dfrac{1}{4}:\left(-\dfrac{1}{2}\right):(-3)^3+\left(-2\dfrac{1}{3}\right)\right]:(-2)^3=$

r) $\{(-0,375)\cdot(-2)^4\cdot[-0,0(6)]-1,2\}:\left(-\dfrac{1}{0,5}\right)^2+0,2=$

**6).** Să se calculeze :

a) $-\dfrac{1}{3}+4\dfrac{1}{2}=$ R : $4\dfrac{1}{6}$

b) $3\dfrac{1}{12}-4\dfrac{1}{18}+\dfrac{5}{24}=$ R : $-\dfrac{55}{72}$

c) $3,5-\left|3-4\dfrac{1}{2}\right|=$ R :2

d) $5\dfrac{1}{6}-6,2=$ R: $-1\dfrac{1}{30}$

e) $2\dfrac{1}{3}-\left(3+1\dfrac{1}{2}-5\right)=$ R: $2\dfrac{5}{6}$

f) $-5\dfrac{1}{3}\cdot\left(-6\dfrac{1}{2}\right)=$ R: $34\dfrac{2}{3}$

g) $-3\cdot 4\dfrac{1}{2}=$ R: $-\dfrac{27}{2}$

h) $2,5-4\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=$ R: $5\dfrac{1}{2}$

i) $\dfrac{1}{2}-2\cdot 2\dfrac{1}{2}=$ R: $-4\dfrac{1}{2}$

j) $5-\left\{4\dfrac{1}{3}-\left[5-\left(7,2-1\dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}=$ R: $8\dfrac{1}{30}$

k) $\left[\left(-\dfrac{5}{6}\right)^3\cdot(-0,3)^2\right]^2\cdot 4^5=$ R: $2\dfrac{7}{9}$

l) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^8\cdot 5^7+\left(-\dfrac{2}{10}\right)^3:\left(-\dfrac{2}{10}\right)^2+\left\{\left[\left(-\dfrac{1}{10}\right)^3\right]^2\right\}^0=$ R: $\dfrac{3}{5}$

7). Comparați :

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ cu $\left(\frac{1}{3}\right)^{25}$ b) $\left(\frac{7}{2}\right)^{5}$ cu $\left(3\frac{1}{2}\right)^{10}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{4}$ cu $\left(-\frac{2}{3}\right)^{11}$

d) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{13}$ cu $\left(-\frac{5}{3}\right)^{15}$ e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{6}$ cu $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$ f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{7}$ cu $\left(-\frac{2}{7}\right)^{7}$

g) $\left(2\frac{4}{5}\right)^{12}$ cu $\left(\frac{11}{5}\right)^{12}$ h) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{9}$ cu $\left(-\frac{7}{3}\right)^{9}$ i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ cu $\left(\frac{5}{9}\right)^{2}$

j) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$ cu $\left(-\frac{5}{9}\right)^{2}$ k) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{6}$ cu $\left(-\frac{5}{9}\right)^{4}$ l) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{45}$ cu $\left(-\frac{5}{9}\right)^{60}$

m) $1,2^2$ cu $1,1^3$ n) $(-1,2)^2$ cu $(-1,1)^3$ o) $(-1,2)^6$ cu $(-1,1)^9$ p) $(-1,2)^{20}$ cu $(-1,1)^{30}$

8). a) Să se afle fracția echivalentă cu 2/3, care are numitorul –15.

b) Să se scrie fracția echivalentă cu $\frac{4}{-5}$ care are numărătorul 12.

c) Să se scrie fracția echivalentă cu $\frac{-10}{25}$ care are numitorul –5.

9). a) Să se afle x, știind că $\frac{x}{-3}$ este echivalentă cu $\frac{12}{18}$.

b) Să se afle y, știind că $\frac{4,5}{y}$ este echivalentă cu $\frac{-5}{4}$.

***

10). Să se calculeze :

a) $\left|\frac{1}{6^{20}}-\frac{1}{2^{50}}\right|\cdot 4^{25}=$ R : $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}$ b) $\frac{(-2)^{270}+(-2)^{269}}{-2^{271}}=$ R : $-\frac{1}{4}$

11). Să se arate că următoarele fracții sunt reductibile :

a) $\frac{3^{100}+3^{102}-4\cdot 3^{101}}{-4}$ b) $\frac{8\cdot 3^{90}+2\cdot(-3)^{91}-5\cdot(-3)^{92}}{129}$

c) $\frac{4\cdot(-5)^{2n}+(-5)^{2n+1}-(-5)^{2n+2}}{39}$ d) $\frac{5^{n+2}-5^{n+1}+4\cdot 5^{n}}{6\cdot 3^{n}+3^{n+1}-2\cdot 3^{n+2}}$

e) $\frac{2^{n}\cdot(-3)^{2n+1}+2^{n+2}\cdot 9^{n+1}}{(-2)^{2n}\cdot 5^{n+1}+(-2)^{2n+1}\cdot 5^{n}}$ unde $n\in N$.

12). Să se arate că :

a) $\frac{2^{80}-5\cdot 2^{81}+7\cdot 2^{79}}{11}\in Z$ b) $\frac{2^{72}\cdot 5+2^{73}-6\cdot 2^{71}}{2^{74}}\in N$

c) $\frac{2^{80}+4^{39}-5\cdot 8^{27}}{7}\in Z$ d) $\frac{3^{n}+4\cdot 3^{n-1}-5\cdot 3^{n-2}}{8}\in Z$

13). Să se calculeze :

a) $\frac{5^{k}+10^{k+1}}{2^{k+1}+5\cdot 4^{k-1}}:2,5^{k}=$ R : $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4\cdot(-2)^{2n}+(-2)^{2n+2}}{4^{n}}=$ R : 8

b) $(-1)^n\ 5+(-1)^{n+1}\ 4-(-1)=$ R : 2 dacă n par; o dacă n impar

14). Să se arate că :

a) $\dfrac{(-2)^{2n}+5\cdot 4^{n+1}}{7}\in N$ b) $\dfrac{(-3)^{2n+3}+2\cdot(-3)^{2n+1}-(-3)^{2n}}{17}\in Z$

c) $\dfrac{3\cdot(-7)^{2n}+(-7)^{2n+1}+49^{n+1}}{15}\in N$

## Testul 1

5 2p 1). Să se calculeze :

a). $\left(-1\dfrac{3}{5}\right)^2$; b). $(-0,5)^3$; c). $3^{-2}$; d). $(-2)^{-2}$; e). $-3^{-2}$; f). $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3}$

2). Calculați :

5 1p a). $\dfrac{3}{4}-1\dfrac{1}{2}=$ ....... 5 1p b). $\dfrac{5}{6}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}=$ .......

7 0,5p c). $\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{2}{5}-0,3\right)+2\dfrac{1}{3}:\left(-\dfrac{7}{2}\right)=$ ....... 7 0,5p d). $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-1,(6)\right]:\left(-2\dfrac{1}{3}\right)=$ .......

7 0,5p e). $(2^{-2}+2^{-1})\cdot 3^{-1}=$....... 9 0,5p f). $[1,2^2-(-0,5)^3\cdot 10]\cdot 2+0,12=$ .......

7 0,5p 3). Ordonați numerele : $-3;\ -\dfrac{10}{3};\ -3,3$ ......

7 0,5p 4). Valoarea absolută a numărului : $a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{5}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$ este .......

9 1p 5). Găsiți x astfel încât : a). $-\dfrac{7}{8}<x<-\dfrac{7}{9}$, $x\in Q$, $x=$ .......

b). $\dfrac{7}{3}<x<\dfrac{7}{2}$, $x\in N$, $x=$ .......

10 1p 6). Calculați : $\dfrac{3^n+3^{n+1}+2\cdot 3^{n+2}}{5^{n+2}-8\cdot 5^n+5^{n+1}}$.

## Testul 2

5 4 1p 1). Calculați : a). $(-0,3)^3$; b). $2^{-5}$; c). $(-5)^{-2}$; d). $(-0,2)^{-2}$; e). $\left(-1\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$; f). $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}$; g). $-\dfrac{4}{3}:\left(-2\dfrac{2}{3}\right)$

7 1p 2). Ordonați crescător numerele : $-1,2;\ \dfrac{4}{5};\ -0,(3);\ -1\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{5};\ 0,1(3)$ este .......

7 1p 3). Calculând $\left|\dfrac{-2}{7}\right|+\left(-\dfrac{3}{4}\right)-(-0.5)$ se obține .......

9 2p 4). Să se calculeze : $-2,(3):\left[\left(\dfrac{1}{3}-1\right)+(-0.5)\right]-(-3)^{-2}\cdot\left(1\dfrac{1}{2}\right)^2=$ .......

10 1p 5). Să se demonstreze că $a\in N$ unde $a=\dfrac{-0,(6)\cdot\left(-2^2+3\dfrac{1}{4}\right):(-0,5)^3+3}{(-7)^2\cdot(3+0,5)^{-2}+\left[-2+\left(-2\dfrac{1}{4}\right)\right]}$

# Ecuații în Q

## NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește ecuație propoziția cu o variabilă în care variabila trebuie să verifice o egalitate
- se numește soluție a ecuației un număr sau mai multe numere care puse în locul variabilei formează o propoziție adevărată
- forma generală a unei ecuații de gradul I cu o necunoscută este : $ax + b = c$, unde $a, b, c \in Q$
- rezolvarea ecuației înseamnă găsirea soluțiilor : $ax + b = c \Leftrightarrow ax = c - b \Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$ , $a \neq 0$

## EXERCIȚII

*

1). Să se rezolve în mulțimea Q ecuațiile :

a) $x + 15 = -71$ b) $81 - x = -39$ c) $x + 7 = -9$ d) $\frac{x}{2} - 0{,}5 = -8{,}5$

e) $13 - x = -9$ f) $x + 19 = 3$ g) $4 - x = -10$ h) $x - 14 = -34$

i) $x - \frac{3}{8} = -4\frac{1}{2}$ j) $5 - x = 18$ k) $x - 5{,}6 = -2\frac{1}{2}$ l) $x - 3{,}5 = 0$

m) $4{,}2 - x = 0$ n) $x + \frac{5}{8} = 0$

2). Să se rezolve în Q :

a) $13x = -182$ b) $-\frac{1}{2}x = -8$ c) $-0{,}16x = 3{,}2$ d) $-0{,}5x = 2$

e) $4{,}8x = -9{,}6$ f) $x : (-3) = 6$ g) $x : 4 = -20$ h) $-15 : x = 3$

i) $16 : x = -8$ j) $(x + 3) : 2 = -8$ k) $(4x + 8) : (-4) = 5$ l) $-3x = 0$

3). Să se rezolve în Q :

a). $3 + x = 4\frac{1}{2}$ b). $8 - x = 3{,}4$ c). $x - 3{,}5 = 4\frac{1}{4}$ d). $2x = 9$ e). $-4x = 17$

f). $1\frac{1}{2} \cdot x = -8$ g). $7x = -0{,}56$ h). $x : 3\frac{1}{2} = 0{,}5$ i). $x : (-5) = \frac{3}{4}$

**

4). Să se rezolve în Q :

a) $9x + 3 = -156$ b) $15x + 9 = -201$ c) $-4{,}5x + \frac{1}{5} = -0{,}5$ d) $-6 + \frac{1}{2}x = 0{,}5$

e) $-\frac{x}{3} - 4 = 3\frac{1}{6}$ f) $4x - \frac{3}{4} = -2$ g) $\frac{5}{6} - 3x = 4\frac{1}{2}$ h) $-5x + 8 = 53$ i) $3{,}8 - 2x = 7$

j) $1{,}5 - 3x = -6$ k) $-\frac{2x}{3} + 1{,}2 = 4$ l) $0{,}5x + 3 = 0$ m) $-7x + 15 = 0$

5). Să se rezolve în Q :

a) $4\ (x + 1) - 3 = 17$ b) $7\ (2x + 3) - 15 = 34$ c) $3\ (6x + 4) - 11 = 73$

d) $5\ (2x - 3) + 1 = 26$ e) $7 + 3\ (3x + 6) = -34$ f) $3x + 6 = -22$

g) $2\ (x + 2) - 8 = -1$ h) $4 + 2\ (x + 3) = -16$

6). Să se rezolve în Q :

a). $-\frac{2x}{3} + 1{,}2 = 4$ b). $\frac{x}{2} + 3 = 2{,}5$ c). $-1\frac{1}{2}x - 3 = -14{,}5$

d) $2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x - 7{,}5$ e). $3(2x - 3) + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ f). $\frac{x}{2} = x + \frac{1}{3}$

g). $2\ (3x - 1) - x = 2\frac{1}{2} + x$ h). $4(x + 1) - 3(x + 2) = x$

7). Să se rezolve în Q :

a) $8x = x - 91$ b) $-3x - 7 = 9 - x$ c) $5x = -16 + x$ d) $-\frac{3x}{2} - 4{,}6 = -8$

e) $4x + 1{,}26 = x$ f) $-7x + 9 = -4x$ g) $-1{,}2x - 12 = 6 - 3x$

h) $-7x + \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(x + \frac{7}{4}\right)$ i) $3x + 2 = x - 16$ j) $5x + 6 = 2x$

k) $3x - 8 = x - 34$ l) $2\ (x + 1) - 3 = -12$ m) $4\ (x - 2) + 3 = x - 29$

8). Să se rezolve în Q :

a) $x = 3x - 12$ R: 6 h) $8\ (x - 7) = 8 - 6 \cdot (x + 1)$ R: $\frac{29}{7}$

b) $4x + 16 = 8x$ R: 4 i) $2 - 2\ (x - 3) = x + 10$ R: $-\frac{2}{3}$

c) $6x = 2x - 20$ R: $-5$ j) $18 - 5x = x$ R: 3

d) $0{,}5x = -2\ (12 + x)$ R: $\frac{48}{5}$ k) $9\ (2x + 2) - 17 = -15x - 7$ R: $-\frac{8}{33}$

e) $7x + 3 = 6x - 4$ R: $-7$ l) $7\ (x + 1) + 8 = 18 - 2\ (2x + 3)$ R: $-\frac{3}{11}$

f) $x + 30 = 4 + 2\ (x + 6)$ R: 14 m) $-5\ (x - 2) - 6 = -10 - 2\ (2x + 8)$ R: 30

g) $x + 5 = -5 + 5\ (x - 2)$ R: 5 n) $3\ (x + 6) - 15 = 6 - 2\ (x + 1)$ R: $\frac{1}{5}$

9). Să se rezolve în Q :

a). $3 \cdot (x - 1) + \frac{2x + 5}{3} = \frac{x}{6}$; b). $3 \cdot |x + 2| - 3 \cdot \left|4 - (-2)^3\right| = 0$; c). $\left(2\frac{3}{5} - 1{,}2\right) : x = -\frac{6}{25}$

10). Să se rezolve în Q :

a) $\frac{x - 1}{x + 2} = \frac{3}{4},\ x \neq -2$ b) $\frac{2x + 1}{4x + 7} = \frac{4}{10},\ x \neq -\frac{7}{4}$

c) $\frac{3x + 7}{x} = 2\frac{1}{3},\ x \neq 0$ d) $\frac{4x + 8}{2x} = 0,\ x \neq 0$

11). Să se rezolve :

a) $|2x| = 8$ b) $|3x + 1| = 9$ c) $|1 - 2x| = 9$ d) $2\ |x + 1| = 10$ e) $3\ |x + 2| - 17 = -8$

f) $2\ (5 - |x + 2| + 3) = 3$ g) $\frac{1}{2}|x + 1| = 5$ h) $10 : |x + 2| = 5$ i) $|2x + 5| : (-3) = -6\frac{1}{3}$

j) $\frac{|3x - 1|}{2} - \frac{1}{3} = 0$ k) $\frac{|x + 1|}{5} - \frac{2 \cdot |x + 1|}{3} = -1\frac{2}{3}$ l) $\frac{2}{5}|x - 1| + 6 = |x - 1|$

12). Să se afle x, y astfel încât :

a) $\frac{-12}{3x + 8}$ să fie echiunitară, $x \in Q$ b) $\frac{5}{2x + 1}$ să fie supraunitară, $x \in N$

c) $\frac{5x + 6}{6}$ să fie echiunitară, $x \in Z$ d) $\frac{4 + 5x}{12}$ să fie subunitară, $x \in N$

e) $\frac{2x + 5}{3x - 3}$ să fie echiunitară, $x \in Q$ f) $\frac{6}{xy}$ să fie echiunitară, $x, y \in N$

g) $\frac{7}{xy}$ să fie echiunitară, $x, y \in Z$ h) $\frac{11}{(x + 1)y}$ să fie echiunitară, $x, y \in Z$

* * *

13). Să se rezolve în Q :

a) $3x = 0,2 \cdot (x-1) - 16$ R: $-\frac{81}{14}$

d) $4 \cdot (x-9) + 6 = 12 - 6 \cdot (x-3)$ R: 6

b) $7 \cdot (x-8) + 39 = 2 \cdot (3x-8)$ R: 1

e) $0,3x - \frac{2}{5}(x-3) = \frac{3}{4}x$ R: $\frac{24}{17}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x+1}{2} = 5 - \frac{4-x}{2}$ R: $-\frac{17}{6}$

f) $3,2 \cdot (5x+1) = 5,2 - (3-17x)$ R: 1

g) $\frac{5x-2}{3} + \frac{x+8}{4} = 2 - \frac{x+14}{2}$ R: $-\frac{76}{29}$

h) $3x - \frac{1}{5}(2x+1) = \frac{1}{2}(x-2)$ R: $-\frac{8}{21}$

i) $1,(3) - \frac{1}{2}(2x+1) = \frac{4x+2}{3}$ R: $\frac{1}{14}$

j) $5 - 2x - \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5x-6}{4}$ R: $\frac{5}{3}$

k) $3,2 \cdot (x+5) - \frac{x}{2} = \frac{3x+1}{5}$ R: $-\frac{158}{21}$

l) $0,7x - \frac{x+1}{2} = 3 \cdot [0,(4)x - 1,(3)]$ R: $\frac{105}{34}$

m) $-5\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot (2x-3) = 3 - 5 \cdot (0,6x - 0,3)$ R: $-\frac{5}{6}$

14). Să se rezolve în Q :

a) $2 \cdot (x+1) - 5x = 4 - 3 \cdot (x+1)$

b) $5 \cdot (2x+3) + 1 = 2 \cdot (4x+5) + 2x$

c) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{2x+3}{3}$

d) $3 \cdot (x+0,2) - 2x = \frac{3x+1}{3}$

e) $5 - 2 \cdot (4x-3) = 4 \cdot (-2x) - 1$

f) $0,5 \cdot (4x+6) = \frac{x+1}{2} + 1\frac{1}{2}x$

15). Să se rezolve în Q :

a) $5x - 8 = 4 - 2 \cdot (1-2x)$

b) $\frac{x+3}{2} - 2 \cdot (x+1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

c) $7 - 5x = 0,3x - 1$

d) $5 \cdot (2x-1) - 3 = 2 \cdot (4x+1)$

e) $\frac{2x+1}{3} - 2x = 4 - 2 \cdot (x+1) - 2\frac{1}{3}$

16). Să se rezolve în Z :

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{5}{6}$ R: −2

b) $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(2x-3) = 1\frac{5}{6}$ R: 0

c) $3x - 6 = 5x - 14$ R: 4

d) $2 \cdot (x+1) - 5 = \frac{x}{2} + \frac{3 \cdot (x-2)}{2}$ R: $x \in Z$

e) $\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{4}{6},\ x \neq \frac{2}{3}$ R: $x \in \varnothing$

f) $4 - 2 \cdot (x-3) = \frac{4}{3}(1-x) - \frac{2x}{3}$ R: $x \in \varnothing$

17). Să se determine elementele mulţimilor :

$A = \left\{ x \in N \mid 2x+1 \leq 4\frac{1}{2} \right\}$

$B = \{ x \in Z \mid -3 \leq 2x+1 \leq 5 \}$

$C = \left\{ x \in N \mid -2\frac{1}{2} < x+2 \leq 4 \right\}$

$D = \{ x \in Z \mid |x+3| \leq 5 \}$

$E = \{ x \in Z - N \mid |2x+1| \leq 3 \}$

$F = \left\{ x \in Q - Z \mid \frac{5x}{2} - 2 \cdot (x+1) = x - 2 \right\}$

## Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

*

1). Un număr este de trei ori mai mare decât altul. Să se afle numerele știind că suma lor este $-18\frac{2}{3}$.

2). Un număr este egal cu 2/3 din altul. Să se afle numerele dacă primul este cu 1/4 mai mare decât al doilea.

3). Un număr este de cinci ori mai mic decât altul .Să se afle numerele dacă diferența lor este $-5\frac{1}{7}$.

4). Să se afle două numere dacă primul reprezintă 65% din al doilea și suma lor este $-2\frac{1}{5}$.

5). Să se afle două numere dacă primul reprezintă 120% din al doilea și este cu 4/25 mai mic decât al doilea.

6). Să se afle un număr știind că 2/5 din el este cu 2 mai mare decât dublul numărului.

7). Să se afle un număr dacă 75% din el adunat cu 2/7 din el se obține $-2\frac{5}{12}$.

8). Să se afle un număr dacă adunat cu $1\frac{1}{2}$ se obține cu $2\frac{1}{8}$ mai mult decât dublul numărului.

9). Să se afle un număr dacă media aritmetică dintre el și $-1\frac{1}{2}$ este $-\frac{3}{8}$.

10). Media aritmetică a trei numere este $-1/15$. Să se afle numerele știind că primul număr este 20% din al doilea și al treilea este 0,4.

11). Media aritmetică a trei numere este 0,7. știind că primul este 2/5 din al doilea și al treilea este 75% din suma primelor două, să se afle numerele.

12). Media aritmetică a trei numere este –6,2. Primul este $1\frac{2}{3}$ din al doilea și al doilea este 40% din al treilea. Să se afle numerele.

13). Media aritmetică a patru numere este $2\frac{1}{4}$. Primul este cu 1/2 mai mare decât dublul celui de-al doilea. Al treilea este 60% din al doilea și al patrulea este cu $1\frac{1}{2}$ mai mare decât al treilea. Să se afle numerele.

14). Să se afle un număr dacă media armonică dintre el și 2 este 3.

15). Să se afle patru numere întregi consecutive dacă suma ultimelor trei este 0.

16). Să se afle 5 numere consecutive dacă cel mai mare este o cincime din cel mai mic.

17). Să se afle patru numere întregi consecutive dacă media lor aritmetică este $-8\frac{1}{2}$.

18). Să se afle trei numere consecutive întregi dacă media aritmetică a ultimelor două este –3,5.

19). Să se afle cinci numere întregi consecutive dacă media aritmetică dintre primul, al doilea și al cincilea este $-7\frac{1}{3}$.

20). Să se afle patru numere întregi consecutive dacă media aritmetică dintre 1/5 din primul număr și 3/2 din al treilea este $-1\frac{9}{10}$.

21). Trei numere sunt direct proporționale cu numerele 2, 4, 5 și media aritmetică a primelor două este cu 5 mai mare decât primul număr. Să se afle numerele.

22). Trei numere sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 6 și al treilea este cu 3,(3) mai mare decât media aritmetică a primelor două numere. Să se afle numerele.

23). Trei numere sunt invers proporționale cu numerele 0,5; 0,2; 0,1(6) și al doilea este cu 15 mai mare decât media aritmetică a celorlalte două. Să se afle numerele.

24). Să se afle trei numere consecutive naturale, invers proporționale cu numerele : 0,125; 0,(1); 0,1.

* *

25). Media aritmetică a trei numere este 0,8, al doilea este cu 7 mai mare decât 20% din primul și al treilea este media aritmetică a celorlalte două. Să se afle numerele.

26). Dupa două reduceri de preț cu 5% respectiv 25%, o marfă costă cu 29,44 lei mai puțin decât prețul inițial. Care a fost prețul inițial ?

27). Marfa dintr-un depozit s-a vândut în trei zile astfel : în prima zi s-a vândut cu 12,05 mai puțin decât 34% din marfă, în a doua zi cu $1\frac{2}{5}$ mai mult decât 0,(2) din marfă, iar în a treia zi cu 46,08(3) mai mult decât 0,(6) din marfa vandută în primele două zile la un loc. Ce cantitate de marfă era în depozit ?

## Testul 1

5 2p 1). Dacă $\frac{x}{2} = 6{,}5$ atunci x = .......

5 2p 2). a). 35% din 700 este ....... b). 5% din x = 35 => x = .......

7 0,5p 3). Dacă x + y = 20 iar x și y sunt direct proporționale cu 2 și 3 => x = ....... și y = .......

7 1p 4). Dacă media aritmetică a numerelor x, y și z este 6 și ele sunt invers proporționale cu 2; 3 și 6 => x = .......; y = .......; z = .......

7 0,5p 5). Soluția ecuației $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} = \frac{11}{3}$ este egală cu .......

9 1p 6). Dacă $x = \frac{2}{25}y$ aflați : a). cât la sută este x din y ?
b). cât la sută este x din x + y ?

9 1p 7). Dacă media aritmetică ponderată a numerelor 2,4; x și 4 cu ponderile x; 0,2 și 0,(6) este 2 aflați-l pe x.

10 1p 8). Aflați elementele mulțimii: $A = \left\{ x \in Z \,\middle|\, \frac{-3}{x+1} \in N \right\}$ = .......

## Testul 2

5 2p 1). Dacă $\frac{x}{6} = \frac{12}{9}$, atunci x = .......

5 2p 2). a). 25% din 70.000 lei este ....... b). 3% din x = 42 => x = .......

7 0,5p 3). Soluția reală a ecuației 8 + 2(x + 3) = 4x este .......

7 0,5p 4). Dacă $\frac{y}{x} = 12{,}5$, să se afle cât la sută reprezintă x din y.

7 1p 5). Să se compare media aritmetică a numerelor $\frac{3}{2}; \frac{1}{5}$; 0,4; 0.3 cu media aritmetică ponderată a numerelor $0.2; \frac{3}{10}; \frac{4}{5}$ având ponderile 5, 6 respectiv 4.

9 1p 6). Să se afle un număr rațional știind că dacă se micșorează cu 11 și apoi rezultatul se triplează se obține suma dintre $1\frac{1}{2}$ și 25% din număr.

9 1p 7). Dacă x = 75% din y atunci $\frac{2x}{3y - 2x}$ = .......

10 1p 8). Aflați elementele mulțimii : $A = \left\{ x \in Z \,\middle|\, \frac{2x+1}{x-1} \in Z \right\}$.

# Capitolul V
# Numere reale

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numesc numere iraționale acele numere care scrise zecimal au o infinitate de cifre în dreapta virgulei care nu se repetă periodic.
- definim mulțimea numerelor reale ca fiind reuniunea dintre mulțimea Q a numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.
- reguli de calcul în R :

$a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$ , $b \ge 0$ $\qquad$ $a\sqrt{b}-c\sqrt{b}=(a-c)\sqrt{b}$ , $b \ge 0$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ , $a \ge 0$ , $b \ge 0$ $\qquad$ $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$ , $a \ge 0$ , $b > 0$

- scoterea factorilor de sub radical se efectuează folosind : $\sqrt{a^2}=|a| \Rightarrow \sqrt{a^2\cdot b}=|a|\sqrt{b}$
- introducerea sub radical se efectuează astfel : $a=\sqrt{a^2}$ , $a>0$

$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$ , $a>0$ , $b>0$

## Rădăcina pătrată din număr natural

✽

**1).** Să se calculeze :

a) $\sqrt{16}+\sqrt{25}=$ R: 9 $\qquad$ b) $\sqrt{9}-\sqrt{4}-\sqrt{0}=$ R: 1

c) $\sqrt{81}-\sqrt{100}+2\cdot\sqrt{4}=$ R: 3 $\qquad$ d) $-\left(\sqrt{25}+\sqrt{16}\right)+2\cdot\sqrt{36}=$ R: 3

e) $\sqrt{49}-\sqrt{64}+2\cdot\left(\sqrt{1}-\sqrt{9}\right)=$ R: –5 $\qquad$ f) $2\cdot\sqrt{100}:\sqrt{16}+\sqrt{4}=$ R: 7

g) $\sqrt{64}:\left(\sqrt{16}-\sqrt{36}\right)=$ R: –4

**2).** Calculați :

a) $\sqrt{361}$ ; b) $\sqrt{529}$ ; c) $\sqrt{729}$ ; d) $\sqrt{196}$ ; e) $\sqrt{625}$ ; f) $\sqrt{484}$ ; g) $\sqrt{841}$ ; h) $\sqrt{784}$ ; i) $\sqrt{324}$ ; j) $\sqrt{169}$ ; k) $\sqrt{961}$ ; l) $\sqrt{1089}$ ; m) $\sqrt{1369}$ ; n) $\sqrt{2304}$ ; o) $\sqrt{1681}$ ; p) $\sqrt{11449}$ ; r) $\sqrt{3969}$ ; s) $\sqrt{20736}$ ; t) $\sqrt{82944}$ ; u) $\sqrt{186624}$ ; v) $\sqrt{1016064}$ .

✽✽

**3).** Calculați :

a) $\left(-3\cdot\sqrt{100}+2\cdot\sqrt{144}:\sqrt{36}\right):\sqrt{169}=$ $\qquad$ b) $\dfrac{\sqrt{1444}}{\sqrt{361}}+\dfrac{15}{\sqrt{16}}=$

c) $\left(\sqrt{225}+\sqrt{169}\right):\left(-\sqrt{16}\right)=$ $\qquad$ d) $\sqrt{(-5)^4}-\sqrt{10^2}+\sqrt{121}=$

e) $\sqrt{2^4\cdot3^2}-\sqrt{5^2\cdot2^6}+\sqrt{4^4\cdot1^5}=$ $\qquad$ f) $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{64}}+\dfrac{\sqrt{529}}{2}=$

g) $\sqrt{(-2)\cdot(-4)\cdot18}+\sqrt{(-81)\cdot(-4)}-\sqrt{5^2\cdot4^2}=$

**4).** Calculați :

a) $\left(\sqrt{16}-\sqrt{256}\right):\left(+\sqrt{9}\right)=$ R: –4 $\qquad$ b) $\left(3\sqrt{81}-\sqrt{25}\right):(-11)=$ R: –2

c) $\sqrt{\sqrt{144}:\left(-\sqrt{9}\right)+20}=$ R: 4 $\qquad$ d) $\sqrt{\left(\sqrt{100}+\sqrt{64}\right):2}=$ R: 3

e) $\left(\sqrt{(-2)^4}-\sqrt{324}\right):(-7)+2=$ R: 4 $\qquad$ f) $\sqrt{\sqrt{81}-\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)}=$ R: 1

**5).** Să se rezolve în Z :

a) $2x+\sqrt{25}=\sqrt{49}$ R: 1 $\qquad$ b) $\sqrt{100}-3x=\sqrt{16}-6$ R: 4

c) $4\left(x+\sqrt{4}\right)=-\sqrt{4}$ R: $\varnothing$ $\qquad$ d) $\sqrt{64}-2x=-\sqrt{4}$ R: 5

e) $5\cdot(x+2)-\sqrt{81}=\sqrt{36}$ R: 1 f) $\sqrt{121}-x=\sqrt{144}$ R: $-1$

**6).** Să se rezolve în Z :

a) $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}}=\dfrac{2+x}{\sqrt{9}}$ R: 7 b) $\dfrac{\sqrt{100}}{x+1}=\dfrac{13}{\sqrt{4}}$ R: $\varnothing$

c) $\dfrac{x\sqrt{36}}{\sqrt{9}}=\dfrac{-16}{\sqrt{4}}$ R: $-4$ d) $\dfrac{2\sqrt{16}}{x\cdot\sqrt{9}+1}=\dfrac{1}{2}$ R: 5

e) $\dfrac{\sqrt{324}}{28:\sqrt{49}}=\dfrac{x}{\sqrt{100:5}}$ R: 9 f) $\dfrac{2x}{\sqrt{144}-\sqrt{4}}=\dfrac{1}{-\sqrt{25}}$ R: $-1$

g) $\dfrac{\sqrt{196}-\sqrt{64}:2}{3x+2}=18:\sqrt{9}$ R: $\varnothing$ h) $\dfrac{\left(\sqrt{25}+\sqrt{9}\right)\cdot\sqrt{4}}{-2+\sqrt{49}-\sqrt{1}^{0}}=\dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{256}}{1+2x}$ R: $-2$

**7).** Să se calculeze :

a) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{9}}{4}\right)\cdot\left(-\sqrt{64}\right):\dfrac{\sqrt{25}}{3}=$ b) $-3\cdot\left(-\sqrt{25}-\sqrt{49}\right)+\sqrt{0}-\sqrt{9}:\sqrt{1}=$

c) $\sqrt{100}-2\cdot\sqrt{81}+\sqrt{4}:(-2)=$ d) $\left|\sqrt{36}-2\cdot\sqrt{64}\right|:\sqrt{4}+5\cdot\sqrt{9}=$

e) $\sqrt{2^2+3\cdot2^2}-\sqrt{36:(-2)^2}=$

**8).** Să se calculeze :

a) $\left(\sqrt{9}-\dfrac{\sqrt{(-2)^4}}{3}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{25}}\right):\dfrac{14}{\sqrt{(-5)^2}}:\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=$

b) $\left(\dfrac{\sqrt{25}}{3}-\sqrt{1}\right)\cdot\dfrac{(-3)}{\sqrt{16}}-(-2)\cdot\dfrac{3}{\sqrt{64}}=$ c) $\left[\dfrac{1}{3}-\sqrt{4}\cdot\left(1-1\dfrac{1}{2}\right)\right]:\left(-\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{81}}\right)=$

d) $\left(1\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\right)^2:\dfrac{1}{\sqrt{|-16|}}=$ e) $\dfrac{\sqrt{4}-2\cdot\sqrt{9}}{2\sqrt{36}}=$

**9).** Calculați :

a) $\dfrac{\sqrt{484}}{\sqrt{1089}}\cdot(-3)^2+1=$ R: 7 b) $\dfrac{\sqrt{2601}}{34}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{16}}=$ R: $\dfrac{3}{8}$

**10).** Să se calculeze :

c) $\dfrac{\sqrt{2116}}{23}\cdot\left(\dfrac{1}{-2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1=$ R: 0 d) $\sqrt{3^2+(-4)^2+(-3)^2\cdot(-4)^2}=$ R: 13

e) $\sqrt{(-25)\cdot(-7)-150:(-5)^2}=$ R: 13 f) $\dfrac{\sqrt{3136}}{\sqrt{49}}:(-2)^4+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1=$ R: 0

g) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{64}}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=$ R: $-\dfrac{5}{27}$

**11).** Să se afle x din proporțiile :

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{144}}$ R : 21 b) $\dfrac{\sqrt{\left(0{,}25+2\dfrac{1}{8}\right)\cdot\dfrac{32}{19}}}{3}=\dfrac{9}{2(x+2)}$ R : $\dfrac{19}{4}$

**12).** Să se calculeze :

a) $\sqrt{\sqrt{7569}:3-(-5)^2}=$ R : 2  b) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{25}}}}+\sqrt{15625}}{13}-\sqrt{100}=$ R : 0

c) $\dfrac{\sqrt{|-5|^4-(-3)^3}}{26}-|-2|=$ R : 0

## Rădăcina pătrată din număr rațional

*

**1).** Calculați :

a). $\sqrt{2,89}$  b). $\sqrt{24,01}$  c). $\sqrt{1,3924}$  d). $\sqrt{19,36}$  e). $\sqrt{16,81}$

f). $\sqrt{0,1156}$  g). $\sqrt{1,2544}$  h). $\sqrt{0,046656}$  i). $\sqrt{0,9216}$  j). $\sqrt{56,25}$

k). $\sqrt{1,5625}$  l). $\sqrt{0,038416}$  m). $\sqrt{18,49}$  n). $\sqrt{0,0441}$  o). $\sqrt{0,331776}$

**2).** Calculați :

a). $\sqrt{3\frac{6}{25}}$  b). $\sqrt{2\frac{4}{16}}$  c). $\sqrt{4\frac{29}{49}}$  d). $\sqrt{2\frac{7}{9}}$  e). $\sqrt{0,(4)}$

f). $\sqrt{2\frac{14}{25}}$  g). $\sqrt{4+\frac{25}{36}}$  h). $\sqrt{1+0,(7)}$  i). $\sqrt{\frac{1}{5}:0,2}$  j). $\sqrt{0,(3):3}$

**

**3).** Să se calculeze :

a). $\left[\left(\sqrt{\frac{64}{25}}-2\right)\cdot 1\frac{7}{8}+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)^2=$  b). $\dfrac{-\sqrt{30\frac{1}{4}+4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13}}}{\frac{31}{(-3)^2}}+[-0,25+0,(3)]\cdot(-1,2)=$

c). $\dfrac{-\frac{5}{6}:[3,5-4,(3)]}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:5\right)\cdot\frac{2}{5}}}=$

**4).** Să se rezolve în Q :

a). $x\sqrt{\frac{16}{25}}-x\cdot\sqrt{\frac{1}{(-5)^2\cdot 4}}=14$ ;  b). $\sqrt{4}\cdot\left(x+\frac{5}{6}\right)-4(x-1)=\sqrt{\frac{1}{9}}$ ;

c). $\dfrac{x+1}{4x+7}=\sqrt{0,04}, x\neq-\frac{7}{4}$  d). $\dfrac{1+2x}{3x+2}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}, x\neq-\frac{2}{3}$

**5).** Calculați :

a). $\sqrt{1}-\sqrt{4}-\dfrac{1}{\sqrt{0,64}}=$ R : $-\frac{9}{4}$  b). $\left[\sqrt{1,21}-1,(3)\right]:0,4(6)=$ R : $-\frac{1}{2}$

c). $\sqrt{146,41}:1\frac{5}{6}=$ R : 6,6  d). $\dfrac{\sqrt{3,24}-2}{\sqrt{25}}:\dfrac{1}{\sqrt{(-10)^2}}=$ R : $-\frac{2}{5}$

e). $\dfrac{-8:2^2+3,002}{-\sqrt{4,016016}}$ R : $-\frac{1}{2}$  f). $\dfrac{(-2)^3\cdot\sqrt{1194,3936}}{9\cdot 10^4\cdot(0,04)^2}=$ R: $-1,92$

g). $\left(\dfrac{3}{\sqrt{441}}-\dfrac{5}{14}\right):\sqrt{0,25}-\dfrac{(-2)^4}{\sqrt{49}}=$ R : $-\frac{19}{7}$

**6).** Să se calculeze :

a). $\sqrt{0,9 : 10} =$ b). $\sqrt{20 \cdot 0,02 : 10} =$ c). $\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} : 5\right) \cdot \frac{2}{3}} =$

d). $\sqrt{\frac{1,5 + 1,05 \cdot 2}{10}} =$ e). $\sqrt{150 + (-6)^9 : (-6)^8} =$ f). $\sqrt{\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^4} =$

g). $\sqrt{\left(-2,5 + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{45}\right)} =$ h). $\sqrt{\frac{3^2}{2^4}} + \sqrt{\frac{81}{16}} =$ i). $\sqrt{\frac{-9}{-25}} + \sqrt{\frac{(-7)^2}{100}} + \sqrt{\frac{1}{4}} =$

j). $\sqrt{\frac{-27}{-12}} + \sqrt{\frac{72}{50}} - \sqrt{\frac{20}{45}} =$ k). $-2 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{200}{8}} =$ l). $\sqrt{\frac{(-3) \cdot (-12)}{25}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{121}{(-10)^2}} =$

**7).** Să se calculeze :

a). $\sqrt{81 \cdot 16} =$ b). $\sqrt{49 \cdot 121} =$ c). $\sqrt{144 \cdot 9} =$ d). $\sqrt{25 \cdot 1,44} =$

e). $\sqrt{169 \cdot 289} =$ f). $\sqrt{1,96 \cdot 0,36} =$ g). $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} =$ h). $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} =$

i). $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} =$ j). $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$ k). $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} =$ l). $\sqrt{18} : \sqrt{20} =$

m). $\sqrt{24} : \sqrt{6} =$ n). $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - 3 =$ o). $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}} - \frac{1}{3} =$ p). $\frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{9}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{100}}\right) =$

r). $\sqrt{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 8 \cdot \sqrt{125}} - 2 \cdot (-5)^2 =$ s). $\sqrt{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} =$

**8).** Să se rezolve în Q :

a). $\frac{x}{\sqrt{36}} = \sqrt{9}$ b). $\frac{2,5}{3\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2,25}}{x}$ c). $\frac{1}{\sqrt{1.44}} = \frac{\sqrt{0,36}}{x}$ d). $\frac{3,4}{\sqrt{2,89}} = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{43}{441}}}$

e). $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{0.36}}{x}$ f). $\frac{x}{\sqrt{0.25}} = \frac{\sqrt{64} : \sqrt{4}}{-2}$ g). $\frac{3x + 2}{\sqrt{0,(1)}} = \frac{\sqrt{16}}{\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5}}$ h). $\frac{2x + 3}{-2\frac{1}{5}} = \frac{0,27}{\sqrt{56,25}}$

**9).** Să se rezolve în Q :

a). $\frac{2x + 3}{\sqrt{12,25} + \frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{9}}$ b). $3x : \sqrt{\frac{9}{225}} = \frac{(-2)^2 - 5^0}{\sqrt{81}}$ c). $0,2 : \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6\frac{4}{16}}}$

d). $\frac{\sqrt{3^2 + (-2)^4 + 3 \cdot (-5)^2}}{x \cdot \sqrt{16}} = 2\frac{1}{2}$ e). $\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{8} + 0,25 - \frac{5}{6}\right) : \left(-1\frac{1}{3}\right)}}{x} = \sqrt{256} : \sqrt{144}$

f). $\left(\sqrt{\left|3^2 - 5^2\right|} + \sqrt{25}\right) : \sqrt{9} =$ R : 3 g). $\sqrt{2^2} - \sqrt{3^4} + \sqrt{(-5)^2} =$ R : −2

h). $\sqrt{6^2} + \sqrt{(-3)^4} - \sqrt{13^2} =$ R : 2 i). $\left(\frac{\sqrt{4}}{3} - \frac{\sqrt{9}}{2}\right) \cdot (-2)^3 : \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{(-3)^2}} =$ R : 4

**10).** Calculați :

a). $\sqrt{5184}$ b). $\sqrt{84,64}$ c). $\sqrt{36,3609}$ d). $\sqrt{\frac{1296}{1764}} \cdot \sqrt{50 + 60\frac{1}{4}}$

* * *

**11).** Să se afle $x \in Z$ :

a). $\sqrt{\frac{9}{x}} \in N, x \neq 0$ b). $\sqrt{\frac{-12}{x}} \in N, x \neq 0$ c). $\sqrt{\frac{72}{x}} \in N, x \neq 0$ d). $\sqrt{\frac{-96}{x}} \in N, x \neq 0$

e). $\sqrt{\frac{45}{|x|}} \in N, x \neq 0$ f). $\sqrt{\frac{50}{|x+1|}} \in N, x \neq -1$ g). $\sqrt{\frac{-108}{3x+3}} \in N, x \neq -1$ h). $\sqrt{\frac{34}{|3x+1|}} \in N, x \neq -\frac{1}{3}$

**12).** Dacă $x > 0$, să se calculeze :

a). $\sqrt{x^2} + |2x| + |x+1| =$ b). $\sqrt{(x+1)^2} - |x| =$ c). $|2x+1| - \sqrt{4x^2} =$

**13).** Dacă $x \leq 0$, să se calculeze :

a). $\sqrt{x^2} - |-x| =$ b). $|x^2| + |x-4| + \sqrt{4x^2} =$ c). $|5-x| - 2\left|\frac{x}{2}\right| - \sqrt{(x-1)^2} =$

**14).** Să se determine elementele mulţimilor :

$A = \{x \in N \mid x < \sqrt{17}\}$ $B = \{x \in N \mid |x| \leq \sqrt{25}\}$ $C = \{x \in Z \mid |x| < \sqrt{5,6}\}$

$D = \left\{x \in Z - N \mid |x| < \sqrt{\frac{22}{2}}\right\}$ $E = \left\{x \in Z \mid |2x+1| < \frac{11\cdot\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}\right\}$

**15).** Să se calculeze :

a). $\left(\frac{3,15}{\sqrt{12,25}} - \sqrt{12,96}\right) : (0,3)^2 - \frac{1}{\sqrt{0,2^4}} =$ b). $\frac{\sqrt{11,56}}{\sqrt{2,89}} - \frac{3,12}{\sqrt{0,0169}} : \frac{1}{(-0,5)^2} =$

c). $\left(\sqrt{\frac{8,2944}{2}} - 1,1^2\right) : \sqrt{0,9216} =$ d). $\frac{\left[\frac{4,32}{6\cdot\sqrt{0,6561}} + \frac{1,(7)}{(-1)^3}\right] : [-0,(4)]}{\sqrt{\frac{6,76}{0,4} : 0,1 - \frac{-1}{[-0,(3)]^2}}} =$

e). $\frac{\left[(-4,8):(-5):(-2)^4 - \sqrt{0,0256}\right] : \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - \sqrt{\frac{42,25}{4}}}{\sqrt{5,0625}} =$

f). $\frac{\left[\sqrt{12,25} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(-3)^3}{2}\right] : \left(-\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^2 - 3,(8)}{(-2)^7 \cdot 1,(2) : \sqrt{7744}} =$

g). $\frac{\left(\sqrt{17,4724} : \frac{1,1}{0,1} - 0,116 : \sqrt{0,0841}\right)^2 : \left(-\frac{1}{10}\right)^3}{\sqrt{0.0064}} =$

h). $\frac{7^0 + \left(\sqrt{26.01} : \sqrt{0,0289} - \sqrt{1324,96} : \sqrt{1,96}\right) : (-1,5)^2}{2,(8) : \sqrt{1.69}} =$

i). $\frac{\frac{\sqrt{4\cdot\sqrt{33,1776}}}{(-0,2)^3} + \left(\frac{1}{0,04}\right)^2}{(-5)^2} =$ j). $\frac{\frac{\sqrt{26,3169}}{0.0361} - \frac{1}{(-0,2)^2}}{\frac{1,96}{\sqrt{0,49}} + \frac{(-2)^5\cdot(-4)^2}{(-0,6)^2} : \left[0,(4)\cdot(-10)^3\right]} =$

**16).** Să se calculeze :

a). $\sqrt{\left[\sqrt{3,24}:3-0,(3)\right]\cdot\frac{15}{16}}=$ b). $\sqrt{\sqrt{7056}:\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{16}}}-(-15)\cdot(-2)^2}=$

c). $\sqrt{\frac{\sqrt{52,2729}-\sqrt{9,7344}}{3}-|-0,56|}=$ d). $\frac{\sqrt{4,3681}+\sqrt{15,2881}-\sqrt{26,2144}}{11\sqrt{0,16}}=$

e). $\sqrt{\frac{\sqrt{0,056644}+\sqrt{0,169744}}{1,3}:200}=$ f). $\sqrt{\sqrt{\frac{\left(\sqrt{10,1124}+\sqrt{81,3604}\right)\cdot 10+11^2}{3}}}=$

## Testul 1

1). Calculați : 5 2p a). $\sqrt{4}-\sqrt{16}+\sqrt{25}-\sqrt{36}=$ .......

5 2p b). $\left(\sqrt{100}-\sqrt{144}\right)\cdot\left(\sqrt{49}-\sqrt{81}\right)=$ ....... 7 1p c). $\frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{441}}\cdot\left(\sqrt{625}\right)^{-1}=$ .......

7 1p 2). Ordonați numerele : $\sqrt{2}; 1,41; 1,(41)$

7 1p 3). Aproximați prin lipsă cu o eroare de $\frac{1}{10}$ numărul $\sqrt{5}$.

9 1p 4). Dacă $A=\sqrt{5,76}\cdot 0,5-1,1^2$ și $B=\frac{4}{5}\cdot\sqrt{2,56}-\sqrt{1,96}$, calculați $\frac{A}{B}$.

10 1p 5). Dacă a). $n<\sqrt{31}<n+1$, $n\in N \Rightarrow n=$ ....... b). $n<-\sqrt{8}<n+1$, $n\in Z \Rightarrow n=$ .......

c). $\frac{9}{5}<\sqrt{n}<\frac{9}{4}$, $n\in N \Rightarrow n=$ .......

## Testul 2

5 2p 1). Calculați : $\sqrt{95481}=$ .......

5 2p 2). Calculați : $\sqrt{10,6276-5}=$ .......

7 1p 3). Știind că $\frac{x}{\sqrt{1024}}=\sqrt{1+\frac{57}{64}}$, să se afle x.

7 1p 4). Soluția întreagă a ecuației : $x\sqrt{25}-x\sqrt{8\cdot 2^5}=\sqrt{729}$ este .......

9 1p 5). Să se calculeze cu o precizie de o sutime prin adaos : a). $3-\sqrt{5}=$ ....... b). $\frac{4}{5}+\sqrt{2}=$ .......

6). Calculați : 9 1p a). $\sqrt{0,(1)+\sqrt{0.0625}+0.08(3)}+\sqrt{0,(1)}$

10 1p b). $\left[(-6)^2-\sqrt{\sqrt{3,24}+1237,24}\right]:\sqrt{0.64}$

## Mulțimea numerelor reale

*

**1).** Fie mulțimea $A=\left\{-3; 2\frac{1}{3}; -0,1(4); \sqrt{0,(1)}; -\frac{87}{3}; \sqrt{289}; \sqrt{48}\right\}$. Calculați : $A\cap N$; $A\cap Z$; $A\cap(Z-N)$; $A\cap Q$; $A\cap(Q-Z)$.

**2).** Fie mulțimea $\left\{4; 2,3; \frac{0}{7}; (0,1)^{-2}; \sqrt{1\frac{9}{16}}; (-3)^3; \sqrt{50}\right\}$. Calculați : $B\cap N$; $B\cap Z$; $B\cap(Z-N)$;

$B \cap Q$; $B \cap (Q - Z)$; $B \cap R$; $B \cap (R - Q)$.

******

3). Daţi un exemplu de $x \in Q$ astfel încât : a). $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ b). $-\sqrt{40} < x < -\sqrt{30}$

4). Găsiţi $x \in Z$ dacă : a). $\sqrt{20} < x < \sqrt{30}$ b). $-4\sqrt{3} < x < -2\sqrt{7}$

5). Daţi un exemplu de numere $x \in R - Q$ dacă :

a). $1 < x < 2$ b). $5 < x < 6$ c). $-\frac{9}{2} < x < -\frac{13}{4}$ d). $-\frac{9}{2} < x < -\frac{13}{4}$

6). Aşezaţi următoarele numere între două numere întregi consecutive : a). $\sqrt{2}$ ; b). $2\sqrt{3}$ ; c). $\sqrt{5}+1$ ; d). $\sqrt{20}$ ; e). $3\sqrt{2}-1$ ; f). $\sqrt{29}$ ; g). $\sqrt{50}$ ; h). $-2\sqrt{2}$ ; i). $4-\sqrt{5}$ ; j). $-6+\sqrt{3}$ ; k). $-7\sqrt{2}$ ; l). $-\sqrt{30}$ ; m). $-\sqrt{40}$ .

7). Fie numărul $x = \sqrt{4k+1}$ , $k \in N$.

a). Daţi 3 exemple de $k \in N$ astfel încât $x \in N$. b). Daţi 3 exemple de $k \in N$ astfel încât $x \in R - Q$.

8). Aflaţi $k \in N$ dacă $\sqrt{\frac{72}{k}} \in N$.

9). Aflaţi cele mai mici trei valori ale lui $k \in N$ astfel încât $\sqrt{\frac{72}{k}} \in Q - N$.

10). Să se arate că :

a). $\sqrt{n+1+2\cdot(1+2+3+...+n)} \in N$ pentru oricare $n \in N$

b). $\sqrt{3x+2} \in R - Q$ pentru oricare $x \in N$

c). $\sqrt{5k+2} \in R - Q$ pentru oricare $k \in N$

d). $\sqrt{5k+3} \in R - Q$ pentru oricare $k \in N$

e). $\sqrt{4x+2} \in R - Q$ pentru oricare $k \in N$

f). $\sqrt{4k+3} \in R - Q$ pentru oricare $k \in N$

g). $\sqrt{10^n+2} \in R - Q$ pentru oricare $n \in N$

## Adunarea şi scăderea numerelor reale

*****

1). Să se calculeze :

a). $(a+b)-c$ ; b). $(a-c)-b$ ; c). $a+b+c$ ; d). $b-a-c$

în fiecare caz : I). $a = 2^{-1}$, $b = 1\frac{1}{4}$, $c = 0{,}5$

II). $a = 2\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = -\sqrt{2}$

III). $a = \sqrt{2}+3\sqrt{3}$ $b = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{3}$

2). Calculaţi :

a). $5\sqrt{6}-2\sqrt{6} =$

b). $3\sqrt{8}-4\sqrt{3}-6\sqrt{8} =$

c). $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3} =$

d). $5\sqrt{2}-\left(-2\sqrt{2}\right)+\left(-3\sqrt{2}\right) =$

e). $7-\left(8-\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2} =$

f). $-\left(-8+3\sqrt{3}\right)-\left(-4\sqrt{3}\right)+\left(5-\sqrt{3}\right) =$

******

3). Ordonaţi crescător :

a). $\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $-1,(3)$

b). $\sqrt{5}$; $\frac{5}{2}$; $\sqrt{6}$; $\frac{7}{3}$; $2,(2)$; $2,(24)$

c). $\sqrt{7}-1$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}-2$; $\sqrt{3}$; $4-\sqrt{8}$

**4).** Efectuaţi :

a). $5\sqrt{6}-\left[\sqrt{3}+\sqrt{6}-\left(3\sqrt{3}-5\sqrt{6}\right)\right]=$

b). $4\sqrt{5}+\sqrt{2}-\left[3\sqrt{2}-\left(8\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\right]=$

c). $7-8\sqrt{2}-\left[3+\sqrt{2}-\left(8\sqrt{2}-10\right)\right]=$

d). $4-\left(5\sqrt{3}-2\right)-\left[7\sqrt{3}-\left(5-2\sqrt{3}\right)\right]=$

e). $2\sqrt{5}-\left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=$

f). $8\sqrt{6}-\left[5\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(5\sqrt{6}-\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)\right]=$

g). $\frac{-\sqrt{2}}{7}+\frac{3\sqrt{2}}{14}+2\sqrt{2}=$

h). $5\sqrt{8}+0,6\sqrt{8}-\frac{\sqrt{8}}{2}=$

i). $\sqrt{3}-1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\sqrt{3}+1,(3)=$

j). $2\sqrt{3}-\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+0,5\right)-4,2=$

k). $5,6\sqrt{2}-3,8\sqrt{3}-\left(0,6\sqrt{3}+1,2\sqrt{2}\right)=$

**5).** Calculaţi media aritmetică pentru :

a). $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$ si $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

b). $3\sqrt{5}+\sqrt{6}$ si $5\sqrt{6}-\sqrt{5}$

c). $3\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$ si $\sqrt{2}+5\sqrt{3}-1$

d). $\sqrt{7}+2\sqrt{3}$ si $4\sqrt{3}-\sqrt{7}$

e). $2-\left(+3\sqrt{2}\right)$si $4-\left(-5\sqrt{2}\right)$

f). $\sqrt{2}-\left(-3\sqrt{3}\right)$si $\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

g). $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-3\sqrt{2}$ si $\sqrt{2}$

h). $\left|\sqrt{11}-\sqrt{13}\right|+4\sqrt{13}$ si $\sqrt{11}$

**6).** Rezolvaţi în R :

a). $x+2\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

b). $3\sqrt{2}-x=8\sqrt{2}$

c). $2\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+x$

d). $2\cdot(x+1)-2\sqrt{7}=3\left(x+\sqrt{7}\right)$

***

**7).** Să se scrie elementele mulţimilor :

$A=\{x \mid x\in N \text{ si } x<\sqrt{17}\}$

$B=\{y \mid y\in N \text{ si } \sqrt{10}<y\le\sqrt{25}\}$

$C=\{z \mid z\in N \text{ si } \sqrt{8}<z<\sqrt{15}\}$

**8).** Să se rezolve în Z :

a). $\sqrt{a^2}<5$

b). $\sqrt{4}<a<\sqrt{25}$

c). $-\sqrt{16}\le a<-\sqrt{1}$

d). $-3\le|a|\le\sqrt{9}$

e). $a^2\le 9$

f). $3\le a^2<17$

**9).** Calculaţi :

a). $3\sqrt{5}-\left|\sqrt{5}-\sqrt{6}\right|-\left(-3\sqrt{6}\right)=$

b). $4\sqrt{6}-\left(2\sqrt{7}-\sqrt{6}+\left|\sqrt{6}-\sqrt{7}\right|\right)=$

c). $4-\sqrt{2}-\left(\left|2-\sqrt{2}\right|+3\sqrt{2}\right)=$

d). $8\sqrt{10}-\left(\left|\sqrt{10}-3\right|+\left|4-\sqrt{10}\right|\right)=$

e). $\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=$

☺

**1).** Câte animale de acelaşi sex avea Moise pe arcă ?

**2).** Un avion cade pe fâşia de graniţă dintre SUA şi Mexic. Unde vor fi îngropaţi supravieţuitorii ?

**3).** 2 pisici mănâncă 2 şoareci în 2 minute. În câte minute mănâncă 50 de pisici 50 de şoareci ?

**4).** Într-un copac stau 15 ciori. Un vânător împuşcă una. Câte ciori mai rămân în copac ?

**5).** Ce s-a serbat pe 25 Decembrie 1899 ?

# Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

*

**1).** Efectuați :

a). $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}=$

b). $4\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=$

c). $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-5\sqrt{3}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)=$

d). $4\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{6}-3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{15}=$

e). $2\sqrt{6}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-5\sqrt{6}=$

f). $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{12}-3+\sqrt{12}=$

g). $7\sqrt{3}-3\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+1=$

h). $4-2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)+5\sqrt{3}=$

i). $4\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)-2\sqrt{3}-8=$

j). $10\sqrt{5}-5\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)-4+3\sqrt{5}=$

k). $2\cdot\left(\sqrt{6}+1\right)+4\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)-5\cdot\left(\sqrt{6}+1\right)=$

l). $3\cdot\left(\sqrt{7}-2\right)+2\cdot\left(3-\sqrt{7}\right)=$

**2).** Efectuați :

a). $\sqrt{16}\ :\ \sqrt{8}=$

b). $2\sqrt{6}\ :\ \sqrt{3}=$

c). $-16\sqrt{8}\ :\ \left(-2\sqrt{2}\right)=$

d). $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\ :\ \sqrt{6}=$

e). $\sqrt{12}\ :\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot 3=$

f). $\sqrt{10}\ :\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}=$

g). $\sqrt{50}\ :\ \sqrt{5}\ :\ \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-1}=$

h). $\sqrt{30}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\ :\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{8}=$

**

**3).** Să se calculeze :

a). $5\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{12}\right)-\sqrt{6}=$

b). $5\sqrt{5}\cdot\left(3\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)=$

c). $\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}\cdot\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)=$

d). $3\sqrt{11}\cdot\left(\sqrt{7}-4\sqrt{11}\right)+3\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=$

e). $4\sqrt{6}-2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+3\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=$

f). $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)-2\sqrt{10}+\sqrt{2}=$

g). $\left[4\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{10}+3\sqrt{15}\right]\cdot 2\sqrt{2}=$

h). $\left[\left(-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)+\left(-3\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=$

i). $5\sqrt{3}-2\cdot\left[8-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right]=$

**4).** Efectuați :

a). $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)=$

b). $\left(1+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$

c). $2\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{28}+3\sqrt{2}\right)-4\sqrt{14}=$

d). $\left(3+\sqrt{7}\right)\cdot\left(3\sqrt{7}-1\right)+4\sqrt{7}+3=$

f). $\left(4\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)+5\sqrt{3}\cdot\left(2-4\sqrt{3}\right)=$

**5).** Calculați :

a). $7\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\cdot 7\sqrt{12}=$

b). $\sqrt{7}-2\sqrt{7}+\sqrt{14}:\sqrt{2}=$

c). $\sqrt{10}:\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-1}+\sqrt{3}-2+3\sqrt{3}=$

d). $\sqrt{30}\ :\ \sqrt{10}-3\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(\sqrt{3}-4\right)=$

e). $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{6}\right):\left(-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{3}=$

**6).** Să se calculeze :

a). $2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^{-1}=$ b). $12\sqrt{6}\cdot3\sqrt{3}\ :\ 4\sqrt{2}=$

c). $8\sqrt{6}\ :\ \left(-2\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=$ d). $\sqrt{3}\cdot16\sqrt{8}\cdot2^{-3}\ :\ 2\sqrt{12}+5\sqrt{2}=$

e). $3\sqrt{5}\cdot2^{-2}\cdot8\sqrt{6}\ :\ \sqrt{5}-6\cdot\left(\sqrt{6}+1\right)=$ f). $2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{6}\cdot10^{-2}\cdot20\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}\right)^{0}=$

**7).** Să se calculeze :

a). $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+\dfrac{\sqrt{10}\ :\ \sqrt{2}}{9}=$ b). $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{8}-\dfrac{2\sqrt{6}}{12}=$

c). $\dfrac{\sqrt{14}:\sqrt{7}}{3}-\dfrac{2\sqrt{24}:\sqrt{12}}{5}+\dfrac{4\sqrt{2}}{15}=$ d). $\dfrac{10\sqrt{3}\ :\ 2}{4}-\dfrac{5\sqrt{15}\ :\ \sqrt{5}}{6}=$

e). $\dfrac{2\sqrt{5}\cdot3\sqrt{2}}{4}\cdot3^{-2}+\dfrac{5\sqrt{10}}{8}=$ f). $1{,}4\sqrt{2}-\dfrac{4\sqrt{6}\ :\ \sqrt{3}}{2}+0,(6)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=$

g). $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3}+\dfrac{\left(\sqrt{30}+\sqrt{20}\right)\ :\ \sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}=$

h). $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}-1,(3)\cdot\sqrt{7}+\dfrac{\left(\sqrt{42}-2\sqrt{14}\right):\sqrt{2}}{2}=$

**8).** Ştiind că $a=\sqrt{2}$ şi $b+c=\sqrt{6}$, să se afle :

a). $2a+3\sqrt{2}a$ b). $a+2b+2c$ c). $a\sqrt{3}+3b+3c$

d). $3a+4\cdot(2a-3)$ e). $a\cdot b+a\cdot c$ f). $(b+c):a$

**9).** Să se rezolve în R :

a). $x\sqrt{2}=4\sqrt{8}$ b). $-2x\sqrt{3}=12\sqrt{6}$ c). $4x=8\sqrt{2}$ d). $-5x\sqrt{5}=10\sqrt{125}$

e). $x:2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$ f). $2x\ :\ \sqrt{6}=2\sqrt{3}$ g). $(x+1):\sqrt{2}=\sqrt{2}$

h). $4x\ :\ 3\sqrt{3}=12$ i). $(2x+1)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$ j). $10\sqrt{6}\ :\ 5x=\sqrt{3}$

## Scoaterea şi introducerea factorilor

*

**1).** Să se scoată factorii de sub radical : a). $\sqrt{24}$ ; $\sqrt{360}$ ; $\sqrt{2400}$ ; $\sqrt{1280}$ ; $\sqrt{540}$

b). $\sqrt{27}+\sqrt{12}$ ; $\sqrt{8}-\sqrt{18}$ ; $\sqrt{32}-\sqrt{72}$ ; $\sqrt{45}-\sqrt{20}$

**

**2).** Calculaţi :

a). $\sqrt{4\sqrt{2}\cdot25\cdot\sqrt{8}}=$ b). $\sqrt{10\sqrt{15}\ :\ 2\sqrt{5}\ \cdot\ 125\sqrt{27}}=$ c). $\sqrt{2\sqrt{3}\ :\ \left(4\sqrt{6}\right)\cdot18\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot9\sqrt{6}}=$

d). $\sqrt{\dfrac{12\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{9}\cdot6^{-1}}=$ e). $\sqrt{\dfrac{16x^2}{25}};\sqrt{\dfrac{32x^4}{9y^2}};\sqrt{\dfrac{2x^5}{49}};\sqrt{\dfrac{x^3y^2}{64}};x>0;y>0$

f). $\sqrt{\dfrac{-8x^3}{25}}$ ; $x<0$ g). $\sqrt{a^7}$ ; $a>0$ h). $\sqrt[3]{8a^6}:a<0$

i). $\sqrt{(9+16)^{-2}}$ j). $\sqrt{(12^2+25)^{-1}}$ k). $\sqrt{(26^2-100)^{-1}}$

**3).** Să se calculeze :

a). $2\sqrt{8}-5\sqrt{32}+4\sqrt{2}=$ b). $6\sqrt{3}-2\sqrt{27}+5\sqrt{6}\ :\ \sqrt{2}=$ c). $4\sqrt{3}+\sqrt{12}=$

d). $5\sqrt{2}+\sqrt{8}=$ e). $\sqrt{20}-12\sqrt{5}+\sqrt{45}=$ f). $5\sqrt{24}-\sqrt{54}=$

g). $\sqrt{10}-\sqrt{40}-\sqrt{90}=$ h). $\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}+\sqrt{2^7}=$

i). $5\sqrt{18}+\sqrt{12}-3\sqrt{20}+\sqrt{72}+\sqrt{45}=$ j). $8\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{108}=$

k). $3\left(\sqrt{20}+\sqrt{45}\right)-\sqrt{125}=$ l). $8\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{108}=$

m). $7\sqrt{75}-3\left(2\sqrt{27}+\sqrt{8}\right)-2\sqrt{72}=$ n). $2\sqrt{96}-2\cdot\left(\sqrt{24}+3\sqrt{150}\right)=$

o). $\sqrt{8}\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)-5\sqrt{6}+\sqrt{50}=$ p). $\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{54}-\sqrt{24}=$

r). $8\sqrt{5}-2\sqrt{45}+\left(-\sqrt{10}\right)\ :\ \left(-\sqrt{2}\right)=$ s). $3\sqrt{28}+\left(-5\sqrt{63}\right)-\left(-\sqrt{7}\right)=$

t). $0,75\sqrt{72}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0,8(3)\sqrt{8}=$ u). $0,4\sqrt{27}-\sqrt{0,48}+\dfrac{\sqrt{6}:\sqrt{2}}{2}=$

v). $\dfrac{\sqrt{54}}{2}-0,(6)\cdot\left(\sqrt{6}+1\right)+\dfrac{\sqrt{150}}{6}=$

**4).** Ordonaţi crescător :

a). $2\sqrt{6};\ 5;\ 3\sqrt{3}$ b). $4\sqrt{2};\ 6$ c). $7;\ 2\sqrt{11};\ 4\sqrt{3};\ 3\sqrt{5}$ d). $5\sqrt{2};\ 7;\ 3\sqrt{6}$

e). $8\ ;\ 3\sqrt{7}\ ;\ 6\sqrt{2}$ f). $10\ ;\ 4\sqrt{6}\ ;\ 3\sqrt{11}$ g). $5\sqrt{5}\ ;\ 11$ h). $13\ ;\ 9\sqrt{2}\ ;\ 5\sqrt{7}$

**5).** Să se rezolve în R :

a). $3x\sqrt{12}=8\sqrt{2}$ b). $x\sqrt{6}=6$ c). $2x\sqrt{2}=4$

d). $x+\sqrt{8}=3\sqrt{2}$ e). $x-5\sqrt{12}=\sqrt{27}$ f). $x-7\sqrt{50}=2\sqrt{72}-\sqrt{18}$

***

**6).** Să se calculeze :

a). $\left|3\sqrt{3}-5\right|+7-6\sqrt{3}=$ b). $\left|5\sqrt{2}-7\right|-8\sqrt{8}=$ c). $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}-\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=$

d). $\sqrt{\left(3\sqrt{7}-8\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{7}\right)^2}=$ e). $\left|4\sqrt{2}-6\right|+\left|6\sqrt{2}-8\right|=$

**7).** Efectuaţi : a). $\left(\sqrt{200}+\sqrt{150}\right):5\sqrt{2}=$

b). $\left(\sqrt{90}-\sqrt{18}+\sqrt{72}\right):3\sqrt{2}=$ c). $\left(\sqrt{250}+\sqrt{450}-\sqrt{200}\right):5\sqrt{2}=$

**8).** Calculaţi : a). $\sqrt{2}\left\{\left[2\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}\right)-2\sqrt{2}\right]:4+\sqrt{27}\right\}-4\sqrt{6}=$ R : $-4$

b). $4\sqrt{6}-\sqrt{3}\left\{\left[2\sqrt{5}\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}\right)+\sqrt{50}\right]:5+\sqrt{2}\right\}=$ R : $-6$

c). $6\sqrt{5}+\sqrt{3}\left\{\left[2\sqrt{3}\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)+6\sqrt{15}\right]:4+\sqrt{6}\right\}=$ R : $6\sqrt{2}$

d). $\left[\sqrt{3}\left(2\sqrt{27}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{2}\right]:2-\sqrt{8}=$ R : 9

e). $\sqrt{5}\left\{\left[\sqrt{15}\left(\sqrt{75}-\sqrt{45}\right)+5\sqrt{3}\right]:5\right\}+\sqrt{60}=$ R : 15

**9).** Să se calculeze :

a). $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{27}-\sqrt{45}\right)=$ b). $\left(\sqrt{50}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{72}+4\sqrt{3}\right)=$

c). $\left(\sqrt{48}-\sqrt{28}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{27}\right)=$ d). $\left(\sqrt{108}-\sqrt{60}+\sqrt{24}\right)\left(\sqrt{54}+\sqrt{135}\right)=$

# Raționalizarea numitorului

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- vom raționaliza numitorul prin amplificarea fracției : $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$
- pentru ridicarea la putere a unui număr real se va ține seama de : $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$

## EXERCIȚII

*

**1).** Să se raționalizeze :

a). $\frac{3}{\sqrt{2}}$; b). $\frac{6}{\sqrt{3}}$; c). $\frac{-8}{\sqrt{6}}$; d). $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$; e). $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; f). $\frac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{10}}$; g). $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{12}}$;

h). $\sqrt{\frac{8}{20}}$ i). $4\sqrt{\frac{5}{2}}$; j). $\sqrt{12}:\sqrt{40}$; k). $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{24}}$ l). $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{24}}$; m). $\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{72}}$;

n). $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$; o). $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$; p). $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$

**

**2).** Să se calculeze :

a). $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right):\frac{\sqrt{12}}{24}=$ b). $\left(\frac{2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{6}}{9}+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}=$

c). $\frac{2}{\sqrt{21}:\sqrt{7}}+\frac{5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{27}}{2}=$ d). $\left(\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot23^{-1}+\frac{\sqrt{72}}{4}=$

e). $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-1}+\frac{3\sqrt{15}}{5}=$ f). $\sqrt{24}\cdot\left(\sqrt{75}\right)^{-1}+\left(5\sqrt{2}\right)^{-1}=$

g). $\left[10\sqrt{6}:2\sqrt{12}+\left(\sqrt{8}\right)^{-1}\right]:5\frac{1}{2}=$ h). $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}\right)^{-1}\right]\cdot3\sqrt{75}=$

i). $\frac{12\sqrt{3}}{9}:\left(\frac{5\sqrt{10}:\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=$ j). $\left[\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot4\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{3}}\right]\cdot\frac{12}{\sqrt{3}}=$

**3).** Să se calculeze :

a). $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):0{,}2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=$ b). $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{6}}+2\right)=$

c). $3\sqrt{8}\cdot\left(5\sqrt{3}-4\sqrt{72}\right)-3\sqrt{3}\cdot\left[\frac{4}{\sqrt{8}}+\left(\sqrt{27}\right)^{-1}\right]=$ d). $\left(\sqrt{18}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{8}=$

e). $\left(\frac{3}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-1}=$

f). $\frac{2}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}\cdot\left(4\sqrt{3}+1\right)-2=$

g). $\left(2+3\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+1\right)=$

h). $\frac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{8}:\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=$

i). $\left(4\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}^{-1}\right)+\sqrt{6}=$

j). $\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{50}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$

**4).** Care număr este mai mic :

a). $\sqrt{20}$ sau $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b). $2\sqrt{24}$ sau $\frac{4}{\sqrt{54}}$ c). $\frac{(-2)^3}{\sqrt{2}}$ sau $-\sqrt{18}$

d). $\frac{6}{\sqrt{8}}$ sau $-5\sqrt{6}$ e). $\frac{0{,}25}{\sqrt{3}}$ sau $\left(4\sqrt{2}\right)^{-1}$

**5).** Să se calculeze :

a). $\sqrt{3+\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{18}{24}}-\sqrt{\frac{8}{24}}=$ b). $\sqrt{5+\frac{3}{25}}-\sqrt{4+0{,}5}=$

c). $\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{19}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}+\frac{1}{\sqrt{2^{15}:2^{12}}}=$ d). $\sqrt{40+\frac{1}{2}}+\sqrt{3+\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\sqrt{0{,}25}=$

**6).** Să se rezolve în R :

a). $x+\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{27}$ b). $x\sqrt{2}+\sqrt{2}^{-3}=\sqrt{8}$ c). $2\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=4$

d). $3\sqrt{2}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=9$ e). $\frac{x}{\sqrt{2}}-5x\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ f). $\frac{2x}{\sqrt{3}}-\sqrt{27}=x\sqrt{3}+\sqrt{3}^{-3}$

***

**7).** Efectuați :

a). $\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{6}^2-\sqrt{10}^2=$ b). $\left(2\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{8}^2-\sqrt{5}^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=$

c). $\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{10}\right)^2=$ d). $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-2}-\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2=$

e). $\sqrt{6}^{-3}+\frac{2}{3\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{2}=$ f). $\left(\frac{2}{\sqrt{16}-1}+\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right):\left(\frac{12}{4+9\sqrt{3}}\right)^{-1}=$

**8).** Calculați :

a). $\sqrt{3}^{-3}+\sqrt{3}^{-5}=$ b). $\sqrt{3}^{-3}\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}^{-1}\right)=$ c). $\left(\frac{3}{\sqrt{27}}+\sqrt{12}\right):\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{-3}=$

d). $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}^{-2}\right):\sqrt{3}^{-3}=$ e). $\left(\frac{3}{\sqrt{72}}-5\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{8}^{-3}+\frac{1}{\sqrt{45}}\right)=$

f). $\left(-\sqrt{2}^{-3}+\frac{2}{\sqrt{8}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{18}}\right)^{-1}-\left(3\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{\sqrt{6}}\right)=$

g). $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{9}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-3\sqrt{6}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{24}}+\sqrt{6}^{-3}\right)=$

h). $\left(\sqrt{2}^{-3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}-3\sqrt{18}\cdot\left(4\sqrt{32}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$

# Calcularea mediilor

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este : $m_a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ având ponderile $n_1, n_2, \ldots, n_p$ este :

$m_{a_p}=\frac{a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_pn_p}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$.

Media geometrică (proporțională) a numerelor pozitive $a_1$ și $a_2$ este : $m_g=\sqrt{a_1\cdot a_2}$ .

## EXERCIȚII

*

**1).** Să se calculeze media aritmetică a numerelor :

a). $2;\ 5;\ 9;\ 10;\ 6$ b). $2{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$ c). $-6;\ 8;\ -5;\ -3;\ 1$

d). $3\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 4\sqrt{2}-1;\ 1;\ -\sqrt{2}$ e). $4\sqrt{3}-5;\ \left|5-4\sqrt{3}\right|;\ \sqrt{3}$ f). $\sqrt{27};\ \sqrt{12};\ \sqrt{48};\ \sqrt{75}$

**2).** Să se calculeze media geometrică a numerelor :

a). 5 și 180 b). 2 și 0,32 c). 8 și 6 d). $\sqrt{27}$ și $\sqrt{12}$

e). $\sqrt{2}-1$ și $\sqrt{2}+1$ f). 9 și $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2$ g). $14-6\sqrt{5}$ și 16

**3).** Să se calculeze media aritmetică ponderată a numerelor :

a). 9; 5; 6 cu ponderile 1 , 3 , 2 b). 0,25 ; 4,5 ; 0,05 cu ponderile 3 , 2 , 5

c). $2\sqrt{2}$ ; $\sqrt{50}$ ; $\sqrt{18}$ cu ponderile 4 , 6 , 1 d). $3\sqrt{2}$ ; $\sqrt{2}$ ; $-6\sqrt{2}$ cu ponderile 2 , 4 , 3

**

**4).** Să se calculeze media aritmetică și proporțională pentru numerele :

a). $2^{-16}$ și $2^{-18}$ ; b). $2^{-3}$ și $2\cdot 3^{-2}$ ; c). $0{,}5^{-2}$ și $0{,}(3)^{-2}$ ;

d) $0{,}2^{-4}$ și $\left(\frac{1}{15}\right)^{-2}$ ; e). $[(0{,}1(6)]^{-4}$ și $[0{,}(1)]^{-2}$ ; f). $9^{-2}$ și $6^{-2}$

**5).** Să se calculeze media aritmetică pentru : a). $3\left(\sqrt{2}\right)^{-3}+\left(\sqrt{125}\right)^{-1}$ și $5\sqrt{5}-\sqrt{8}$

b). $\left(\sqrt{2}\right)^{-1}+\sqrt{2}$ și $\left(\sqrt{8}\right)^{-1}+\sqrt{2}^{3}$ c). $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}^{-1}$ și $\sqrt{12}+\sqrt{2}^{-3}$

d). $\left|2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ și $\left|2\sqrt{2}-3\right|$ e). $\left|6-3\sqrt{5}\right|$ și $\left|7-3\sqrt{5}\right|$

**6).** Să se calculeze media proporțională pentru :

a). $2\sqrt{3}-1$ și $2\sqrt{3}+1$ b). $\sqrt{7}-\frac{4}{\sqrt{7}}$ și $\sqrt{7}+\frac{4}{\sqrt{7}}$ c). $10-4\sqrt{6}$ și $2.5+\sqrt{6}$

d). $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ e). $2-\frac{2\sqrt{5}}{3}$ și $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}$

**7).** Să se calculeze : a). $[(-2)^3 + 3 \cdot (-1)^3 + (-6) : (-3)] \cdot 10 =$

b). media aritmetică şi geometrică a numerelor A şi B unde :

$A = \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ $\qquad$ $B = (-1) \cdot \left[ (-3)^{15} : 3^{14} + (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + (10 - 17) \right]$

c). media aritmetică şi proporţională a numerelor : $\sqrt{81}$ şi $(-5)^2$

**8).** Media aritmetică ponderată a numerelor 2 ; x şi 5 având ponderile 3 ; 8 respectiv 4 este 2,5. Să se afle x.

**9).** Media aritmetică ponderată a numerelor 4,5 ; y + 1 ; 6 având ponderile 2 ; 5 ; y este 5,75. Să se afle y.

**10).** Media aritmetică a trei numere este 27 şi al patrulea număr este 19. Să se afle media aritmetică a celor patru numere.

**11).** Media aritmetică a trei numere este 20 iar media aritmetică a primelor două este 25. Să se afle cele trei numere ştiind că primul este de 1,5 ori mai mare decât al doilea.

**12).** Fiind date două numere naturale prime între ele al căror produs este 45, să se afle cele două medii (geometrică, aritmetică). Dar dacă media lor geometrică este 6 şi sunt prime între ele, aflaţi media aritmetică

**13).** Media geometrică a două numere este 20 şi unul din ele este de 4 ori mai mare decât celălalt Să se afle media aritmetică .

## Testul 1

1). Calculaţi :

⑤1p a). $2\sqrt{3} \cdot \left(-4\sqrt{7}\right) = \ldots\ldots$ ⑤1p b). $12\sqrt{6} : \left(-4\sqrt{3}\right) = \ldots\ldots$ ⑤1p c). $2\sqrt{18} - \sqrt{72} = \ldots\ldots$

⑤1p d). $\dfrac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \ldots\ldots$ ⑦0,5p e). $2\sqrt{3} \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{6}\right) - \sqrt{18} = \ldots\ldots$

⑦0,5p f). $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left( \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}^{-1} \right) = \ldots\ldots$ ⑨1p g). $\left( \dfrac{2}{5\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{12}} - \dfrac{3}{2\sqrt{3}} \right) : \dfrac{1}{\sqrt{75}} = \ldots\ldots$

⑦1p 2). Calculaţi media aritmetică şi media geometrică pentru numerele $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ şi $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

⑨1p 3). Ordonaţi numerele $-3\sqrt{5}; -7; -2\sqrt{11}; -4\sqrt{3}$ .

⑩1p 4). Calculaţi : a). $\left|\sqrt{3} - \sqrt{5}\right| + \left|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right| =$ b). $\sqrt{\left(3\sqrt{7} - 8\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{7} - 5\right)^2} =$

## Testul 2

⑤2p 1). Calculaţi : a). $3\sqrt{5} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)$ b). $\sqrt{24} - \sqrt{54}$ c). $\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 0{,}5\sqrt{125}$

⑤2p 2). Dacă $x\sqrt{6} = 12$ atunci x = .......

⑦1p 3). Să se calculeze : $\left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{27}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{54} - \sqrt{216}\right)$

⑦1p 4). Să se afle media geometrică a numerelor a şi b dacă $a = \left( \sqrt{32} + \sqrt{2}^{-1} \right) : \sqrt{8}$ şi $b = \left(\sqrt{108} + \sqrt{12}\right) : \sqrt{27}$ .

⑨1p 5). Calculaţi : $\left| \dfrac{3\sqrt{5} - 10}{\sqrt{5}} \right| = \ldots\ldots$

⑨1p 6). Să se calculeze : $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \left( \dfrac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \right)^{-1} + 2 \cdot \left( \dfrac{2}{\sqrt{27}} - \dfrac{5}{\sqrt{10}} \right) + \sqrt{1,(3)}$

⑩1p 7). Să se arate că numărul $a = \dfrac{3\sqrt{150} + \sqrt{96} - \sqrt{54}}{\sqrt{8} - \left(3\sqrt{32} - \sqrt{72}\right)} : \left( -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1}$ este număr natural.

# *Capitolul VI*
# Modele de lucrări semestriale (sem. I)

## Testul 1
### Subiectul I (50 puncte)

4p 1). a). Cel mai mic număr întreg de o cifră este .....

4p b). Dintre 0,(14) şi 0,14 mai mare este .....

4p c). Inversul numărului $-\frac{2}{3}$ este .....

4p 2). a). Calculând $2^{-3}$ se obţine .....

4p b). Scrieţi numărul 1,(3) sub formă de fracţie ireductibilă.

4p c). Calculând $(-2)^3 - 28 : 4$ se obţine .....

6p 3). a). Desenaţi un triunghi dreptunghic.

4p b). Măsura unui unghi ascuţit al unui triunghi dreptunghic isoscel este ....

4p c). Aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu o catetă de 4 cm este .....

4). Fie un $\triangle ABC$ echilateral şi AM înălţimea lui, $M \in (BC)$.

4p a). $m(\sphericalangle BAM) =$ .....

4p b). Dacă BM = 3 cm, atunci $P_{\triangle ABC} = ?$

4p c). Dacă N şi P sunt mijloacele laturilor (AB) şi (AC), BM = 3 cm atunci $P_{ANMP} = ?$

### Subiectul II (40 puncte)

1). Fie $A = \left\{(-2)^2 ; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} ; 0^7 ; \frac{85}{17} ; \sqrt{50}\right\}$

5p a). Determinaţi elementele mulţimii $A \cap Z$.

5p b). Calculaţi probabilitatea ca , alegând la întâmplare un număr din A, el să fie un număr raţional.

5p c). Care număr din A este divizor pentru 196 ?

5p 2). a). Rezolvaţi în N : $1 + 2(x + 1) \leq 20$.

5p b). Rezolvaţi în Q : $x - \frac{x+1}{2} = 7$.

3). Fie $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$ şi M mijlocul lui (BC). Se duc ME||AB, FM||AC, A; F, E coliniare şi FE||BC.

5p a). Demonstraţi că AEMB este paralelogram.

5p b). Demonstraţi că FECB este paralelogram.

5p c). Dacă BC = 12 cm, calculaţi $P_{FECB}$.

## Testul 2
### Subiectul I (50 puncte)

4p 1). a). Calculaţi 20% din 60.

4p b). Rădăcina pătrată din 289 este .....

4p c). Scris sub formă de fracţie zecimală $\frac{7}{3}$ este .....

4p 2). a). Dacă $3 - 2x = -1$ atunci x = .....

4p b). Opusul lui –5 este .....

4p c). Cel mai mare divizor propriu al lui $3^{10}$ este .....

6p 3). a). Desenaţi un paralelogram ABCD.

4p b). Dacă $m(\sphericalangle A) = 35^0$ atunci $m(\sphericalangle B) =$ .....

4p c). Dacă AB = 6 cm şi înălţimea corespunzătoare lui AB are 8 cm atunci aria paralelogramului este ......

4). Fie $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle A) = 90^0$ şi AM bisectoarea unghiului A, BC = 10 cm.

4p a). $m(\sphericalangle AMC) = ?$;

4p b). $AM = ?$;

4p c). $A_{\Delta ABC} = ?$

**Subiectul II** (40 puncte)

1). Fie $A = \left\{x \in N \middle| x < \sqrt{18}\right\}$; $B = \left\{x \in N \middle| \frac{6}{x-3} \in N\right\}$; $C = \left\{x \in Z \middle| |x| < a\right\}$.

5p a). Determinaţi elementele mulţimilor A şi B.

5p b). Determinaţi $A - B$; $A \cup B$.

5p c). Aflaţi valoarea numărului natural a astfel încât $card(B \cap C) = 0$.

5p 2). a). Un număr a împărţit la un număr b dă câtul 3 rest 2. Aflaţi numerele a şi b dacă media lor aritmetică este 15.

5p b). Calculaţi media aritmetică ponderată a numerelor 1,2 şi 3,25 cu ponderile 5 şi 4.

3). Fie ABCD un dreptunghi cu AB = 24 cm, BC = 75% din AB.

5p a). Calculaţi aria şi perimetrul dreptunghiului.

5p b). Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD) şi (DA) determinaţi natura patrulaterului MNPQ.

5p c). Calculaţi aria lui MNPQ.

## Testul 3

**Subiectul I** (50 puncte)

4p 1). a). Calculând $9 + 6 : 3$ se obţine .....

4p b). Cel mai mare număr întreg mai mic decât $\sqrt{20}$ este egal cu .....

4p c). Transformând fracţia $\frac{14}{3}$ în fracţie zecimală se obţine .....

4p 2). a). Suma divizorilor naturali ai numărului 8 este egală cu .....

4p b). Dintre numerele $9^{11}$ şi $2^{33}$ mai mic este .....

4p c). Dacă $\frac{x}{12} = \frac{3}{x}$ şi $x \in N$, atunci x este egal cu .....

6p 3). a). Perimetrul pătratului cu aria de 16 $cm^2$ este egal cu .....

4p b). Dacă un unghi AOB are măsura de $52^0$, atunci măsura unghiului format de bisectoarea unghiului AOB cu prelungirea unei laturi a sa are măsura de .....

4p c). Dacă un trapez are linia mijlocie de 10 cm, iar înălţimea de 8 cm, aria aria lui este egală cu ..... $cm^2$.

4). În triunghiul echilateral ABC, AD este mediatoare.

4p a). Măsura unghiului DAB este egală cu .....

4p b). Dacă BD = 4 cm, atunci perimetrul $\Delta ABC$ este egal cu .....

4p c). Dacă M şi N sunt mijloacele laturilor AB respectiv AC, atunci perimetrul patrulaterului MNCB este egal cu .....

**Subiectul II** (40 puncte)

5p 1). a). Să se calculeze : $\left(2 - 1\frac{1}{2}\right)^{-5} : (-0,25)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{101}$.

5p b). Un număr a reprezintă 25% din numărul b. Aflaţi cele două numere a şi b, dacă media lor aritmetică este egală cu 37,5.

5p c). Verificaţi dacă numărul $\sqrt{63} + 2\left(\sqrt{14} : \sqrt{2} + 5\right) - \sqrt{175}$ este element al mulţimii N.

5p 2). a). Fie mulţimea $A = \left\{x \in Z \middle| (x+5) | (2x+3)\right\}$. Să se afle elementele mulţimii A.

5p b). Dacă $3a + 3b = 18$, să se calculeze : $\frac{2(a-20)}{5} + \frac{b}{2} + \frac{a}{10}$.

3). Fie ABCD un paralelogram iar M şi N sunt mijloacele laturilor (AB) respectiv (BC). Se consideră punctele E şi F simetricele punctelor A şi C faţă de N respectiv M.

5p a). Stabiliţi natura patrulaterului AMNC.

5p b). Să se demonstreze că punctele E, C şi D sunt coliniare.

5p c). Să se demonstreze că $MN \parallel EF$.

**Varianta 6 - M.E.C.T. - decembrie 2008**

**Subiectul I** (50 puncte)

1). a). Rezultatul calculului $12 - 5 \cdot 2$ este egal cu .....

b). $\frac{9}{20}$ din 80 este egal cu .....

c). Numărul care împărțit la 7 dă câtul 5 și restul 4 este egal cu .....

2). a). Inversul numărului 7 este egal cu .....

b). Soluția reală a ecuației $2x + 3 = 7$ este egală cu .....

c). Rezultatul calculului $9 - |-7|$ este egal cu .....

3). a). Desenați un trapez isoscel ABCD.

b). Un paralelogram ABCD are unghiul ABC de $50^0$. Măsura unghiului BAD este egală cu ..... $^0$.

c). Un romb MNPQ are MP = 10 cm și NQ = 7 cm. Aria rombului este egală cu ..... cm$^2$.

4). Rombul MNPQ are aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm$^2$.

a). Dacă măsura unghiului $MNQ = 60^0$, atunci măsura unghiului NPQ este egală cu ..... $^0$

b). Aria triunghiului MNP este egală cu ..... cm$^2$.

c). Dacă NQ = 6 cm, atunci lungimea diagonalei MP este egală cu ..... cm.

**Subiectul II** (40 puncte)

1). a). Calculați rădăcina pătrată a numărului 324.

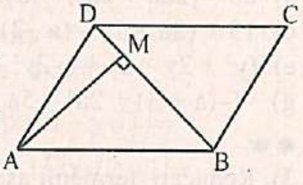
b). Calculați $\left(\frac{1}{2}\right)^{22} : \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$.

c). Arătați că numărul $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$ este rațional. Simplificați rezultatul.

2). a). Arătați că produsul numerelor $a = 1,(3)$ și $b = 0,75$ este număr natural.

b). Media aritmetică a șase numere raționale este egală cu 0,5. Media aritmetică a cinci dintre ele este egală cu 0,2. Determinați cel de-al șaselea număr.

3). În paralelogramul ABCD, din figura alăturată, $AC \geq BD$ și punctul M este piciorul perpendicularei duse din vârful A pe diagonala BD.




a). Știind că BD = 10 cm și AM = 8 cm, calculați aria paralelogramului ABCD.

b). Arătați că, dacă punctul N este piciorul perpendicularei duse din punctul C pe diagonala BD, atunci AMCN este paralelogram.

c). Fie punctul P piciorul perpendicularei duse din punctul D pe diagonala AC. Arătați că, dacă $[AM] \equiv [DP]$, atunci ABCD este dreptunghi.

# *Capitolul VII*
# Calcul algebric

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- doi termeni sunt asemenea dacă au aceeași parte literală, la litere identice corespunzând exponenți identici.
- exemple de termeni asemenea : $2x^2$ și $-3x^2$ ; $4ay^2$ și $\frac{1}{2}ay^2$ ; $-0.5x^2yz$ și $\frac{1}{2}x^2yz$
- exemple de termeni ce nu sunt asemenea : $2ax$ și $2a$ ; $2ax$ și $-\frac{1}{2}ax^2$ ; $2ax$ și $x$ ; $2ax$ și $y$
- adunarea și scăderea se poate efectua numai între termeni asemenea.
- pentru a efectua înmulțirea se ține seama de : $a \cdot (b + c) = ab + ac$
  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- formule de calcul prescurtat : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- pentru raționalizarea fracției $\dfrac{a}{b\sqrt{c} + d\sqrt{e}}$ , $c > 0$ , $e > 0$ se va amplifica cu $b\sqrt{c} - d\sqrt{e}$
- pentru a efectua impărțirea se ține seama de : $(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d$

## Reducerea termenilor asemenea

*

**1).** Reduceți termenii asemenea :

a). $2x + 3y - 5x - 8y =$  b). $15x - 3y - 40x + 8y =$

c). $2x^2 + 3x + (-4x^2) - 6x + 10x =$  d). $8x + 3y - 4x - 2y - x =$

e). $6a - (+7ab) - (-8a) + 3ab + a - ab =$  f). $a^2b - 2ab + ab^2 - (+2a^2b) - 5ab^2 =$

g). $2x^3y + 5x^3y^3 - 5x^3y - 2xy^3 - 6x^3y^3 =$  h). $8ax^3y - 7ax^2y + ax^3y - 5ax^2y =$

**2).** Reduceți termenii asemenea :

a) $ab - (2ab + 3a) - 4a =$  b) $7b - (2a - 8b) + (2b - a) =$

c) $15 + (2a + 1) - (a - 2) =$  d) $(2x^2 - 3x + 4) - (-x^2 - 8x + 2) - x^2 =$

e) $(y^2 + 2y - 3) + (-2y^2 - 4y + 6) + 4y^2 =$  f) $a - [a + 3 - (a - 5)] =$

g) $-[-(a + 3) + 2a] - 5a + 3 =$

**

**3).** Reduceți termenii asemenea :

a). $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y - x + \frac{2}{6}y - \frac{3}{4}x =$  b). $-(0,25x - 0,5y) + (1,2y - 0,2x) - (0,05x + 2,5y) =$

c). $0.3a - 1,4b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}b =$  d). $3\frac{1}{3}a + 4ab - [0,(3)a - 6ab] =$

e). $0,8ax - 3ay + 2ax - 5,35ay =$

**4).** Reduceți termenii asemenea :

a). $x\sqrt{2} + x\sqrt{8} + x\sqrt{32} =$  b). $x\sqrt{3} - y\sqrt{8} + x\sqrt{27} + 2y\sqrt{32} =$

c). $x\sqrt{2} + 2x\sqrt{3} - 4x\sqrt{12} + 5x\sqrt{18} =$  d). $xy\sqrt{80} - xy\sqrt{45} + xy\sqrt{20} - x\sqrt{2} + 3x\sqrt{8} =$

e). $\frac{4x}{\sqrt{2}} + \frac{x + y}{\sqrt{8}} - y\sqrt{18} =$  f). $5x\sqrt{5} - y\sqrt{121} + x\sqrt{45} + 3y =$

**5).** Rezolvați în R :

a). $3 - (x + 16) = 3x - (x + 6)$  b). $8 - x - (x^2 + x + 1) = 4 - x^2$

c). $3 - 5x - (4x - 3 - x^2) = x^2 + 3x$  d). $5 - (4 - x) = 8$  e). $7 - (3 - 2x) = 4 - 5x$

# Înmulțirea

*

**1).** Efectuați :

a). $(-2x) \cdot 4x^2y =$

b). $8x^2 \cdot (-3x^3y) \cdot (-2xy^4) =$

c). $\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(\frac{4}{3}x^3y^2\right)\left(-2\frac{1}{4}x^2y^3z\right) =$

d). $x^3\sqrt{2} \cdot \left(xy\sqrt{3}\right) =$

e). $2x^2\sqrt{3} \cdot \left(-x^4\sqrt{27}\right) =$

f). $\left(0,2x^3y\right) \cdot \left(xy^2\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}\right) =$

g). $x^3 \cdot x^4 : (x^2)^{-2} \cdot (x^6)^0 =$

h). $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x =$

**

**2).** Calculați :

a). $2x \cdot (3x + 5) =$

b). $-4xy \cdot (2x + 3y) =$

c). $(-x^2 + x) \cdot (-6x^2y) =$

d). $(x^2 - 5x + 2) \cdot (-3xy) =$

e). $(-2x^2) \cdot (-8x + 9y) \cdot (-4xy) =$

f). $xy\sqrt{2} \cdot \left(xy\sqrt{8} - x^2\sqrt{6}\right) =$

g). $\left(-3x^2\sqrt{2}\right) \cdot \left(x^3\sqrt{5} - x\sqrt{8}\right) \cdot \left(-x^3\sqrt{10}\right)^2 =$

h). $-0,25x^3y^2 \cdot \left(4x^3 - 2xy^2\sqrt{4}\right) =$

**3).** Calculați :

a). $5 \cdot (3x - 8y) - 7x + 5y =$

b). $4 \cdot (x + y) - 5 \cdot (3x + y) =$

c). $4 - 3 \cdot (1 - 2x) + 4x =$

d). $x - 5 \cdot (x - 3y) + 2 \cdot (x + y) =$

e). $5x \cdot (2x + 3) - 4 \cdot (x + 2) =$

f). $4 - 3 \cdot [5x - 2 \cdot (x + 1)] =$

g). $7x - 4 \cdot [2x + 5 \cdot (x + 3) - 1] =$

h). $7x - 4 \cdot [y + 3 \cdot (x - 2y) - x] =$

i). $3 \cdot [x + 5 \cdot (2x - 3y)] - 5 \cdot (4x - 3y) =$

**4).** Efectuați :

a). $5x^2 \cdot (x + 3y) - 8x^3 + yx^2 =$

b). $4x \cdot (x + 1) - 2 \cdot (x + 3) =$

c). $ab \cdot (a + 3b) - b \cdot (a^2 + 7a) =$

d). $(x + 3) \cdot (2 + x) =$

e). $(2x + 1) \cdot (x - 4) =$

f). $(3x - 6) \cdot (2 - x) =$

g). $(4 - x) \cdot (x^2 - x) =$

h). $(2x + 3) \cdot (10 - 4x) =$

i). $\left(x\sqrt{2} - 3\right) \cdot \left(4 - x\sqrt{32}\right) =$

j). $\left(x\sqrt{3} + y\sqrt{2}\right) \cdot \left(x\sqrt{2} - y\sqrt{3}\right) =$

k). $(1 + x) \cdot (x - 1) \cdot (1 + x^2) =$

l). $(3 + 2x) \cdot \left(x\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(x\sqrt{2} - 1\right) =$

m). $\left(x^n - 2\right) \cdot \left(3 - x^n\right) =$

**5).** Calculați :

a). $(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^3 - 5x^2) =$

b). $(a^2b + b^3) \cdot (a + b) =$

c). $(5ay^2 - 2ax) \cdot (y + x^2a) =$

d). $(3a^2b + 2ab^2) \cdot (a - b) =$

**6).** Să se calculeze :

a). $(x + 1) \cdot (4 - x) + 5x^2 - (x + 2) \cdot (3 - x) =$

b). $(2x + 4) \cdot (x - 3) - (x + 6) \cdot (6 - x) =$

c). $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right) \cdot (9x - 6) - (x + 3) \cdot (-2x) =$

d). $(0,1x - 0,25) \cdot (10x + 4) - x^2 + 4x =$

e). $\left(\frac{7}{\sqrt{2}}x - y\right) \cdot (x + y) - x^2\sqrt{72} + y^2 =$

f). $\left[2x \cdot (3x - 5) - 4 \cdot \left(x^2 + 2x\right)\right] \cdot (-6x) + 7x^2 =$

g). $\left[\left(x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{5}\right) + \left(x\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(x\sqrt{2} - 1\right)\right] \cdot \left(-x^2 + 3\right) =$

h). $[3xy^2 \cdot (2x + 4y) - 8x^2y^2] \cdot (-2xy) =$

**7).** Să se rezolve în R:

a). $3x \cdot (x + 5) = 2x \cdot (x + 1) + x^2$ b). $(7 + x) \cdot (3x - 1) = 3x^2 - 9$

c). $5 - 3x \cdot (1 - 2x) = 6x^2$ d). $(8 - 5x) \cdot (4 + 3x) = (1 + x) \cdot (4 - 15x)$

e). $4 - (3 + x) \cdot (1 - x) = x^2 + 2$ f). $3x\sqrt{2} \cdot (x\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 6x^2 + 6x\sqrt{6}$

g). $8\sqrt{3} \cdot (x + \sqrt{3}) = x\sqrt{3} + 1$ h). $(x + \sqrt{3}) \cdot (2x + \sqrt{3}) = 2x^2 + 3$

## Formule de calcul prescurtat

*

**1).** Calculați :

a). $(x^2 + x)^2$; b). $(4xy - 2)^2$; c). $(3x^2y + y^2)^2$; d). $(4x^2 - y^4)^2$;

e). $\left(x^2\sqrt{2} + x\right)^2$ f). $\left(\frac{x}{2} - 6\right)^2$ g). $\left(0,3x^3 + y\right)^2$

h). $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y\right)^2$ i). $\left(x\sqrt{\frac{25}{2}} - y\sqrt{8}\right)^2$ j). $\left(\frac{2}{\sqrt{8}}x - \sqrt{32}\right)^2$

k). $\left(0,5x^2y + \frac{3}{2}\right)^2$ l). $\left(1\frac{1}{2}x^2 - 0,5\right)^2$ m). $\left[2\frac{1}{3}x - 0,(3)y^2\right]^2$

n). $[1,(2)x + 0,(6)]^2$ o). $\left[0,(3)x + \frac{1}{3}\right]^2$ p). $\left[0,3(2)x^2 + 0,1y^3\right]^2$

**2).** Calculați :

a). $\left(\frac{1}{4}x + 3\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{4}x\right) =$ b). $(\sqrt{2} - 3x) \cdot (\sqrt{2} + 3x) =$

c). $\left(xy\sqrt{\frac{25}{3}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(xy\sqrt{\frac{25}{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$ d). $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + y^2\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x - y^2\right) =$

e). $(2\sqrt{2} + x) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}} - x\right) =$ f). $(2x^3y^2 - xy) \cdot (xy + 2x^3y^2) =$

g). $(2 - x) \cdot (x + 2) \cdot (4 + x^2) =$ h). $\left(\frac{1}{3}x - y\right) \cdot \left(y + \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(\frac{1}{9}x^2 + y^2\right) =$

i). $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{25} + 3) =$ j). $(3\sqrt{3}x - y) \cdot (\sqrt{27}x + y) =$

**3).** Să se calculeze :

a). $(x^2 + x + 1)^2$ b). $(x + y + 2)^2$ c). $(x^2 - x + 1)^2$ d). $(2x - 3 + x^2)^2$

e). $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ f). $(3\sqrt{2} + 4 - \sqrt{3})^2$ g). $(4\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3\sqrt{3})^2$ h). $(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5})^2$

i). $(x\sqrt{2} + \sqrt{8} + 1)^2$ j). $(3x + x\sqrt{3} + \sqrt{3})^2$

**

**4).** Calculați :

a). $(x + 5)^2 - (x + 3) \cdot (x - 1) - (x - 2)^2 =$ b). $(2x - 3)^2 + (-2x) \cdot (x + 5) - (1 + x)^2 =$

c). $(x + 2y) \cdot (x + y) - (x\sqrt{3} + y\sqrt{27})^2 =$ d). $(\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (\sqrt{10} + 2\sqrt{5})^2 =$

e). $\left(\frac{1}{2}a - 3b\right)^2 + (a + b) \cdot \left(-\frac{3}{4}a + b\right) =$ f). $\left(x\sqrt{\frac{9}{32}} + 1\right) \cdot (x\sqrt{2} + 3) - (3x + \sqrt{2})^2 =$

g). $\left(x+\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+x\right)^2=$ h). $\left(3-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)^2=$

i). $(3-5x)^2-\left(4-x+x^2\right)\cdot(1+x)=$ j). $\left(\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\sqrt{2}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=$

**5).** Calculați :

a). $(x^2+2)^2-(x^2-x-1)^2=$ b). $(4-5x)(5x+4)+(x+2-x^2)^2=$

c). $(x^2-5x+1)(x-4)+(x+x^2-4)^2$ d). $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+x\right)+\left(x+\sqrt{2}+x\sqrt{2}\right)^2=$

**6).** Calculați: :

a). $(x+5)^2-(x+3)\cdot(x-3)+(x-1)^2=$ b). $(2x-1)\cdot(2x+1)+\left(x+\sqrt{4}\right)^2=$

c). $\left(x\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-(4-3x)^2=$ d). $\left(x+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-x\right)-\left(x-\sqrt{7}\right)^2+\left(-x\sqrt{32}\right)=$

e). $\left(\frac{2}{3}x+1\right)\cdot\left(1-\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^{-1}x\right)+\left(\frac{2}{3}x+3\right)^2=$ f). $(0{,}25y+3)\cdot(3-0{,}25y)+\frac{1}{16}y^2-(x+5)^2=$

g). $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot[2{,}5+0{,}(6)]=$

h). $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\cdot[1{,}5x-0{,}(3)y]-(x+y)^2-(2x-3y)^2=$

i). $\left(1-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=$

j). $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1\right)^2-\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}^{-1}\right)=$

**7).** Calculați :

a). $\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}=$ b). $\sqrt{\left(9-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+3\right)\cdot 3}=$

c). $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-5\right)}+\left(4\sqrt{2}+1\right)^2=$ d). $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)-3}=$

e). $\sqrt{\left(3\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+7\right)-6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2=$ f). $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)}=$

**8).** Să se rezolve în R :

a). $3\cdot(2-4x)-5x(6+5x)=2-(5x+1)^2$ b). $5x-4x(x+2)=3-(2x+1)^2$

c). $(4x-5)^2=(2x+3)\cdot(8x-5)+1$ d). $4+(2x+1)^2=2x(2x+6)$

e). $3-(4x-3)^2=(3-4x)\cdot(5+4x)$ f). $(1-3x)^2=5-3x(8-3x)$

**9).** Să se rezolve în R :

a). $(4-2x)\cdot(2x+4)=(1-2x)\cdot(2x+1)+5x+6$

b). $(5-2x)\cdot(2x+5)=(1-4x)\cdot(x+3)+3$

c). $(5-x)\cdot(x+5)=5-(x+2)\cdot(x-2)$

d) $\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)+2x$

e). $7x+3-(2x+3)\cdot(2x-3)=-(2x+1)^2$

f). $(3x+1)^2=(3x+1)\cdot(3x-1)$

# Împărțirea

*

**1).** Să se efectueze :

a). $4a^5y^3 : (-2ay^2) =$  b). $1,6a^2y : (-2a) =$  c). $1\frac{1}{2}x^2 : \left(\frac{1}{3}x\right) =$

d). $4x^3y : \left(\frac{2}{3}xy\right) =$  e). $(3x^3 - 9x^2) : 3x =$  f). $(4x - 8x^2) : (-2x) =$

g). $(9x^6 + 12x^4 - 3x^2) : 3x =$  h). $(4,8x^5 - 3x^4) : (-3x^3) =$  i). $\left(1\frac{1}{2}x^3 + 0,9x\right) : 1,5x =$

j). $(0,18x^3 + 3,6x^2 - 9x) : (-0,9x) =$  k). $\left(1\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{2}x^3\right) : [1,(6)x^2] =$

**

**2).** Calculați :

a). $(3x + 1) \cdot (2x + 1) + (5x^2 - x) : x =$

b). $[8x^3 : (-2x) + 4x] : (-4) - x(x + 1) =$

c). $(2x^2 + 4) \cdot (x^2 - x) : 2x - x(x^2 + 2) =$

d). $(3x^2 + 6x) \cdot (2x + x^2) : (-3x^2) + (x + 1) \cdot (x - 1) =$

e). $(5x^3 + 4x^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right) + (x + 1) \cdot (2x - 1) =$

f). $[(8x^3 - 4x^2) : (-2x) - 2x^2 + x] : (-3x) =$

g). $[(x + 2)^2 + 3x^2 - 4] : (-4x) + 2(x + 3) =$

h). $[(x + 1) \cdot (x - 1) - (x + 2)^2 + 1] : (-4) + [(2x + 1)^2 - 1] : (-4x) =$

i). $\{[(3x + 2)^2 - x^2] : 4 - x - 1\} : (-2x) =$

j). $[(5x + 3) \cdot (5x - 3) + (5x + 3)^2] : (-10x) =$

**3).** Să se rezolve în R :

a). $3x + 6 = (4x^2 + 2x) : x$  b). $4x(x + 1) = (4x^3 - 5x^2) : x$

c). $(5x^2 - 10x) : (-5x) = 2$  d). $3x(4 - x) + (10x^2 - 15x) : (-5x) = 4 - 3x^2$

e). $3 - (4x^2 - 3x) : x = 4x - 3 \cdot (2x - 5)$  f). $(10x^2 - 6x) : (-2x) = 7 - 2(3 - 2x)$

g). $(2x + 1) \cdot (2x - 1) = (4x^3 - 2x^2 - 6x) : x + 3$

# Descompunerea în factori

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- metode de descompunere :

a). scoatere a factorului comun : $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$

$a \cdot b + a \cdot c + ... + a \cdot m = a \cdot (b + c + ... + m)$

b). restrângerea pătratului unei sume de doi termeni : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

c). diferența pătratelor : $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

d). alte metode : $(a + b)c + (a + b)d = (a + b) \cdot (c + d)$

$x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a) \cdot (x + b)$

## EXERCIȚII

*

**1).** Să se scoată factorul comun :

a). $2x - 4$  b). $5x + 10$  c). $12x^2y - 3x$  d). $4xy - 8y$

e). $10x^2 - 25xy$  f). $24x^3y^4 - 32x^2y^3$  g). $2x + 4x^2 + x^3$  h). $18x^4y^3 - 24x^2y^2 + 12xy^5$

**2).** Să se restrângă :

a). $x^4 - 6x^2y + 9y^2$ b). $x^8 + 4x^4y^2 + 4y^4$ c). $x^2 + 10x + 25$

d). $x^4 - 16x^2 + 64$ e). $9x^2 - 6xy + y^2$ f). $x^2y^4 - 4xy^2 + 4$

g). $9x^4y^2 + 12x^2yz + 4z^2$ h). $0,16a^2x^4 - 2,4ax^2 + 9$

i). $x^4 - 6x^2\sqrt{2} + 18$ j). $x^4y^2 - 2x^3y\sqrt{5} + 5x^2$

**3).** Să se descompună în factori :

a). $9x^4 - 1$ b). $25x^2y^4 - 4$ c). $\frac{x^2}{4} - 4$ d). $\frac{x^2y^4}{9} - 36$

e). $3,24 - x^6$ f). $1,21x^8 - 1$ g). $5 - x^4$ h). $7x^2 - 4$

i). $5x^2 - 0,25$ j). $0,49 - 8x^4$ k). $0,(3)x^2 - y^4$ l). $0,1(6)x^2 - 0,04y^6$

**

**4).** Să se descompună în factori :

a). $36x^4 + 12x^3y + x^2y^2$ b). $2x^4 + 4x^2y + 2y^2$ c). $27x^3y^2 - 18x^2y + 3x$

d). $16x^6y^2 - 8x^4yz + x^2z^2$ e). $\frac{1}{4}x + x^2 + x^3$ f). $\frac{3}{4} + 6x + 12x^2$

g). $\frac{9}{2}x^4 - 6x^2 + 2$ h). $25x^2\sqrt{3} + 30x + 3\sqrt{3}$

**5).** Să se descompună :

a). $8x^4 - 2$ b). $27y^6 - 12$ c). $36x^3 - 25x$ d). $81x^2 - 441$ e). $81x^3 - x$

f). $8 - 18x^4y^2$ g). $x^2y - 4x^4y^3$ h). $\frac{1}{2}x^2 - 18$ i). $\frac{2}{9}x^4 - 8$ j). $10x^3 - 5x$

**6).** Să se descompună în factori :

a). $9x^2 - (x + 1)^2 =$ b). $(2x + 3)^2 - 25x^2 =$ c). $(5x - 1)^2 - (2x - 3)^2 =$

d). $4(x + 1)^2 - 9x^2 =$ e). $9(x - 2)^2 - (2x - 5)^2 =$ f). $4x^2(x - 1)^2 - 36x^2 =$

g). $25(2x + 1)^2 - 4(3x - 2)^2 =$ h). $36x^2 - 49(x - 3)^2 =$

**7).** Să se descompună :

a). $x^2 + 7x + 12$ b). $x^2 + 8x + 12$ c). $x^2 - 3x - 28$ d). $x^2 + 6x + 8$

e). $x^2 - 4x - 12$ f). $x^2 - 3x - 28$ g). $x^2 - 5x - 14$ h). $x^2 - 2x - 21$

i). $x^2 + 4x - 21$ j). $x^2 + 5x - 24$ k). $x^2 + 6x - 7$ l). $x^2 + x - 30$

m). $2x^2 + 13x + 6$ n). $3x^2 + 5x - 2$ o). $2x^2 - 15x + 18$ p). $6x^2 - x - 2$

**8).** Să se descompună :

a). $3x - 3y + x^2 - xy$ b). $3ax - a + 6x - 2$ c). $2a^2x + ax^2 + 2ax + x^2$

d). $5ax^2 + 4ax + 15x + 12$ e). $2x + 3y + 2x^2 + 3xy + 4xy^2 + 6y^3$ f). $x^4 - a^2 + 2ab - b^2$

g). $9x^2 - 4x^6 - 4x^3 - 1$ h). $\frac{16}{25} - x^2 + \frac{2}{5}x - 0,04$ i). $(x + 1)^2 - 9$

j). $16 - (2x - 3)^2$ k). $(2x + 5)^2 - 9x^2 - 6x - 1$

**9).** Să se descompună :

a). $4x^2y^6 - 25$ b). $x^5 - 2x^3 + x$ c). $8x^4 + 4x^3y\sqrt{6} + 3x^2y^2$ d). $7x^2 - 0.36$

e). $3x^2 + 4\sqrt{3}xy + 4y^2 - 1$ f). $x^3 + x^2a - x - a$ g). $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

h). $x^3 + x^2y - 4x - 4y$ i). $49x^8 - 81y^4$ j). $x^2y^2z^4 - x^2y^2 - 4xy - 4$

k). $4x^5 - 8x^3y^2 + 4xy^4$ l). $x - 2y + 4x^2 - 8xy + 3x^2y - 6xy^2$ m). $2ay + 3ax - 4y - 6x$

n). $16x^8 - 1$ o). $20x^2 - 12xy\sqrt{5} + 9y^2$ p). $6x^2 - 10x + 4$

**10).** Să se descompună în factori :

a). $0,64y^6 - 0,81x^4$ b). $(3x - y) \cdot (3x - y - 2) + 1$ c). $x^2 + 9x + 14$

d). $x^4 - 36$ e). $4 + (x - y) \cdot (x - y + 4)$ f). $2y^2 - 0,125$

g). $x^2 - 6x + 5$ h). $18x^2y^4 - 12xy^3\sqrt{2} + 4y^2$ i). $4x^2 - 0,(6)y^4$

j). $(2x-y-3)\cdot(2x-y)+\frac{9}{4}$ k). $3x^2-x-2$ l). $0,(2)x^4+4\sqrt{2}x^2y+36y^2$

m). $2(x-5)\cdot[2(x-5)+3]+2,25$ n). $-2x^2+7x-5$ o). $ax-bx+ay-by+x^2+2xy+y^2$

**11).** Să se efectueze :

a). $[(x+3)\cdot(2x+1)-x+2-(x+2)^2]:(x+1)=$

b). $[(4x^3-8x^4-2x^2):(-2x)-2x^2]:(2x-1)=$

c). $[(x+1)^2+(x+2)^2+4-x^2]:(x+3)=$

**12).** Să se descompună în factori :

a). $2x^2-8x+8=$ b). $x^3-x=$ c). $x^3-2x^2+x=$ d). $36x^2-12x+1=$

e). $4x^2-20x+25=$ f). $6x^2-24=$ g). $5x^2-45=$ h). $x^4-8x^2+16=$

i). $x^4-18x^2+81=$ j). $x^4-2x^2+1=$ k). $x^8-1=$ l). $x^4y^2-1=$

m). $4y^2x+4yx^2+x^3=$ n). $5x^3-45x=$ o). $0,25x^4+x^2+1$ p). $x^3-4x=$

r). $16a^4-1=$ s). $x^2-(x+1)^2=$ t). $3x^3+3x^2-2x-2=$ u). $x^7-x^3=$

v). $4-(x-1)^2=$ x). $16-(5+x)^2=$ y). $x^4-x^2-4x-4=$ z). $(x^2+1)^2-4x^2=$

***

**13).** Calculaţi, scriind expresia de sub radical sub forma de pătrat al unui binom :

a). $\sqrt{13+4\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ b). $\sqrt{25-4\sqrt{6}}$ c). $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{17-4\sqrt{15}}$

d). $\sqrt{31-4\sqrt{21}}$ e). $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ f). $\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{28-6\sqrt{3}}$

g). $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{21-6\sqrt{6}}-\sqrt{29+6\sqrt{6}}$ h). $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{9-2\sqrt{8}}-\sqrt{6+2\sqrt{8}}$

i). $\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{13-2\sqrt{12}}+\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

**14).** Arătaţi că :

a). $4x^2+4x+2>0$, oricare $x\in R$

b). $2x^2+2x+1>0$, oricare $x\in R$

c). $x^2+y^2+2x+6y+10\geq 0$, oricare $x,y\in R$

d). $9x^2+4y^2+6x+4y+2\geq 0$, oricare $x,y\in R$

15). Aflaţi x şi y în fiecare caz în parte :

a). $x^2+25y^2-14x-10y+50=0$ b). $3x^2+4y^2-2x\sqrt{3}+12y+10\leq 0$

16). a). Aflaţi $x+y$ şi $x-y$ ştiind că : $x^2+y^2=5$ şi $x\cdot y=2$

b). Aflaţi $x^2+y^2$ şi $x-y$ ştiind că : $x+y=5$ şi $x\cdot y=2$.

c). Aflaţi $x-y$ şi $x:y$ ştiind că $x^2+y^2=21$ şi $x+y=5$.

d). Aflaţi $x^2-y^2$, dacă $x-y=6$ şi $x+y=11$.

e). Aflaţi $x-y$, dacă $x+y=12$ şi $x^2-y^2=36$.

f). Aflaţi $y-x$, dacă $y+x=11$ şi $x^2-y^2=44$.

**17).** Dacă $x+\frac{1}{x}=8$ aflaţi $x^2+\frac{1}{x^2}$ şi $x-\frac{1}{x}$.

**18).** Aflaţi minimul expresiilor :

a). $x^2+4x+8$ b). $4x^2+12x+20$ c). $x^2+6x+5$

**19).** Să se arate că următoarele inegalităţi sunt adevărate oricare ar fi $x, y\in R$ :

a). $x^2+y^2\geq 6y-9$ b). $x^2+4y^2+10\geq 2x+12y$

c). $x^2+y^2\geq 2x+4y-5$ d). $5x^2+y^2\geq 4xy+2x-1$

**20).** Să se arate că numerele a şi b sunt pătrate de numere reale; oricare ar fi $x, y\in R$ :

$a=x^2+2y^2+2xy-6y+9$ şi $b=(3x^2-2x)(3x^2-2x+2)+1$

**21).** Să se afle x şi y în fiecare caz în parte :

a). $4x^2+\sqrt{y^2+2y+1}=0$ b). $y^2+x^2+10x-6y+34=0$ c). $2x^2+y^2+2yx+4x+4=0$

# Rezolvarea ecuațiilor $x^2 = a$, $a \in Q$

*

**1).** Să se afle $x \in Q$ :

a) $x^2 = 12{,}25$ R : $x = 3{,}5$ sau $x = -3{,}5$ b) $\frac{x^2}{4} = 9$ R : $x = 6$ sau $x = -6$

c) $2x^2 = 72$ R : $x = 6$ sau $x = -6$ d) $x^2 : 8 = 50$ R : $x = 20$ sau $x = -20$

**2).** Să se afle perimetrul pătratului care are aria egală cu :

a) 19321 $cm^2$ R : 556 cm; b) 16,4025 $cm^2$ R : 16,2 cm; c) 0,252004 $cm^2$ R : 2,008 cm

**3).** Să se afle perimetrul pătratului cu aria de :

a). 0,16 $cm^2$ b). 9/4 $cm^2$ c). 51,84 $mm^2$ d). 0,4096 $m^2$

**

**4).** Să se afle perimetrul dreptunghiului care are aria egală cu :

a) 288 $cm^2$ și lungimea de două ori mai mare decât lățimea; R : 72 cm

b) 36 $cm^2$ și lățimea egală cu 16% din lungime. R : 34,8 cm

**5).** Să se calculeze în Q :

a). $x^2 = 169$ b). $x^2 = 1{,}2544$ c). $x^2 - 2401 = 0$ d). $4x^2 - 9 = 0$

e). $\frac{16x^2}{3} = 27$ f). $4x^2 + 5 = 30$ g). $\frac{x^2+1}{2} - 2\left(x^2 - 2\right) = x^2 - 5\frac{1}{2}$

h). $\frac{x^2+3}{x^2} = 4;\ x \neq 0$ i). $\frac{2}{5}x^2 = \frac{1}{5} - \frac{4x^2+1}{2} + \frac{9}{10}$

**6).** Să se rezolve în Q, $(x \neq 0)$ :

a). $\frac{2x}{0{,}45} = \frac{10}{x}$ b). $\frac{3x}{0{,}25} = \frac{108}{x}$ c). $\frac{x}{\sqrt{20736}} = \frac{1}{x}$

d). $\frac{x}{1+5\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5\cdot(-4)^2 + 4^0}}{x}$ e). $\frac{7x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}} = \frac{1}{\frac{1}{14}x}$ f). $\frac{0{,}5x}{-\frac{1}{2}\cdot(-2)^3} = \frac{2\frac{1}{4}}{0{,}(2)x}$

**7).** Să se afle perimetrul dreptunghiului care are lungimea de 3/4 ori mai mare ca lățimea și aria egală cu 1/3 $cm^2$.

***

**8).** Să se afle perimetrul dreptunghiului a cărui lățime este 35% din lungime și aria egală cu 0,6(2)$cm^2$.

**9).** Să se afle soluțiile întregi ale ecuațiilor : a). $x^2 = 841$ b). $x(x+3) = 3x + 9216$

## Testul 1

1). Calculați :

5 0,6p a). $(3x+1)^2 = .......$ 5 0,6p b). $(4-x)(x+4) = .......$ 5 0,6p c). $(x+x^2-1)^2 = .......$

2). Descompuneți în factori :

5 0,6p a). $4x^2 - 20x + 25 = .......$ 5 0,6p b). $4x^2 - 9 = .......$ 7 0,5p c). $2x^3 - 2x = .......$

7 3). Calculați :

0,5p a). $x + x^2 - (5x+3) - (4-x^2) = .......$ 0,5p b). $2x\cdot(-x) + 3x(4x+1) = .......$

0,5p c). $(12x^2 - 4x) : (-2x) + 2(x-1) = .......$ 0,5p d). $(-2x)^2 - (x+1)(4x-1) = .......$

0,5p e). $(4-2x)^2 - (3-2x)(2x+3) = .......$

9 1p 4). Rezolvați : a). $x^2 = 9 \Rightarrow x \in .......$ b). $\frac{x-2}{3} = \frac{4}{x+2} \Rightarrow x \in .......$

9 1p 5). Rezolvați ecuația : $(x+2)(x-3) - 2(x+5)^2 = x(4-x)$, $x \in R$.

10 1p 6). Arătați că $x^2 + x + 1 > 0$ pentru oricare $x \in R$.

# *Capitolul VIII*
# Ecuații și inecuații

*

**1).** Să se rezolve în R :

a). $2x + 5 = 11$ c). $2 \cdot (2x + 1) = 4$ e). $-12x + 2 \cdot (x - 4) = 3 \cdot (x + 2) - 8x$

b). $28 - 5x = -2$ d). $3 \cdot (x + 2) - 12 = 9$ f). $3 \cdot (x + 5) + 16 = x + 31$

**2).** Să se rezolve în Z :

a). $64 : (x + 2) = -16$ b). $-24 : (7 - x) = -3$

c). $(2x + 5) : 3 = -5$ d). $(2 - 3x) : (-4) = 6$

**3).** Să se verifice dacă numerele indicate sunt soluții pentru ecuațiile :

a). $x + 23 = 4 \cdot (x + 5) - 3x + x\sqrt{3}$ ; $x = \sqrt{3}$ b). $\frac{2x+1}{2} = 2x$ ; $x = 0,5$

c). $4x + 5 = x$ ; $x = 1,(3)$ d). $\sqrt{6} \cdot (x + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ; $x = -\sqrt{2}$

**

**4).** Să se rezolve în R :

a). $20 : |x + 1| = 4$ b). $2 \cdot |2x + 3| - 8 = 10$

c). $|5x + 1| - 6 = -4\frac{1}{3}$ d). $3 \cdot (2 \cdot |3x + 1| + 6) - 10 = 14$

**5).** Să se rezolve în N :

a). $25^n \cdot 5^{n+1} = 125 \cdot 5^2$ b). $27^n \cdot 9^{n+2} \cdot 3^6 = 81^{2n} \cdot 3$

c). $(7^2)^x \cdot 2^x = 1$ d). $4^{-n} \cdot 8^{-n+1} = 0,25$

**6).** Care din următoarele ecuații sunt echivalente :

a). $\frac{x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + \sqrt{6}$ și $2x + \sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ b). $\frac{x+1}{2} - 1 = x$ și $3 \cdot (2x + 1) - 7x = 4$

c). $3 - 2 \cdot [x - 2 \cdot (x + 3)] = x$ și $3x + 3 = 48$

**7).** Să se determine $a \in R$ dacă soluțiile ecuațiilor de mai jos sunt numerele indicate:

a). $2ax + 3 = 8 \cdot (x + 1)$; $x = \frac{5}{2}$ b). $3x \cdot (2a + 1) = 3$ ; $x = \frac{1}{3}$

c). $ax + 3x - 2a = -4$ ; $x = -3$ d). $(x - a)(x + 2) = x^2 + 10a - 4$ ; $x = 2$

e). $\frac{x+4a}{a+4} = \frac{2a}{x+3}$ ; $x = -2$

**8).** Să se rezolve ecuațiile de mai jos cu valorile indicate pentru a :

a). $(2a^2 + 1)x + 3 = a^2 + 5$ ; $a = 3$ b). $(a + x) \cdot x = a^2 + 2a$ ; $a = 0$

c). $(3a - 2x) \cdot x = -4 - x^2 + 3x$ ; $a = 1$ d). $5a - 2x \cdot (3x + a) = 3x(x - 2) - a - 7$; $a = 3$

e). $(2 + ax)x + 3 = 3x^2 + a$ ; $a = 3$

**9).** Să se rezolve în R :

a). $2x + 4 \cdot (x - 1) = 5x$ b). $3[3 \cdot (3x - 1) + 3] = 54$

c). $2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (x + 2)] = 14$ d). $6 - 3 \cdot (1 - x) + 2(x - 5) = 3$

e). $3 \cdot (2x + 1) - 5(x + 2) = 3x - 4$ f). $2x + 4(1 - x) = 2 + 2 \cdot (2x + 5)$

g). $5x - 4(2x + 3) = 3 - 2(4 - 5x)$ h). $4x + 2(3x - 1) = 1 + 3(x - 1)$

i). $7(x + 1) = 3(x - 2) - 4(5 - x)$

**10).** Să se rezolve în R :

a). $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 11$ b). $(x - 3)^2 + 4 = (x + 1)(x - 6)$

c). $(2x - 3)^2 + (1 - x)^2 = 5x(x + 2)$ d). $(1 - y)(y + 3) + 2(y - 4) = (2 - y)^2 - 2y^2$

e). $(x+3)(2x-1)+(2+x)(4-x)=x^2$ f). $3\cdot(x+5)-x^2=(2-3x)(x+4)+2x^2$

**11).** Să se rezolve în Q :

a). $\frac{x}{5}+3(x+1)=2x$ b). $3-\frac{x+1}{2}=x$ c). $4-5(x+1)=\frac{x}{2}-3x$

d). $\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=1-\frac{x}{6}$ e). $\frac{2x-1}{5}+2=\frac{x-4}{10}$

f). $\frac{7-x}{3}-\frac{3x+4}{4}=0{,}25$ g). $\frac{3(2x+3)}{4}+\frac{x}{6}=1-\frac{x-5}{12}$

h). $\frac{x-5}{3}+\frac{3x-6}{2}-\frac{5x+1}{6}=0$ i). $\frac{3(x+6)}{2}-\frac{2(4-x)}{3}=\frac{5(1-x)}{6}$

**12).** Să se rezolve în R :

a). $x\sqrt{\frac{25}{9}}-\frac{2(x+3)}{3}=x$ b). $\frac{4x+3}{2}-x\sqrt{5\frac{4}{9}}=-\frac{x}{3}+4{,}5$

c). $\frac{2x+6(4-x)}{4}=5(x+1)-6x+1$ d). $3x\sqrt{2}-4=\frac{x}{\sqrt{2}}$

e). $2\sqrt{2}\left(x+\sqrt{8}\right)=\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}$ f). $\left(3\sqrt{6}\cdot x+\sqrt{12}\right):\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

g). $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=x\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ h). $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)^2=x\left(\frac{x}{2}+\sqrt{6}\right)$

i). $\left(x\sqrt{5}+2\right)^2=\left(x\sqrt{5}+1\right)^2+\frac{x}{\sqrt{5}}$ j). $x\cdot\sqrt{3}^{-3}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

**13).** Să se afle x din proporţiile următoare :

a). $\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{2}{3}$ b). $\frac{4}{5}=\frac{3x+2}{x}$ c). $\frac{x^2+1}{3x}=\frac{x+5}{3}$

d). $\frac{x-1}{2-x}=\frac{1-x}{x+2}$ e). $\frac{2(x+5)}{3x}=\frac{4x+1}{6x+2}$ f). $\frac{x^2-9}{x+5}=x+3$

***

**14).** Să se rezolve în R :

a). $x\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{50}+5$ b). $x\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-2x$

c). $x\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4+x\cdot\sqrt{13-4\sqrt{3}}+3x$ d). $2x+x\sqrt{12+2\sqrt{35}}=x\sqrt{11+4\sqrt{7}}-8$

**15).** Rezolvaţi ecuaţiile :

a). $(x-2)\cdot(3+2x)=0$ b). $x\cdot(x+1)\cdot(2x-4)=0$ c). $(x-2)\cdot(4-|x-8|)=0$

d). $8x-x^2=0$ e). $(x-3)^2=0$ f). $(x-1)^2\cdot(x+1)=0$ g). $(x+1)^2+|x^2-1|=0$

**16).** Să se rezolve ecuaţiile de mai jos şi să se discute după valorile reale ale parametrilor :

a). $mx=m+1$ b). $x=mx+1$ c). $2(x-m)=mx-4$ d). $m(mx+1)=x+1$

e). $\frac{mx-1}{3}=m+x$ f). $x+2=mx+\sqrt{m}$ g). $\frac{2x+3}{m}=x+\frac{1}{2}$ h). $2mx+3=2m$

i). $2m=x+4mx-2$ j). $m^2x+mx=m+1$ k). $2m^2x+4mx=3$ l). $3mx-4m^2=m^2x$

m). $m^2x=m+1$ n). $m^2x=x+1$ o). $mx+x=a$ p). $3x=mx+ma$

**17).** Să se afle $x\in Z$ dacă $a\in Z$ :

a). $ax-3-x=0$ b). $2(ax-6)=x$ c). $ax-6=a-x$

**18).** Să se rezolve în R :

a). $|4x - 6| = 8$ b). $|2x + 7| = -2$ c). $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$ d). $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 5$

**19).** Să se afle $x \in R$, $y \in R$ :

a). $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{25y^2 + 10y + 1} = 0$ b). $\left(x\sqrt{3} + 3\right)^2 + |y - 5| = 0$

c). $\sqrt{x^2 - 12x + 36} + \left|y\sqrt{2} + 2\right| = 0$ d). $x^2 + 2x + 1 + |y - 6| = 0$

e). $|x + 1| + |y - 2| = 0$ f). $\left|2x + \sqrt{2}\right| + \left|y + 2\sqrt{3}\right| = 0$ g). $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = 0$

## Inecuații de forma ax + b > 0

*

**1).** Care din următoarele numere $\left\{\frac{1}{2}; 3; -2; 0; -\frac{3}{2}\right\}$ sunt soluții pentru inecuațiile de mai jos :

a). $5x - 6 \le 0$ b). $4(x + 1) \le \frac{x + 1}{2}$ c). $\frac{x}{2} - \frac{x + 1}{3} > 0$

d). $2 - 3(x - 1) \le 4x$ e). $\frac{8 - x}{-2} < x$ f). $1 - \frac{x + 8}{2} > x$

**

**2).** Rezolvați următoarele inecuații în N :

a). $4 - 3x \ge 2$ b). $5 + 3(x + 1) \le 1$ c). $5x - 3 \le x + 1$

d). $4 - 2(2 + x) \ge x$ e). $3 - 5(2 - x) \le x + 1$ f). $5x + 6 < 2 - 3(x + 3)$

g). $4 - \frac{x}{2} \le x$ h). $5 + \frac{x + 1}{3} > 4x$ i). $2 - \frac{x + 3}{2} \ge \frac{x}{3}$

j). $4x - \frac{3 - x}{3} > 2$ k). $\frac{x + 1}{3} - \frac{x}{2} < x$ l). $\frac{4 - x}{2} > x - \frac{2x - 3}{3}$

m). $4 - \frac{5x + 2}{2} > x - \frac{x - 1}{3}$ n). $(x + 1)^2 \ge x^2$ o). $(2 - x)^2 > (x + 3)(x - 3)$

p). $(2 - 3x)^2 > 3x(3x - 6) + 4$ r). $(5 + x)^2 \ge (x + 1)^2 - 3$ s). $(2 + 5x)^2 - (4x + 1)^2 > (3x - 2)^2$

**3).** Rezolvați următoarele inecuații în Z :

a). $x - 3(x + 1) \le 4$ b). $x - \frac{3x - 6}{2} \le 2$ c). $\frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{5}(2 - x) > 1$

d). $4(x - 2) - 3(4 - x) < x$ e). $x\sqrt{3} - \sqrt{3}\left(\sqrt{27} + 2x\right) \ge 8$ f). $\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} > x\sqrt{3}$

g). $5\left(x + \sqrt{18}\right) - \sqrt{2}\left(x\sqrt{8} + 1\right) \le x$ h). $\frac{x}{1 - \sqrt{2}} + \frac{x}{1 + \sqrt{2}} < 3$ i). $(x + 3)^2 \le x^2$

j). $\left(2x\sqrt{2} + 3\right)^2 > 4x\left(2x - \sqrt{8}\right)$

**4).** Rezolvați următoarele inecuații în Z :

a). $x - 3(4 - 2x) \le 24$ b). $\frac{1}{3}(4 - 3x) - \frac{x + 6}{5} \le \frac{x}{15}$ c). $4 - (2 - 3x)(3x + 2) > 1 + 9x(x - 3)$

d). $\frac{x + 3}{-2} \le x$ e). $\frac{4 - x}{-3} \le 2 - x$ f). $2 - \frac{5 - 2x}{-2} > x$ g). $\frac{(2x + 1)^2}{2} \le (2x - 6)(x + 1) + 3$

5). Să se rezolve :

a). $|x| < 5$ , $x \in Z$ b). $|x + 7| \le 3$ , $x \in Z$

c). $|2x + 3| \le 7$ , $x \in N$ d). $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 8$ , $x \in Z$

## Testul 1

⑤2p 1). Precizaţi dacă $-2$ este soluţie pentru ecuaţia $5 - 2x = 11 + x$.

⑤2p 2). Dacă a). $4 - \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow x = .......$ b). $x - \frac{x}{2} \le 1, x \in N \Rightarrow x \in .......$

⑦2p 3). Dacă : a). $3x - 2(x+2) = 4(x+3) \Rightarrow x = .......$

b). $(x+1)^2 = (x-1)(x+1) \Rightarrow x = .......$

c). $\frac{4}{3} - x > 1, x \in Z \Rightarrow x \in .......$ d). $3 - 2(x+1) < 0, x \in N \Rightarrow x \in .......$

⑨1p 4). Dacă : $\frac{3x-1}{4} - \frac{x+2}{5} + 1 = 0 \Rightarrow x = .......$

⑨1p **5). Să se afle două numere naturale dacă se ştie că unul este cu 119 mai mare decât celălalt iar împărţind unul la celălalt se obţine câtul 8 şi restul 5.**

⑩ 1p 6). Să se determine mulţimea soluţiilor întregi ale ecuaţiei $\left|\frac{2|x|}{5} - 1\right| = 0,6$.

## Testul 2

⑤2p 1). Precizaţi dacă $-1$ este soluţie a ecuaţiei : $1 - \frac{x-2}{3} = 2$.

⑤2p 2). Dacă : a). $1 - 2x = 7; x \in R \Rightarrow x = .......$

b). $x + 3 < -8,5; x \in Z \Rightarrow x \in .......$

⑦1p 3). Să se rezolve în R : $4 - (4 - 2x) = x$.

⑦1p 4). Soluţia reală a ecuaţiei $4x + 6 = x + 3$ este .......

⑨1p 5). Să se rezolve :

a). $\frac{x\sqrt{2} - 3}{2} - \frac{x\sqrt{8} + 1}{4} = -1,75$, $x \in R$ b). $(2x+3)^2 - (x+4)(4-x) \le 5(x^2+2) + 7; x \in N^*$

⑨1p 6). Numerele naturale care verifică inecuaţia $x + \frac{x-2}{-3} < 4$ sunt .......

⑩ 1p 7). Rezolvaţi ecuaţia $\left||x - 3| - 2\right| = 1$.

## Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuaţiilor

*

**1).** Să se afle un număr natural dacă dublul lui este cu 5 mai mic decât triplul său.

**2).** Suma a trei numere impare consecutive este 195. Să se afle numerele.

**

**3).** Să se afle un număr dacă 60% din el este cu 14 mai mare decât jumătate din el.

**4).** Să se afle un număr ştiind că dacă îl înmulţim cu 3/8 se obţine acelaşi rezultat ca atunci când scădem din 36 trei sferturi din număr.

**5).** Să se afle două numere naturale a şi b ştiind că dacă împărţim pe a la b se obţine câtul 2 şi restul 5 şi : i). suma lor este 50; ii). diferenţa lor este 20.

**6).** Să se afle două numere naturale ştiind că suma lor este 54 şi cel mai mic este de patru ori mai mare decât diferenţa lor.

7). Trei copii au împreună 12.700 lei. Al doilea are de două ori mai mult decât primul şi încă 50 de lei şi cu 100 de lei mai puţin decât al treilea. Să se afle cât are fiecare.

8). Peste câţi ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului, dacă în prezent au vârstele de 28 de ani respectiv 4 ani ?

9). Să se afle laturile unui triunghi isoscel cu perimetrul de 44 cm dacă 3/2 din una din laturile congruente este cât 9/10 din bază.

10). Media aritmetică a trei numere este 20. Să se afle numerele dacă al doilea este cu 6 mai mare decât dublul primului şi primul este cu 10 mai mare decât al treilea.

11). Să se afle unghiurile $\sphericalangle A;\sphericalangle B;\sphericalangle C$ ale unui triunghi ştiind că măsura unghiului $\sphericalangle A$ reprezintă 4/5 din măsura unghiului $\sphericalangle B$ iar măsura unghiului $\sphericalangle C$ este cu $50^0$ mai mare decât măsura unghiului A.

12). Să se afle bazele unui trapez dacă linia mijlocie are lungimea de 12 cm şi diferenţa dintre baze este de 4 cm.

13). Să se afle perimetrul unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 26 cm şi catetele invers proporţionale cu 5 şi 12.

14). Un călător a parcurs în prima zi 2/5 din drum, în a doua zi 2/3 din cât a parcurs în prima zi, iar în a treia zi restul de 40 km. Să se afle cât a parcurs în fiecare zi.

15). Media aritmetică a trei numere naturale este 53. Să se afle numerele dacă al treilea este de trei ori mai mare decât primul şi împărţind primul la al doilea se obţine câtul 2 şi restul 6.

16). Numitorul unei fracţii este cu 3 mai mare decât dublul numărătorului. Dacă scădem 9 de la numitor şi adunăm 2 la numărător, fracţia devine echiunitară. Să se afle fracţia.

17). Triplul unui număr a fost mărit cu 2, rezultatul obţinut înmulţit cu 5 şi apoi adunat cu 6. ÿmpărţind 408 la acest rezultat se obţine câtul 3. Să se afle numărul necunoscut.

18). Dublul unui număr natural a fost micşorat cu 7 şi rezultatul obţinut mărit de 6 ori. Scăzând 2 din acest rezultat şi apoi împărţind totul la 5 se obţine 20. Să se afle numărul.

19). Să se afle două numere naturale dacă diferenţa pătratelor sale este 176 şi suma numerelor este 44.

20). Adunând pătratul sumei cu pătratul diferenţei a două numere naturale se obţine 328. Ştiind că raportul celor două numere este 4/5, să se afle numerele.

21). 25% dintr-un număr reprezintă 4/5 din alt număr. Dacă din primul număr se scade 10 iar la al doilea se adună 8 atunci suma lor este 40. Să se afle numerele.

22). Împărţind un număr la alt număr se obţine câtul 2 şi restul 3. Adunând 15 la numărul mai mare şi scăzând 2 din numărul mai mic atunci el devine de 13 ori mai mic. Să se afle numerele.

23). Vârsta mamei este cu 27 de ani mai mare decât vârsta fiicei. Peste 1 an fiica va avea vârsta de 10 ori mai mică decât vârsta mamei. Ce vârsta are fiecare ?

24). Într-un bloc sunt 45 de apartamente. Ştiind că sunt doar apartamente de 2 şi de 3 camere şi că în bloc sunt 105 camere, să se afle câte apartamente de fiecare tip sunt.

25). Să se afle preţul unui kilogram de mere şi a unui kilogram de pere dacă 3 kg de mere şi 7 kg de pere costă 74.000 lei iar 4 kg de mere şi 2 kg de pere costă 40.000 de lei.

26). Pe 14 kg de fructe de două calităţi s-a plătit suma de 46.000 lei. Ce cantităţi din fiecare calitate s-a cumpărat dacă prima calitate costă 3.000 lei kilogramul iar a doua costă 4.000 lei kilogramul ?

27). Să se calculeze aria triunghiului $\Delta ABC$ dreptunghic în A, dacă $\sin\sphericalangle B = 3/5$ şi lungimea laturii AB este cu 7 mai mică decât lungimea laturii BC.

28). În trapezul dreptughic ABCD, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ se ştie BC = 8 cm, $m(\sphericalangle C) = 30^0$, şi lungimea liniei mijlocii este de $6\sqrt{3}$ cm. Să se calculeze bazele şi aria trapezului.

29). În trapezul oarecare ABCD, AB || CD , aflaţi lungimea bazelor dacă lungimea liniei mijlocii MN este 10 cm şi PQ = 2 cm, $MN \cap AC = \{P\}$ şi $MN \cap BD = \{Q\}$.

30). Raportul a două numere este 3/4. Ştiind că dacă din primul număr se scade 6 şi la al doilea se adună 4 se obţine raportul 1/2. Să se afle numerele.

31). Să se afle vârsta mamei şi vârsta fiicei ştiind că peste 1 an vârsta mamei va fi de 7 ori mai mare şi peste 3 ani vârsta mamei va fi de 5 ori mai mare decât vârsta fiicei.

32). Să se afle aria unui triunghi dreptunghic isoscel care are perimetrul de $8(\sqrt{2}+1)$cm.

33). O carte şi un stilou costau împreună 20.000 lei. După ce cartea s-a scumpit cu 10% şi stiloul s-a ieftinit cu 25%, costă împreună 19.200 lei. Cât costau fiecare ?

34). Media aritmetică a două numere este 23. Dacă primul număr se măreşte cu 25% din el şi al doilea se măreşte cu 20% din el, media aritmetică devine 28. Să se afle numerele.

***

35). Din două localităţi pleacă una spre alta o plută şi o barcă cu motor pe un râu. Ştiind distanţa dintre cele două localităţi de 120 km şi timpul până la întâlnire de 3 ore, să se afle viteza bărcii.

36). Un automobil trebuia să ajungă dintr-o localitate în alta în 5 ore. Mărind viteza cu 20 km/h a ajuns în 4 ore. Cu ce viteză a mers şi care este distanţa dintre localităţi ?

37). Un muncitor trebuia să facă un număr de piese în 6 ore. El a făcut cu trei piese pe oră mai puţin şi şi-a terminat norma în 8 ore. Câte piese are norma şi câte piese pe oră trebuia să facă ?

38). Un turist pleacă din localitatea A spre B cu 5 km/h. Peste 20 de minute pleacă şi un biciclist din A spre B cu 15 km/h. După cât timp de când a plecat turistul şi la ce distanţa de localitatea A este ajuns din urma de biciclist ?

39). Din localităţile A şi B pleacă unul spre altul în acelaşi moment un biciclist cu 20 km/h şi un autoturism cu 80 km/h. ştiind distanţa dintre localităţi de 50 km, să se afle după cât timp şi la ce distanţă de localitatea A se întâlnesc ?

40). Ce cantităţi de soluţii de concentraţii de 7% şi respectiv 3% trebuie amestecate pentru a obţine 8 litri de concentraţie de 6% ?

41). Dacă aşezăm elevii unei clase câte 2 în bancă rămân 3 elevi în picioare şi dacă îi aşezăm câte 3 în bancă rămân 4 bănci libere. Câţi elevi şi câte bănci sunt în clasă ?

42). Un bazin poate fi umplut de două feluri de robinete. 3 robinete mari şi 2 robinete mici curgând împreună umplu bazinul în 5 minute.Un robinet mare şi unul mic umplu bazinul în 14 minute. În câte minute se umple bazinul dacă curge doar un robinet mic ? Dar dacă curg două robinete mari ?

43). Un tren personal merge cu viteza de 100 km/h. Pe lângă el trece în aceeaşi direcţie un accelerat lung de 100 m. Dacă un călător din personal vede acceleratul timp de 0,3 minute să se afle viteza acceleratului.

44). Un biciclist şi un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B. Ştiind că dintre localităţi este 410 km şi viteza biciclistului este de 15 km/h şi a automobilului de 190 km/h. să se afle după cât timp şi la ce distanţa de localitatea A se întâlnesc biciclistul cu automobilul care a ajuns în localitatea B şi se întoarce spre localitatea A.

45). Să se afle ce suma de bani şi cu ce dobandă a depus o persoană la o bancă, ştiind că după 3 luni avea 224.000 lei şi după 6 luni de zile are 248.000 lei.

46). Mai mulţi copii vor să-şi cumpere o minge de fotbal. Dacă dă fiecare copil câte 11.000 lei nu le ajunge cu 1.000 lei, iar dacă dă fiecare câte 12.000 lei le mai rămân 8.000 lei. Câţi copii sunt şi ce sumă este necesară ?

47). Să se afle un număr de forma $\overline{ab}$ dacă raportul cifrelor este 2/3 şi suma dintre el şi numărul $\overline{ba}$ este 110.

# *Capitolul IX*
## Coordonate carteziene în plan

**1).** Fie $A = \{1; 3\}$. Să se scrie elementele produsului cartezian $A \times A$.
**2).** Fie mulțimile $A = \{2; 3; 4\}$ și $B = \{1; 2\}$. Să se scrie $A \times B$ și $B \times A$.
**3).** Fie mulțimile $A = \{1; 2\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
a). Calculați $A \cup B$; $A - B$; $B \cap A$
b). Determinați a; b; c; d; $e \in N$ astfel încât: $C(2a - 1; 4) \in A \times B$ ; $D(b; 2b) \in A \times B$; $E(c; c^2) \in A \times B$; $F(d; d) \in B \times A$; $G(e; 2e) \in A \times A$.
**4).** Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A \cap B = \{2; 3\}$ ; $(1; 4) \in A \times B$ ; $5 \notin A$
**5).** Fie $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{a; b\}$
a). Să se determine mulțimea B dacă $(1; 4) \in A \times B$ și $(b; b) \in B \times A$. Câte soluții sunt ?
b). Pentru $C = \{4\}$ să se scrie elementele produselor $A \times C$ și $C \times A$.
**6).** Să se reprezinte grafic :
a). $A(-2)$; $B(1)$; $C(4)$; $D(-3)$; $E(3)$; $F(-6)$; $G(5)$ pe axa numerelor.
b). $M(1; 3)$; $N(-2; 5)$; $P(-3; -1)$; $R(2; -4)$; $S(4; 2)$; $T(-1; -3)$; $V(-4; 3)$ într-un sistem de axe.
**7).** Fie $A = \{1; 3; 4\}$ și $B = \{0; 2\}$. Să se reprezinte în plan elementele produselor $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.
**8).** Să se reprezinte într-un sistem de axe ortogonale :
a). punctul $A(5; 2)$ și simetricul lui față de Ox b). punctul $B(-2; 4)$ și simetricul lui față de Oy
c). punctul $C(3; -5)$ și simetricul lui față de originea sistemului de axe.
**9).** Să se reprezinte următoarele puncte într-un sistem de axe și să se calculeze distanța dintre ele :
a). $A(1; 3)$ și $B(4; 5)$ b). $A(1; 6)$ și $B(5; 2)$ c). $A(2; 1)$ și $B(-3; 4)$ d). $A(-3; -2)$ și $B(2; -5)$
**10).** Ce figuri geometrice formează punctele de mai jos :
a). $A(1; 2)$; $B(-2; 1)$; $C(-1; -2)$; $D(2; -1)$ b). $A(4; 1)$; $B(-1; 4)$; $C(1; -4)$
c). $A(3; 3)$; $B(-1; 1)$; $C(-3; -3)$; $D(1; -1)$ d). $A(2; 1)$; $B(5; 2)$; $C(4; 4)$; $D(1; 3)$
e). $A(-3; -5)$; $B(2; -2)$; $C(1; 5)$; $D(-4; 2)$ f). $A(0; 5)$; $B(-2; 0)$; $C(0; -5)$; $D(2; 0)$
**11).** Să se afle ariile figurilor geometrice determinate de următoarele puncte :
a). $A(2; 7)$, $B(2; 4)$, $C(4; 4)$ b). $A(-4; 2)$, $B(-7; 3)$, $C(-4; 7)$
c). $A(2; -1)$, $B(3; -4)$, $C(-6; -4)$ d). $A(-2; 2)$, $B(-1; 5)$, $C(-3; 5)$, $D(-1; 8)$
e). $A(1; -2)$, $B(5; 2)$, $C(1; 6)$, $D(-3; 2)$ f). $A(-2; -1)$, $B(-9; -1)$, $C(-5; 2)$, $D(-7; 2)$
g). $A(-1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(5; -1)$
**12).** Fie $A(-2; 1)$, $B(2; 2)$ și $C(6; a)$. Să se afle a dacă $(AB) \equiv (BC)$.
**13).** Determinați coordonatele punctului D în fiecare caz, astfel încât să fie îndeplinite condițiile
a). $A(1; 2)$, $B(5; 3)$, $C(2; 5)$, ABCD paralelogram.
b). $A(-7; 5)$, $B(-4; 3)$, $C(-4; 7)$, ABCD romb.
c). $A(-5; -3)$, $B(-2; -5)$, $C(0; -2)$, ABCD pătrat.
d). $A(4; -4)$, $B(2; -1)$, $C(4; 1)$, $D(8; a)$, ABCD trapez.
**14).** Fie triunghiul $\triangle ABC$ isoscel care are vârful A situat în originea sistemului de coordonate și înălțimea AD de 4 cm. Știind că $D \in Oy$ și centimetrul este considerat unitate de măsura pentru sistemul de coordonate, să se determine coordonatele punctelor B, D, C dacă $AC = 5$. Câte soluții sunt ?
**15).** Fie segmentul AB paralel cu axa absciselor și având lungimea de 7 cm. Dacă $A(-2; 4)$ și centimetrul este unitate de măsură a sistemului de axe, să se determine coordonatele punctelor B și M, mijlocul segmentului.
**16).** În tabelul următor este redată înălțimea fiecărui elev. Reprezentați acest lucru prin diagrame și apoi prin grafic.

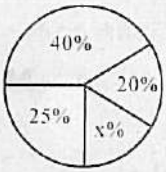
| elev | Ana | Cristi | Radu | Oana | Tudor | Anda | Gabi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| înălțime | 1,52 m | 1,6 m | 1,5 m | 1,55 m | 1,65 m | 1,45 m | 1,66 m |

**17).** În tabelul următor sunt notele obținute la un test de elevii unei clase. Reprezentați printr-un grafic :

| nota | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nr. elevi | 1 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 |

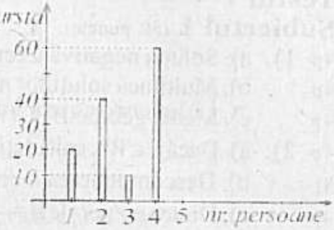
18). Figura alăturată reprezintă producţia unei fabrici de panificaţie :

40% din producţie - pâine albă;
20% din producţie - cornuri;
25% din producţie - chifle;
x % din producţie - specialităţi.



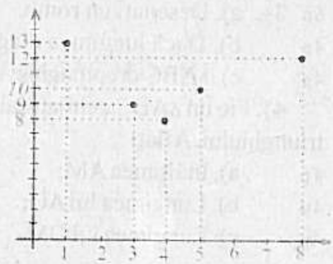

a). Cât la sută reprezintă specialităţile ?
b). Dacă fabrica produce 100 kg pâine albă pe zi, câte kg de chifle produce ?

19). Figura alăturată reprezintă vârstele membrilor unei familii :




a). Câte persoane sunt în total ?
b). Câţi copii sunt ?

20). În figura alăturată sunt reprezentaţi elevii care fac parte din cor, pe categorii de vârstă :

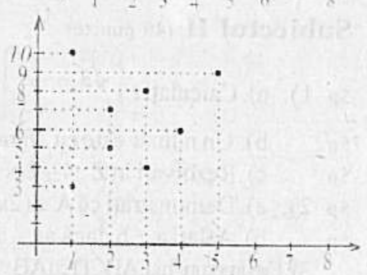



a). Câţi elevi sunt în cor ?
b). Câţi au peste 11 ani ?

21). Completează următorul tabel privind membrii familiei tale :

| | copii | adulţi |
|---|---|---|
| feminin | | |
| masculin | | |

22). Graficul următor reprezintă situaţia notelor luate la un test.




a). Câţi elevi sunt în clasă ?
b). Câţi elevi au luat peste 7 ?
c). Care este media pe clasă ?

1). Fiica bunicii lui Marius ar putea fi bunica fiului lui Marius ?
2). O femeie îşi angajează un avocat. Ea este sora avocatului, dar avocatul nu este fratele ei. Este posibil ?
3). Două mame şi două fiice merg la o alimentară şi cumpără fiecare câte 1 kg de portocale. Este posibil să fi cumpărat împreună 3 kg ?
4). Cât pământ se află într-o groapă de 3 m adâncime, 3 m lungime şi 2 lăţime, ştiind că a fost săpată cu un hârleţ cu lama lată de 0,3 m ?
5). De la înălţimea mea pot să dau drumul unei bile într-o găleată, la temperatura de $-1^0$C şi încă uneia, în acelaşi moment, de aceeaşi greutate, dar la $1^0$C. Care bilă va atinge fundul găleţii prima ?
6). Un corp din oţel care nu are niciun unghi este o sferă ?
7). Ce număr urmează în seria : 172, 84, 40, 18 ,... ?
8). Dacă prietena ta soseşte întotdeauna mai târziu decât tine, înseamnă că tu soseşti întotdeauna mai devreme ?
9). În ce lună se coc ghindele fagului ?

# *Capitolul X*
# Modele de lucrări semestriale (sem. II)

## Testul 1
### Subiectul I (50 puncte)

4p 1). a). Soluția negativă a ecuației $x^2 = 4$ este .....
4p b). Mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației $3x - 8 < x$ este .....
4p c). Media geometrică a numerelor $12\sqrt{3}$ și $27\sqrt{3}$ este .....
4p 2). a). Dacă $x \in R^*$, calculați $(2x)^2 : x + x =$ .....
4p b). Descompunerea în factori a expresiei $4x^2 - 4x + 1$ este .....
4p c). Dintre numerele $a = -\sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{3}$ mai mare este .....
6p 3). a). Desenați un romb.
4p b). Dacă lungimea diagonalei unui pătrat este $4\sqrt{2}$ atunci aria pătratului este egală cu ....
4p c). $\Delta ABC$ dreptunghic, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$, $BC = 6$ cm => AB este egal cu .....

4). Fie un $\Delta ABC$ echilateral cu $AB = 12$ cm, $AM \perp BC$, $M \in (BC)$ și O centrul de greutate al triunghiului. Aflați :
4p a). Înălțimea AM;
4p b). Lungimea lui AO;
4p c). Lungimea lui OM.

### Subiectul II (40 puncte)

5p 1). a). Calculați : $\left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$
5p b). Un număr este cu 26 mai mic decât triplul său. Aflați numărul.
5p c). Rezolvați în Z : $4 - 2(x + 1) \leq x + 11$.
5p 2). a). Demonstrați că $A = (2x + 3)^2 - 3x(x + 2)$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in Z$.
5p b). Aflați $a + b$ dacă $ax - ay + bx - by = -15$ și $x - y = 3$.

3). Fie dreptunghiul ABCD cu $AB = 20$ cm, $AD = 15$ cm. Perpendiculara din A pe DB intersectează DC în F și DB în E.
5p a). Aflați sinusul $\sphericalangle ABD$.
5p b). Calculați DF.
5p c). Demonstrați că $\Delta ADE \approx \Delta DFE$.

## Testul 2
### Subiectul I (50 puncte)

4p 1). a). Soluția ecuației $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 28$ este .....
4p b). Numărul soluțiilor naturale ale inecuației $x - \frac{x+1}{2} \leq 4$ este .....
4p c). Media geometrică a numerelor 2,4 și 6,(6) este .....
4p 2). a). Dacă $x \in R^*$, calculați $3x - 4x^3 : (-x)^2 =$ .....
4p b). Descompunerea în factori primi a expresiei $4x^2 - \frac{1}{9}$ este .....
4p c). Dintre numerele $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ mai mic este .....
6p 3). a). Desenați un paralelogram.
4p b). Triunghiul echilateral cu înălțimea egală cu $2\sqrt{3}$ cm, are latura de .....
4p c). Pătratul cu diagonala egală cu $5\sqrt{2}$ cm, are perimetrul egal cu .....

4). Fie $\triangle ABC$ dreptunghic $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $BD = 9$ cm, $DC = 16$ cm. Aflați :

4p a). Înălțimea AD;

4p b). Aria $\triangle ABC$;

4p c). $tg \sphericalangle C$.

**Subiectul II** (40 puncte)

5p 1). a). Calculați : $\left(\sqrt{54}+\sqrt{24}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$

5p b). Un om a parcurs 6 km și i-au mai rămas $\frac{2}{5}$ din drum. Ce lungime are drumul ?

5p c). Rezolvați ecuația : $\frac{2x-3}{7}=\frac{1}{2x+3}$

5p 2). a). Demonstrați că $A=(3x+1)^2-3(2x+1)$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in Z$.

5p b). Aflați $2a-b$ dacă se știe $4a^2-b^2=24$ și $2a+b=2\sqrt{3}$.

3). Fie ABCD un trapez isoscel, $AB \| CD$, $AB = 6$ cm, $DC = 18$ cm, $BC = 10$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$.

5p a). Calculați lungimea înălțimii trapezului.

5p b). Demonstrați că $\triangle AOB \approx \triangle COD$.

5p c). Aflați aria $\triangle AOB$.

# Testul 3

## Subiectul I (50 puncte)

4p 1). a). Soluția ecuației $(33x+77)=22$ este .....

4p b). Soluția ecuației $x \cdot 2+7=-2$ este .....

4p c). Media geometrică a numerelor $\left|1-\sqrt{2}\right|$ și $\left|1+\sqrt{2}\right|$ este .....

4p 2). a). Dintre $a=3\sqrt{15}$ și $B=7\sqrt{6}$ mai mic este .....

4p b). Rezultatul calculului $[2\cdot(-3x)-4x]:(-5x)$ este .....

4p c). Dacă $a \in N$, și $a^2-b^2=0$, $b \in Z_-$ atunci $b =$ .....

6p 3). a). Desenați un romb.

4p b). Dacă $\triangle ABC$ are $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $BD = 8$ cm și $DC = 2$ cm atunci $AD =$ .....

4p c). Aria triunghiului echilateral de latură 6 cm este de .....

4p 4). a). Latura pătratului care are diagonala de 10 cm, este .....

4p b). Dreptunghiul format din 2 pătrate egale cu o latură comună de 5 cm, are diagonala egală cu .....

4p c). Valoarea de adevăr a propoziției „$\sin(90^0-30^0)=\cos(90^0-60^0)$ este .....

## Subiectul II (40 puncte)

5p 1). a). Calculați : $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{12}\right)\sqrt{3}+\left(2\sqrt{108}-7\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$.

5p b). Cu cât la sută a crescut alocația, dacă era 25 lei și a devenit 32 lei.

5p c). Rezolvați în Z : $(2x-5)(5+2x) \le (2x+1)^2$.

5p 2). a). Efectuați : $(x^3+x^2+x+1):(x+1)$, pentru $x \neq -1$.

5p b). Determinați $x \in N$ dacă $4\sqrt{x}-7\sqrt{7}+9\sqrt{9}-10\sqrt{7}=8\sqrt{9}+\sqrt{3^2}-6\sqrt{7}-\sqrt{847}+2\sqrt{28}$.

3). În $\triangle ABC$ se cunosc $AB = 20$ cm, $AC = 30$ cm, $BC = 40$ cm, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ și $AD = 15$ cm. Aflați :

5p a). aria $\triangle ABC$.

5p b). înălțimea corespunzătoare laturii BC.

5p c). perimetrul lui DECB.

**Varianta 6 - M.E.C.T. - mai 2008**

**Subiectul I** (50 puncte)

4p 1). a). Soluția reală a ecuației $4x = 68$ este .....

4p b). Soluția reală a ecuației $33 - x = 25$ este egală cu .....

4p c). Rezultatul calculului $A = \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) : \sqrt{12}$ este egal cu numărul natural .....

4p 2). a). Pentru x natural, rezultatul calculului $(15x + 3) : (5x + 1)$ este egal cu numărul întreg .....

4p b). Pentru x real diferit de zero, rezultatul calculului $\left(3\sqrt{2}x\right)^2 : (2x)^2$ este egal cu numărul rațional .....

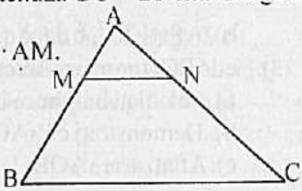
4p c). Dintre numerele $a = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{2}$ mai mare este numărul .....

6p 3). a). Desenați un triunghi obtuzunghic.

4p b). Un pătrat are latura de $5\sqrt{2}$ cm. Perimetrul pătratului este egal cu ..... cm.

4p c). Un triunghiul dreptunghic ABC are cateta AB = 8 cm și ipotenuza BC = 20 cm. Lungimea proiecției catetei AB pe ipotenuza BC este egală cu ..... cm.

4). În figura alăturată dreptele MN și BC sunt paralele, iar $MB = 3 \cdot AM$.




4p a). Valoarea raportului $\dfrac{AM}{MB}$ este egală cu .....

4p b). Dacă AM = 12 cm, atunci MB = ..... cm.

4p c). Valoarea raportului $\dfrac{MN}{BC}$ este egală cu .....

**Subiectul II** (40 puncte)

5p 1). a). Arătați că numărul $0.2 \cdot \sqrt{400} : \sqrt{2} : \sqrt{2}$ este natural.

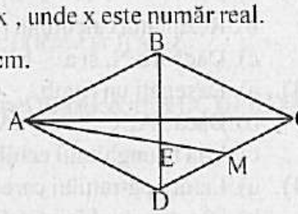
5p b). Fiul are 18 ani, iar tatăl are 42 de ani. Peste câți ani tatăl va avea de două ori vârsta fiului ?

5p c). Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi negative, inecuația $18x - 2 \geq 15x - 13$.

5p 2). a). Arătați că numărul $A = \left(2\sqrt{3} - 1\right)\left(2\sqrt{3} + 1\right) - 4(3 - 1)$ este natural.

5p b). Calculați valoarea numărului $N = \dfrac{(x-2)^2 - (x+1)^2}{3} + 2x$, unde x este număr real.

3). În figura alăturată, rombul ABCD are AB = 10 cm și BD = 12 cm. Punctul M este mijlocul laturii CD și $AM \cap BD = \{E\}$.




5p a). Calculați valoarea cosinusului unghiului DBC.

5p b). Calculați aria rombului ABCD.

5p c). Calculați lungimea segmentului DE.

**Varianta 9 - M.E.C.T. - mai 2008**

**Subiectul I** (50 puncte)

4p 1). a). Soluția reală a ecuației $2x + 2 = 6$ este .....

4p b). Soluția reală a ecuației $31x = 62$ este egală cu .....

4p c). Media geometrică a numerelor $\dfrac{3}{2}$ și $\dfrac{\sqrt{4}}{3}$ este egală cu numărul natural .....

4p 2). a). Pentru x real diferit de zero, rezultatul calculului $\left(\dfrac{5}{2}x + x\right) : (7x)$ este egal cu numărul rațional .....

4p b). Rezultatul calculului $\left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right)$ este egal cu numărul natural .....

4p c). Dintre numerele $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ mai mare este numărul .....

6p 3). a). Desenați un patrulater ABCD.

4p b). Lungimea înălțimii unui triunghi echilateral care are latura de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ..... cm.

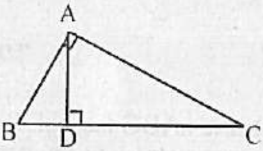
4p c). Un dreptunghi ABCD are $AB = 5\sqrt{2}$ cm $BC = \sqrt{8}$ cm. Aria dreptunghiului, exprimată printr-un număr natural, este egală cu ..... $cm^2$.

4). În triunghiul ABC, din figura alăturată, măsura unghiului BAC este de $90^0$. înălțimea AD = 4 cm și BD = 2 cm.

4p a). Valoarea tangentei unghiului ABD este egală cu .....

4p b). Lungimea laturii AB este egală cu ..... cm.

4p c). Lungimea laturii BC este egală cu ..... cm.




**Subiectul II** (40 puncte)

5p 1). a). Arătați că numărul $-0{,}1\cdot\sqrt{8}\cdot10\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$ este natural.

5p b). Dacă la $\frac{5}{6}$ dintr-un număr real a adunăm o treime din a obținem 42. Calculați valoarea numărului a.

5p c). Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{x-1}{3}+\frac{1-2x}{2}=\frac{5}{6}$.

5p 2). a). Arătați că numărul $A=\left(x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4\right):x^9:x$ este natural, pentru oricare x real diferit de zero.

5p b). Știind că $ab+ac+bd+cd=\sqrt{6}+\sqrt{15}$ și $a+d=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, arătați că $b+c=\sqrt{3}$.

3). În figura alăturată, ABCD este un paralelogram. N este mijlocul laturii CD și $BC\cap AN=\{P\}$ și $BD\cap AN=\{M\}$.

5p a). Dați exemplu de două triunghiuri asemenea în figura alăturată. Justificați alegerea făcută.

5p b). Calculați valoarea raportului $\frac{AD}{BP}$.

5p c). Arătați că $AM^2=MN\cdot MP$.

**Varianta 9 - M.E.C.T. - mai 2009**

**Subiectul I** (50 puncte)

4p 1). a). Soluția reală a ecuației $16-5x=6$ este egală cu .....

4p b). Soluția reală a ecuației $13x=91$ este egală cu .....

4p c). Media geometrică a numerelor $\frac{8}{5}$ și $\frac{\sqrt{25}}{2}$ este egală cu .....

4p 2). a). Pentru x real diferit de zero, rezultatul calculului $(x^2+x^2+x^2):(2x^2)$ este numărul rațional .....

4p b). Rezultatul calculului $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$ este numărul întreg .....

4p c). Un sfert din jumătatea numărului $2^7$ este egal cu .....

6p 3). a). Desenați un paralelogram ABCD.

4p b). Lungimea înălțimii unui triunghi echilateral care are latura de 4 cm este egală cu ..... cm.

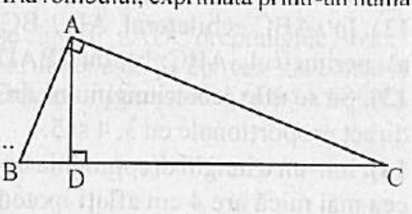
4p c). Un romb ABCD are $AC=5\sqrt{2}$ cm și $BD=\sqrt{8}$ cm. Aria rombului, exprimată printr-un număr natural, este egală cu ..... cm$^2$.

4). Triunghiul ABC din figura alăturată are măsura unghiului BAC de $90^0$, latura $AB=2\sqrt{5}$ cm și înălțimea $AD=4$ cm.

4p a). Valoarea sinusului unghiului ABD este egală cu .....

4p b). Lungimea segmentului BD este egală cu ..... cm.

4p c). Lungimea laturii BC este egală cu ..... cm.




**Subiectul II** (40 puncte)

5p 1). a). Comparați numerele $a=-0{,}1\cdot\sqrt{8}\cdot90\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$ și $b=\sqrt{961}$.

5p b). Enumerați numerele naturale prime din mulțimea $A=\left\{p\in N \,\middle|\, 0,(3)<p<11\frac{1}{2}\right\}$.

5p c). Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $\frac{3x-1}{3}+\frac{1-2x}{2}=2x$.

5p 2). a). Arătați că, pentru orice m real, numărul $A=(0{,}5m-1)^2-m(0{,}25m-1)+3$ este natural.

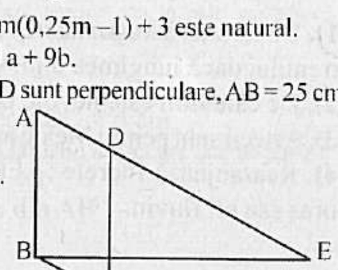
5p b). Știind că $a^2-81b^2=63$ și $a-9b=3$, determinați numărul $a+9b$.

3). În figura alăturată, ABCD este un paralelogram, dreptele BE și CD sunt perpendiculare, AB = 25 cm, $BC=\frac{4}{5}DC$ și aria paralelogramului este $250\sqrt{3}$ cm$^2$.

5p a). Arătați că perimetrul paralelogramului este egal cu 90 cm.

5p b). Calculați distanța de la punctul B la dreapta CD.

5p c). Calculați lungimea segmentului BE.



# GEOMETRIE

## *Capitolul XI*

## Recapitulare clasa a VI-a

**1).** Fie $\Delta ABC$ isoscel. Se construiesc $[AD] \equiv [AF]$ astfel încât $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle FAC$, F, D $\in$ ext. $\Delta ABC$, $[AB] \equiv [AC]$, $BD \cap AC = \{N\}$, $FC \cap AB = \{M\}$. Să se arate că : $\Delta BMO \equiv \Delta CNO$ unde $\{O\} = BD \cap FC$.

**2).** Fie $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, AB = 6cm. Se duce AD înălţime, $D \in (BC)$, BD = 3cm. Din D se duce paralela DE la AB, $E \in (AC)$. Să se afle măsurile unghiurilor $\Delta AED$.

**3).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, BD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$. Aflaţi măsurile unghiurilor $\Delta ABC$ dacă $m(\sphericalangle ADB) = 99^\circ$.

**4).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, se ştie $BE \perp AC$, $m(\sphericalangle EBC) = 20^\circ$. Aflaţi măsurile unghiurilor $\Delta ABC$.

5 ) .Ce fel de triunghi este acela pentru care o bisectoare exterioară a unui unghi este paralelă cu latura opusă acelui unghi ?

**6).** Fie $\Delta ABC$, AD şi CD bisectoare exterioare, $AD \cap BC = \{E\}$. Dacă $m(\sphericalangle CDE) = 110^\circ$ şi $m(\sphericalangle AEC) = 30^\circ$, arătaţi că $\Delta ABC$ este isoscel.

**7).** Fie $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, AE bisectoare interioară şi CE bisectoare exterioară, $AE \cap BC = \{M\}$. Dacă $m(\sphericalangle CEA) = 40^\circ$ să se afle măsurile unghiurilor $\Delta ABC$.

**8).** Să se demonstreze că pentru $\Delta ABC$ echilateral oricare bisectoare exterioară este paralelă cu latura opusă.

**9).** În $\Delta ABC$ dreptunghic, $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, se duce AE bisectoare, $E \in (BC)$. Dacă $m(\sphericalangle AEC) = 120^\circ$, aflaţi $m(\sphericalangle A)$ şi $m(\sphericalangle C)$.

**10).** Unghiul format de bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ din $\Delta ABC$ are măsura de $80^\circ$. Dacă $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, aflaţi $m(\sphericalangle A)$ şi $m(\sphericalangle C)$.

**11).** Arătaţi că paralela la BC dusă prin vârful A al $\Delta ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$ este bisectoare exterioară.

**12).** În $\Delta ABC$ echilateral, $AD \perp BC$, DC = 4 cm. Dacă E este mijlocul lui AB, aflaţi :

a). perimetrul $\Delta ABC$; b). $m(\sphericalangle BAD)$; c). ED.

**13).** Să se afle aria triunghiului dreptunghic în care se ştie perimetrul de 120 cm şi laturile direct proporţionale cu 3, 4 şi 5.

**14).** Într-un triunghi dreptunghic unghiurile sunt direct proporţionale cu 1, 2 şi 3. Dacă cateta cea mai mică are 4 cm aflaţi ipotenuza şi mediana corespunzătoare ei.

**15).** În $\Delta ABC$ isoscel se duce $MN \parallel AB$, $M \in (BC)$, $N \in (AC)$. Dacă $m(\sphericalangle NMB)$ este egală cu 20% din $m(\sphericalangle ABC)$, să se afle unghiurile $\Delta ABC$.

**16).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ intersectează mediana laturii AC în Q. Arătaţi că AQCB este paralelogram.

**1).** Un tren cu 9 vagoane trece prin faţa unui observator timp de 12 secunde, care este viteza trenului dacă lungimea unui vagon este de 16 metri ?

**2).** De câte linii este nevoie pentru a împărţi un hexagon în 6 triunghiuri identice ?

**3).** Aztecii sunt pentru Mexic aşa cum sunt incaşii pentru : Europa, Peru, Atlantida, Babilon, Asia.

**4).** Rearanjează literele : „FIARAC" şi apoi spune ce reprezintă : un continent, o ţară, un oraş sau un fluviu.

# *Capitolul XII*
# Patrulatere
## Suma unghiurilor unui patrulater

**NOŢIUNI DE BAZĂ**

-pentru a defini un patrulater sunt necesare patru puncte distincte A, B, C, D astfel încât :
a). oricare trei puncte sunt necoliniare
b). oricare două dintre segmentele [AB] şi [CD] sau [BC] şi [DA] n-au nici un punct interior comun
- figura formată din reuniunea $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, care îndeplineşte condiţiile a). şi b). de mai sus, este un patrulater.
- un patrulater se numeşte patrulater convex dacă, oricare ar fi o latura a sa, cele două vârfuri, nesituate pe latura considerată, se află de aceeaşi parte a dreptei în care este inclusă latura respectivă.
- patrulaterul care nu este convex se numeşte concav.
- suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de $360^0$.

**PROBLEME**

**1).** Să se afle măsurile unghiurilor patrulaterului convex ABCD dacă se cunosc :
a). $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, $m(\sphericalangle C) = 2\ m(\sphericalangle D)$ şi $m(\sphericalangle D) = m(\sphericalangle A) + 5^0$
b). măsurile unghiurilor sunt direct proporţionale cu 3; 3; 4; 5.
c). $m(\sphericalangle D) = 110^0$; $m(\sphericalangle C) = 3\ m(\sphericalangle B)$ şi măsura unghiului $\sphericalangle A$ împărţită la măsura unghiului $\sphericalangle B$ dă câtul 2 şi restul 10.
d). măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$ sunt direct proporţionale cu 4; 3; 2, iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle C$ si $\sphericalangle D$ sunt invers proporţionale cu 6 şi 4.
e). media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$ este $110^0$, măsura unghiului A este media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$, iar măsura $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) + 40^0$.
f). măsurile unghiurilor sunt invers proporţionale cu 0,5; 0,2; 0,(3); 0,8.
**2).** Să se afle măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ si $\sphericalangle D$ ale patrulaterului convex ABCD pentru care se ştie că : $[AB] \equiv [AD]$; $[BD] \equiv [BC] \equiv [CD]$ şi $AB \perp BC$.
**3).** În patrulaterul convex ABCD, avem $AC \perp BD$, $m(\sphericalangle DAC) = 60^0$, $m(\sphericalangle DBC) = 50^0$, $[AO] \equiv [OC]$, $\{O\} = AC \cap BD$. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.
**4).** Fie patrulaterul convex ABCD în care se ştie : $BC \parallel AD$, $\triangle ADB$ dreptunghic isoscel, ($m(\sphericalangle D) = 90^0$) şi măsura unghiului $\sphericalangle C$ este media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\sphericalangle CDB$ şi $\sphericalangle CBD$. Să se afle măsurile unghiurilor patrulaterului.
**5).** Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD în care se cunosc : $\triangle ADC$ dreptunghic isoscel ($m(\sphericalangle D) = 90^0$), $[AC] \equiv [AB]$ şi $m(\sphericalangle A) = 110^0$. Ce fel de patrulater este ? ( convex sau concav)
**6).** Precizaţi dacă patrulaterul ABCD este concav dacă $\triangle ACD$ dreptunghic isoscel, ($m(\sphericalangle A) = 90^0$), $[AC] \equiv [AB]$, $m(\sphericalangle C) = 75^0$.

## Paralelogramul

**NOŢIUNI DE BAZĂ**

- se numeşte paralelogram patrulaterul convex care are laturile opuse paralele două câte două.
- proprietăţile paralelogramului :
a). laturile opuse sunt congruente două câte două.
b). unghiurile opuse sunt congruente două câte două.
c). unghiurile consecutive sunt suplementare.
d). diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente.
- un patrulater convex este paralelogram dacă :
a). laturile opuse sunt congruente două câte două.
b). unghiurile opuse sunt congruente două câte două.
c).diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente.
d).două laturi opuse sunt paralele şi congruente.

**EXERCIŢII**

*

**1).** Aflaţi perimetrul paralelogramului ABCD dacă : AB = 8 cm; BC = 6 cm.
**2).** Fie paralelogramul ABCD al cărui perimetru este 120 cm. Aflaţi laturile în fiecare caz în parte :
a). AB = 28 cm  b). AB = 2 BC  c).AB = AD - 8
d). BC = AB/3  e). AB = AD 4 + 5  f).BC = 20% din AB

**3).** Aflaţi măsurile unghiurilor paralelogramului ABCD dacă :
a). $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$ b). $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) + 20^0$ c). $m(\sphericalangle D) = m(\sphericalangle C) - 10^0$
d). $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B) + 18^0$ e). $m(\sphericalangle D) = 50\%$ din $m(\sphericalangle A)$
**4).** Arătaţi că patrulaterul convex ABCD este paralelogram dacă :
a). AB = DC = 5 cm, AD = 8 cm, $P_{ABCD} = 26$ cm
b). $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 130^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 50^0$
c). $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 120^0$
d). $[AD] \equiv [BC]$ si $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ sunt suplementare.
e). $\sphericalangle A$ si $\sphericalangle D$ sunt suplementare şi $\sphericalangle A$ si $\sphericalangle B$ sunt suplementare
f). $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ şi $\sphericalangle D$ si $\sphericalangle C$ sunt suplementare
g). $AB \parallel CD$ şi $[AO] \equiv [CO]$, $\{O\} = BD \cap AC$
h). $AB \parallel CD$ şi $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.
**5).** În $\Delta ABC$ oarecare, BM mediană, $M \in (AC)$ se consideră punctul D simetricul lui B faţă de M. Arătaţi că ABCD este paralelogram.
**6).** Fie ABCD paralelogram cu $m(\sphericalangle A) = 38^0$. Să se afle măsurile unghiurilor paralelogramului.
**7).** Fie ABCD paralelogram cu $m(\sphericalangle A) = 3 \cdot m(\sphericalangle B)$. Să se afle măsurile unghiurilor paralelogramului.
**8).** Fie ABCD paralelogram cu măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ direct proporţionale cu numerele 8 şi 7. Să se afle măsurile unghiurilor paralelogramului.
**9).** Fie ABCD paralelogram cu AB = 8 cm şi BC = 10 cm. Să se afle perimetrul paralelogramului.
**10).** Fie ABCD paralelogram cu AB = 6 cm şi perimetrul său de 30 cm. Aflaţi BC.
**11).** Fie ABCD paralelogram, AB = 2 BC, $P_{ABCD} = 54$ cm. Să se afle AB.

**

**12).** În $\Delta ABC$ oarecare, BM mediană, $M \in (AC)$ se duc perpendicularele $AP \perp BM$, şi $CQ \perp BM$, P şi $Q \in (BM)$. Arătaţi că APCQ este paralelogram.
13). În $\Delta ABC$ oarecare, M şi N sunt mijloacele laturilor [AC] şi [BC]. Dacă alegem punctul P coliniar cu M şi N astfel încât $[PM] \equiv [MN]$, arătaţi că APCN şi CPNB sunt paralelograme.
14). În paralelogramul ABCD, M şi N sunt mijloacele laturilor [AB] şi [DC]. Arătaţi că AMND şi MBCN sunt paralelograme.
**15).** AF şi CE sunt bisectoare în paralelogramul ABCD, $F \in (DC)$, $E \in (AB)$. Arătaţi că AFCE şi DEBF sunt paralelograme.
**16).** În paralelogramul ABCD, O este intersecţia diagonalelor. Dacă alegem M, N, P, Q mijloacele segmentelor [AO], [BO], [CO], [DO], demonstraţi că MNPQ este paralelogram şi DMBP este paralelogram.
**17).** O dreaptă ce trece prin intersecţia O a diagonalelor paralelogramului ABCD, intersectează AD, AB, BC, CD în P, M, Q, şi respectiv N. Arătaţi că APCQ, BPDQ, AMCN şi MBND sunt paralelograme.
**18).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$ fie $M \in (BC)$. Se aleg $P \in (AC)$ astfel încât $\Delta MPC$ isoscel ($[PM] \equiv [PC]$) şi $N \in (AB)$ astfel încât $\Delta BNM$ isoscel $[NB] \equiv [NM]$. Să se arate că ANMP este paralelogram.
**19).** Pe diagonala BD a paralelogramului ABCD, se aleg punctele M şi N astfel încât D şi $B \in (MN)$, $[BM] \equiv [DN]$. Arătaţi că AMCN este paralelogram.
**20).** În paralelogramul ABCD alegem $M \in (AB)$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Demonstraţi că M, O, N sunt coliniare unde $\{O\} = AC \cap BD$. Ce este AMCN ?
**21).** În $\Delta ABC$ se duce mediana AM, $M \in (BC)$. Prin B şi C se duc $BP \parallel CQ$, P şi $Q \in AM$. Ce este BPCQ ?
**22).** Arătaţi că patrulaterul ABCD în care se cunosc $[AB] \equiv [BD] \equiv [DC]$ şi $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle DBC)$, este paralelogram.
**23).** În patrulaterul ABCD, se ştie că $\{O\} = AC \cap BD$ şi $[AB] \equiv [BO] \equiv [OD] \equiv [DC]$. Arătaţi că ABCD este paralelogram.
**24).** În paralelogramul ABCD se duc $DM \perp AC$, $M \in (AB)$, $BN \perp AC$, $N \in (DC)$. Demonstraţi că DMBN, AMCN sunt paralelograme.
**25).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ intersectează

mediana laturii AC în Q. Arătați că AQCB este paralelogram.

**26).** În paralelogramul ABCD fie M ∈ (AD). N ∈ (BC) astfel încât (MD) ≡ (BN). Arătați că M și N sunt simetrice față de centrul paralelogramului.

**27).** Pe două drepte a ∩ b = {O} se aleg A, B ∈ a, C, D ∈ b astfel încât A și B sunt simetrice față de O și C și D sunt simetrice față de O. Arătați că ABCD este paralelogram.

***

**28).** În exteriorul paralelogramului ABCD se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, ADF și DCG. Să se arate că : a). [FE] ≡ [AG]; b). ΔFGB echilateral.

**29).** În paralelogramul ABCD, AB > BC, se aleg M ∈ AB și N ∈ DC astfel încât [MB] ≡ [DN] ≡ [BC]. Dacă se duc BR⊥MC, R ∈ MC, DP⊥AN, P ∈ AN. Să se arate că : a). P și R sunt coliniare cu mijloacele laturilor (BC) și (AD); b). DP || BR și AR || PC; c). MN, PR, BD sunt concurente.

## Linia mijlocie într-un triunghi

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește linie mijlocie.
- într-un triunghi segmentul care unește mijloacele a două laturi este paralel cu cea de-a treia latură și are că lungime jumătate din lungimea acesteia.
- într-un triunghi ABC, paralela prin mijlocul D al laturii [AB] la latura [BC] conține mijlocul E al laturii [AC] și avem $DE = \frac{1}{2} BC$.

### EXERCIȚII

*

**1).** Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii în ΔABC cu AB = 7 cm, BC = 60 mm, AC = 0,9 dm.

**2).** Să se calculeze perimetrul ΔABC dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor (AB), (AC), (BC), și MN = 3 cm, MP = 4 cm, PN = 0,05 m.

**3).** Dacă o linie mijlocie a unui triunghi echilateral are 8,5 cm, să se afle perimetrul triunghiului.

**4).** În triunghiul ΔMNP echilateral, E și F mijloacele laturilor MN respectiv MP. Dacă $P_{\Delta EFM} = 6{,}3$ cm, aflați $P_{\Delta MNP}$.

**5).** În ΔABC, M, N, P sunt mijloacele laturilor (AB), (AC), (BC). Aflați BC dacă AB = 8 cm, AC = 10 cm și perimetrul ΔMNP este 15 cm.

**6).** Să se arate că într-un triunghi isoscel sunt două linii mijlocii congruente. Cum sunt liniile mijlocii ale unui triunghi echilateral ?

**7).** În ΔABC echilateral se consideră M, N, P mijloacele laturilor [AB], [BC], respectiv [AC]. Arătați că MPNB este paralelogram.

**

**8).** În paralelogramul ABCD, M, N, P sunt mijloacele laturilor (DC), (AC), (BC). Arătați că MNPC este paralelogram.

**9).** În ΔABC, M și N sunt mijloacele laturilor (AB) și (AC). P ∈ (AB), Q ∈ (AC) astfel încât AP = AB/4, AQ = AC/4. Dacă PQ = 1,5 cm aflați BC.

**10).** În ΔABC, se duce AM mediană, M ∈ (BC). Paralele prin C și M la AM și respectiv AC intersectează AB în D și respectiv N. Arătați că AN = AD/2.

**11).** În paralelogramul ABCD, M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] și [DA]. Ce este MNPQ?

**12).** În paralelogramul ABCD, M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] și [DA]. Arătați că AC, MP, NQ sunt concurente .

**13).** În paralelogramul ABCD, M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor (AO), (BO), (CO) și (DO), {O} = AC ∩ BD. Dacă perimetrul paralelogramului ABCD este 54 cm, aflați perimetrul patrulaterului MNPQ.

**14).** În paralelogramul ABCD, prin O se duc paralele la AB și AD care intersectează AD și AB în M respectiv N, ({O} = BD ∩ AC). Dacă AB = 6 cm, BC = 8 cm aflați perimetrul patrulaterului AMON.

**15).** Dacă într-un triunghi isoscel două linii mijlocii au lungimile de 3 cm și respectiv 4 cm, aflați perimetrul triunghiului.

**16).** Prin vârful C al paralelogramului ABCD se duce o paralelă la BD care intersectează

AD și AB în punctele E respectiv F. Demonstrați că AC este mediană în $\triangle AEF$.

***

17). Prin vârfurile $\triangle ABC$ se duc paralele la laturile opuse, care formează $\triangle MNP$. Dacă perimetrul $\triangle ABC$ este 12 cm, aflați perimetrul $\triangle MNP$.

18). În $\triangle ABC$ fie AM mediană, $M \in (BC)$. Să se arate că $2 \cdot AM < AB + AC$. (Indicație : se construiește linia mijlocie MN, $N \in (AC)$ și se consideră $\triangle AMN$).

## Dreptunghiul

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește dreptunghi un paralelogram care are un unghi drept.
- proprietăți caracteristice :
  - a). are toate unghiurile congruente , deci drepte.
  - b). are diagonalele congruente.
- un patrulater convex este dreptunghi dacă are toate unghiurile congruente.
- paralelogramul care are diagonalele congruente este dreptunghi.

### PROBLEME

*

1). Aflați perimetrul unui dreptunghi ABCD care are AB = 10 cm și BC = 80% din AB.

2). Perimetrul unui dreptunghi este de 288 cm. Să se afle laturile în fiecare caz în parte :

a). AB = 40 cm.
b). AB este cu 8 cm mai mare decât BC.
c). AD este de 3 ori mai mica decât AB.
d). BC = 80% din AB.
e). $DC = 3 \cdot BC + 4$.
f). DC = 30% din perimetru.
g). $AD = \frac{3}{5}$ din DC.

3). Arătați că patrulaterul ABCD este dreptunghi dacă :

a). $AD \parallel BC$, $[DO] \equiv [OB]$, $m(\sphericalangle DAO) = m(\sphericalangle ADO)$.
b). $[AO] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OD]$.
c). $[AB] \equiv [DC]$, $[AD] \equiv [BC]$, $DC \perp BC$.
d). $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$, $m(\sphericalangle C) = 90^0$, $\sphericalangle A$ si $\sphericalangle B$ sunt suplementare.
e). $\sphericalangle A$ suplementar și cu $\sphericalangle B$ și cu $\sphericalangle D$ și $m(\sphericalangle C) = 90^0$.
f). $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$ și $m(\sphericalangle ABC) = 90^0$.
g). $AB \parallel DC$, $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$.
h). $[AO] \equiv [OB]$, $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ADB$, $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ACD$.

**

4). Pe latura BC a $\triangle ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, în punctele B și C se ridică perpendiculare care intersectează AC și AB în punctele D respectiv E. Arătați că patrulaterul BDEC este dreptunghi.

5). Prin vârfurile A și C ale dreptunghiului ABCD se duc două drepte paralele care intersectează BD în K și L. Arătați că AKCL este paralelogram.

6). Fie ABCD un dreptunghi și AM și CN înălțimile în $\triangle DAB$ și $\triangle DBC$. Arătați că AMCN este paralelogram.

7). În dreptunghiul ABCD se cunosc, $m(\sphericalangle ABD) = 30^0$ și AD = 8 cm. Calculați perimetrul $\triangle OBC$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

8). În paralelogramul ABCD, M și N sunt simetricele lui D și B față de AC. Arătați că DMBN este dreptunghi.

9). În exteriorul dreptunghiului ABCD se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și ADF. Să se arate că $\triangle EFC$ este echilateral.

10). În dreptunghiul ABCD, M este mijlocul lui DC, $\{P\} = AM \cap BC$. Arătați că C este mijlocul lui BP.

***

11). Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că bisectoarele exterioare și interioare ale unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$ formează un dreptunghi.

12). Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că bisectoarele interioare ale unghiurilor paralelogramului formează un dreptunghi.

13). Să se arate că bisectoarele exterioare ale unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi.

# Rombul

## NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește romb un paralelogram care are două laturi consecutive congruente.
- proprietăți caracteristice :
    a). toate laturile rombului sunt congruente
    b). diagonalele rombului sunt perpendiculare intre ele
    c). diagonalele rombului sunt bisectoare pentru unghiurile rombului
- patrulaterul convex cu toate laturile congruente este romb.
- paralelogramul cu diagonalele perpendiculare este romb.
- paralelogramul în care o diagonală este bisectoarea unui unghi este romb.

## PROBLEME

*

**1).** Aflați perimetrul rombului ABCD cu AB = 0,16 cm.
**2).** Aflați latura rombului care are perimetrul 9,2 cm.
**3).** Aflați măsurile unghiurilor rombului ABCD dacă :
a). $m(\sphericalangle A) = 30^0$ b). $m(\sphericalangle B) = 4 \cdot m(\sphericalangle C)$
c). $m(\sphericalangle C) = 20\%$ din $m(\sphericalangle B)$ d). $m(\sphericalangle DBA) = 25^0$
e). $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BCD$ f). $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle BAD) : 3$
g). $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BDC) : 2$ h). $m(\sphericalangle D) = 3 \cdot m(\sphericalangle A) + 16^0$
i). $m(\sphericalangle A)$ este cu $20^0$ mai mare decât $m(\sphericalangle B)$.
**4).** Arătați că patrulaterul ABCD este romb dacă :
a). $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt suplementare, $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ sunt suplementare, $\sphericalangle ACB$ complementar cu $\sphericalangle DBC$.
b). $AB \parallel DC$, $[AB] \equiv [AD]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$
c). $[AO] \equiv [OC]$, $[OB] \equiv [OD]$, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC$
d). BO este mediatoarea lui AC și $[AB] \equiv [AD]$
e). [OD] și [OA] sunt mediatoare pentru AC respectiv BD.
**5).** Fie ABCD romb cu $m(\sphericalangle ACB) = 25^0$. Aflați măsurile unghiurilor rombului.
**6).** *Fie ABCD romb cu [AC]* $\equiv$ [BC]. Aflați măsurile unghiurilor rombului.

**

**7).** Fie ABCD romb cu $m(\sphericalangle A) = 60^0$ și BD = 9 cm. Aflați măsurile unghiurilor rombului.
**8).** Prin vârfurile A și B ale dreptunghiului ABCD se duc paralele la BD respectiv AC, paralele care se intersectează în P. Demonstrați că APBO ($\{O\} = BD \cap AC$) este romb.
**9).** În $\Delta ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$, mediana AD, $D \in (BC)$ se prelungește cu $[DE] \equiv [AD]$. Arătați că ABEC este romb.
**10).** Fie dreptele paralele $a \parallel b$ și secanta AB, $A \in a$ și $B \in b$. Dacă AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ și BN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$, $M \in b$, $N \in a$, amândouă bisectoare situate în același semiplan determinat de AB, ce este ANMB ? Dar dacă bisectoarele sunt situate în semiplane opuse determinate de AB, ce este AMBN ?
**11).** Fie $\Delta ABC$ dreptunghic $m(\sphericalangle A) = 90^0$ și M și N sunt simetricele punctelor B și C față de AC respectiv AB. Arătați că BNMC este romb.
**12).** În dreptunghiul ABCD, M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] și [DA]. Arătați că MNPQ este romb.
**13).** În $\Delta ABC$ oarecare se duce bisectoarea AD, $D \in (BC)$. Prin D se duc $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Arătați că patrulaterul AEDF este romb.
**14).** În exteriorul rombului ABCD cu $m(\sphericalangle A) = 80^0$ se construiesc triunghiurile echilaterale AED și AFB. Să se arate că $\Delta EFC$ este echilateral.
**15).** Bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ al rombului ABCD intersectează BC și DC în M și respectiv N. Arătați că [BD] = MN/2.
**16).** În $\Delta ABC$ isoscel, M, N, P sunt mijloacele laturilor [AB], [AC] și [BC], ($[AB] \equiv [AC]$). Arătați că AMPN este romb.

***

**17).** În rombul ABCD, M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] și [DA]. Demonstrați că : a). $[MO] \equiv [ON] \equiv [OP] \equiv [OQ]$, $\{O\} = AC \cap BD$; b). M, O, P și M, O,

Q sunt coliniare; c). MNPQ este dreptunghi.
**18).** În exteriorul rombului ABCD se construiesc triunghiurile echilaterale ADE, ABF, BCG, CDH. Să se arate că EFGH este dreptunghi.
**19).** Laturile BC și DC ale rombului ABCD se prelungesc cu [DE] ≡ [DC] și [BF] ≡ [BC]. Arătați că F, A, E sunt coliniare.

## Pătratul

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- se numește pătrat un dreptunghi care are două laturi consecutive congruente
- pătratul are toate proprietățile dreptunghiului și rombului
- într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- dacă într-un triunghi o mediana are lungimea cât jumătatea lungimii laturii care îi corespunde, atunci triunghiul este dreptunghic.

### PROBLEME

*

**1).** Arătați că rombul ABCD în care m(∢CBD) = m(∢BCD) : 2 este pătrat.
**2).** Arătați că patrulaterul ABCD este pătrat în fiecare caz în parte :
a). [AO] ≡ [OB] ≡ [OC] ≡ [OD] și OA ⊥ OB
b). [AB] ≡ [AD] ≡ [BC] ≡ [CD] și AB ⊥ AD
c). ∢A ≡ ∢B ≡ ∢C ≡ ∢D și AC ⊥ BD
d). diagonalele sunt congruente și sunt bisectoare pentru unghiurile patrulaterului.
e). ∢DAC ≡ ∢BAC ≡ ∢BCA ≡ ∢DCA, m(∢DAC) = $45^0$.
**3).** Se consideră punctele E, F, G, H în exteriorul pătratului ABCD astfel încât B, A, D, C sunt mijloacele segmentelor (EC), (GB), (AH) și respectiv (DF). Arătați că GHFE este pătrat.
**4).** Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor unui dreptunghi formează un pătrat.
**5).** Prin vârfurile opuse A și C ale pătratului ABCD se duc două drepte paralele care intersectează DB în L și M. Arătați că ALCM este romb.

**

**6).** În ΔABC dreptunghic m(∢A) = $90^0$, ducem AD ⊥ BC, DE ⊥ AB, DF ⊥ AC. Ce este patrulaterul AEDF ? Cum trebuie să fie ΔABC pentru că AEDF să fie pătrat ?
**7).** În ΔABC oarecare, M ∈ (BC), MP || AB, MN || AC, P ∈ (AC), N ∈ (AB). Ce este ANMP ? Cum trebuie să fie ΔABC pentru că ANMP să fie dreptunghi ? Unde trebuie să alegem punctul M ∈ (BC) astfel încât ANMP să fie romb ? Ce condiții trebuie să îndeplinească ΔABC și unde îl situați pe M ∈ (BC) pentru că ANMP să fie pătrat ?
**8).** În ΔABC dreptunghic m(∢A) = $90^0$, se duc AD bisectoarea unghiului ∢A, D ∈ (BC), DM || AC și DN⊥AC, M ∈ (AB), N ∈ (AC). Arătați că AMDN este pătrat.
**9).** În exteriorul ΔABC se construiesc pătratele ABEF și ACHG. Să se demonstreze că [FC] ≡ {BG].
**10).** În ΔABC dreptunghic m(∢A)=$90^0$, se consideră mijloacele M, N, P ale laturilor (AB), (AC), și (BC). Arătați că AMPN este dreptunghi. Cum trebuie să fie ΔABC dreptunghic pentru că AMPN să fie pătrat.
**11).** În ΔABC dreptunghic m(∢A) = $90^0$. Paralela prin B la mediana AM intersectează AC în E. Arătați că ΔCBE este isoscel.

***

**12).** În dreptunghiul ABCD, bisectoarele unghiurilor se intersectează în M, N, P, Q. Arătați că patrulaterul MNPQ este pătrat.
**13).** Se prelungesc laturile AD și DC ale patratului ABCD cu [DF] ≡ [AD] și [DC] ≡ [CG], {H} = DG ∩ BF și {O} = BC ∩ AG. Să se demonstreze că :
a). AG ⊥ BF ; b). AH ⊥ FG ; c). HO ⊥ BG
**14).** În ΔABC dreptunghic m(∢A) = $90^0$. În B și C se duc paralele la mediana AM, paralele care intersectează AC respectiv AB în L respectiv P. Arătați că LPCB este romb.
**15).** În ΔABC isoscel [AB] ≡ [AC] se duce înălțimea BD⊥AC și se consideră E și F mijloacele laturilor AB și BC. Să se arate că ∢BEF ≡ ∢DEF.

**16).** În $\triangle ABC$ isoscel $[AB] \equiv [AC]$ se știe $m(\sphericalangle A) = 120^0$, $BD \perp AC$, $D \in AC$, M mijlocul lui AB, $DM \cap BC = \{E\}$. Arătați că : a). $DM = DC/3$; b). $DM \perp BC$; c). $DE = DC/2$.

## Testul 1

1). Fie rombul ABCD cu lungimea laturii de 8 cm.
⑤2p a). Dacă $AB = 8$ cm atunci perimetrul rombului este ....... cm.
⑤2p b). Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 20^0$ atunci $m(\sphericalangle ABC) = $ .......
⑦1p 2). În dreptunghiul ABCD cu $BC = 6$ cm, $m(\sphericalangle BDC) = 30^0$ și $AC \cap BD = \{O\}$ lungimea segmentului AO este ...... cm.
⑦1p 3). Dacă A este simetricul lui C față de O și B este simetricul lui D față de O atunci ABCD este ......
4). În $\triangle ABC$, M mijlocul lui (BC) iar punctele A, M, D coliniare astfel încât $(AM) \equiv (MD)$.
⑨1p a). Ce figură geometrică este patrulaterul ABDC ?;
⑨1p b). Dacă $m(\sphericalangle A) = 90^0$, ce este ABDC ?
⑩1p 5). *În pătratul ABCD, M și N sunt mijloacele laturilor (AB) și respectiv (BC). Dacă* $DM \cap AN = \{P\}$, să se arate că dreptele DM și AN sunt perpendiculare.

## Testul 2

⑤2p 1). Perimetrul pătratului având latura de 2,5 cm este egal cu ....... cm.
⑤2p 2). Fie ABCD romb cu $m(\sphericalangle CAD) = 20^0$. Să se afle măsurile unghiurilor rombului.
⑦1p 3). Fie rombul ABCD cu $m(\sphericalangle A) = 60^0$ și diagonala $BD = 6$ cm. Să se afle perimetrul rombului.
⑦1p 4). În dreptunghiul ABCD, diagonala BD face cu latura DC un unghi de $35^0$. Să se afle măsurile unghiurilor $\triangle BOC$ unde $\{O\} = AC \cap BD$.
⑨2p 5). În pătratul ABCD se consideră P și Q mijloacele laturilor AB respectiv BC. Să se determine $m(\sphericalangle ARP)$ dacă $\{R\} = AQ \cap DP$.
⑩1p 6). Dacă ABCD paralelogram și punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD) respectiv (DA) iar $BQ \cap DM = \{R\}$ și $BP \cap DN = \{T\}$. Să se arate că dreptele BD, AC și RT sunt concurente.

# Trapezul

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește trapez patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte două neparalele.
- un trapez este isoscel dacă laturile neparalele sunt congruente.
- un trapez este dreptunghic dacă o latura neparalelă este perpendiculară pe bază.
- într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente dacă și numai dacă trapezul este isoscel
- într-un trapez diagonalele sunt congruente dacă și numai dacă trapezul este isoscel .

## PROBLEME

*

**1).** Fie ABCD trapez $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = 38^0$ și $m(\sphericalangle B) = 51^0$. Să se afle $m(\sphericalangle C)$ și $m(\sphericalangle D)$.
**2).** Fie ABC un triunghi isoscel $[AB] \equiv [AC]$, $m(\sphericalangle A) = 40^0$, M și N mijloacele laturilor AC respectiv AB. a). Demonstrați că MCBN este trapez isoscel; b). Să se afle măsurile unghiurilor trapezului MCBN.

**

**3).** În paralelogramul ABCD, se aleg $M \in (DC)$ astfel încât $AM \perp DC$ și F simetricul lui D față de AM. Arătați că AFCB este trapez isoscel.
**4).** Ce fel de patrulater este ABCD dacă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC \equiv 1/2 \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ACD$ ?
**5).** Ce fel de patrulater este ABCD dacă $[AB] \equiv [AD]$ și DB este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ ?
**6).** Arătați că ABCD este trapez isoscel dacă $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$.
**7).** În $\triangle ABC$ se duc medianele CE și BF, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Arătați că BEFC este trapez. Cum trebuie să fie triunghiul pentru că trapezul să fie : a). isoscel ; b). dreptunghic ?
**8).** Ce fel de patrulater este ABCD în care $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ADC$ ?
**9).** În trapezul ABCD se știe că $m(\sphericalangle B) = 117^0$, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle D) = 27^0$. Arătați că $AD \perp BC$.
**10).** În trapezul ABCD se știe $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $AD = 10$ cm, $CD = 20$ cm. Demonstrați : a). ABED este romb, E fiind mijlocul lui DC ; b). $DB \perp BC$

**11).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se știe că $AB = 5$ cm, $CD = 10$ cm, $AD \cap BC = \{O\}$, M mijlocul lui DC. Arătați că OM, DB, AC sunt concurente.
**12).** Fie $\triangle ABC$ oarecare. Laturile AB și AC se prelungesc astfel încât A, E, B coliniare și $[AD] \equiv [AB]$, $[AC] \equiv [AE]$. Arătați că BDEC este trapez isoscel.
**13).** În trapezul ABCD isoscel, $m(\sphericalangle A) = 60^0$ și $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$. Arătați că $AC \perp CD$, $BD \perp BA$ și $\triangle BMC$ este echilateral, unde M este mijlocul lui AD.

***

**14).** Ce fel de patrulater este ABCD în care $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$ ?
**15).** În dreptughiul ABCD se duc perpendicularele $DE \perp AC$, $CF \perp BD$, $E \in (AC)$, $F \in (BD)$. Să se arate că DEFC și AEFB sunt trapeze isoscele.
**16).** Fie $\triangle ABC$ isoscel cu $m(\sphericalangle A) = 36^0$, $[AB] \equiv [AC]$. Bisectoarea $\sphericalangle B$ intersectează paralela prin C la AB în punctul E. Arătați că ABCE este trapez isocel.
**17).** Pe laturile congruente $[AB] \equiv [AC]$ ale $\triangle ABC$, se construiesc în exterior triunghiuri congruente $\triangle ADC \equiv \triangle AEB$. Arătați că DEBC este trapez isoscel.
**18).** În trapezul ABCD se știe că $AB \parallel CD$, bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ se intersectează în M și bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ se intersectează în P. Fie K și L mijloacele laturilor AD și BC. Arătați că : a). $KM = AD/2$ ; b). $PL \parallel DC$; c). K, M, P, L sunt coliniare.

## Linia mijlocie în trapez

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește linie mijlocie în trapez.
- linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și are lungimea jumătate din suma lungimilor bazelor.
- lungimea segmentului inclus în linia mijlocie a unui trapez cuprins între intersecțiile sale cu diagonalele este egală cu semidiferența lungimilor bazelor.

### PROBLEME

*

**1).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, M și N sunt mijloacele laturilor AD și BC. Aflați :
a). MN, dacă $AB = 4$ cm și $DC = 10$ cm; b). AB, dacă $MN = 7$ cm și $DC = 12$ cm;
c). DC, dacă $MN = 8$ cm și $AB = 10$ cm;d). DC și AB dacă $MN = 12$ cm și $AB = DC/2$.
**2).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, M și N sunt mijloacele laturilor AD și BC, $MN \cap AC = \{P\}$ și $MN \cap BD = \{Q\}$. Aflați : a). MQ, QP, PN, MN dacă $AB = 8$ cm și $DC = 12$ cm; b). DC, MQ, MN dacă $AB = 6$ cm și $QP = 4$ cm; c). AB, QP, MN dacă $DC = 10$ cm și $MQ = 3$ cm; d). MN, AB, DC dacă $MQ = 4$ cm și $QP = 2$ cm; e). AB, DC, MN și MQ dacă $QP = 6$ cm și $DC = 5 \cdot AB$.

**

**3).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $\sphericalangle C) = 45^0$, $AB = AD = 8$ cm. Aflați linia mijlocie a trapezului.
**4).** În $\triangle ABC$, M și N sunt mijloacele laturilor AB și AC, $PB = AB/4$ și $QC = AC/4$, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$. Dacă $BC = 16$ cm, aflați PQ.
**5).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, M și N sunt mijloacele laturilor AD și CB, $AP = AD/4$ și $BQ = BC/4$, $P \in (AD)$ și $Q \in (BC)$. Aflați PQ dacă $MN = 6$ cm și $DC = 7$ cm.
**6).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se știe că $AB = 5$ cm, $BC = 5$ cm, $DC = 10$ cm și $AD = 4$ cm. Aflați perimetrul $\triangle DCE$ dacă $AD \cap BC = \{E\}$.
**7).** În trapezul isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, se duc înălțimile $AF \perp DC$ și $BE \perp DC$, $F, E \in (DC)$. Dacă AFEB este pătrat și $m(\sphericalangle D) = 45^0$, $DC = 18$ cm aflați lungimea liniei mijlocii.
**8).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, M și N sunt mijloacele laturilor AD și BC. Se duc $BE \parallel AD$, $E \in (MN)$, $NF \parallel AD$, $F \in (DC)$. Arătați că $EF \parallel BC$.
**9).** În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle C) = 90^0$, M și $K \in (AD)$ astfel încât $MA = AD/3$ și $[KM] \equiv [KD]$. Dacă paralelele prin M și K la AB au lungimile de 9 cm și respectiv 12 cm, aflați lungimile bazelor trapezului.

***

**10).** În $\triangle ABC$ se duce AM bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $M \in (BC)$. Paralelele prin M la AB și AC intersectează AC și AB în D respectiv în E. Fie DF și EG bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MDC$ și respectiv $\sphericalangle MEB$, $F, G \in (BC)$. Arătați că EDFG este trapez dreptunghic și calculați AM dacă $EG = 6$ cm și $DF = 10$ cm.ADE și a triughiului EFC.

# Arii

NOŢIUNI DE BAZĂ

- aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre o înălţime şi latura corespunzătoare ei.
- aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungime şi lăţime.
- aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii.
- aria unui romb este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.
- aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma lungimilor bazelor sale şi lungimea înălţimii

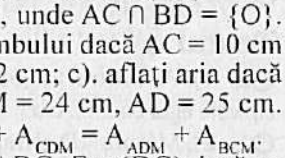
## PROBLEME

*

1). Să se afle aria şi perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 6 cm şi lăţimea de 4 cm.
2). Să se afle lăţimea unui dreptunghi care are aria de 240 cm$^2$ şi lungimea de 16 cm.
3). Să se afle aria dreptunghiului ABCD dacă aria lui $_\Delta$ABC este de 12 cm$^2$.
4). Un paralelogram ABCD are AB = 6 cm şi DM$\perp$AB, M $\in$ AB, DM = 4 cm. Să se afle aria.
5). Să se afle aria unui pătrat cu perimetrul de 20 cm.
6). Să se afle perimetrul unui pătrat cu aria de 36 cm$^2$.
7). Să se afle aria pătratelor următoare, ştiind : a). l = 5 cm; b). P = 40 cm.
8). Să se afle perimetrul pătratului cu aria de 144 cm$^2$.
9). Să se afle aria trapezului cu lungimea liniei mijlocii de 12 cm şi înălţimea de 5 cm.

**

10). Să se afle aria unui dreptunghi care are perimetrul de 52 cm şi lăţimea este 30% din lungime.
11). Aria dreptunghiului ABCD este de 96 cm$^2$ şi lungimea diagonalei AC este 10 cm. Să se afle lungimea înălţimii $_\Delta$ABC corespunzătoare laturii AC.
12). În paralelogramul ABCD se ştie că m($\sphericalangle$DAB) = 45$^0$. Dacă DM$\perp$AB, M $\in$ AB, AM este 25% din AB şi DM = 6 cm, să se afle aria paralelogramului.
13). În pătratul ABCD, fie O intersecţia diagonalelor. Să se afle aria lui ABCD dacă $A_{\Delta ABO}$ = 15 cm$^2$.
14). Fie ABCD un paralelogram cu AM$\perp$DC, M $\in$ (DC), AN$\perp$BC, N $\in$ (BC) :
a). dacă AB = 5 cm şi AM = 8 cm, aflaţi aria paralelogramului;
b). dacă aria paralelogramului este de 36 cm$^2$ şi AD = 9 cm, aflaţi AN;
c). dacă aria paralelogramului este de 96 cm$^2$, DC = 8 cm şi AN = 6 cm, aflaţi perimetrul paralelogramului;
d). dacă perimetrul este de 48 cm, AD = 2 $\cdot$ DC şi AM = 5 cm, aflaţi aria paralelogramului.
15). Să se afle aria dreptunghiului ştiind : a). l = 4 cm, L = 0,7 dm; b). P = 60 cm, l = 20% din perimetru; c). P = 44 cm, L = 120% din l.
16). Să se afle perimetrul unui dreptunghi care are : a). aria de 0,56 dm$^2$ şi l = 7 cm; b). aria de 27 cm$^2$ şi l = 75% din L.
17). Fie ABCD un paralelogram şi AM$\perp$DC, M $\in$ (DC) şi CR$\perp$AD, R $\in$ (AD). a). dacă DC = 8 cm şi AM = 5 cm, aflaţi aria paralelogramului; b). dacă DC = 7 cm şi aria paralelogramului este egală cu 63 cm$^2$, aflaţi AM; c). dacă CR = 6 cm şi AD = 8 cm şi DC = 12 cm, aflaţi AM.
18). Să se afle aria unui paralelogram ABCD în care ştim că AC$\perp$CB, AB = 4 cm şi m($\sphericalangle$D) = 45$^0$.
19). Să se afle aria paralelogramului ABCD dacă $A_{\Delta ADO}$ = 14 cm$^2$, unde AC $\cap$ BD = {O}.
20). Fie ABCD un romb şi DM$\perp$AB, M $\in$ (AB) : a). aflaţi aria rombului dacă AC = 10 cm şi BD = 8 cm; b). aflaţi aria rombului dacă DM = 9 cm şi DC = 12 cm; c). aflaţi aria dacă m($\sphericalangle$A) = 30$^0$ şi AD = 12 cm; d). aflaţi AC dacă BD = 30 cm, DM = 24 cm, AD = 25 cm.
21). În trapezul ABCD, M este mijlocul lui AC. Arătaţi că $A_{AMB} + A_{CDM} = A_{ADM} + A_{BCM}$.
22). Să se afle bazele trapezului isoscel ABCD, AB || CD, AE$\perp$DC, E $\in$ (DC) dacă se ştie AE = 5 cm, aria trapezului = 35 cm$^2$ şi ED = 1 cm.
23). Să se afle aria trapezului dreptunghic ABCD în care AB || CD, m($\sphericalangle$A) = 90$^0$, AB = 3 cm, AD = 4 cm, dacă BE$\perp$DC, E $\in$ (CD) şi E este mijlocul lui CD.
24). Să se afle aria trapezului isoscel ABCD cu AB || CD, AB = 4 cm, DC = 10 şi m($\sphericalangle$C) = 45$^0$.
25). Un teren are forma de dreptunghi ABCD şi M $\in$ (BD). Unde trebuie aşezat M dacă aria parcelei ABM este jumătate din aria parcelei BDC.
26). Terenul din fig. este format din trei dreptunghiuri, cu AB = 6 m, AE = x m, BH = 10 m, GH = 4 m. Aflaţi x dacă suprafeţele AECD şi EFGD sunt echivalente.



## Testul 1

1). ABCD paralelogram cu $m(\sphericalangle A) = 112^0$ și $BC = 4$ cm, $CD = 6$ cm => $m(\sphericalangle B) =$ ....... și $P_{ABCD} =$ .......

2). În dreptunghiul ABCD cu $m(\sphericalangle ABD) = 30^0$ dacă $AD = 3$ cm, $AC + BD =$ .......

3). Rombul ABCD cu $m(\sphericalangle B) = 120^0$ și $BD = 4$ cm are perimetrul = .......

4). Fie M mijlocul laturii (BC) a paralelogramului ABCD și N mijlocul laturii (DC). Dacă $MN \cap AB = \{P\}$, demonstrați că : a). BPCN este paralelogram b). BPND este paralelogram

5). Fie pătratele ABCD, CDEF și CFGH. Demonstrați că $AF \perp EH$.

## Testul 2

1). Dacă în rombul ABCD, $m(\sphericalangle ABD) = 28^0$, să se afle $\sphericalangle$ rombului.

2). Paralelogramul ABCD cu $m(\sphericalangle A) = 2m(\sphericalangle B)$ are $m(\sphericalangle D) =$ .......

3). Să se afle laturile un trapez isoscel care are baza mică egală cu latura neparalelă, baza mare de 15 cm iar perimetrul de 39 cm.

4). Dreptunghiul ABCD cu $m(\sphericalangle AOD) = 60^0$, $\{O\} = AC \cap BD$ și $AC = 10$ cm are are lățimea de ....... cm.

5). Latura pătratului care are perimetrul de 14,4 cm este ....... cm.

6). Să se afle măsura $\sphericalangle$ unui trapez dreptunghic dacă $m(\sphericalangle D)$ reprezintă 20% din $m(\sphericalangle C)$.

7). Să se afle dimensiunile unui dreptunghi care are perimetrul de 40 cm iar L și l sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,125.

## Testul 3

5 2p 1). Patrulaterul cu două unghiuri alăturate suplementare este .......

5 2p 2). Aflați aria rombului care are diagonalele de lungimi 12 cm și respectiv 16 cm.

7 2p 3). Dacă dimensiunile unui dreptunghi având perimetrul de 28 cm sunt direct proporționale cu numerele 3 și 4 atunci aria dreptunghiului este ....... $cm^2$.

9 1p 4). În trapezul ABCD, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$, $AB \parallel CD$, $AD = 6\sqrt{3}$ cm și $AB = 12$ cm. Dacă se știe că $m(\sphericalangle C) = 60^0$ și AC este bisectoarea lui $\sphericalangle C$, aflați perimetrul trapezului.

9 1p 5). În trapezul ABCD cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$, se știe că latura BC este egală cu suma bazelor AB și DC. Arătați că : a). linia mijlocie a trapezului este egală cu jumătate din BC; b). triunghiul MBC este dreptunghic unde M este mijlocul laturii AD.

10 1p 6). În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $AB = CB = AD = a$ și $DC = 2a$. Demonstrați că $DB \perp BC$.

## Testul 4

5 2p 1). Perimetrul trapezului isoscel având bazele de 8 cm respectiv 16 cm și o latură neparalelă de 5 cm este egal cu ....... cm.

5 2p 2). Măsura $\sphericalangle D$ al trapezului dreptunghic ABCD având bazele AB respectiv CD și $m(\sphericalangle B) = 134^0$, este .......

7 2p 3). Fie ABCD un paralelogram cu $m(\sphericalangle A) = 30^0$, $AB = 10$ cm, $AD = 20$ cm. Să se afle aria paralelogramului.

9 1p 4). Baza mare BC a trapezului dreptunghic ABCD ($m(\sphericalangle A) = 90^0$) are lungimea de 12 cm și este de două ori mai mare decât baza mică. Dacă $m(\sphericalangle C) = 60^0$, să se afle perimetrul $\Delta BDC$.

9 1p 5). Trapezul isoscel MNPQ ($MN \parallel PQ$) are diagonala de 12 cm și $MQ = 20$ cm. Să se afle perimetrul $\Delta MOQ$ dacă $\{O\} = MP \cap QN$.

10 1p 6). În trapezul ABCD ($AB \parallel CD$), diagonala AC este bisectoarea $\sphericalangle BAD$ și formează cu baza mare un unghi de $45^0$. Dacă $DC = 6$ cm și $AC \perp CB$, să se afle lungimile segmentelor AD și AB.

# *Capitolul XIII*
# Relaţii metrice
# Teorema lui Thales

**NOŢIUNI DE BAZĂ**

- o paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.
- mai multe paralele determină pe două secante segmente proporţionale
- într-un triunghi o bisectoare determină pe latura opusă două segmente proporţionale cu celelalte două laturi
- dacă o dreaptă determină pe laturile unui triunghi segmente respectiv proporţionale cu aceste laturi atunci această dreaptă este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

## PROBLEME

*

**1).** În $\triangle ABC$, se duce $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Aflaţi :
a). NC dacă AM = 6 cm, MB = 9 cm, AN = 4 cm
b). NC dacă AM = 5 cm, AB = 15 cm, AN = 3 cm
c). AN dacă MB = 6 cm, AB = 9 cm, NC = 4 cm
d). NC dacă AB = 16 cm, MB = 12 cm, AN = 3 cm
e). AN, NC dacă MB = 6 cm, MA = 15 cm, AC = 35 cm.

**2).** Să se afle segmentele BD şi DC pe care le determină bisectoarea AD a unghiului $\sphericalangle A$ pe latura BC a $\triangle ABC$ dacă AB = 6 cm, AC = 10 cm, BC = 8 cm.

**3).** Cercetaţi dacă $AC \parallel MN$ în $\triangle ABC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ ştiind că : a). MA = 6 cm, MB = 8 cm, NC = 9 cm, NB = 12 cm; b). AB = 10 cm, MA = 4 cm, BC = 15 cm, BN = 9 cm; c). AM = 15 cm, MB = 25 cm, BC = 32 cm, NC = 16 cm.

**

**4).** În $\triangle ABC$ se duc $AB \parallel FH \parallel DE$. F şi $D \in (AC)$, H şi $E \in (BC)$. Aflaţi :
a). HE şi BH dacă DC = 2 cm, FD = 4 cm, AF = 6 cm, EC = 3 cm
b). BH şi EC dacă AF = 6 cm, FD = 4 cm, DC = 8cm, HE = 6 cm
c). AF, FD, BH dacă AD = 12 cm, DC = 6 cm, EC = 4 cm, HE = 6 cm
d). HE şi EC dacă AC = 10 cm, FC = 6 cm, DC = 2 cm, BH = 8 cm
e). AF, BH şi FD dacă AC = 20 cm, DC = 5 cm, HC = 12 cm, HE = 8 cm
f). AF, FD şi DC dacă AC = 30 cm, BH = 4 cm, HE = 6 cm, EC = 2 cm.

**5).** În $\triangle ABC$ $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$. Aflaţi :
a). AN, NC, BP, MN şi NP dacă AM = 6 cm, MB = 9 cm, AC = 20 cm, PC = 6 cm
b). AM, BP şi PC dacă MB = 6 cm, AN = 15 cm, AC = 25 cm, BC = 30 cm
c). AM, MB şi BP dacă MN = 10 cm, NP = 9 cm, PC = 15 cm.

**6).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, O este intersecţia diagonalelor. Aflaţi : a). OD dacă AO = 6 cm, CO = 9 cm, OB = 4 cm. b). OB şi OD dacă AO = 12 cm, AC = 30 cm şi BD = 40 cm. c). OB şi OD dacă $\frac{OA}{OC} = \frac{2}{3}$.

**7).** Fie $\triangle ABC$ şi $M \in (AB$, $B \in (AM)$, $N \in (AC$, $C \in (AN)$. Aflaţi :
a). AC dacă $\frac{AB}{MB} = 0{,}4$ şi AN = 21 cm. b). MB dacă $\frac{CN}{AN} = 0{,}2$ şi AB = 8 cm.

**8).** Fie $\triangle ABC$, $M \in (AB$, $B \in (AM)$, $N \in (CB$, $B \in (NC)$. Aflaţi : a). NB dacă se cunosc AB = 12 cm, BM = 8 cm, NC = 25 cm. b). AB dacă se cunosc AM = 16 cm, $\frac{NB}{BC} = 0{,}(3)$.

**9).** Fie ABCD paralelogram şi $M \in (AD)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ astfel încât $MN \parallel DC$, $NP \parallel BC$, BC = 8 cm şi DC = 12 cm. Aflaţi $P_{APNM}$ dacă $\frac{NC}{AN} = 0{,}(3)$.

**10).** Fie $\triangle ABC$ şi $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Stabiliţi dacă $MN \parallel AC$ ştiind : a). $MA = 3$ cm, $MB = 6$ cm şi $\frac{BN}{BC} = \frac{2}{3}$. b). $\frac{NC}{BC} = \frac{3}{8}$ şi $\frac{AB}{BM} = 1{,}6$.

**11).** Pe semidreapta (OA, (OB şi (OC se aleg punctele $M \in$ (OA, $N \in$ OB, $P \in$ (OC astfel încât $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$. Arătaţi că : $MP \parallel AC$.

**12).** În patrulaterul ABCD fie $G_1$ şi $G_2$ centrele de greutate ale $\triangle ABD$ şi $\triangle ABC$. Arătaţi că $G_1G_2 \parallel DC$.

**13).** Fie patrulaterul ABCD şi $G_1$ şi $G_2$ centrele de greutate ale $\triangle ABC$ şi $\triangle ACD$. Demonstraţi că $G_1G_2 \parallel BD$.

**14).** În $\triangle ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, $M \in (BC)$, $MN \parallel AB$, $N \in (AC)$, $PN \parallel BC$, $P \in (AB)$, $PR \parallel AC$, $R \in BC$. Arătaţi că PNRM este trapez isoscel.

**15).** În $\triangle ABC$ se ştie că $P \in (AB)$, $BP = AP/2$, $PQ \parallel BC$, $Q \in (AC)$. Prin mijlocul M al lui PQ se duce $TS \parallel AB$, $T \in (AC)$, $S \in (BC)$. Arătaţi că PTQS este paralelogram şi $(AT) \equiv (QC)$.

**16).** În $\triangle ABC$ fie $M \in (BC)$. Prin B şi C se duc paralele la AM care intersectează AC respectiv AB în E şi respectiv în F. Demonstraţi că $\frac{AB}{BF} + \frac{AC}{CE} = 1$.

**17).** În $\triangle ABC$ se duce AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$, $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$. Dacă $AB = 20$ cm, $AC = 30$ cm, $BC = 25$ cm, să se afle perimetrul $\triangle DEC$.

**18).** În $\triangle ABC$, AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$. Se duc $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Arătaţi că $AD \perp FE$. Dacă $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm, $BC = 14$ cm, calculaţi perimetrul AFDE.

**19).** În patrulaterul ABCD cu $AB = BC$ se duc bisectoarele (BM şi (BN pentru unghiurile $\sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle CBD$, $M \in (AD)$, $N \in (DC)$. Demonstraţi că $MN \parallel AC$.

**20).** În $\triangle ABC$, MA este mediană, $M \in (BC)$, iar (MD şi (ME sunt bisectoarele $\sphericalangle AMB$ şi $\sphericalangle AMC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Demonstraţi că $DE \parallel BC$.

**21).** În $\triangle ABC$, M şi $E \in (AC)$, N şi $D \in (BC)$ astfel încât E şi D sunt mijloacele laturilor AC şi BC şi $AM = AC/4$, $NC = 3 \cdot BC/4$. Demonstraţi că $MN \parallel ED$.

**22).** În $\triangle ABC$ se duce $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi fie $M \in (BC)$ oarecare. Paralela la BC prin mijlocul P al înălţimii AD intersectează AM în Q. Dacă K şi T sunt mijloacele laturilor AB şi AC, arătaţi că K, P, Q, T sunt coliniare.

**23).** În paralelogramul ABCD prin punctul $M \in (AB)$ se duce $MN \parallel AC$, $N \in (BC)$, $NP \parallel BD$, $P \in (DC)$ şi $PQ \parallel AC$, $Q \in (AD)$. Demonstraţi că MNPQ este paralelogram.

**24).** În $\triangle ABC$ cu $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm se duce bisectoarea AD, $D \in (BC)$ şi fie $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$. Arătaţi că $DE \parallel AB$.

**25).** În rombul ABCD se alege $M \in (BA)$ astfel încât $AM = 3/4$ AB, $N \in (AD)$, $AN = 3$ ND, $NP \parallel AC$, $P \in (DC)$, $Q \in (BC)$, $BQ = 1/3$ QC. Arătaţi că MNPQ este dreptunghi.

**26).** În $\triangle ABC$ dreptunghic în A se duce BD bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $D \in (AC)$ şi $DM \perp BC$. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm $AC = 8$ cm, calculaţi $P_{\triangle DMC}$.

* * *

**27).** În $\triangle ABC$ se aleg $M \in (BC)$, $N \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $BM = 2/5$ BC, $PC = 3/5$ AC, $AN = 2/3$ NB. Arătaţi că BMPN este paralelogram.

**28).** În rombul ABCD se consideră $M \in (AB)$, $MA = 2/5$ AB, $Q \in (AD)$, $DQ = 3/2$ QA, $P \in (DC)$, $DP = 2/3$ DC, $N \in (BC)$, $NC = 1/2$ BN. Arătaţi că MNPQ este trapez isoscel.

**29).** În $\triangle ABC$ se alege $M \in AC$ şi se duc $MN \parallel AB$, $N \in (BC)$, $NP \parallel AC$, $P \in BA$, $PQ \parallel BC$, $Q \in AC$, $QR \parallel BA$, $R \in BC$, $TR \parallel AC$, $T \in BA$. Arătaţi că $TM \parallel BC$.

## Teorema fundamentală a asemănării

### NOŢIUNI DE BAZĂ

- două triunghiuri se numesc asemenea dacă au toate laturile respectiv proporţionale şi unghiurile opuse lor respectiv congruente.
- teorema fundamentală a asemănării : *„O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi sau cu prelungirile lor un triunghi asemenea cu cel dat ."*

### PROBLEME

*

**1).** Punctele D şi E aparţin prelungirilor laturilor AC şi respectiv AB ale triunghiului $\triangle ABC$ astfel încât $DE \parallel BC$. Aflaţi : a). AC şi BC dacă AD = 5 cm, DE = 3 cm, AE = 6 cm şi AB = 12 cm. b). AD, AC, AE, AB dacă DE = 4 cm, DC = 15 cm, BE = 20 cm, BC = 6 cm.

**2).** În $\triangle ABE$ se duce $DC \parallel AB$, $D \in (AE)$, $C \in (BE)$. Aflaţi : a). $P_{\triangle ABE}$ dacă se ştiu DE = 15 cm, DC = 20 cm, CE = 25, AB = 24 cm; b). $P_{\triangle DCE}$ dacă se ştiu AD = 2 cm, AB = 9 cm, BC = 4 cm, DC = 6 cm.

* *

**3).** În $\triangle ACE$ se duce $BD \parallel AE$, $B \in (AC)$, $D \in (CE)$. Aflaţi : a). BC şi DE dacă se ştiu AB = 2cm, AE = 12 cm, BD = 8 cm, CD = 6 cm; b). AB şi CD dacă se ştiu BC = 8 cm, BD = 10 cm, DE = 6 cm, AE = 15 cm.

**4).** În $\triangle ABC$ se aleg $P, T \in (AB)$ astfel încât $AP = 1/3 \cdot AB$ şi $AT = 2/3 \cdot AB$, Q şi $R \in (AC)$, $RC = 1/3 \cdot AC$ şi $QC = 2/3 \cdot AC$, $O \in (BC)$, $PO \parallel AC$. Dacă $TR \cap PO = \{S\}$, TS = 4 cm, aflaţi BC, TR, PQ.

**5).** Fie ABCD patrulater oarecare în care CE este bisectoarea $\sphericalangle BCD$, $E \in (BD)$, $FE \parallel AB$, $F \in (AD)$. Dacă se ştiu BC = 20 cm, DC = 25 cm, AB = 18 cm, aflaţi FE.

**6).** Fie ABCD patrulater oarecare în care se ştiu : *M (AD)*, $N \in (AC)$, $MN \parallel DC$, DC = 20 cm, MN = 16 cm. Dacă $P \in (AB)$, $AP = 4 \cdot PB$, demonstraţi că $PN \parallel BC$.

**7).** Fie $\triangle ABE$ şi $C \in (AB$, $D \in (EB$, astfel încât $B \in (AC)$ şi $DC \parallel AE$. Aflaţi : a). $P_{\triangle BDC}$ dacă se ştiu AB = 8 cm, BE = 6 cm, AE = 10 cm şi BD = 3 cm; b). $P_{\triangle BDC}$ dacă se ştiu AB = 12 cm, BE = 15 cm, DC = 12 cm, AE = 18 cm; c). BC şi BE dacă se cunosc AB = 20 cm, AE = 12 cm, BD = 30 cm şi DC = 15 cm.

**8).** Fie două drepte concurente $a \cap b = \{B\}$ şi A, $C \in a$ astfel încât $B \in (AC)$. În A şi C se ridică perpendicularele $AD \perp a$, $D \in b$, $CE \perp a$, $E \in b$ astfel încât AB = 3 cm, BE = 15 cm, EC = 12cm şi AD = 4 cm. Să se afle BC şi BD.

**9).** Fie trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $AD \cap BC = \{E\}$, $AC \cap BD = \{O\}$. Aflaţi : a). perimetrul $\triangle EDC$ dacă se ştie că AD = 5 cm, BC = 4 cm, AB = 6 cm şi DC = 9 cm; b). perimetrul $\triangle OAB$ dacă se ştie AB = 10 cm, DC = 15 cm, AC = 30 cm şi DB = 35 cm; c). perimetrul $\triangle EAB$ dacă AB = 6 cm, BC = 8 cm, DC = 12 cm şi AD = 5 cm.

**10).** În paralelogramul ABCD, prin punctul $M \in (AD)$ se duc $MN \parallel AB$, $MA = 1/4 \cdot AD$, $N \in (BD)$, $NP \parallel BC$, $P \in (DC)$, AB = 16 cm, BC = 12 cm. Aflaţi perimetrul lui MNPD.

* * *

**11).** În paralelogramul ABCD, o dreaptă oarecare care trece prin B intersectează AC în O, pe DC în F şi pe AD în E. Arătaţi că $BO \cdot BE = BF \cdot OE$.

**12).** În trapezul ABCD se duce paralela $MN \parallel AB \parallel CD$ prin punctul O de intersecţie a diagonalelor, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$. Aflaţi MO şi MN în funcţie de AB şi CD.

**13).** În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, linia mijlocie MN = 6 cm şi AB = CD / 3. Să se calculeze lungimea paralelei la baze dusă prin intersecţia diagonalelor.

**14).** În $\triangle ABC$, AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $M \in (BC)$. Prin M se duc $MD \parallel AB$, $ME \parallel AC$, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$. Fie EG şi DF bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BEM$ şi $\sphericalangle MDC$, G şi $F \in (BC)$. Demonstraţi că $FC \cdot BG = GM \cdot MF$.

**15).** În paralelogramul ABCD se alege $M \in BC$ astfel încât $B \in (MC)$ şi $[BM] \equiv [AB]$, $AM \cap DC = \{E\}$. Arătaţi că : a). $[BC] \equiv [DE]$ ; b). $\frac{MB}{AD} = \frac{MA}{AE}$ ; c). AE este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle ADC$.

16). În trapezul ABCD, în care linia mijlocie MN este egală cu $\frac{3AB}{2}$, AB || DC, să se arate că $OB = \frac{OD}{2}$, $AC \cap BD = \{O\}$.

17). În $\triangle ABC$ isoscel $(AB) \equiv (AC) = 10$ cm, $AD \perp BC$, $BC = 12$ cm, $AD = 8$ cm, se duce $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Aflați $P_{\triangle DEC}$.

18). În trapezul isoscel ABCD, AB || CD fie BM bisectoarea $\sphericalangle ABD$, $M \in (AC)$, și CN bisectoarea $\sphericalangle ACD$, $N \in (DB)$. Demonstrați că MN || AD.

19). În $\triangle ABC$ se duc AM mediană, $M \in (BC)$ și BD înălțime, $D \in (AC)$ și fie $AM \cap BD = \{P\}$. Dacă $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{8}$, aflați $\frac{PD}{BP}$.

## Cazurile de asemănare

**NOȚIUNI DE BAZĂ**

- cazurile de asemanare :

1). Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt asemenea.

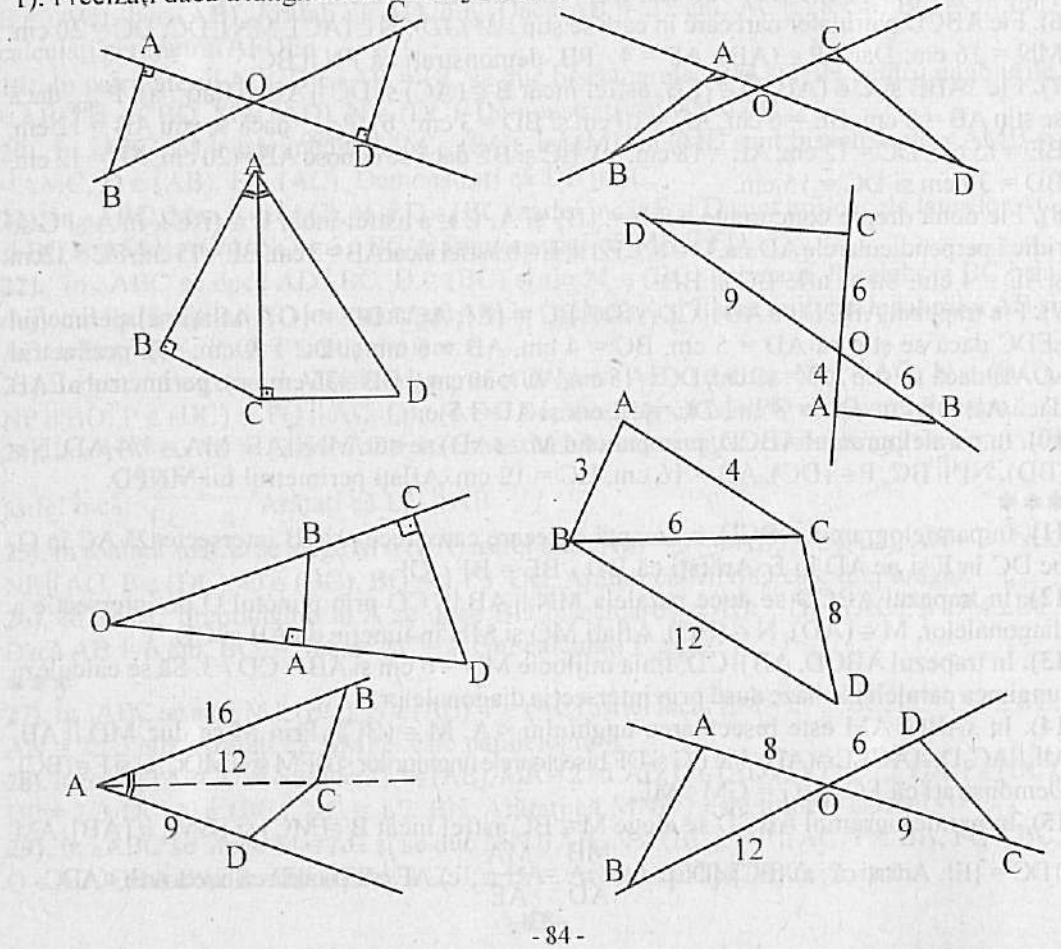
2). Dacă două triunghiuri au câte un unghi congruent și laturile ce-l formează respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea.

3). Dacă două triunghiuri au cele trei laturi respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea.

**PROBLEME**

*

1). Precizați dacă triunghiurile de mai jos sunt asemenea și cazul de asemănare :



2). Dacă triumghiurile ABC și MNP sunt asemenea, AB = 6 cm, AC = 8 cm, MN = 9 cm și NP = 18 cm, să se afle $P_{\triangle ABC}$.
3). Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$, $m(\sphericalangle F) = 20^0$. Să se afle $m(\sphericalangle C)$ și $m(\sphericalangle D)$.

* *

4). În $\triangle ABC$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât AB = 8 cm, AC = 12 cm, EF = 5 cm, EB = 2 cm, FC = 8 cm. Aflați BC.
5). Pe laturile (Ax și (Ay ale unghiului $\sphericalangle xAy$ se aleg B și $C \in$ (Ax, $D \in$ (Ay astfel încât $BD \perp Ax$ și $CD \perp Ay$. Aflați : a). AD și CB dacă AB = 4 cm, BD = $2\sqrt{5}$ cm, CD = $3\sqrt{5}$ cm; b). AB și AD și CD dacă BD = $4\sqrt{3}$ cm, BC = 4 cm; c). AB și BD și AD dacă CD = $6\sqrt{2}$ cm, BC = 6 cm.
6). În dreptunghiul ABCD se știe că $AE \perp DB$, $E \in (DB)$, AE intersectează DC în punctul F. Arătați că : a). $DE^2 = AE \cdot EF$; b). $AE^2 = DE \cdot EB$; c). $DE \cdot AB = EB \cdot DF$; d). $EF \cdot DB = DF \cdot AD$.
7). În $\triangle ABC$, AD este bisectoare, $D \in (BC)$ și $E \in (AB)$ astfel încât $\sphericalangle EDB \equiv \sphericalangle CAD$. Demonstrați că $\triangle EBD \sim \triangle DBA$ și $\triangle AED \sim \triangle ADC$.
8). În patrulaterul ABCD se cunosc AD = 4 cm, AB = 3 cm, DB = 6 cm și BC = 8 cm. Dacă $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DBC$ arătați că ABCD este trapez și calculați lungimea lui DC.
9). Aflați perimetrul trapezul ABCD, AB || CD dacă se cunosc AB = 3 cm, DB = 6 cm, AD = 4,5 cm și DC = 12 cm.
10). Demonstrați că următoarele patrulatere sunt trapeze dacă se cunosc : a). ABCD cu AB = 8 cm, BC = 7,5 cm, DB = 10 cm, DC = 12,5 cm și AD = 6 cm; b). ABCD cu AB = 8 cm, AD = 9 cm, DC = 6 cm, BC = 16 cm și AC = 12 cm.
11). Fie dreptele perpendiculare $a \perp b$, $a \cap b = \{B\}$, A, $D \in a$, $B \in (AD)$, E, $C \in b$, $B \in (EC)$. Aflați perimetrele $\triangle ABE$ și $\triangle BCD$ în fiecare caz : a). AB = 16 cm, BE = 12 cm, $m(\sphericalangle E) = 40^0$, BD = 20 cm, CD = 30 cm și $m(\sphericalangle C) = 50^0$; b). AB = 24 cm, AE = 32 cm, $m(\sphericalangle E) = 35^0$, BC = 30 cm, BD = 20 cm și $m(\sphericalangle C) = 55^0$.
12). Fie $\triangle ABC$ și $\triangle MNP$. Aflați : a). AB și MP dacă se știu BC = 15 cm, AC = 12 cm, $m(\sphericalangle B) = 70^0$, $m(\sphericalangle C) = 30^0$, MN = 16 cm, NP = 24 cm, $m(\sphericalangle N) = 80^0$, $m(\sphericalangle M) = 30^0$; b). AC și MP dacă se știu AB = 9 cm, BC = 6 cm, $m(\sphericalangle B) = 70^0$, $m(\sphericalangle A) = 50^0$, MN = 8 cm, NP = 16 cm, $m(\sphericalangle M) = 70^0$, $m(\sphericalangle N) = 60^0$; c). BC și NP dacă se știu AB = 15 cm, AC = 9 cm, $m(\sphericalangle A) = 80^0$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$, MN = 20 cm, MP = 24 cm, $m(\sphericalangle N) = 80^0$, $m(\sphericalangle P) = 40^0$.
13). Fie $a \cap b = \{A\}$ și B, $E \in a$, $A \in (BE)$, C, $D \in b$, $A \in (CD)$. Dacă AB = 4 cm, AC = 6 cm, BC = 8 cm, AD = 6 cm și AE = 9 cm, aflați DE.
14). Fie $\triangle ABC$ și $\triangle DEF$. Căutați perechile de unghiuri congruente : a). AB = 5 cm, AC = 6 cm, BC = 7 cm, DF = 12 cm, DE = 14 cm, FE = 10 cm; b). AB = 15 cm, AC = 30 cm, BC = 20 cm, ED = 24 cm, EF = 16 cm, FD = 12 cm.
15). În $\triangle ABE$ prin $C \in (AB)$ se duce o antiparalelă CD la BE ($m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle AEB)$), $D \in (AE)$. Aflați perimetrul patrulaterului CDEB în fiecare caz : a). AC = 6 cm, AD = 4 cm, CD = 5 cm și CB = 6 cm; b). AC = 12 cm, AD = 9 cm, CD = 6 cm și BE = 10 cm.
16). În $\triangle ABC$ se duce BD, $D \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ACB)$. Dacă se cunosc AB = 12 cm, AD = 8 cm și BC = 15 cm și se duce $DF \perp BC$, să se arate că $(BF) \equiv (FC)$.

* * *

17). În $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, AB > AC, mediatoarea laturii BC intersectează BC, AB, AC în M, D respectiv E. Arătați că $BM^2 = EM \cdot DM$.
18). În $\triangle ABC$ oarecare AD și BE sunt înălțimi, $D \in (BC)$ și $E \in (AC)$, $AD \cap BE = \{H\}$. Arătați că : a). $AC \cdot EC = BC \cdot DC$; b). $AH \cdot HD = BH \cdot HE$; c). $AH \cdot EC = BC \cdot HE$.
19). În $\triangle ABC$ se știe că $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$ și se duce BD bisectoarea $\sphericalangle B$, $D \in AC$. Demonstrați: a). $AB^2 = AD \cdot AC$; b). $DC \cdot AC = BC \cdot AB$.
20). Un teren are forma unui triunghi ADC, dreptunghic în D, $E \in (AC)$, $F \in (AD)$, $G \in (CD)$. Știind că EFDG este un pătrat pe care este construită o casă, AD = 16 m, DC = 12 m,

aflaţi aria ocupată de casă.

21). În figura 1, BEFD este un şanţ cu apă ce traversează o curte. Ştiind că $EF \parallel DB$, $AD = 20$ m şi aria şanţului este egală cu aria $\Delta EFC$, calculaţi EC.

22). În figura 2, AB este un stâlp de iluminat şi CD un om cu înălţimea de 1,8 m. Dacă omul se află la 5 m de stâlp şi umbra omului are 2 m, aflaţi înălţimea stâlpului.

fig. 1

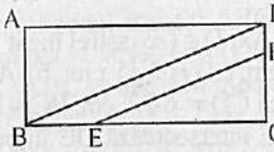



fig. 2

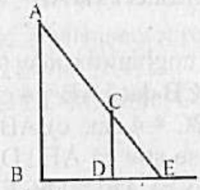
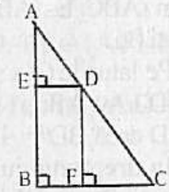



fig. 3




23). Doi biciclişti se află în punctul D din figura 3 şi merg cu aceeaşi viteză pe trasee diferite DEA şi DFC. Ştiind că AC = 12 km : a). aflaţi AD, dacă traseul DEA este de două ori mai lung decât DFC; b). unde se află D pe (AC), dacă bicicliştii parcurg traseele în acelaţi timp ?

## Testul 1

2p 1). Fie triunghiurile ABC şi DEF asemenea. Dacă AB = 8 cm, BC = 12 cm, DE = 12 cm, DF = 15 cm, $m(\sphericalangle A) = 80^0$ şi $m(\sphericalangle E) = 60^0$, aflaţi AC, EF, $m(\sphericalangle B)$; $m(\sphericalangle C)$; $m(\sphericalangle D)$ şi $m(\sphericalangle F)$.

2p 2). Fie $\Delta ABC$ în care $MN \parallel AB$, $M \in (AC)$, $N \in (BC)$, AM = 4 cm, MC = 6 cm şi NC = 12 cm. Aflaţi BN şi BC.

1p 3). Fie (BD bisectoarea $\sphericalangle B$ în $\Delta ABC$, $D \in (AC)$. Dacă AB = 6 cm, BC = 9 cm şi AC = 10 cm aflaţi AD şi DC.

1p 4). În $\Delta ABC$, punctele M, N, P şi Q sunt mijloacele segmentelor (AB), (AC), (MB) şi (NC). Dacă BC = 12 cm, să se afle MN şi PQ.

2p 5). În trapezul ABCD cu $AB \parallel DC$ se ştie că AB = 5 cm, DC = 10 cm, AC = 20 cm şi DB = 10 cm. Să se afle perimetrele $\Delta AOB$ şi $\Delta DOC$ unde $\{O\} = AC \cap BD$.

1p 6). În paralelogramul ABCD, $M \in (DC)$ şi $MN \parallel AC$, $N \in (AD)$, $MP \parallel BC$, $P \in (DB)$. Arătaţi că $NP \parallel DC$.

## Testul 2

4p 1). Dacă în $\Delta ABC$ se duce $DE \parallel AB$, $D \in (BC)$ şi $E \in (AC)$ astfel încât CE = 6 cm, EA = 4 cm şi CD = 9 cm, atunci BD = ....... cm.

1p 2). Lungimea bazei mari a trapezului ABCD având baza mică de 5 cm şi linia mijlocie de 10 cm este egală cu ....... cm.

1p 3). În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, AB = 6 cm, linia mijlocie intersectează diagonalele în punctele P respectiv Q. Dacă PQ = 4 cm să se afle lungimea liniei mijlocii.

1p 4). În $\Delta ABC$ având BC = 16 cm, din mijlocul M al laturii BC se duce MN, $N \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle NMC) = m(\sphericalangle BAC)$ şi NC = 4 cm. Să se afle AN.

1p 5). În $\Delta ABC$ cu BC = 15 cm, AB = 12 cm se duce $DE \parallel AB$, $D \in (AC)$, $E \in (BC)$ astfel încât AD = 3 cm şi DC = 6 cm. Să se afle perimetrul $\Delta DEC$.

1p 6). *În* $\Delta MNP$ se duce bisectoarea NQ, $Q \in (MP)$. Dacă MP = 18 cm, MN = 8 cm şi NP = 16 cm, $QR \parallel NP$, $R \in (MN)$, aflaţi : a). lungimile segmentelor MQ şi QP; b). perimetrul $\Delta MRQ$.

# Relaţii metrice în triunghiuri dreptunghice

## Teorema înălţimii

### NOŢIUNI DE BAZĂ

- în triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, AD înălţime, $D \in (BC)$ se cunosc următoarele relaţii
  - i). teorema înălţimii : $AD^2 = DB \cdot DC$
  - ii). teorema catetei : $AB^2 = BD \cdot BC$ sau $AC^2 = CD \cdot BC$
  - iii). teorema lui Pitagora : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- reciproca teoremei lui Pitagora : Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

**PROBLEME**

*

1). Fie $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$.
a). Dacă $BD = 3$ cm şi $CD = 27$ cm, să se afle AD;
b). Dacă $AD = 6$ cm şi $BD = 3$ cm, să se afle BC.

**

2). Fie $\Delta ABC$ dreptunghic în A şi înălţimea $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se afle : a). AD, dacă se cunosc $BD = 4$ cm şi $DC = 16$ cm; b). BD, dacă se cunosc $AD = 6$ cm şi $DC = 9$ cm; c). BD şi CD dacă se cunosc $AD = 6$ cm şi DC este de 4 ori mai mare decât BD; d). BD, CD şi AD dacă $BC = 20$ cm şi DC este de 9 ori mai mare dacât BD; e). BD, CD şi AD dacă $BC = 26$ cm şi raportul dintre DB şi DC este 4/9; f). BD, CD şi AD dacă $BC = 34$ cm şi DB reprezintă 70% din DC.

3). Fie $\Delta ABC$ dreptunghic în A şi înălţimea $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Aflaţi înălţimea AD, în fiecare caz în parte dacă se ştie $m(\sphericalangle C) = 30^0$ şi : a). $BC = 16$ cm; b). $BD = 5$ cm; c). $AB = 12$ cm.

4). În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ se ştie că : $DB \perp BC$ şi $AB = 6$ cm. Dacă linia mijlocie a trapezului este de 18 cm, să se afle înălţimea trapezului.

5). În $\Delta ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, se ştie că $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Dacă $AE = 16$ cm şi $EC = 4$ cm, aflaţi înălţimea BF, $F \in (AC)$ a triunghiului ABC.

6). În dreptunghiul ABCD se duce perpendiculara $CE \perp DB$, $E \in (AB)$ şi $CE \cap DB = \{O\}$. Dacă $CO = 8$ cm şi $EO = 2$ cm, aflaţi AC.

## Teorema catetei

*

1). Fie $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă $AB = 30$ cm şi $BD = 18$ cm, aflaţi : a). BC; b). AC; c). AD.

2). Fie $\Delta MNP$, $m(\sphericalangle M) = 90^0$ $AD \perp NP$, $D \in (NP)$. Dacă $NP = 25$ cm şi $DP = 16$ cm, aflaţi : a). MP; b). MN; c). MD.

**

3). Fie $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $m(\sphericalangle BAD) = 30^0$ şi $BD = 6$ cm. Să se afle $P_{\Delta ABC}$.

4). Fie $\Delta ABC$ dreptunghic, $m(\sphericalangle B) = 90^0$, $BD \perp AC$, $D \in (AC)$. Să se afle : a). perimetrul $\Delta ABC$ dacă se cunosc $AD = 4$ cm şi $DC = 5$ cm; b). AB şi BC dacă se ştie $AC = 30$ cm şi raportul dintre AD şi DC este 1/4; c). BC şi BD dacă se cunosc $AB = 12$ cm şi $AD = 4$ cm; d). perimetrul $\Delta ABC$ dacă se ştie $BD = 12$ cm şi $AD = 9$ cm; e). AC şi AB dacă se cunosc $BC = 18\sqrt{5}$ cm şi DC este de patru ori mai mare decât AD; f). AB, BC şi BD dacă $AC = 33$ cm şi AD reprezintă 120% din DC.

5). În $\Delta ABC$ se cunosc $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Dacă $AE = 16$ cm şi $EC = 9$ cm, aflaţi înălţimea AD şi dacă $BD = 10$ cm arătaţi că $\Delta ABC$ este isoscel.

6). În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel DC$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ se ştie că $BD \perp BC$ şi $AB = 7$ cm, $AD = 14$ cm. Să se afle perimetrul trapezuluiABCD şi diagonala BD.

7). În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel DC$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^0$, se ştie că $AB = 4$ cm şi $BD \perp BC$. Să se afle diagonala DB şi perimetrul trapezului ABCD.

8). În $\Delta ABC$ dreptunghic în B se duc $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $DE \perp BC$, $E \in (BC)$, $DF \parallel BC$, $F \in (AB)$. Dacă $DF = 3$ cm şi $DE = 6$ cm, calculaţi perimetrul $\Delta ABC$.

9). În dreptunghiul ABCD se duce perpendiculara AO pe diagonala BD, $AO \cap DC = \{E\}$. $O \in (BD)$, $AO \cap BC = \{F\}$. Dacă $AB = 20$ cm şi $DB = 25$ cm, să se afle : OD, OB, OA, AD, OF, BF, ED.

## Teorema lui Pitagora

*

1). Fie $\Delta MNP$, $m(\sphericalangle M) = 90^0$, $MN = 2\sqrt{3}$ cm şi MP = 6 cm. Aflaţi NP.
2). Fie $\Delta PQR$, $m(\sphericalangle R) = 90^0$, PQ = 24 cm şi PR = 12 cm. Aflaţi QR.
3). Fie $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 30^0$, AC = 8 cm. Aflaţi AB.
4). Fie $\Delta DEF$, $m(\sphericalangle D) = 90^0$, $m(\sphericalangle E) = 60^0$, EF = 12 cm. Aflaţi DE şi DF.
5). Fie $\Delta ABC$ echilateral cu AB = 12 cm şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se afle lungimea înălţimii AD.

**

6). Fie $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 30^0$, AB = 12 cm. Să se afle perimetrul şi aria triunghiului.
7). Să se afle înălţimea triunghiului dreptunghic cu catetele de 20 cm şi 15 cm;
8). În $\Delta ABC$ dreptunghic în A se cunosc $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, AC = 15 cm şi AD = 12 cm. Să se afle perimetrul $\Delta ABC$.
9). În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, se cunosc AB = 7 cm, AD = 12 cm şi AC = 20 cm. Aflaţi perimetrul trapezului.
10). Aflaţi perimetrul trapezului isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, în care se ştie că $AC \perp AD$, AC = 40 cm, DC = 50 cm.
11). Aflaţi perimetrul trapezului ABCD isoscel, $AB \parallel CD$, ştiind că AB = 12 cm, DC = 18 cm şi înălţimea trapezului este de 4 cm.
12). Să se afle înălţimile AD şi BE ale $\Delta ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ dacă se cunosc AB = 25 cm, BC = 30 cm.
13). În trapezul ABCD isoscel, $AB \parallel CD$, se ştie că $BC \perp BD$. Dacă M este mijlocul lui DC, MB = 10 cm, şi înălţimea trapezului este de 8 cm, aflaţi perimetrul trapezului.
14). Fie $\Delta ABC$ cu AB = 17 cm, BC = 15 cm, AC = 8 cm. Aflaţi înălţimea corespunzătoare laturii AB.
15). În $\Delta ABC$ se cunosc AC = 25 cm, BC = 7 cm şi AB = 24 cm. Aflaţi înălţimea corespunzătoare laturii AC.
16). Fie $\Delta ABC$ cu AB = 20 cm, BC = 21 cm şi AC = 13 cm. Aflaţi înălţimea corespunzătoare laturii BC.
17). Să se afle distanţa dintre două laturi paralele ale unui romb ale carui diagonale au lungimile de 24 cm respectiv 32 cm.
18). În paralelogramul ABCD, se ştie că $AD \perp AC$ şi AD = 9 cm, DC = 16 cm. Să se afle înălţimea şi diagonalele paralelogramului.
19). În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se ştie $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle C) = 45^0$, BC = 16 cm şi $AB = 3\sqrt{2}$ cm. Să se afle perimetrul trapezului.
20). În rombul ABCD, $m(\sphericalangle A) = 60^0$ şi AB = 8 cm. Aflaţi diagonalele sale.
21). În trapezul isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle C) = 60^0$, AB = 8 cm, AD = 6 cm. Să se afle lungimea liniei mijlocii a trapezului.
22). În pătratul ABCD, fie M mijlocul laturii AB. Dacă distanţa de la M la diagonala AC este 3 cm, să se afle latura pătratului.
23). În $\Delta ABC$ dreptunghic în A, $m(\sphericalangle C) = 30^0$ şi M este mijlocul laturii AB. Dacă distanţa de la M la latura BC este $5\sqrt{3}$ cm, să se afle laturile triunghiului ABC.
24). În $\Delta ABC$ dreptunghic în A, AB = 18 cm, AC = 24 cm şi M este mijlocul laturii BC. Din M se ridică perpendiculara pe BC care intersectează AB în E. Să se afle perimetrul $\Delta BEC$.
25). În pătratul ABCD se înscrie $\Delta MNP$ astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AD)$. Dacă $[AM] \equiv [BN] \equiv [PD]$, AM = 6 cm şi NC = 8 cm, arătaţi că $\Delta MNP$ este dreptunghic.
26). În dreptunghiul ABCD, AB este de două ori mai mare decât BC şi M este mijlocul lui AB. Arătaţi că $\Delta MDC$ este dreptunghic.
27). Să se demonstreze că în orice trapez dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ există relaţia $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$.
28). În paralelogramul ABCD se cunosc BC = 12 cm, $AC = 4\sqrt{5}$ cm şi $m(\sphericalangle B) = 45^0$. Să se afle perimetrul paralelogramului şi lungimea diagonalei BD.

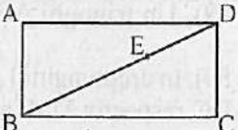
**29).** Să se afle lungimea liniei mijlocii a trapezului ABCD dreptunghic (AB || CD) dacă m(∢A) = m(∢D) = 90$^0$, BD⊥BC, m(∢C) = 60$^0$ și AD = $4\sqrt{3}$ cm.

**30).** Să se afle lungimea bisectoarei BD a unghiului ∢ABC din △ABC dreptunghic, m(∢A) = 90$^0$, dacă AB = 18 cm, BC = 30 cm, D ∈ (AC).

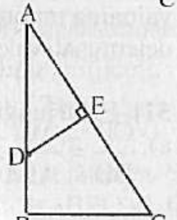
**31).** În trapezul ABCD, AB || CD, se cunosc AB = 10 cm, BC = 12 cm, DC = 20 cm și AD = 10 cm. Arătați că ABKD este romb, unde K este mijlocul laturii DC și aflați lungimea laturii BD.

**32).** Fie trapezul ABCD (AB || CD) în care AC⊥AD, AB < DC și AE și BF sunt înălțimi. Dacă DE = 4 cm, DC = 20 cm și CF = 2 DE, să se afle : AE, AC și BD.

**33).** Fie paralelogramul ABCD în care AB = 6 cm, BC = 18 cm, AC = $12\sqrt{2}$ . Să se afle lungimea înălțimii paralelogramului.




34). Într-un parc în formă de dreptunghi ABCD, o persoană a parcurs drumul BE, E ∈ (BD), care este de 2 ori mai mare decât ED. Știind AB = 9 dam, AD = 12 dam, aflați drumul cel mai scurt, ca să iasă din parc : spre DC sau spre BC ?

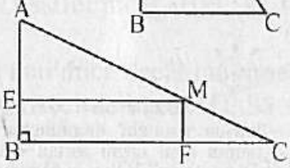



35). O casă are o terasă ca în figură, în formă de triunghi dreptunghic, cu AC = 25 m, BC = 20 m. Unde amplasăm un bec D pe AB, dacă vrem să fie la egală distanță de AC și BC ?

36). Un teren are o formă de trapez isoscel cu b = 8 dam, B = 14 dam.

a). Aflați măsura unghiului ascuțit al terenului dacă suprafața terenului este de $33\sqrt{3}$ dam$^2$.

b). Calculați lungimea gardului care înconjoară terenul.




37). Pe un teren în formă de triunghi ABC, dreptunghic în B, vrem să construim o casă MEBF, care are ME = 2 MF. Dacă AB = 15 m și BC = 20 m, calculați AM și BM.

***

**38).** Să se afle latura pătratului ADEF înscris în △ABC dreptunghic isoscel, m(∢A) = 90$^0$, D ∈ (AB), E ∈ (BC), F ∈ (AC) cunoscând lungimea ipotenuzei triunghiului de 16 cm.

**39).** Fie △ABC isoscel, (AB) ≡ (AC), AB = 26 cm, BC = 20 cm. Să se afle poziția punctului de pe înălțimea triunghiului egal depărtat de laturile triunghiului.

**40).** Să se afle latura pătratului înscris în triunghiul echilateral de latură 24 cm.

**41).** Fie trapezul ABCD, AB || CD, în care se cunosc m(∢A) = 127$^0$, m(∢C) = 37$^0$, AD = 9 cm, AB = 5 cm, BC = 12 cm. Aflați lungimea laturii DC.

**42).** Fie ABCD un pătrat cu diagonala de lungime $12\sqrt{2}$ cm. Se aleg punctele Q ∈ (AD) astfel încât AQ = 1/4 AD, P ∈ (DC) astfel încât PC = 2/3 DC, N ∈ (BC) astfel încât BN = 1/2 NC și M ∈ (AB) astfel încât MB = 3MA. Calculați perimetrul patrulaterului MNPQ și distanța dintre QM și PN.

**43).** Demonstrați că triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c este dreptunghic în următoarele cazuri : a). $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{c}{a+b}$ ; b). $a^4 - b^4 - c^4 = 2b^2c^2$; c). $a = \sqrt{\frac{(b-c)(b^2+c^2)(b+c)}{(a+b\sqrt{2})(b\sqrt{2}-a)}}$

**44).** Pe o dreaptă se aleg punctele A, B, C astfel încât AB = 6 cm, BC = 8 cm și se construiesc pătratele ABDE și BCGH de aceeași parte a dreptei AC : a). să se arate că △BEG este dreptunghic; b). să se calculeze BM și MG unde BG ∩ AH = {M}; c). să se calculeze perimetrul △PRG unde CH ∩ BG = {P} și CH ∩ EG = {R}; d). arătați că CD⊥AH și AD⊥CH.

**45).** În △ABC cu m(∢A) = 90$^0$ se ia pe latura BC un punct arbitrar P care se proiectează pe laturile AB și AC în E respectiv F. Care este poziția punctului P astfel încât lungimea segmentului EF să fie minimă și să se determine această lungime dacă AB = 39 cm și AC = 52 cm.

(etapa județeană Mureș 1996)

46). Fie ABCD un trapez dreptunghic $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$, $AB \neq CD$ avand iagonalele perpendiculare. a). să se arate că $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ; b). arătați că $AB + CD > 2\ AD$.
(etapa județeană Dambovița 1996)

47). Bazele unui trapez sunt AB = 21 cm și CD = 7 cm, lungimile laturilor neparalele sunt AD = 15 cm și BC = 13 cm iar proiecția segmentului BC pe dreapta AB are lungimea de 5 cm. Să se arate că bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$ este perpendiculara pe diagonala BD.
(etapa județeană Giurgiu 1996)

48). Triunghiurile cu laturile exprimate de numerele $AB = 3\sqrt{3} \cdot 2^{n-1}$, $BC = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n$, $AC = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1}$, $n \in N$, sunt dreptunghice ? (G.M. 11/1980)

49). Un triunghi ABC are $m(\sphericalangle A) = 60^0$, $2AB = 3AC$. Să se arate că $2AB^2 = AC^2 + BC^2$.
(etapa județeană Hunedoara 1996)

50). În dreptunghiul ABCD, fie $\{O\} = AC \cap BD$ iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor AB, OB, DC respectiv DM. a). Să se arate că $[NE] \equiv [EP]$ unde $\{E\} = PN \cap AC$; b). Să se determine valoarea raportului QP/GP, unde $\{G\} = PA \cap DB$; c). Dacă $\triangle NPQ$ este isoscel cu baza NP, determinați valoarea raportului dintre lungimea și lățimea dreptunghiului.
(etapa județeană Bacău 1996)

51). Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Arătați că :
a). $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$ ;b). $AC^2 \cdot BD^2 + AB^2 \cdot CD^2 = AD^2 \cdot BC^2$ ; c). $AB + AC \leq BC\sqrt{2}$
(etapa județeană Satu Mare 1996)

## Elemente de trigonometrie

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- într-un triunghi dreptunghic se definesc :
- sinusul unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.
- cosinusul unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei.
- tangenta unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate.- cotangenta unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse.
- se vor reține următoarele relații :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \sin(90^0 - x) = \cos x$ $\quad tg(90^0 - x) = ctg\, x$ $\quad \sin(180^0 - x) = \sin x$

$tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{ctg\, x}$ $\quad \cos(90^0 - x) = \sin x$ $\quad ctg(90^0 - x) = tg\, x$ $\quad \cos(180^0 - x) = -\cos x$

## PROBLEME

*

1). Fie $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$. AB = 6 cm, BC = 10 cm. Calculați $\sin(\sphericalangle B)$; $tg(\sphericalangle C)$.

2). Fie $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, AC = 15 cm, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, AD = 12 cm. Calculați $\cos(\sphericalangle B)$, $ctg(\sphericalangle C)$.

3). Fie ABCD dreptunghi, AB = 8 cm, BC = 15 cm. Calculați $tg(\sphericalangle ABD)$ și $\sin(\sphericalangle ACB)$.

**

4). Să se afle lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$ în care se cunosc BC = 30 cm și $tg(\sphericalangle B) = 3/4$.

5). Să se afle lungimea diagonalei AC a unui romb ABCD în care se știe AD = 15 cm și $\sin(\sphericalangle A) = 4/5$.

6). Să se calculeze lungimea înălțimii AD a triunghiului dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $D \in (BC)$ dacă $\sin C = 1/2 \cdot \sin B$ și $BC = 12\sqrt{5}$ cm.

7). Să se afle perimetrul $\triangle ABC$ dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$ dacă $\cos(\sphericalangle B) = 1/3 \cdot tg(\sphericalangle C)$ și $AB = 8\sqrt{2}$ cm.

8). În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ se cunoaște : a). lungimea liniei mijlocii de 22 cm, BC = 20 cm și $tg(\sphericalangle C) = 3/4$; b). lungimea liniei mijlocii de 14 cm. AD = 9 cm și $\cos(\sphericalangle C) = 4/5$. Să se afle perimetrul trapezului pentru fiecare caz în parte.

9). În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se cunosc $m(\sphericalangle A) = 120^0$, $m(\sphericalangle B) = 150^0$, BC = 12 cm, $AB = 2\sqrt{3}$ cm Să se calculeze : AD și lungimea liniei mijlocii.

**10).** În dreptunghiul ABCD se cunosc AB = 10 cm, sin(∢ABD) = 12/13 şi O este intersecţia diagonalelor. Să se calculeze : a). sin(∢AOB); b). perimetrul dreptunghiului ABCD.
**11).** Fie paralelogramul ABCD cu AC = 8 cm. Dacă m(∢ACD) = $30^0$ şi m(∢CAD) = $105^0$, să se calculeze perimetrul paralelogramului.
**12).** Să se afle perimetrul trapezului isoscel ABCD (AB || CD) dacă ştim m(∢A) = $135^0$, lungimea liniei mijlocii de 10 cm şi lungimea înălţimii AE = 8 cm, E ∈ (DC).
**13).** Să se afle perimetrul trapezului isoscel ABCD (AB || CD) dacă se cunosc AB = 4 cm, DC = 14 cm şi sin(∢D) = 12/13.
**14).** În ∆ABC se cunosc laturile AB = 16 cm, AC = 30 cm, BC = 34 cm. Să se afle lungimea înălţimii AE, E ∈ (BC), sin(∢B), tg(∢C).
**15).** Fie ABCD romb cu AC = 12 cm şi BD = 16 cm. Aflaţi sin(∢BAD).
**16).** Fie ∆ABC isoscel, AB = AC = 30 cm, BC = 40 cm. Aflaţi tg(∢A).
*******
**17).** În trapezul dreptunghic ABCD, AB||CD, m(∢B) = m(∢C) = $90^0$ se ştie că DB este bisectoarea unghiului ∢D şi DB = $12\sqrt{3}$ cm. Dacă m(∢A) = $120^0$, să se afle lungimea liniei mijlocii.
**18).** Să se afle sin(∢BDC) şi cos(∢ADB) în trapezul isoscel ABCD (AB || CD) în care se cunosc AB < CD, AD = 10 cm, ctg(∢C) = 3/4 şi lungimea liniei mijlocii de 16 cm.
**19).** Fie dreptunghiul ABCD în care lungimea BC este de trei ori mai mare decât lăţimea. Se alege punctul E de aceeaşi parte a dreptei BC cu punctele A şi D astfel încât ∆BEC să fie dreptunghic isoscel de bază BC. Să se calculeze sin(∢EAD).
**20).** Fie dreptunghiul ABCD în care latimea AB este de două ori mai mică decât lungimea. În exteriorul dreptunghiului se construieşte ∆AED dreptunghic isoscel de bază AD. Să se calculeze sin(∢AEB) şi tg(∢BEC).
**21).** a). La triunghiul dreptunghic ABC se ştie că m(∢BAC) = $90^0$ şi că AB = c, BC = a, AC = b. Stabiliţi dacă $\sin^2$(∢B) + $\cos^2$(∢B) = 1; b). Dându-se numărul natural n > 2, $\sin^n$(∢B) + $\cos^n$(∢B) < 1? ; c). Este adevarată afirmaţia $5^n > 3^n + 4^n$, oricare ar fi n > 2 ? (etapa judeţeană Prahova 1973)

## Testul 1

⑤4p 1). În ∆MRS, m(∢M) = $90^0$, MT⊥RS, T ∈ (RS). Dacă TR = 16 cm şi TS = 9 cm aflaţi MT; MR; MS.
⑦1p 2). Triunghiul ABC are AB = 9 cm, AC = 12 cm şi BC = 15 cm. Aflaţi :
a). m(∢A) = .......; b). Aria ∆ABC = .......; c). sin (∢C) = .......; d). tg (∢B) = .......
⑦1p 3). Triunghiul ABC cu m(∢B) = $90^0$, AB = 8 cm şi cos(∢A) = $\frac{4}{5}$, are perimetrul egal cu .......
⑨1p 4). Triunghiul DEF cu m(∢D) = $90^0$, m(∢E) = $60^0$ şi DF = 6 cm are ED = .......cm şi EF = .......cm.
⑨1p 5). În trapezul ABCD, AB||CD, se ştie că AB = 6 cm, AD = 6 cm, DC = 16 cm şi BC = 8 cm. Aflaţi lungimea înălţimii trapezului.
⑩ 1p 6). Triunghiul ABC are m(∢A) = $105^0$, m(∢B) = $30^0$ şi AC = 8 cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

## Testul 2

⑤2p 1). Ipotenuza unui triunghi dreptunghic având catetele de 12 respectiv 9 cm este egală cu ....... cm.
⑤2p 2). $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^0 + 0,5 \cdot \cos 45^0 =$ .......
⑦1p 3). Înălţimea unui triunghi dreptunghic care are un unghi de $30^0$ şi cateta opusă lui de 10 cm este .......
⑦1p 4). Să se afle înălţimea unui ∆ABC dacă m(∢A) = $90^0$, m(∢C) = $45^0$ şi BC = $6\sqrt{2}$ cm.
⑨1p 5). În trapezul ABCD m(∢A) = $90^0$, AB||CD se cunosc AB = 11 cm şi AD = 24 cm iar cos(∢C) = 0,6. Să se afle perimetrul trapezului.
⑨1p 6). Fie triunghiul MNP având PN = 8 cm, PM = $8\sqrt{3}$ cm şi MN = 16 cm. Să se afle înălţimea corespunzătoare laturii MN şi proiecţia laturii PN pe latura MN, precum şi tg(∢M).
⑩1p 7). Aflaţi înălţimea trapezului ABCD, AB||CD, dacă AB = 4 cm, AD = 10 cm, BC = 17 cm şi DC = 25 cm.

# Aplicaţii : arii

## PROBLEME

*

1). Să se afle ariile următoarelor triunghiuri : a). $\Delta ABC$ isoscel cu $AB = AC = 15$ cm şi $BC = 18$ cm; b). $\Delta ABC$ isoscel cu $AB = AC = 12$ cm şi $m(\sphericalangle B) = 30^0$; c). $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle B) = 90^0$, $BC = 32$ cm, $CA = 40$ cm; d). $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle C) = 90^0$, $m(\sphericalangle A) = 30^0$, $AB = 16$ cm; e). $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 45^0$, $BC = 16$ cm; f). $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = 12$ cm, $AB = 15$ cm; g). $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle B) = 90^0$, $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $AD = 36$ cm şi $DC = 64$ cm.

**

2). În triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$ se ştie $BC = 24$ cm, $\sin(\sphericalangle B) = 4/5$. Să se calculeze perimetrul şi aria triunghiului.

3). În triunghiul oarecare ABC se ştie $m(\sphericalangle A) = 75^0$, $m(\sphericalangle B) = 45^0$ şi $AB = 12$ cm. Să se afle aria triunghiului.

4). În triunghiul ABC se cunosc $AB = 51$ cm, $AC = 77$ cm şi $BC = 40$ cm. Să se afle lungimile înălţimilor şi aria triunghiului.

5). Aria unui triunghi ABC isoscel $[AB] \equiv [AC]$ este de $120\ cm^2$. Să se afle perimetrul triunghiului ABC dacă se ştie că $BC = 16$ cm.

6). Să se afle lungimea laturii BC a unui triunghi ABC isoscel $[AB] \equiv [AC]$ care are aria de $32\sqrt{2}\ cm^2$ şi $m(\sphericalangle A) = 45^0$.

7). Aria triunghiului ABC cu $m(\sphericalangle A) = 60^0$ este de $40\sqrt{3}\ cm^2$. Să se afle lungimile laturii BC şi a înălţimii AD, dacă $AB = 16$ cm.

8). În triunghiul ABC dreptunghic în A, $\sin(\sphericalangle B) = 1/3$ se cunoaşte aria de $8\sqrt{2}\ cm^2$. Aflaţi perimetrul triunghiului.

9). Să se afle $\sin(\sphericalangle B)$, $\cos(\sphericalangle C)$ şi aria triunghiului ABC dacă lungimile laturilor sale sunt $AB = 39$ cm, $BC = 56$ cm şi $AC = 25$ cm.

10). Să se afle aria triunghiului ABC şi $\sin \hat{B}$ dacă se ştie $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm, $m(\sphericalangle A) = 60^0$.

11). În triunghiul ABC se consideră $M \in (BC)$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$, $NM \parallel AB$, $N \in (AC)$, $NP \parallel BC$, $P \in (AB)$, $PQ \parallel AC$, $Q \in (BC)$, $QR \parallel AB$, $R \in (AC)$, $RT \parallel BC$, $T \in (AB)$, $TR \cap MN = \{D\}$, $TR \cap PQ = \{E\}$, $PQ \cap MN = \{F\}$. Dacă $A_{\Delta ABC} = 144\ cm^2$, aflaţi $A_{\Delta DEF}$, $A_{NFER}$, $A_{TDMB}$. Găsiţi alte figuri geometrice echivalente cu triunghiul DEF şi cu patrulaterul NFER.

12). În triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$ se ştie lungimea înălţimii BD, $D \in (AC)$, $BD = 8$ cm şi $BC = 10$ cm. Să se afle $A_{\Delta ABC}$.

13). Fie triunghiul ABC cu $AB = 40$ cm, $AC = 25$ cm, $BC = 39$ cm şi M mijlocul laturii BC. Aflaţi : a). aria triunghiului ABC; b). aria triunghiului ABM; c). $A_{\Delta AMC}$.

14). Fie triunghiul ABC şi G centrul lui de greutate, M mijlocul laturii BC. Dacă $A_{\Delta ABG} = 16 cm^2$, aflaţi aria triunghiului ABC şi aria triunghiului BGM.

15). Fie triunghiul ABC cu $AB = 25$ cm, $AC = 30$ cm şi $BC = 25$ cm, $B \in (AD)$, $D \in (AB$, $DB = 35$ cm, $C \in (AE)$, $E \in (AC$, $CE = 20$ cm, aflaţi : $A_{\Delta ADE}$ şi $P_{\Delta ADE}$.

16). Fie $\Delta ABC$ cu $AB = 13$ cm, $BC = 21$, $AC = 20$ cm şi $E \in (AB$, $D \in (AC$, $B \in (AE)$, $C \in (AD)$, $BE = 27$ cm, $CD = 6$ cm. Aflaţi aria $\Delta AED$ şi perimetrul $\Delta AED$.

17). Fie $\Delta MNP$ cu $MN = 17$ cm, $MP = 10$ cm, $NP = 21$ cm şi $R \in (MN$, $T \in (MP$, $N \in (MR)$, $P \in (MT)$, $NR = 3$ cm, $PT = 2$ cm. Aflaţi aria $\Delta MRT$.

18). Să se afle aria paralelogramului ABCD şi lungimea înălţimilor sale dacă $AD = 7$ cm, $AC = 24$ cm şi $DC = 25$ cm.

19). Aflaţi aria paralelogramului ABCD şi lungimea înălţimilor lui dacă AB = 17 cm, BC = 25 cm şi BD = 26 cm.
20). În paralelogramul ABCD se ştie că $AC \perp BC$ şi $m(\sphericalangle ACD) = 30^0$. Dacă EC = 9 cm, $E \in (DC)$ piciorul înălţimii, să se afle aria paralelogramului.
21). În dreptunghiul ABCD se duc perpendiculare din A şi C pe BD, picioarele perpendicularelor fiind E respectiv F. Dacă AC = 25 cm şi AB = 20 cm, aflaţi aria patrulaterului AECF.
22). În exteriorul dreptunghiului ABCD cu AB = 2 cm, BC = 6 cm se construieşte triunghiul BCE echilateral. Să se afle aria triunghiului EAD şi aria poligonului ABECD.
23). Aceeaşi problemă dacă punctele E, A şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei BC.
24). În dreptunghiul ABCD cu AB = 3 cm şi BC = 8 cm se construieşte triunghiul BCE dreptunghic isoscel de bază BC, astfel încât A, E şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei BC. Să se afle $A_{\Delta EAD}$, $A_{\Delta AEB}$, $A_{GHCB}$ unde $EB \cap AD = \{G\}$ şi $EC \cap AD = \{H\}$.
25). Să se afle aria rombului ABCD în care se cunosc AB = 10 cm şi $\sin(\sphericalangle A) = 24/25$.
26). Să se afle aria rombului ABCD în care AC = 30 cm şi $\cos(\sphericalangle ABD) = 8/17$.
27). Să se afle lungimea laturii rombului ABCD dacă aria lui este 600 $cm^2$ şi $tg(\sphericalangle ADB) = 3/4$.
28). Să se afle aria rombului ABCD dacă se ştie AB = 26 cm şi $tg(\sphericalangle ACD) = 12/5$.
29). Să se afle lungimea laturii rombului ABCD dacă $m(\sphericalangle A) = 60^0$ şi $A_{ABCD} = 72\sqrt{3}$ $cm^2$.
30). În rombul ABCD se consideră înălţimile $BE \perp AD$, $E \in (AD)$ şi $DF \perp BC$, $F \in (BC)$. Să se afle aria patrulaterului EDFB dacă se ştie AB = 25 cm, aria rombului de 600 $cm^2$ şi $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle B)$.
31). În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle B) = 90^0$ se înscrie pătratul BDEF, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (BC)$. Dacă AB = 6 cm şi BC = 8 cm, să se afle aria pătratului.
32). În rombul ABCD se înscrie pătratul MNPQ, $M \in (AB)$, $N \in (AD)$, $P \in (DC)$ şi $Q \in (BC)$. Dacă AC = 16 cm şi BD = 30 cm, să se afle aria pătratului.
33). Să se calculeze aria trapezului ABCD dreptunghic ($AB \parallel CD$), $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$ în fiecare caz : a). AD = 12 cm, BC = 13 cm, $P_{ABCD} = 49$ cm; b). AB = 8 cm, BC = 8 cm, $m(\sphericalangle C) = 60^0$; c). AB = 5 cm, DC = 11 cm, $m(\sphericalangle C) = 30^0$; d). BC = 10 cm, $m(\sphericalangle C) = 45^0$, lungimea liniei mijlocii este $8\sqrt{2}$ cm.
34). Să se afle aria trapezului dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 90^0$ şi $AC \perp AD$ în fiecare caz : a). AB = 4 cm, BC = 6 cm; b). AB = 5 cm, $m(\sphericalangle D) = 30^0$; c). AB = 9 cm, CD = 25 cm.
35). Aria unui trapez isoscel ABCD ($AB \parallel CD$) este de $27\sqrt{3}$ $cm^2$. Să se afle perimetrul trapezului ştiind DC = AB/2 şi $m(\sphericalangle A) = 60^0$.
36). În trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$, se ştie că $AC \perp BC$, să se afle aria trapezului în fiecare caz : a). AD = 15 cm, AB = 25 cm; b). $m(\sphericalangle B) = 60^0$, DC = 4 cm; c). DC = 14 cm, AB = 50 cm.
37). Să se arate că în orice dreptunghi ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, $A_{\Delta ABO} = A_{\Delta ADO} = 1/4\, A_{ABCD}$.

***

38). În triunghiul ABC se cunosc AB = 15 cm, AC = 13 cm şi BC = 14 cm. Să se afle aria $\Delta ABD$ şi aria $\Delta ACD$ unde AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.
39). Fie $\Delta ABC$ echilateral cu AB = 12 cm. Dacă D este un punct din interiorul triunghiului, calculaţi d(D; AB) + d(D; AC) + d(D; BC).
40). În interiorul dreptunghiului ABCD se construiesc triunghiurile AED şi BFC echilaterale. Dacă AB = $4\sqrt{3}$ cm şi BC = 6 cm, să se afle aria suprafeţei comune interioare triunghiurilor.
41). În interiorul dreptunghiului ABCD se construiesc triunghiurile AEB şi DFC isoscele dreptunghice de ipotenuze AB şi CD. Dacă AB = 10 cm şi BC = 7 cm, să se afle aria suprafeţei comune interioare triunghiurilor.
42). Fie dreptunghiul ABCD în care se poate înscrie triunghiul echilateral ABE, $E \in (CD)$. Dacă

aria dreptunghiului este $18\sqrt{3}\ cm^2$, să se afle aria triunghiului echilateral.

43). În triunghiul ABC oarecare se consideră linia mijlocie MN, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi dreptunghiul MNPQ, $P, Q \in (BC)$. Să se arate că : $A_{MNPQ} = A_{\Delta AMN} + A_{\Delta MQB} + A_{\Delta NCP}$.

44). Să se demonstreze că pentru oricare punct $M \in (AB)$ în dreptunghiul ABCD exista relaţia $A_{\Delta MDC} = A_{\Delta AMD} + A_{\Delta BMC}$.

45). Să se demonstreze că în rombul ABCD în care M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, AD, DC şi respectiv BC există relaţia : $A_{MNPQ} = 1/2\ A_{ABCD}$.

46). Să se afle aria trapezului ABCD, $[AB] \equiv [CD]$ şi $AD \parallel BC$ dacă se ştie că $\sin \hat{A} = 3/5$, lungimea liniei mijlocii este 8 cm şi perimetrul trapezului este 26 cm.

47). Să se afle aria şi perimetrul trapezului isoscel ABCD ($AB \parallel CD$) în care se ştie AB = 10 cm, AC = 15 cm şi DC = 14 cm.

48). În trapezul ABCD dreptunghic în $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ se ştie că $[AB] \equiv [BC]$ şi $m(\sphericalangle D) = 45^0$. Să se afle lungimea înălţimii AE a triunghiului ABD, $E \in (BD)$ în funcţie de lungimea laturii AB.

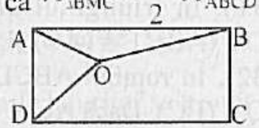
49). În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, se cunosc AB = 6 cm, DC = 9 cm şi înălţimea trapezului de lungime 10 cm. Să se calculeze ariile triunghiurilor AOB, DOC şi BOC ($AC \cap BD = \{O\}$).

50). Prin vârful C al paralelogramului ABCD se duce o paralelă la BD care intersectează AB în M şi AD în K. Arătaţi că aria paralelogramului ABCD este egală cu jumătate din aria triunghiului AMK.

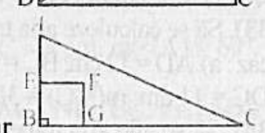
51). Fie paralelogramul ABCD, M mijlocul laturii BC, $AM \cap BD = \{N\}$. Dacă $A_{\Delta BNM} = 5\ cm^2$, aflaţi $A_{\Delta ABC}$ şi $A_{ABCD}$.

52). Fie ABCD trapez, $AB \parallel CD$, M mijlocul laturii AD. Demonstraţi că $A_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$.

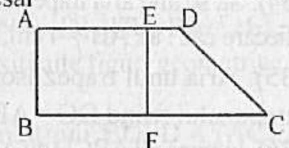
53). Terenul ABCD este un dreptunghi împărţit în trei parcele : $\Delta AOD$ pentru roşii, $\Delta AOB$ pentru ardei, OBCD pentru cartofi. Dacă AB = 16 m, AD = 12 m şi AO = 5 m, ce arie mai rămâne pentru cartofi, ştiind că roşiile şi ardeii au parcele echivalente ?



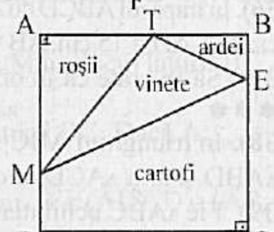

54). Triunghiul ABC dreptunghic este un teren iar pătratul EFGB este o casă pe acest teren. Ştiind că AB = 9 m, BC = 12 m, BG = 2 m, calculaţi lungimea celui mai scurt traseu de la F la strada AC, necesar amplasării utilităţilor casei (apă, gaze, curent) ?




55). Parterul unei case are forma unui trapez dreptunghic, cu $AD \parallel BC$, AD = 6 m, BC = 10 m, DC = 5 m. Unde amplasăm un perete $EF \parallel AB$, dacă vrem ca cele 2 camere care se formează să aibă arii egale ?




56). Figura alăturată reprezintă o grădină de legume de formă pătrată cu latura de 12 m. Dacă AM = 11 m, EC = 10 m, TB = 6 m şi ME = 15 m, aflaţi : a). aria cultivată cu fiecare legumă; b). lungimea drumului cel mai scurt de la T la ME.




## Testul 1

⑤2p 1). Aflaţi aria triunghiului ABC dacă AB = AC = 26 cm şi BC = 20 cm.

⑤2p 2). Aflaţi aria triunghiului care are laturile de 10 cm, 25 cm, respectiv 26 cm.

⑦1p 3). Pătratul cu diagonala de 14 cm are aria de ....... $cm^2$

⑦1p 4). Aflaţi aria rombului care are lungimea laturii egală cu 17 cm şi o diagonală de 16 cm.

⑨2p 5). Aflaţi aria dreptunghiului ABCD dacă BD = 15 cm şi $tg(\sphericalangle BAC) = 0,75$.

⑩1p 6). Trapezul isoscel ABCD cu $AB \parallel CD$ are BC = 10 cm, $m(\sphericalangle BCD) = 30^0$ şi aria de $35\sqrt{3}\ cm^2$. Aflaţi perimetrul trapezului.

## Testul 2

⑤1p 1). Aria unui triunghi echilateral având latura de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ....... cm².

⑤2p 2). Aria unui dreptunghi având lungimea de 16 cm iar lăţimea reprezentând 75% din lungime este egală cu ....... cm².

⑤1p 3). Aria unui triunghi având laturile de 17 cm, 12 cm respectiv 23 cm este egală cu ....... cm².

⑦1p 4). Fie rombul ABCD având perimetrul de 40 cm şi diagonala BD = 12 cm. Să se afle distanţa de la vârful C la latura AB.

⑦1p 5). Diagonala unui pătrat având aria de 48 cm² este egală cu ....... cm.

⑨1p 6). În triunghiul ABC, $[AB] \equiv [AC]$ se cunosc BC = 8 cm şi $\cos(\sphericalangle B) = \frac{2}{3}$. Să se afle înălţimea corespunzătoare laturii AC şi lungimea laturii AC.

⑩1p 7). Înălţimea trapezului ABCD, ($AD \parallel BC$) este congruentă cu baza mică şi are lungimea de 6 cm iar $\sin(\sphericalangle A) = 0{,}6$ şi $m(\sphericalangle D) = 45^0$, aflaţi : a). aria trapezului; b). distanţa de la vârful A la latura DC.

1). Poate fi poligonul din fig. 1 împărţit în două poligoane identice ca formă şi având aceeaşi arie, cu alte cuvinte, două poligoane care pot fi suprapuse? Toate unghiurile poligonului sunt drepte.

2). Folosind cele patru bucăţele din fig. 2, poate fi alcătuită o literă?

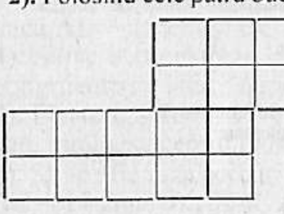


fig. 1

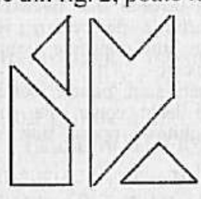


fig. 2

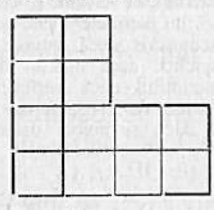


fig. 3

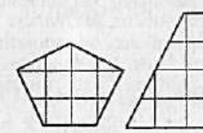


fig. 4

3). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig.3 în patru părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)? Toate unghiurile poligonului sunt drepte.

4). Pot fi secţionate cele două suprafeţe ilustrate din fig.4 în 8 părţi egale fiecare (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)?

5). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig. 5 în cinci părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)? Toate unghiurile din figură sunt drepte.

6). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig. 6 în patru părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)? Unghiurile sunt marcate pe figură.

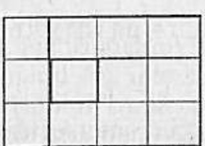


fig. 5

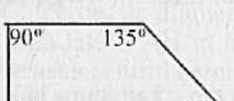



fig. 6

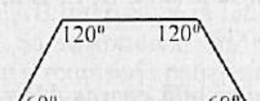



fig. 7

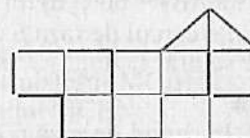


fig. 8

7). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig. 7 în patru părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)? Unghiurile sunt marcate pe figură.

8). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig. 8 în două părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie), ignorând imperfecţiunile desenului? Toate unghiurile sunt multipli de 45 de grade.

9). Poate fi secţionată suprafaţa ilustrată din fig. 9 în cinci părţi egale (de aceeaşi formă şi aceeaşi arie)?

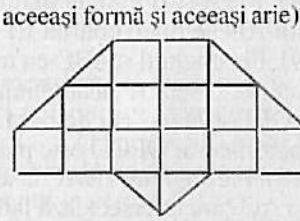


fig. 9

# *Capitolul XIV*

# Cercul

### NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte cerc locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix numit centru
- se numeşte coardă un segment cu capetele pe cerc
- se numeşte diametru, coarda care conţine şi centrul cercului (capetele diametrului se numesc puncte diametral opuse)
- un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numeşte unghi la centru . Măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului mic cuprins între laturile unghiului.
- în acelaşi cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente
- perpendiculara din centrul cercului pe coardă înjumătăţeşte coarda.
- în acelaşi cerc sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente, atunci ele se află la aceeaşi distanţă de centru şi reciproc.
- o dreaptă poate să intersecteze un cerc astfel : a). într-un punct şi se numeşte tangentă la cerc
  b). în două puncte şi se numeşte secantă
- tangenta la cerc este perpendiculară pe raza cercului în punctul de contact
- se numeşte unghi înscris în cerc, unghiul cu vârful pe cerc şi care are ca laturi două coarde. Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.
- măsura unui unghi cu vârful pe cerc care are o latură coarda şi cealaltă latură tangenta la cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi
- toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte
- dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două tangente la acest cerc cu următoarele proprietăţi :
  a). tangentele sunt congruente (segmentele cu capetele în punctul de tangenţă şi punctul exterior de unde se duce tangenta)
  b). semidreapta dusă din punctul exterior care conţine şi centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangente
- se numeşte patrulater înscris, un patrulater care are vârfurile pe cerc
- un patrulater se numeşte circumscris dacă laturile sale sunt tangente unui cerc
- patru puncte se numesc conciclice dacă aparţin unui cerc
- un patrulater se numeşte inscriptibil dacă vârfurile sale sunt puncte conciclice
- un patrulater, în care unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse, sunt congruente, este patrulater inscriptibil
- un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.

## Arce, coarde, unghi la centru, unghi înscris

*

1). $\triangle ABC$ este înscris în cerc şi $m(\sphericalangle OBA) = 30^0$ şi $m(\sphericalangle OAC) = 40^0$. Aflaţi arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ şi $\overset{\frown}{BC}$.

2). În cercul de raza 5 cm se află coarda AB la distanţa de 3 cm de O şi coarda AC la distanţa de 4 cm de O. Ce fel de triunghi este ABC ?

3). Într-un cerc se afle două coarde AB şi AC, AB = 5 cm, AC = 12 cm, $AB \perp AC$. Să se afle raza cercului.

4). Pe cercul de centru O se afla A şi B. Aflaţi lungimea lui AB în funcţie de rază dacă :
a) $m(\overset{\frown}{AB}) = 60^0$; b) $m(\overset{\frown}{AB}) = 120^0$ .

5). Pe cercul de raza 6 cm se află A, B, C, D astfel încât $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD}) = 60^0$. Să se afle : $A_{ABCD}$ , $A_{AOCB}$.

**

6). În cercul de rază 5 cm se află coarda AB = 8 cm . Tangenta în A la cerc intersectează perpendiculara din O pe AB în C. Aflaţi : a). d(O, AB); b). $A_{\triangle AOC}$.

7). $\triangle ABC$ este înscris într-un cerc astfel încât $m(\sphericalangle A) = 70^0$ , $m(\sphericalangle B) = 80^0$. Aflaţi : $m(\sphericalangle AOC)$ şi $(\sphericalangle OBC)$.

8). Fie A şi B puncte diametral opuse în cercul de centru O şi raza 6 cm. Prin mijlocul D al lui AO se duce coarda $EF \perp AB$, E şi F aparţin cercului. Calculaţi $A_{\triangle AEF}$ şi $A_{\triangle ABF}$.

9). Fie unghiul $\sphericalangle ABC$ cu măsura de $36^0$ înscris în cerc astfel încât A şi B sunt puncte diametral opuse. Bisectoarea unghiului AOC intersectează cercul în D. Fie $E \in (BC)$ astfel încât triunghiul $\triangle OBE$ este isoscel de baza OB. Să se demonstreze că : a). patrulaterul BODC este trapez; b). patrulaterul OECD este paralelogram; c). OB este media proporţională intre DC şi BC.

10). Fie unghiul $\sphericalangle BAC$ înscris în cerc. Din mijlocul D al arcului BC se duc paralele la laturile AB şi AC care intersectează laturile AC şi AB în N respectiv M şi cercul în F respectiv E. Arătaţi că a). patrulaterul AMDN este romb; b). patrulaterele EBDA, ADCF sunt trapeze isoscele.

* * *

11). Fie un triunghi ABC înscris într-un cerc. Să se demonstreze că simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului aparțin cercului.

12). Să se arate că cercurile de diametre laturile AB și AC ale triunghiului ABC se intersectează a doua oară pe latura BC.

13). Fie un $\triangle ABC$ înscris într-un cerc și D mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{BC}$. Arătați că : a). $AP \cdot AD = AC \cdot AB$, $AD \cap BC = \{P\}$; b). $AP \cdot PD = BP \cdot PC$.

## Tangenta la cerc, triunghi înscris și circumscris, patrulater înscris și circumscris

*

1). Pe cercul de centru O, fie A și B astfel încât $m(\overset{\frown}{AB}) = 90^0$. În A și B se duc tangentele la cerc care se intersectează în C. Dacă AB = 8 cm, aflați $A_{AOBC}$.

2). Fie A și B puncte diametral opuse într-un cerc de centru O și C aparține cercului. AC intersectează tangenta în B la cerc în D. Demonstrați că $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DAB$.

* *

3). Fie un triunghi ABC astfel încât AB și AC sunt tangente în B și C la un cerc : a). să se arate că centrul cercului aparține bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$; b). să se calculeze raza cercului dacă AB = 15 cm și BC = 18 cm .

4). Să se demonstreze că într-un trapez isoscel circumscris unui cerc, linia mijlocie este congruentă cu latura neparalelă.

5). Fie cercul de rază 6 cm și un punct A în exteriorul său. Se duc tangentele din A la cerc care întâlnesc cercul în B și C. Dacă $m(\sphericalangle BOC) = 60^0$, aflați : a). CA și OA; b). aria $\triangle ABC$.

6). Să se afle raza cercurilor înscrise în triunghiurile : a). $\triangle ABC$ cu AB = 8 cm, AC = 15 cm, BC = 17 cm ; b). $\triangle ABC$ cu AB = 10 cm, BC = 10 cm, AC = 12 cm.

7). Să se afle raza cercurilor circumscrise triunghiurilor : a). $\triangle ABC$ cu AB = 10 cm, BC = 24 cm, AC = 26 cm ; b). $\triangle ABC$ cu AB = 20 cm, AC = 20 cm, BC = 24 cm ; c). $\triangle ABC$ cu AB = 26 cm, AC = 26 cm, BC = 48 cm.

8). Să se afle aria trapezului dreptunghic ABCD circumscris unui cerc dacă AB || CD, AB = 2 cm și DC = 6 cm.

* * *

9). În triunghiul oarecare ABC se duc înălțimile $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $CE \perp AB$, $E \in (AB)$. Să se arate că: a). patrulaterele BEDC și AEOD sunt inscriptibile; b). ME și MD sunt tangente la cercul circumscris patrulaterului AEOD (M este mijlocul laturii BC); c). patrulaterul MEFD este inscriptibil (F este mijlocul lui AO); d). centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor de mai sus sunt coliniare.

10). Fie triunghiul ABC. Cercul de diametru AB intersectează latura AC în M și cercul de diametru AC intersectează latura AB în N. Să se arate că : a). patrulaterul MCBN este inscriptibil; b). să se găseasca centrul cercului circumscris patrulaterului MCBN.

11). În triunghiul ABC fie $D \in (BC)$, $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$ picioarele înălțimilor triunghiului. Să se demonstreze că : a). $\triangle AFE \sim \triangle DFC \sim \triangle DBE$; b). să se calculeze în funcție de măsurile unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$ și $\hat{C}$ măsurile unghiurilor triunghiului DEF.

12). Fie AB diametrul unui cerc și M un punct oarecare pe cerc. AM intersectează tangenta în B la cerc în punctul C și BM intersectează tangenta în A la cerc în punctul D. Arătați că AB este media proporțională între AD și BC.

13). Fie un cerc și A, B, C, D patru puncte oarecare pe cerc. Demonstrați că bisectoarea $\sphericalangle BAD$ intersectează bisectoarea exterioară a $\sphericalangle BCD$ într-un punct ce aparține cercului.

14). Se dă cercul C(O,r). Se consideră diametrul AB și punctele C și D (pe semicercuri diferite) astfel încât $AC \cap BD = \{E\}$ și $BC \cap AD = \{F\}$. Dacă M este mijlocul segmentului EF, atunci : a).EDCF este patrulater inscriptibil ; b). CM este tangentă la cercul C(O,r).

(etapa județeană Prahova 1992)

15). Pe cercul $C(O,r)$ se cosideră punctele A, B, C, D în această ordine astfel încât $AO \perp OB$, $BC = r$, măs$(\widehat{AD}) = 2/3$ măs.$(\widehat{AB})$, $AD \cap BC = \{P\}$ și $AC \cap BD = \{M\}$. Stabiliți : a). natura patrulaterului ABCD; b). dacă AMBP este inscriptibil; c). dacă $O \in MP$. (etapa locală Prahova 1992)
16). ABC este un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^0$ și $m(\sphericalangle ABC) = 30^0$ iar I și O sunt centrele cercului înscris respectiv cercului circumscris triunghiului ABC. Stabiliți dacă : a). punctele A, B, O, I sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil; b). $[AI] \equiv [OI]$. (etapa sector București 1990)
17). În patrulaterul inscriptibil ABGD, O este mijlocul diagonalei AC. Arătați că B, D, O sunt puncte coliniare dacă și numai dacă $\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{AB}$. (etapa municipiu București 1990)
18). Fie A și A' două puncte diametral opuse în cercul de centru O și raza r = 8 cm. Fie un punct B oarecare pe diametrul perpendicular pe AA'. Dreapta AB intersectează (a doua oară) cercul în C și în punctul D pe tangenta la cerc în A'. Tangenta la cerc în C intersectează A'D în E. a). $\triangle OA'E$, $\triangle OCE$ și $\triangle OAB$ sunt congruente ? b). OABE este paralelogram ? c). punctele O, E, B, C sunt vârfurile unui trapez isoscel ? d). stabiliți dacă $\triangle AOB$ și $\triangle ACA'$ sunt asemenea și calculați BC dacă $OB = \frac{3r}{2}$. (etapa locală Prahova 1975)
19). În triunghiul isoscel ABC se înscrie un cerc și în exterior se exînscrie un cerc tangent la latura BC și la prelungirile laturilor AB și AC. Arătați că : a). $\frac{BC}{2}$ este medie proporțională între razele cercurilor; b). patrulaterul OO'EF format de centrele cercurilor (O respectiv O') și punctele de tangență aflate de aceeași parte față de linia centrelor poate fi circumscris unui semicerc cu diametrul EF, ( $E, F \in (AC)$ ); c). patrulaterul EFF'E' poate fi circumscris unui cerc, E', F' celelalte puncte de tangență, $E', F' \in (AB)$.

## Pozițiile relative a două cercuri

*

1). Fie două cercuri secante în A și B. Dacă cercurile sunt egale ce este $O_1AO_2B$ ? Dacă în plus $O_1A$ este tangentă la cercul de centru $O_2$, ce este $O_1AO_2B$ ?

**

2). Fie două cercuri secante în A și B de centru $O_1$ și $O_2$. a) demonstrați că $O_1$, $O_2$ și mijlocul M al lui AB sunt coliniare; b) dacă tangentele în A și B la cercul de centru $O_1$ se intersectează în C, să se arate că $C \in O_1O_2$.
3). Fie două cercuri $C(O, r)$ și $C(O', r')$ secante în A și B, iar AD și AC diametre.a). să se arate că D, B, C sunt puncte coliniare; b). cum trebuie să fie cercurile pentru că $\triangle ODB \sim \triangle O'BC$.
4). Fie două cercuri concentrice și OA o rază a cercului mare, AB coardă a cercului mare, tangentă la cercul mic. Fie C punctul diametral opus lui B în cercul mare și CD coardă în cercul mare, tangentă la cercul mic. Să se precizeze natura patrulaterului ABCD.
5). Fie două cercuri de centre O și O', tangente exterioare și fie o tangentă comună exterioară care intersectează cercurile și linia centrelor în punctele A, B și respectiv T. Dacă razele sunt de 9 cm și 4 cm aflați AB și AT.
6). Fie două cercuri exterioare de centre O și O', de raze 6 cm și 9 cm și fie o tangentă comună interioară care le intersectează în A și B. Aflați AB, dacă OO' = 25 cm.
7). Fie două cercuri exterioare de centre O și O' și de raze 1 cm și 7 cm. Dacă o tangentă comună exterioară întâlnește cercurile și pe OO' în A, B și respectiv T, aflați : a). valoarea raportului $\frac{A_{\triangle TO'B}}{A_{\triangle TOA}}$; b). dacă OO' = 10 cm, aflați AB și AT.
8). Fie două cercuri tangente exterioare de centre $O_1$ și $O_2$ și tangenta lor comună exterioară care le intersectează în A și B. a). demonstrați că există un cerc tangent la $O_1O_2$, $O_1A$ și $O_2B$ care are centrul pe AB; b). dacă cercurile inițiale se întâlnesc în C aflați natura $\triangle ABC$.

***

**9).** Fie A punctul de tangență comun pentru două cercuri tangente interior, O și O' centrele lor. O dreaptă oarecare care conține punctul A intersectează cercurile în B și B'. Fie D și D' punctele diametral opuse lui B și B'. Linia centrelor intersectează cercurile în C și C'. Să se arate că : a). $BD \parallel B'D'$ ; b). $BC \parallel B'C'$ ; c). A, D, D' puncte coliniare; d). $DC \parallel D'C'$ e). ce este AD'C'B' ?

**10).** Fie două cercuri C(O, r) și C(O', r') tangente exterioare și două diametre paralele $AB \parallel CD$. Să se demonstreze că AD, BC și OO' precum și AC, BD și OO' sunt concurente.

**11).** În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se duc înălțimile $BD \perp AC$ și $CE \perp AB$, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, să se arate că : a). EBCD este patrulater inscriptibil; b).cercurile circumscrise triunghiului ABC și patrulaterului AEOD sunt tangente interioare ($\{O\} = CE \cap BD$); c). să se afle distanța dintre centrele celor două cercuri de la punctul b).dacă AB = 25 cm și BC = 30 cm.

**12).** Fie cercurile de centre $O_1$ și $O_2$ tangente exterioare în punctul C. Tangenta lor comună exterioară întâlnește cercurile și tangenta comună interioară în A, B și E.
a). demonstrați că $\Delta O_1EO_2$ este dreptunghic; b). demonstrați că $\Delta CO_2B \sim \Delta CEA$; c). arătați că $CE \cdot CA = O_1A \cdot CB$.

# Testul 1

5 2p 1). Dacă lungimea unui cerc este egală cu $24\pi$ cm, atunci aria sa este egală cu ........$cm^2$.

5 2p 2). La ce distanță de centru se află coarda de 6 cm în cercul de rază 5 cm ?

7 1p 3). În cercul de centru O este înscris $\Delta ABC$. Dacă $m(\overset{\frown}{AB}) = 120^0$, $m(\sphericalangle B) = 150^0$, aflați :
a). $m(\sphericalangle A)$ = .......; b). $m(\overset{\frown}{AC})$ = .......; c). $m(\sphericalangle OBC)$ = .......

7 1p 4). Cercul circumscris triunghiului dreptunghic cu catetele de 6 cm și 8 cm are :
a). raza = .......; b). aria = .......; c). lungimea = .......

9 2p 5). Dintr-un punct C exterior unui cerc de centru O și rază 6 cm se duc tangentele la cerc care ating cercul în punctele A și B. Dacă $m(\sphericalangle ACB) = 60^0$, aflați :
a). AC = .......; b). AB = .......; c). aria sectorului mare de cerc determinat de OA și OB.

10 1p 6). În $\Delta ABC$ se duc înălțimile $BD \perp AC$, $D \in (AC)$ și $CE \perp AB$, $E \in (AB)$. a). Se află punctele D, C, B, E pe un cerc ?; b). Aflați aria cercului dacă BC = 10 cm.

# Testul 2

5 2p 1). Aria unui cerc de lungime $4\sqrt{3}\pi$ cm este egală cu ....... $cm^2$.

5 2p 2). Aria unui sector de cerc având raza de 5 cm corespunzător unghiului de $72^0$ este egală cu ....... $cm^2$.

7 2p 3). Să se afle lungimea cercului circumscris unui triunghi dreptunghic având aria de 24 $cm^2$ și o catetă de 6 cm.

9 1p 4). Fie triunghiul ABC înscris într-un cerc de rază 10 cm și $m(\sphericalangle A) = 60^0$. Să se afle lungimea laturii BC.

9 1p 5). Din punctul A exterior cercului de rază 6 cm situat la distanța de 12 cm față de centrul cercului se duc AB respectiv AC, tangentele la cerc. Să se afle aria triunghiului ABC.

10 1p 6). Dacă distanța centrelor a două cercuri tangente exterioare este de 10 cm iar razele lor sunt direct proporționale cu numerele 3 și 2, să se afle :
a). lungimea tangentei comune a celor două cercuri;
b). distanța de la centrul cercului mic la punctul de intersecție dintre dreapta centrelor și tangenta comună a cercurilor.

# *Capitolul XV*
# Poligoane regulate

## NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește poligon convex un poligon în care, oricare ar fi o latură a sa, toate vârfurile nesituate pe latura considerată se află de aceeași parte a dreptei în care este inclusă latura respectivă.
- suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $(n-2)\cdot 180^0$
- se numește poligon regulat un poligon convex cu toate laturile sale congruente și toate unghiurile sale congruente
- orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.
- se numește apotemă a unui poligon regulat segmentul care unește mijlocul unei laturi a poligonului cu centrul cercului circumscris acelui poligon
- între latura, apotema, aria poligonului și raza cercului circumscris acelui poligon există relațiile :

a). pentru triunghiul echilateral

$$a_3 = \frac{l_3\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2} \qquad A_3 = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

b). pentru pătrat

$$l_4 = R\sqrt{2} \qquad a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \qquad A_4 = l_4^2 = 2R^2$$

c). pentru hexagonul regulat

$$l_6 = R \qquad a_6 = \frac{l_6\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \qquad A_6 = 6\cdot\frac{l_6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

- lungimea unui cerc este $2\pi R$.
- aria unui cerc este $\pi R^2$
- se numește sector circular porțiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze.
- aria unui sector circular este $\frac{\pi u^0 R^2}{360^0}$ unde $u^0$ este măsura arcului cuprins între razele sectorului .
- lungimea unui sector circular corespunzător unui arc de cerc având măsura de $u^0$ este $\frac{2\pi R u^0}{360^0}$

## PROBLEME

1). Să se afle raza cercului în care este înscris un triunghi echilateral care are aria $25\sqrt{3}$ cm².

2). Să se afle aria pătratului care are latura egală cu latura hexagonului regulat înscris în cercul de lungime $12\pi$ .

3). Să se calculeze aria cercului în care este înscris pătratul cu aria egală cu aria rombului care are latura de 10 cm și o diagonală de 12 cm.

4). Să se afle aria pătratului înscris în cercul înscis în triunghiul echilateral de latură $5\sqrt{3}$ cm.

5). Calculați aria triunghiului echilateral înscris în cercul înscris în patratul de arie 64 cm²

6). Un triunghi echilateral și un hexagon regulat sunt înscrise în același cerc. Aflați aria hexagonului dacă se știe aria triunghiului de $25\sqrt{3}$ cm².

7). Un dreptunghi este înscris într-un cerc și are laturile AB = 12 cm și BC = 16 cm. Aflați aria hexagonului regulat înscris în cerc.

8). Un cerc este înscris în rombul cu latura AB = 10 cm și diagonala AC = 16 cm. Aflați aria triunghiului echilateral înscris în cerc.

9). Un cerc are aria de $25\pi$ cm². Aflați raportul dintre aria hexagonului înscris în cerc și aria pătratului circumscris cercului,

10). Aflați lungimea cercului înscris în hexagonul regulat care are aria $24\sqrt{3}$ cm².

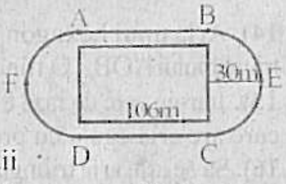
11). Arătați că raportul dintre aria pătratului circumscris și aria pătratului înscris într-un același cerc este constant.

12). Aflați aria unui cerc înscris în triunghiul echilateral de arie $9\sqrt{3}$ cm².

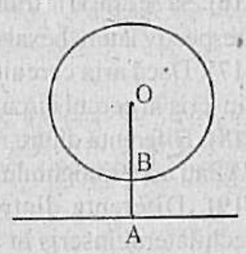
13). Arătați că raportul dintre aria triunghiului echilateral circumscris și aria pătratului înscris în același cerc este constant.

14). Aria unui hexagon regulat ABCDEF este $96\sqrt{3}$ cm$^2$. Aflați aria cercului circumscris triunghiului AOB, (O fiind centrul cercului circumscris hexagonului).
15). Într-un cerc de raza 8 cm se înscrie un pătrat. Să se afle lungimea laturii triunghiului echilateral care are aria egală cu produsul dintre aria pătratului și $\sqrt{3}$.
16). Să se afle aria triunghiului care are că laturi latura triunghiului echilateral, latura pătratului și respectiv latura hexagonului regulat, poligoane regulate înscrise în cercul de raza R = 10 cm.
17). Dacă aria cercului înscris într-un triunghi echilateral este $9\pi$, să se afle aria pătratului înscris în cercul circumscris triunghiului echilateral.
18). Diferența dintre raza cercului înscris și circumscris unui triunghi echilateral este de 4 cm. Aflați aria triunghiului.
19). Diferența dintre latura triunghiului echilateral circumscris și latura triunghiului echilateral înscris în același cerc este de 6 cm. Aflați aria și lungimea cercului.
20). Unui cerc i se circumscrie un hexagon regulat ABCDEF și i se înscrie un triunghi echilateral MNP astfel încât M,N, P sunt mijloacele laturilor AB, DC și respectiv EF. a). arătați că MBCN, PEDN, AMPF sunt trapeze isoscele; b). dacă aria trapezului MBCN este $20\sqrt{3}$ cm$^2$, aflați aria cercului.
21). Unui cerc i se înscrie și i se circumscrie câte un hexagon regulat ABCDEF și MNPQRS astfel încât M, N, P, Q, R, S sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF și respectiv FA. Dacă aria triunghiului BMN este $36\sqrt{3}$ cm$^2$, aflați lungimile laturilor celor două hexagoane.
22). Într-un cerc se înscrie un hexagon regulat ABCDEF. Dacă AC = $4\sqrt{3}$ cm, să se calculeze $A_{\triangle ABC}$, $A_{\triangle ACF}$ și $A_{EFCD}$.
23). În sectorul de cerc de raza R corespunzător unghiului la centru de măsura $a^0$ se înscrie paralelogramul OBAC, O fiind centrul cercului, A aparține arcului de cerc, B și C aparțin celor două raze. Aflați aria suprafeței cuprinsă în interiorul sectorului de cerc și exteriorul paralelogramului dacă : a). $a^0 = 120^0$ ; b). $120^0 > a^0 > 90^0$ ; c). $a^0 = 90^0$.
24). În rombul ABCD se consideră sectorul de cerc de rază AB și centrul A, cuprins între razele AB și AD. Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă în interiorul rombului și în exteriorul sectorului de cerc dacă AB = 6 cm și m($\sphericalangle$A) = $60^0$.
25). Fie două cercuri $C_1$ (O;3) și $C_2$ (O'; 9) tangente exterioare și fie AA' tangentă lor comună, A $\in C_1$(O;3) și A' $\in C_2$ (O';9) punctele de tangență. Calculați aria suprafeței cuprinsă în interiorul patrulaterului OAA'O' și în exteriorul cercurilor.
26). Fie ABCD un trapez isoscel, AB || CD, astfel încât se pot înscrie două semicercuri tangente exterior de diametre AB și CD. Dacă AB = 8 cm și CD = 12 cm, aflați aria suprafeței rămase în exteriorul semicercurilor și în interiorul trapezului.
27). În interiorul unui triunghi echilateral se construiesc trei arce de cerc astfel încât laturile triunghiului sunt coarde și înălțimile triunghiului sunt tangente la aceste arce. Dacă latura triunghiului este de 6 cm, aflați aria cuprinsă în exteriorul segmentelor de cerc și în interiorul triunghiului.
28). Să se afle lungimea unui cerc pentru fiecare caz în parte dacă AB este coardă și se cunosc :
a). m($\widehat{AB}$) = $45^0$, lungimea arcului $\widehat{AB}$ de $6\pi$ cm; b). m($\widehat{AB}$) = $60^0$, aria sectorului determinat de centru și coarda AB, de $216\pi$ cm$^2$; c). m($\widehat{AB}$) = $75^0$, aria sectorului de $30\pi$ cm$^2$; d). m($\widehat{AB}$) = $120^0$, lungimea arcului $\widehat{AB}$ de $12\pi$ cm.
29). Într-un cerc de centru O fie coarda AB. Să se afle m($\widehat{AB}$) în fiecare caz : a). aria cercului de $256\pi$ cm$^2$ și lungimea lui $\widehat{AB}$ de $8\pi$ cm; b). lungimea cercului de $36\pi$ cm și aria sectorului corespunzător de $27\pi$ cm$^2$.

30). În jurul unui stadion se află o pistă de atletism, ca în figură. Știind că BEC și AFD sunt două semicercuri de rază 30 m, aflați lungimea pistei.




31). Într-un parc de distracții se află o roată cu 10 cabine. Știind OA = 15 m și AB = OA : 10, să se afle lungimea circumferinței roții și numărul de locuri, dacă în fiecare cabină sunt un număr de locuri egal cu 30% din numărul cabinelor.



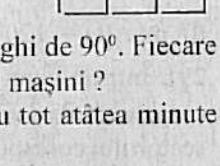

## Testul 1

(5) 2p 1). Fie pătratul ABCD cu AB = 8 cm. Aflați :
a). raza cercului circumscris pătratului;
b). apotema pătratului;
c). aria cercului circumscris pătratului.
(5) 2p 2). Fiind dat un cerc având aria de $36\pi$ cm$^2$, să se afle : a). raza cercului;
b). latura triunghiului echilateral înscris în cerc;
c). latura pătratului înscris în cerc;
d). înălțimea triunghiului echilateral înscris în cerc.
(7) 1p 3). Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral având aria de $9\sqrt{3}$ cm$^2$, este .......
(7) 1p 4). Lungimea cercului circumscris unui hexagon regulat având aria de $96\sqrt{3}$ cm$^2$, este .......
(9) 1p 5). Să se afle aria și apotema hexagonului înscris în cercul în care este înscris și triunghiul echilateral având perimetrul de $12\sqrt{3}$ cm.
(9) 1p 6). Să se afle aria porțiunii cuprinse între latura AB a pătratului ABCD și arcul $\overset{\frown}{AB}$ (din cercul circumscris pătratului) dacă apotema pătratului este 4 cm.
(10) 1p 7). Unui cerc i se circumscrie un pătrat și i se înscrie un triunghi echilateral. Arătați că raportul ariilor pătratului și triunghiului este constant.

## Testul 2

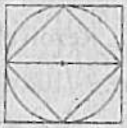
(5) 2p 1). Hexagonul regulat ABCDEF este înscris într-un cerc de rază 12 cm. Să se afle apotema, aria și latura hexagonului.
(5) 2p 2). Un triunghi echilateral este înscris într-un cerc de rază 6 cm. Aflați aria triunghiului.
(7) 1p 3). Cercul circumscris hexagonului regulat de arie $150\sqrt{3}$ cm$^2$ are raza egală cu ....... cm.
(7) 1p 4). Apotema triunghiului echilateral înscris în același cerc în care s-a înscris pătratul având diagonala de $6\sqrt{2}$ cm, este egală cu ....... cm.
(9) 2p 5). Un pătrat ABCD de arie 16 cm$^2$ este înscris într-un cerc. Aflați : a). aria cercului; b). lungimea cercului; c). aria suprafeței din interiorul cercului cuprinsă între latura BC și cerc.
(10) 1p 6). Unui cerc i se înscrie un hexagon regulat și i se circumscrie un triunghi echilateral. Arătați că raportul laturilor hexagonului și triunghiului este constant.

**1).** În figura alăturată, realizată cu ajutorul a 23 de chibrituri, se numără 10 pătrate. Ridicați din configurație numărul minim de chibrituri în așa fel încât să nu mai rămână niciun pătrat. Care este acest număr ?



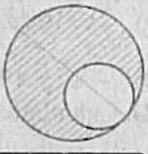
**2).** Două mașini pornesc din același punct în direcții exact opuse. Fiecare mașină parcurge câte 8 km apoi virează la stânga, făcând un unghi de $90^0$. Fiecare mașină mai parcurge apoi câte 6 km. Câți km sunt acum între cele două mașini ?
**3).** Câte minute mai sunt până la ora 11, dacă acum 45 de minute erau tot atâtea minute trecute de ora 9 ?

## *Capitolul XVI*
## Probleme de logică

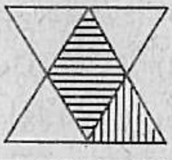


1). Într-un pătrat cu latura de 2 m se înscrie un cerc cu diametrul de 2 m, iar în interiorul cercului este un pătrat cu diagonala de 2 m. Fără să faci calcule, gândește și ordonează crescător : a). mărimea suprafețelor acestora; b). mărimea perimetrelor acestora.

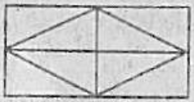
2). Un trapez isoscel are baza mică egală cu înălțimea, și baza mare dublul bazei mici. De câte ori este mai mică suprafața pătratului de latură egală cu baza mică a trapezului, față de suprafața trapezului ?



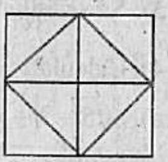
3). Două cercuri tangente interior, ca în figura alăturată, au : cel mare cu raza de 2 m, iar cel mic cu raza de 1 m. Calculați aria suprafeței hașurate.



4). Se dau două triunghiuri echilaterale egale, ca în figura alăturată. a). Care dintre ele are suprafața mai mare ? b). Cât este suprafața rombului hașurat din suprafața unui triunghi mare ? c). Cât este suprafața triunghiului hașurat din suprafața triunghiului mare ? d). Care este raportul dintre perimetrul rombului și perimetrul triunghiului mare ?



5). Dreptunghiul din figură are o latură de 2 ori mai mare decât cealaltă. Unind mijloacele celor patru laturi obținem un romb. a). De câte ori este mai mică suprafața rombului față de a dreptunghiului ? b). Suma lungimilor diagonalelor rombului este mai mare sau mai mică decât suma laturilor dreptunghiului ? c). Care este raportul acestor sume ?

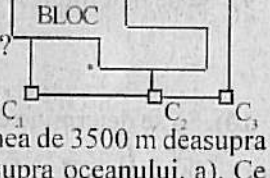


6). Unind mijloacele laturilor pătratului din figură, obținem o nouă figură geometrică. a). Ce figură geometrică este ? b). Care este raportul suprafețelor celor două figuri geometrice ? c). Dar raportul sumei laturilor celor două figuri geometrice ?

7). De ziua ta ai invitat 12 colegi. a). Câte franzele trebuie să cumperi dacă o franzelă o poți tăia în 10 felii, iar un invitat apreciezi că va mânca 2 felii ? b). Câte pizza trebuie comandate dacă o pizza se împarte în 4 porți egale, fiecărui invitat i se servește o porție, dar trebuie să ai cel puțin o porție de rezervă, în cazul în care cineva mai dorește un supliment ? c). Câte kg de mere, banane și pere trebuie să cumperi, știind căfiecare copil consumă maxim 2 mere, 3 banane și o pară ? d). De ce sumă de bani va fi nevoie dacă : o pâine costă 0,8 lei, ingredientele necesare sandwich-iurilor costă 30,55 lei, o pizza costă 18 lei, 1 kg de banane costă 3,59 lei, iar într-un kg intră 6 banane; 1 kg de mere costă 2,5 lei, iar într-un kg intră 5 bucăți; 1 kg de pere costă 6,25 lei, iar într-un kg intră 5 bucăți.

8). O baie cu L = 2,8 m și l = 2 m, va fi acoperită cu gresie de formă pătrată cu l = 3 dm. De jur împrejurul podelei se pune plintă lată de cel puțin 10 cm, ce se lipește pe perete, excepție făcându-se în dreptul ușii, lată de 0,9. a). Câte plăci de gresie sunt necesare pentru confecționarea tuturor plintelor ? b). Câte plăci de gresie se folosesc pentru acoperirea podelei ? c). Cât costă toată gresia dacă se livrează în pachete ce costă 22 lei/pachet și conțin 10 plăci de gresie.

9). În figura alăturată este un bloc și canalizarea lui. a). Care este situată mai sus : intrarea sau ieșirea din cămin ? b). Ordonați adâncimile căminelor c). Comentează intrările în căminul 2.




10). Câte oscilații face pendulul unui ceas într-un minut ? Dar într-o oră ?

11). Doi atleți se deplasează în același timp pe ploaie. Primul fuge cu 10 km/h, celălalt cu 3 km/h. După ce au parcurs 1 km care este mai ud ?

12). În munții Anzi este canionul Colca, străjuit de munți cu altitudinea de 3500 m deasupra nivelului Oceanului Pacific. Fundul canionului este la 350 m deasupra oceanului. a). Ce adâncime are canionul ? b). În ce zonă climatică se găsesc canioanele ?

## *Capitolul XVII*
## Recapitulare finală

**1).** Rezolvați în R ecuațiile :

a). $2\sqrt{108}+x=\sqrt{12}$ b). $\sqrt{200}-x=\sqrt{162}$

c). $2\left(x+\sqrt{32}\right)=x+5\sqrt{98}$ d). $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2x\sqrt{3}+x\sqrt{2}+7$

e). $2\sqrt{3}\left(x\sqrt{3}+1\right)=5x+\sqrt{12}$ f). $\sqrt{18}-\sqrt{8}\left(x\sqrt{2}-2\right)=\sqrt{128}-3x$

g). $2\left(x+2\sqrt{6}\right)=3\sqrt{2}\left(x\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

**2).** Calculați :

a). $3\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{32}-\sqrt{18}\right)+6\sqrt{10}=$ b). $3\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{12}+3\sqrt{18}\right)-5\sqrt{3}\left(4\sqrt{2}+4\sqrt{75}\right)=$

c). $\left(5\sqrt{2}+1\right)\left(3\sqrt{8}-2\right)=$ d). $3\sqrt{3}\cdot\left(5\sqrt{6}+4\sqrt{12}\right)-2\sqrt{8}\left(3\sqrt{2}+5\right)$

e). $\left(\sqrt{72}+\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}-\left(0,75+0,5^2\right)^2=$ f). $\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{30}-4\sqrt{24}\right)+\left(8\sqrt{45}-6\sqrt{150}\right):\sqrt{3}=$

g). $\left(\sqrt{5}-\sqrt{125}\right):\sqrt{5^{-1}}=$ h). $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{12}\right):\sqrt{3}^{-1}+\sqrt{8}=$

**3).** Să se calculeze : $\left(\dfrac{5}{\sqrt{7}}-\dfrac{2}{\sqrt{63}}-\sqrt{28}^{-1}\right)\cdot\dfrac{\left(-\sqrt{3}^4\right)^2+\sqrt{9}}{23}=$

**4).** Calculați :

a). $\left|\sqrt{5}-2\right|+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}=$ b). $\left|2\sqrt{3}-7\right|-\left|3\sqrt{3}-5\right|=$

c). $\sqrt{\left(3\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{95+30\sqrt{10}}=$ d). $\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}=$

e). $\sqrt{\left(4\sqrt{2}-6\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=$

**5).** Aflați cifrele x, y, z nenule și diferite două câte două astfel încât $\sqrt{x,(y)+x,(z)}\in N$.

(etapa locală Prahova 1985)

**6).** Fie numărul $a=\sqrt{0,00...0x(y)+0,00...0y(z)+0,00...0z(x)}$ unde x, y, z sunt cifre nenule distincte iar numărul cifrelor după fiecare virgulă este 1991. Aflați a dacă $a\in Q$.

(etapa locală Prahova 1991)

**7).** Fie $a<0$. Calculați valoarea expresiei : $E(x)=|a+x|+\sqrt{(a-1)^2}-|-2a|+x$

(etapa sector București 1992)

**8).** Să se determine numerele naturale $\overline{xyz}$ în baza 10, astfel încât să aibă loc relația :
$\sqrt{4-x}+\sqrt{7-y}+\sqrt{12-z}+\sqrt{x+y+z}=9$ (etapa locală Brăila 1996)

**9).** Să se determine $x\in Z$ astfel încât numerele $\dfrac{2x+1}{3x+1}$ și $\dfrac{x-2}{4x+1}$ să fie simultan întregi.

(etapa locală Ialomița 1996)

**10).** Să se determine elementele mulțimii : $A=\left\{\overline{ab}\in N\ \middle|\ \sqrt{\dfrac{\overline{ab}+36}{\overline{ab}-36}}\in N\right\}$

(etapa locală Iași 1996)

**11).** Arătați că numărul $\sqrt{2003^{2004}+2004^{2004}}$ este număr irațional. (etapa locală Olt 1996)

**12).** Fie numerele $a=\sqrt{18}-2\sqrt{2^2-1^2}$ și $b=3\cdot\sqrt{4^{n+1}:2^{2n-1}}+\sqrt{12}$, $n\in N$.

a). calculați ab; b). determinați cea mai mică valoare a lui $p\in N$ pentru care $\left(a+b-\sqrt{50}\right)^p\in N$

(etapa locală Teleorman 1996)

**13).** Efectuați :

a). $4x+(2x+1)(3x+2)=$

b). $5x(x+1)+(x+2)(x-5)=$

c). $7x(2x-3)-(x+1)(x+3)=$

d). $(x+5)(x-6)+(2x-1)(5x-3)=$

e). $(x+1)(x^2+x+1)-3x(x^2+2x+3)=$

f). $7a(a^3b+a^2b^2)-b(a^4-2a^3b)=$

g). $5x-(x+1)(3+4x)=$

h). $x^2+8x-(x+3)(x-2)=$

i). $7x-(x-3)(x-4)=$

j). $(x-2)(x-1)-(x+3)(4-x)=$

k). $(5ax^2-3x)(a+x)-(x-2a)(3x-2a-4ax^2)=$

l). $(2xy)^2-4x(xy^2+x)-(3x)^2=$

**14).** Calculați :

a). $(3-4x)(4x+3)-(1-5x)2=$

b). $\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{y}{3}+2\frac{1}{2}x\right)=$

c). $(0.2x-0.5)\left(\frac{1}{2}+0.2x\right)+[0.(3)x+1]\left(1-\frac{1}{3}x\right)=$

d). $\left(\frac{6}{5}x^2+x\right)\left(1\frac{1}{5}x^2-x\right)-[0.(6)x-1.(3)x^2]\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}x^2\right)=$

e). $\left(x\sqrt{3^{-1}}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\sqrt{2^{-1}}\right)=$

**15).** Rezolvați în R :

a). $3-4(4-5x)=3(5x+1)$

b). $5x-6(x-2)=3$

c). $8x-16=5-7(3x-4)$

d). $4-2x=6x-2(4x-5)$

e). $3x+1=8(x-2)+1$

f). $3(x+6)-3(x+2)=7-4(2x+1)$

g). $(4-5x)^2=(1+5x)(2+5x)+3x+2$

h). $4-(3-2x)^2=(4-2x)(4+2x)$

i). $5-3(x+2)=4-x$

j). $-(x+5):(-2)=9+(1-x)^2-(2-x)^2$

k). $40:(3x-1)=5$

l). $-27:(1-2x)=-9$

**16).** Să se rezolve în N :

a). $4^n\cdot 8\cdot 16^{n+1}=2^{19}$

b). $4^{2n}\cdot 81^n=36^2$

c). $1=4^x\cdot 3^{2x}$

d). $4^n\cdot 8^{n+1}\cdot 32^{-1}=16^{n+1}\cdot 2^{2n-3}\cdot 8^{-2}$

**17).** Să se rezolve în R :

a). $-36:|2x-1|=-6$

b). $3\cdot|x-1|-7=2\cdot|x-1|$

c). $4-5[3x+1-2(4-5x)]+x=2$

d). $\frac{3}{2}|1-4x|=|1-4x|-2$

e). $\frac{2x+1}{3}-\frac{x+1}{2}=x$

f). $\frac{x+\frac{1}{3}}{2}-2(x+1)=x$

**18).** Să se rezolve și să se discute ecuațiile după parametrul m :

a). $mx+x=3m$

b). $4mx=x+4$

c). $3x=mx+4+2m$

d). $7mx=2m+14x-4$

e). $3mx-m+6x=2$

f). $2mx+x=6m^2+3m$

**19).** Să se calculeze :

a). $(4+3x)^2-(1+2x)^2=$

b). $\left(x\sqrt{3}+2\right)^2+\left(2x-5\sqrt{3}\right)^2=$

c). $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}x+\frac{\sqrt{5}}{3}y\right)^2+\left(\sqrt{5}x-3y\right)^2=$

d). $\left(1\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2-(0.25x-2)^2=$

**20).** Descompuneți în factori :

a). $4 - 12x + 9x^2$ b). $9x^2 - 4y^2$ c). $x^2 - (x + 3)^2$

d). $(2x + 1)^2 - (3 - 4x)^2$ e). $(x + y)^2 - (2y - x)^2$ f). $4x^6 - (x^3 + 2)^2$

g). $9x^2(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 1)^2$ h). $25a^2b^2 - 4(3ab - 1)^2$

i). $25x^2 - y^2 - 6y - 9$ j). $10ax + 3by + 6ay + 5bx$

k). $7 + 14a + 3a^2 + 6a^3$ l). $a^2 - 2ab + b^2 - (2a + 3b)^2$

m). $10a^2b + 2a^2 + 20b + 15ab + 3a + 4$ n). $(a^2 + 3ab)^2 - (ab + 4b^2)^2$

o). $4(x + y)^2 - 4(x^2 - y^2) + (x - y)^2 - z^2$ (etapa județeană Brasov 1986)

p). $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ (etapa județeană Dolj 1983)

**21).** Stabiliți dacă $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ și aflați numerele întregi x astfel încât $x^2 < 11 - 6\sqrt{2}$.

(etapa locală Prahova 1984)

**22).** Stabiliți :

$$a = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 2\right)^2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - 3\right)^2} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \ldots + \sqrt{\left(\sqrt{n} - n\right)^2} + \sqrt{n^2 + n + 2n\sqrt{n}}$$

este un număr natural pentru orice $n \in N$. Arătați că dacă a este divizibil cu 3 atunci a se divide cu 9.

**23).** Fie $m = \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}} - \sqrt{8}$. Să se calculeze $m^{1989}$. (etapa locală Prahova 1989)

**24).** Stabiliți dacă $\dfrac{2a - b}{a + 2b}$ este număr rațional în cazul când :

$a = \sqrt{3 - \sqrt{5} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}$ și $b = \sqrt{\sqrt{7} - 1 - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}$. (etapa județeană Prahova 1990)

**25).** Dacă numerele reale x și y satisfac relațiile : $x + y = 6$, $2x \geq 1$, $y \geq 1$ atunci este adevarat că :

$\sqrt{x^2 + (x - 1)^2 + 2x(x - 1)} + \sqrt{y^2 + (y - 2)^2 + 2y(y - 2)} = 9$ ? (etapa județeană Prahova 1984)

**26).** Știind că $x, y \in R$ astfel încât $3 \leq x \leq y\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ și $y = \sqrt{5}\left(1 + \dfrac{x}{5}\right)$, aflați valoarea expresiei

$E = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2} + \sqrt{17 - \sqrt{288}}$. (etapa județeană Prahova 1991)

**27).** Calculați $E = \dfrac{1 + ab}{a + b} - \dfrac{1 - ab}{a - b}$ unde $a = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{5} + 5}$ și

$b^2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{4}} + 5 - 2\sqrt{5}$. (etapa locală Cluj 1996)

**28).** Se dau numerele : $a = \sqrt{5 - \sqrt{3} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$ și $b = -1 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

Să se verifice dacă $\dfrac{a + b}{a - b} - 2\sqrt{6} \in Q$. (etapa locală Dâmbovița 1996)

**29).** Demonstrați că dacă a, b, c, d sunt numere reale strict pozitive și dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ atunci :

a). $\sqrt{abcd} = \dfrac{bc + ad}{2}$; b). $\sqrt{(a + c)(b + d)} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ (etapa locală Dâmbovița 1996)

**30).** Să se reprezinte pe un sistem de axe dreapta soluțiilor :

a). $3x + 2(x - y) + 1 = 0$ b). $2(2y - x) + 3 = -5$ c). $y = 3(x + y) - 2x$

d). $-8 + x = y + 2(x + 1)$ e). $x\sqrt{4} - 2(y + x + 1) = 0$ f). $\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{3}y - 2(x + 1) = 0$

**31).** 3 kg de varză și 4 kg de cartofi costau 7000 lei. Dacă varza se scumpește cu 15% și cartofii cu 5% atunci 2 kg de varză și 5 kg de cartofi vor costa 7550 lei. Cât costă fiecare ?

**32).** Două soluții de concentrații 6% și respectiv 10% se amestecă obținându-se 4 l cu concentrația de 7%, care se amestecă cu altă soluție de concentrație 3% și se obține în final o concentrație de 4%. Ce cantități de soluții au fost folosite pentru amestec și ce cantitate a rezultat?

33). Un biciclist merge jumătate de oră apoi se odihnește 20 de minute după care restul drumului îl parcurge cu o viteză dublă față de cea cu care a pornit. Știind că drumul are 58 km și el l-a parcurs în 3 ore, să se afle vitezele cu care a mers.

34). Să se afle în fiecare caz în parte aria unui trapez dreptunghic ABCD, AB || CD, AD⊥DC dacă AB, CD, BC sunt direct proporționale cu numerele 3, 7, 5 și : a). distanța de la D la latura BC este 42 cm; b). DB = 12 cm.

35). O persoană a depus 200.000 lei la bancă. O parte din bani i-a depus cu 45% dobandă pe an și restul cu 40%dobandă pe an. Dacă după un an are 287.000 lei, aflați ce sumă a depus cu 45% dobandă.

36). Laturile unui triunghi sunt direct proporționale cu 4, 5, 6. Aflați aria lui dacă lungimea celei de-a treia laturi împărțită la lungimea celei de-a doua dă câtul 1 și restul 3.

37). Să se afle unghiurile unui triunghi dacă sunt direct proporționale cu trei numere consecutive și diferența dintre cel mai mare și cel mai mic este $30^0$. Dacă latura cea mai mică este $2\sqrt{3}$ aflați aria triunghiului.

38). Fie triunghiul echilateral ABC cu AB = 6 cm. Se consideră punctele L, T, K astfel încât $A \in (CL)$, $C \in (BT)$, $AB \cap LT = \{K\}$, AL = CT = 6 cm. Să se calculeze AK. (etapa locală Cluj 1995)

39). Fie paralelogramul ABCD și O un punct ce aparține interiorului său. Să se arate că semisuma distanțelor de la O la vârfurile paralelogramului este mai mare decât suma a două laturi consecutive ale acestuia. (etapa locală Cluj 1996)

40). Fie paralelogramul ABCD și M astfel încât MC⊥BC și MA⊥AB. Stabiliți dacă : a). MD⊥AC b). ABCD romb $\Leftrightarrow$ M, D, B coliniare. (etapa locală Prahova 1995)

41). Bisectoarea unghiului B al triunghiului ABC ($m(\sphericalangle A) = 90^0$) intersectează AC în E. Paralela prin E la AB intersectează BC în D și paralela prin E la BC intersectează AB în H. Dacă $DH \cap AC = \{F\}$, arătați că : a). BDEH romb ; b). $m(\sphericalangle FBC) = 90^0$. (etapa locală București 1995)

42). În dreptunghiul ABCD cu O intersecția diagonalelor, bisectoarea unghiului B și diagonala ce pleacă din acest vârf fac între ele un unghi de $15^0$. Bisectoarea întâlnește diagonala AC în P și latura DC în E. Să se arate că $\triangle COE$ și $\triangle POE$ sunt isoscele. (etapa locală Brașov 1995)

43). Pe latura AD a trapezului ABCD (AB || CD) se ia punctul P. Paralela prin A la CP intersectează pe BC în Q. Să se arate că PBQD este trapez. (G. M. 7/1994)

44). Fie trapezul isoscel ABCD (AB || CD) în care MN este linie mijlocie. a). Dacă MN intersectează diagonalele trapezului în punctele E și F, demonstrați că punctele E, F, A și Q unde DQ⊥AB, $Q \in AB$ sunt vârfurile unui paralelogram. b). Dacă MN = 11 cm, $P_{ABCD} = 34$ cm și 7DC = 4 AB, calculați lungimile laturilor trapezului. (etapa locală Botoșani 1996)

45). În triunghiul ABC se prelungesc medianele BM și CN cu segmentele $[BM] \equiv [MQ]$ și $[CN] \equiv [NP]$. Ce este BPQC ? Ce fel de triunghi trebuie să fie $\triangle ABC$ pentru că BPQC să fie trapez isoscel ?

46). În trapezul ABCD se duce MN || AB || CD prin punctul O ( $\{O\} = AC \cap BD$). Arătați că $\frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = 2$.

47). Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $D \in (BC)$. Paralela prin C la AD întâlnește pe AB în F. Arătați că $\sphericalangle ACF \equiv \sphericalangle BAD \Leftrightarrow$ AD este bisectoarea unghiului BAC. (etapa județeană Ialomița 1996)

48). Fie ABCD un paralelogram și punctele M, $N \in (AD)$, $M \in (AN)$. Dacă $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle DCN$, arătați că : a). bisectoarea unghiului format de BM și CN este paralela cu AB; b). $\frac{AM}{ND} = \frac{BM}{NC}$.
(etapa județeană Iași 1996)

49). În paralelogramul ABCD se notează cu M și N mijloacele laturilor AB respectiv BC. Să se arate că dreptele DM și DN împart diagonala AC în trei segmente congruente.
(etapa județeană Mureș 1996)

50). Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are 15 cm. Să se afle aria triunghiului dacă cel mai mare divizor comun al lungimilor catetelor este 3.

51). Să se calculeze lungimea bisectoarei unghiului de $90^0$ într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de $30^0$ și ipotenuza de 8 cm.

52). Fie triunghiul ABC în care m(∢A) = 36° și bisectoarea unghiului C, mediatoarea laturii AC și latura AB sunt concurente. Să se arate că : a). [AD] ≡ [BC]; b). BC este medie proporțională între AB și BD, D fiind piciorul bisectoarei unghiului C.
53). Să se afle natura triunghiului ABC în care mediatoarea laturii AC, mediana corespunzătoare laturii BC și latura BC sunt concurente. Dacă lungimea medianei este 8 cm și $\sin∢(BAM) = \frac{3}{4}$, să se afle aria ΔABC (M este piciorul medianei).
54). Fie trapezul ABCD și $\{O\} = AC \cap BD$, AB || CD și $\{M\} = AD \cap BC$. Să se arate că O, M și mijloacele bazelor sunt puncte coliniare.
55). În triunghiul ABC cu m(∢A) = 90°, m(∢C) = 30° se duc AE ⊥ BC, E ∈ (BC), bisectoarea BD a unghiului ∢ABC, D ∈ (AC), $AE \cap BD = \{G\}$ și DF || AE, F ∈ (BC). Să se arate că : a). EG = DF/2; b). EG = AG/2; c). GF || AC; d). BD ⊥ AF.
56). În triunghiul ΔABC se duce mediana AD, D ∈ (BC), DE || AB, E ∈ (AC), EG || AD, G∈(BC), DF || AC, F∈AB) și HF || AD, H∈(BC). Să se arate că : a). EF || BC; b). [CG] ≡ [BH]; c). HD = EF/2.
57). Să se afle aria triunghiului dreptunghic ABC, m(∢A) = 90°, dacă raportul catetelor este 5/12 și ipotenuza este cu 3 cm mai mare decât cateta cea mai lungă.
58). În trapezul dreptunghic ABCD, AB || CD, m(∢A) = 90° se știe că aria este de $48\sqrt{3}$ cm², AD = $4\sqrt{3}$ cm, m(∢C) = 60°. Să se afle bazele trapezului.
59). În ΔABC cu AC = 15 cm se știe că sin(∢C) = 4/5 și tg(∢B) = 3/4. Aflați aria și perimetrul triunghiului.
60). Să se afle lungimile laturilor unui dreptunghi cu aria de 192 cm², știind că dacă mărim lățimea cu 33,(3)% și micșorăm lungimea cu 25%, perimetrul rămâne neschimbat.
61). Să se afle aria unui triunghi dreptunghic care are laturile numere pare consecutive.
62). Se știe că în triunghiul ABC mediatoarea laturii BC, înălțimea din B și latura AC sunt concurente. Dacă m(∢A) = 30° și aria triunghiului este $6(\sqrt{3}+1)$cm², aflați perimetrul triunghiului.
63). În ΔABC se cunosc AB = 17 cm, AC = 10 cm, BC = 21 cm. Aflați aria triunghiului, sin(∢C) și înălțimea AE.
64). În trapezul isoscel ABCD se știe AB || CD, AD = 25 cm, AC = 26 cm, DC = 17 cm. Să se afle lungimea liniei mijlocii și aria trapezului.
65). Fie trapezul dreptunghic ABCD, AB || DC, m(∢A) = 90° în care DB = 15 cm, BC = 8 cm, DC = 17 cm. Aflați aria trapezului.
66). Să se afle raza cercului circumscris unui trapez ABCD dacă se știe că AB || CD, AB = 10 cm, DC = 16 cm și AD = 5 cm.
67). Triunghiul isoscel ABC cu [AB] ≡ [AC], AB = 17 cm, BC = 16 cm are aria egală cu a unui trapez înscriptibil cu înălțimea de 3 cm și lungimea laturii neparalele de 5 cm. Să se afle bazele.
68). În patrulaterul inscriptibil ABCD se știe că diagonala AC este diametrul cercului circumscris și m(∢CAB) = 45°, m(∢DBA) = 30°. Aflați aria acestui patrulater dacă raza cercului este 8 cm.
69). În patrulaterul inscriptibil ABCD, BD este bisectoarea unghiului B și (AB) este diametrul cercului circumscris. Dacă m(∢CAB) = 30° și raza cercului este 6 cm, aflați : a). aria patrulaterului ABCD; b). aria triunghiului echilateral înscris în cercul circumscris patrulaterului.
70). Un romb ABCD are aria egală cu 216 cm², diagonala AC = 18 cm. Aflați : a). BD și AB; b). raza cercului înscris în romb; c). aria pătratului înscris în cercul de la punctul b).
71). ABCD este un dreptunghi cu AB = 12 cm, BC = 16 cm. Aflați : a). aria dreptunghiului; b). aria cercului circumscris dreptunghiului; c). dacă E aparține cercului astfel încât [DE] ≡ [AD], ce este patrulaterul ECDB ?
72). Aflați perimetrul ΔABC dacă se știe că laturile sunt direct proporționale cu 5; 5; 6 și are aria de 96 cm².
73). Aflați perimetrul ΔABC dacă se știe că laturile sunt direct proporționale cu 7; 24; 25 și aria de 756 cm².
74). Aflați perimetrul trapezului isoscel ABCD, AB || CD, dacă se cunosc BC = $4\sqrt{3}$ cm, m(∢A) = 150°, CD = 5 · AB.
75). Fie cercul de centru O și rază 4 cm și punctul A aflat la distanța AO = 8 cm. Aflați : a). lungimea tangentelor AB și AC duse din A la cerc, B și C aparținând cercului; b). aria ΔABC.

## *Capitolul XVIII*

# PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ŞCOLARE

1). Fie $a = \sqrt{7-5\sqrt{3}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}}$ şi $b = \sqrt{5-5\sqrt{3}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$. Stabiliţi dacă $a-b$ este număr raţional.

2). În $\triangle ABC$, fie AE şi AF perpendiculare pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor B, respectiv C. Ştiind că EF = 20 cm, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

*prof. Matrosenco Elena*

3). Ştiind că a, b, c sunt cifre consecutive ( în această ordine) şi că $\frac{\overline{a,(b)}}{51} = \frac{\overline{b,(c)}}{61}$. Să se calculeze suma $S = \overline{a,(b)} + \overline{b,(c)} + \overline{c,(a)}$.

4). În $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$ şi $|AB| \equiv |AC|$ se ştie că $A_{\triangle ABC} = 72\ cm^2$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

*prof. Udrea Tatiana*

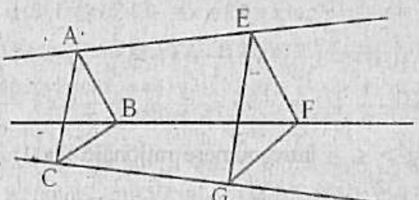
5). Calculează a). $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1$; b). $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$; c). dacă $p = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$, demonstrează că p este pătrat perfect pentru orice $n \in N^*$, $n > 1$.

6). Într-un romb cu aria de 540 $m^2$ raportul diagonalelor este egal cu 8/15. Calculează perimetrul rombului.

*prof. Modoiu Cristina*

7). Într-un cerc de centru O se desenează diametrele perpendiculare AB şi CD. Dacă $G \in OD$, $(OG) \equiv (GD)$, $EF \| AB$, $G \in (EF)$ iar E şi F pe cerc, arată că : a). $OF \perp EC$; b). OEDF este romb şi calculează : a). $m\sphericalangle BCE$; b). $\cos\sphericalangle CBE$.

8). Se consideră $\triangle ABC$ şi $\triangle EFG$ ca în figura alăturată, astfel încât $EF \| AB$, $FG \| BC$ şi $EG \| AC$. Demonstrează : a). $\triangle ABC \approx \triangle EFG$, b). AE, BF şi CG sunt concurente.




*prof. Modoiu Marius*

9). Calculaţi : $(-1)^1 + (-1)^{1-2} + (-1)^{1-2+3} + (-1)^{1-2+3-4} + (-1)^{1-2+3-4+5} + \ldots + (-1)^{1-2+3-4+5-\ldots-100}$

10). Demonstraţi că cele trei mediane ale unui triunghi oarecare sunt concurente.

*prof. Manea Ioana*

11). Găsiţi cifrele x astfel încât $\frac{1}{0,(x)} + \frac{1}{0,0(0x)}$ să fie natural.

12). Se dă pătratul ABCD de latură a. Pe laturile pătratului se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale : $\triangle ABE$, $\triangle BCF$; $\triangle DCG$; $\triangle DAH$. a). Arătaţi că EFGH este pătrat; b). Dovediţi că $\triangle BEH \equiv \triangle DGF$; c). Arătaţi că $HB \| DF$.

*prof. Scarlat Carmen*

13). Se dau numerele $a = \sqrt{75} + \sqrt{605}$ şi $b = \sqrt{300} + \sqrt{245}$. Calculaţi $n = \sqrt{\left(-4\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{(b-a)^2}$.

14). Se consideră trapezul ABCD, $AB \| CD$, AB = 25 cm, CD = 15 cm, AC = 20 cm, BD = 24 cm. Ştiind că [EF] este segmentul format de diagonale cu linia mijlocie şi că diagonalele se intersectează în punctul P, aflaţi a). perimetrul $\triangle PAB$; b). perimetrul $\triangle PEF$; c). dacă $AC \perp BC$, calculaţi aria trapezului.

*prof. Dincă Georgeta*

# SOLUŢII

## ALGEBRA

*Capitolul I* : Teste de evaluare iniţială

**Testul 1 :** **I.§1).** 30. **§2).** d. **§3).** 5,6 cm. **§4).** 11,5. **§5).** 9 km. **§6).** 138. **§7).** $15^0$. **§8).** congruente. **§9).** 168. **II.§10).** 20 şi 28. **§11).** $54^0$. **§12).** a). da; b). 23. **§13).** $2^{n-1}\cdot 5^n + 1 = 2000...01 \vdots 3$. **Testul 2 :** **I.§1).** 72. **§2).** 9 divizori. **§3).** $162^0 45' 57''$. **§4).** $10^0$. **§5).** 4. **§6).** echilateral. **§7).** 48 **§8).** 2,8 litri. **§9).** suplementare. **II.§10).** 400. **§11).** 3. **§12).** a). −13; b). 5,5. **§13).** Se aplică teorema unghiului de $30^0$ în $\triangle ADB$ şi $\triangle ABC$. **§14).** Se află toate mărimile unghiurilor. **Testul 3 :** **I.§1).** b. **§2).** d. **§3).** c. **§4).** b. **§5).** c. **§6).** a. **§7).** c. **§8).** b. **§9).** b. **II.§10).** x = − 1/3. **§11).** {−4; −1}. **§12).** a = 4 şi b = 2. **§13).** $3(3+\sqrt{3})$ cm. **Testul 4 :** **I.§1).** c. **§2).** b. **§3).** a. **§4).** c. **§5).** d. **§6).** c. **§7).** d. **§8).** b. **§9).** a. **II.§10).** x = − 5/9. **§11).** x ∈ {1; 2; 10}. **§12).** 16 apartamente. **§13).** 36 cm. **§14).** AP = 5 cm.

*Capitolul III* : Mulţimea numerelor întregi

**Mulţimi :** **§5) A = { − 3, − 2, − 1,0,1};B = {1,2,3}; a) F, b) A; c) F; d) A. **§7)** (A∪B) − C = {−6; −5; −2; −1; 1; 2; 3; 4; 6; 7}; (D ∩ B) ∪ (D ∩ A) = {0; 1; 2; 3; 4}; (A ∩ N) ∩ D = {1; 2; 3}; (A−N) ∩ C = {−3}. **§8)** A ∪ B = A; A ∩ B = B; A − B = {−2; −1; 0; 2; 3} ; B − A = ∅; A ∩ $D_6$ = {−3; −2; −1; 1; 2; 3}; $D_2$ − A = ∅; (A − N) ∪ B = {−3; −2; −1; 1}; (A − N) ∪ (A ∩ N) = {0; 1; 2; 3}. **§9)** A = {−2; 1; −3; −1}; B = {−2; 1; 2; 0}. ***§10) A = {1; 2; 3}; B = {1; 3}. **§11)** a) x = 2; b) x = 1; c) x = −12. **§12)** A ∪ B are 6 elemente şi A ∩ B are 2 elemente. **§13)** A = {2; 3; 7; 6; 8}; B = {2; 3; 7; 1; 4; 5};

**Numere întregi :** *§1) a) −7; −6; −4; 0; 1; 2; 5; b). −4; −3; 0; 2; 5. **§2)** a) −1; b) 1; c) 0; d) −8; e) −4; f) 2; g) −3; h) 4; i) 0. **§5) a) −2; b) −4; c) 8; d) −4; e) −6; f) −4; g) 2; h) 4; i) 2; j) 8. **§6).** a) −3 > − 5; b) 2 > − 8; c) 9 > − 4; d) − 32 > − 243; e) $3^{21} > 2^{28}$; f) $3^{15} > -3^{15}$. **§7)** a) $2^3$; b) $(-2)^4$; c) $(-3)^4$; d) $100^2$; e) $(-5)^3$. **§8)** a) 1; b) −6 pentru n par şi 6 pentru n impar; c) 0 pentru n par şi − 10 pentru n impar. **§12)** a) −18; b) 2; c) 3; d) −18; e) −2; f) −1; g) 0. **§13)** a) 7; −33; b) ∅; c) −3; 3; d) ∅ e) ∅; f) 2; −3; g) 1; −1; h) 1; i) −13; 13; j) −3; 3; 17; −17. **§14)** a) x = −1; b) y = 2; c) x = 2; ; d) y = 3. **§19)** a) 1; 3; b) −3; −1; 0; 2; c) −1; −3; d) 0; 3; e) −1; 1; f) −3; −1; 0; 1; 3; g) 0; 1; 3.

*Capitolul IV* : Mulţimea numerelor raţionale

*§3) a) 2 ∈ N şi 2 ∈ Z şi 2 ∈ Q; b) $-\frac{4}{2} \in Z$ şi $-\frac{4}{2} \notin N$ şi $-\frac{4}{2} \in Q$ ; c) 0,1 ∉ N şi 0,1 ∉ Z şi 0,1 ∈ Q; **§8) a) $x = \frac{2}{3}$ şi $x = -\frac{2}{3}$; b) $x = 1\frac{1}{3}$ şi $x = -1\frac{1}{3}$; c) x = 0,3 şi x = −0,3; d) x = 1,(2) şi x = −1,(2); e) x = 4,5 şi x = −4,5; f) x ∈ ∅; g) $x = 2\frac{1}{2}$ şi $x = -2\frac{1}{2}$; h) x = 3 şi x = −3; i) $x = 1\frac{3}{4}$ şi $x = -1\frac{3}{4}$ ; j) $x = 2\frac{5}{6}$ şi $x = -2\frac{5}{6}$ ; k) $x = \frac{9}{2}$ şi $x = -\frac{9}{2}$ ; l) $x = \frac{5}{6}$ şi $x = -\frac{5}{6}$; m) $x = \frac{1}{2}$ şi $x = -\frac{1}{2}$ ; n) $x = \frac{1}{3}$ şi $x = -\frac{1}{3}$ ; o) $x = \frac{1}{2}$ şi $x = -\frac{1}{2}$ ; p) x = 4 şi x = −4; r) $x = \frac{8}{3}$ şi $x = -\frac{8}{3}$ ; s) $x = \frac{14}{4}$ şi $x = -\frac{14}{4}$.

**Relaţii <, > ≤, ≥ între numere raţionale :** *§1) a) $\frac{1}{2} > 0$ ; b) $-1\frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ ; c) $-\frac{2}{5} = -\frac{4}{10} < \frac{3}{10}$ ; d) $-\frac{1}{6} > -\frac{5}{12}$ ; e) $1 > \frac{4}{5}$ ; f) $-1\frac{2}{3} > -1,7$ ; g) −1,5 < 1,5; h) $-\frac{2}{3} = -0,(6)$ ; i) $-\frac{4}{8} = -\frac{3}{6}$ ; j) $\left|-\frac{3}{5}\right| = 0,6$ . **§3) a) $\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{3} > -\frac{1}{3} = -0,(3)$ ; b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ; c) $-\frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$ ; d) $-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ ; e) $\frac{1}{2} > -\frac{11}{6}$ ; f) $\frac{11}{4} > -\frac{13}{12}$ ; g) $-\frac{75}{200} < -\frac{58}{200}$ . **§4)** a) −1; −1/2; −1/3; 0,(4); 8/8; 2,5; 8/3; b) −2; $-1\frac{4}{10}$ ; −0,8; −3/10; 0; 4/5; 1,5; c) −3,5; −0,5; −3/8; 1/4; 9/8; 1,25; 7/2. ***§6) a) −11/15; b) −90/13; c) −20/3.

**Adunarea şi scăderea :** **§4) a) −7/5; b) 3/4; c) 7/3; d) −3/8; e) 14/9; f) 11/10; g) 17/4; h) −1/3.

**Înmulţirea numerelor raţionale :** *§1) a) 2/15; b) −4/5; c) 32/5; d) 17/3; e) 1/2; f) 1; g) 1/2; h) 12; i) 14. **§2) a) 1/5; b) −1/3; c) −4; d) −4; e) −8; f) −4; g) −1/15; h) −1/5. **§3)** a) 2; b) 13; c) 56/225; d) 1; e) −39/56; f) 21/20; g) −41/24; h) −6/4. **§5).** a). $\frac{1}{10}$ ; b). $\frac{3}{10}$ ; c). $\frac{-17}{5}$ ; d). $\frac{8}{15}$ ; e). $-\frac{29}{2}$ ; f). $-\frac{29}{8}$ ; g). $\frac{63}{4}$ ; h). $-\frac{421}{105}$ ; i). $\frac{5}{6}$ .

**Împărţirea numerelor raţionale :** *1) a) 5/9; b) −2; c) −3/2; d) 4; e) −2/9; f) 5/6. **§4) a) −6; b) −1/12; c) −2; d) 1/3; e) −5/11; f) −4; g) −1/4; h) 6; i) −3/2; j) −9/4; k) −2/3; l) 1/3.

**Exerciţii cu cele patru operaţii :** **1). a). $\frac{59}{20}$ ; b). $\frac{1}{4}$ ; c). $-\frac{15}{4}$ ; d). −12; e). $\frac{13}{12}$ ; f). $\frac{-5}{8}$ ; g). $8\frac{2}{3}$ ; h). $-\frac{7}{5}$ ; i). $\frac{5}{6}$ ; j). $-\frac{28}{3}$ ; k). −8; l). $\frac{21}{73}$ ; m). $\frac{1}{2}$ ; n). 4. 2). i). $-\frac{19}{15}$ ; j). $\frac{5}{12}$ ; k). 6,5; l). $-\frac{7}{3}$ ; m). $\frac{25}{6}$ .

**Puterea cu exponent număr întreg a unui număr raţional :** *§1) a) 1/8; b) 1/16; c) 1/9; d) 16; e) 32; f) 16/81; g) 16; **§2) a) $(-5)^2$; $(-5)^{-3}$; $(-5)^1$; b) $2^5$; $2^{-4}$; $2^{-6}$; $2^1$; $2^{-2}$; **§4)** a) 3/8; b) 2/9; c) 4; d) 5; e) 1/16; f) 0; **§5)** a) −5/16; b) −99/25; c) 1/64; d) −79/81; e) 179/49; f) 1264; g) 1/24; h) 7/32; **§6)** a) $2^{-3}$; b) $6^1$; c) $3^{-2}$; d) $5^{-10}$; e) $3^{-10}$; f) $10^{-1}$ ; g) $4^{-6}$; h) $3^{-9}$; i) −1; j) $(-2)^7$; k) 1; l) $(3/2)^n$; m) 1; n) $5^n$; **§7)** a) −4/3; b) 3/2; c) −2; d) −1; e) −23/27; f) 28; g) 2; h) −1/6.

**Ordinea efectuării operaţiilor :** **§1) a) −7/4; b) 4/3; c) −5/24; d) −65/48; e) −11/24; f) −1/12; g) −3/2; h) 1/2; i) 7/4. **§3)** a) 19/42; b) 0; c) 4; d) −0,9; e) −1/100; f) 0; g) 1. **§7)** a) $(1/3)^{13} > (1/3)^{25}$; b) $(7/2)^3 < (7/2)^{10}$; c) $(-2/3)^4 > (-2/3)^{11}$; d) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{13} > \left(-\frac{5}{3}\right)^{15}$ ;

e) $(1,5)^6 < (1/2)^6$; f) $(-2/5)^7 < (-2/7)^7$; g) $(14/5)^{12} > (11/5)^{12}$; h) $(-5/3)^9 > (-7/3)^9$; i) $(2/3)^3 = 8/27 = 24/81 < 25/81 = (5/9)^2$; j) $(-2/3)^3 < (-5/9)^2$; k) $(-2/3)^6 < (-5/9)^4$; l) $(-2/3)^{45} < (-5/9)^{30}$; m) $1,2^2 = 1,44 > 1,331 = 1,1^3$; n) $(-1,2)^2 > (-1,1)^3$; o) $(-1/2)^9 > (-1,1)^7$; p) $(-1,2)^{20} > (-1,1)^{30}$. **§8)** a) $2/3 = (-10)/(-15)$; b) $4/(-5) = 12/(-15)$; c) $-10/25 = 2/(-5)$. **§9)** a) $x = -3 \cdot 12 : 18 = -2$; b) $y = 4,5 \cdot 4 : (-5) = -3,6$. *****§11)** a) $(3^{100} + 3^{102} - 4 \cdot 3^{101}) : (-4) = 3^{100} \cdot (1 + 3^2 - 4 \cdot 3^1) : (-4) = 3^{100} \cdot (-2) : (-4) = 3^{100}/2$; c) $[4 \cdot (-5)^{2n} + (-5)^{2n+1} - (-5)^{2n+2}]/39 = [(-5)^{2n} \cdot (4 - 5 - 25)]/39 = [(-5)^{2n}(-26)]/39 = [(-2)(-5)^{2n}]/3$; d) $(5^{n+2} - 5^{n+1} + 4 \cdot 5^n)/(6 \cdot 3^n + 3^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+2}) = [5^n \cdot (25 - 5 + 4)]/[3^n \cdot (6 + 3 - 18)] = (5^n \cdot 24)/[3^n \cdot (-9)] = (8 \cdot 5^n)/(-3^{n+1})$; e) $[2^n \cdot (-3)^{2n+1} + 2^{n+2} \cdot 9^{n+1}]/[(-2)^{2n} \cdot 5^n + (-2)^{2n+1} \cdot 5^n] = (-2^n \cdot 3^{2n+1} + 2^n \cdot 2^2 \cdot 3^{2n} \cdot 9^1)/(-2)^{2n} \cdot 5^n \cdot [5 + (-2)] = 2^n \cdot 3^{2n} \cdot (-3 + 2^2 \cdot 9)/2^{2n} \cdot 5^n \cdot (5 - 2) = 2^n \cdot 3^{2n} \cdot 33/2^{2n} \cdot 5^n \cdot 3 = 3^{2n} \cdot 11/2^n \cdot 5^n$. **§14)** a) $[(-2)^{2n} + 5 \cdot 4^{n-1}]/7 = (2^{2n} + 5 \cdot 2^{2n} : 4)/7 = 2^{2n}(1+5 : 4)/7 = 2^{2n} \cdot 21/7 = 2^{2n} \cdot 3$; b) $[(-3)^{2n+3} + 2 \cdot (-3)^{2n+1} - (-3)^{2n}]/17 = (-3)^{2n} \cdot [(-3)^3 + 2 \cdot (-3) - 1]/17 = 3^{2n} \cdot (-34)/17 = -2 \cdot 3^{2n}$; c) $[3 \cdot (-7)^{2n} + (-7)^{2n+1} + 49^{n+1}]/15 = 7^{2n} \cdot [3 + (-7) + 49]/15 = 7^{2n} \cdot 45/15 = 3 \cdot 7^{2n}$.

**Ecuaţii în Q :** ***§1)** a) x = –86; b) x = 120; c) x = –16; d) x = 18; e) x = 22; f) x = –16; g) x = 14; h) x = –20; i) x = –33/8; j) x = –13; k) x = 31/10; l) x = 3,5; m) x = 4,2; n) x = –5//8. **§2)** a) x = –14; b) x = 16; c) x = –20; d) x = –4; e) x = –2; f) x = –18; g) x = –80; h) x = –5; i) x = –2; j) x = –19; k) x = –7; l) x = 0. ****§4)** a) –53/3; b) –14; c) 7/45; d) 13; e) –43/2; f) –5/16; g) –11/9; h) –9; i) –1,6; j) 2,5; k) –42/10; l) –6; m) 15/7. **§5)** a) 4; b) 2; c) 4; d) 4; e) –59/9; f) –28/3; g) 3/2; h) –13. **§7)** a) –13; b) –8; c) –4; d) 68/30; e) –0,42; f) 3; g) 10; h) –1/3; i) –9; j) –2; k) –13; l) –11/2; m) –8. **§9)** a) 8/21; b) 10 şi –14; c) –35/6. **§10)** a) 10; b) 9/2; c) ø; c) x = 0; d) x ∈ ø; e) x ∈ Q; f) x ∈ ø. **§11)** a) x = 4 şi x = –4; b) x = 8/3 şi x = –10/3; c) x = –4 şi x = 5; d) x = 4 şi x = –6; e) x = 1 şi x = –5; f) x = 10 şi x = –14; g) x = 9 şi x = –11; h) x = 0 şi x = –4; i) x = 7 şi x = –12; j) x = 1/9 şi x = 5/9; k) x = 18/7 şi x = –32/7; l) x = 11 şi x = –9. **§12)** a) x ∈ {–20/3}; b) x ∈ {0, 1}; c) x ∈ {0}; d) x ∈ {0, 1}; e) x ∈ {8}; f) x = 1 şi y = 6 sau x = 2 şi y = 3 sau x = 6 şi y = 1 sau x = 3 şi y = 2; g) x = –1 şi y = –7 sau x = 1 şi y = 7 sau x = 7 şi y = 1 sau x = –7 şi y = –1; h) x = 10 şi y = 1 sau x = 3 şi y = 2; g) x = –1 şi y = –7 sau x = 1 şi y = 7 sau x = 7 şi y = 1 sau x = –7 şi y = –1; h) x = 10 şi y = 1 sau x = 0 şi y = 11 sau x = –12 şi y = –1 sau x = –2 şi y = –11. *****§15)** a) 10; b) 0; c) 80/53; d) 5; e) –1. **§17)** A = {0, 1}; B = {–2, –1, 0, 1, 2}; C = {0, 1, 2}; D = {–8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2}; E = {–2, –1}; F = ø.

**Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor :** ****§1)** –14/3 şi –14. **§2)** 3/4 şi 1/2. **§3)** –9/7 şi –45/7. **§4)** –4/3 şi –13/15. **§5)** –4/5 şi –24/25. **§6)** –5/4. **§7)** –203/87. **§8)** –5/8. **§9)** 3/4. **§10)** –1/10 şi –1/2. **§11)** 12/35, 6/7 şi 9/10. **§12)** –6, –18/5 şi –9. **§13)** 23/6, 5/3, 1, $2\frac{1}{2}$. **§14)** 6. **§15)** –2, –1, 0, 1. **§16)** –5, –4, –3, –2, –1. **§17)** –10, –9, –8, –7. **§18)** –5, –4, –3. **§19)** –9, –8, –7, –6, –5. **§20)** –4, –3, –2, –1. **§21)** 10, 20, 25. **§22)** 4, 16/3, 8. **§23)** 30, 75, 90. **§24)** 8, 9, 10. *****§25)** –9/2, 61/10 şi 4/5. **§26)** 102,40 lei. **§27)** 450.

## *Capitolul V* ; Numere reale

**Rădăcina pătrată a unui număr natural :** ***§2).** a) 19; b) 23; c) 27; d) 14; e) 25; f) 22; g) 29; h) 28; i) 18; j) 13; k) 31; l) 33; m) 37; n) 48; o) 41; p) 107; r) 63; s) 144; t) 288; u) 432; v) 1008. ****§3).** a) –2; b) $\frac{23}{4}$; c) –7; d) 26; e) –12; f) 13; g) 10. **§7).** a) –6; b) 33; c) –9; d) 20; e) 1. **§8).** a) –4; b) $\frac{1}{4}$; c) $-\frac{6}{5}$; d) $\frac{25}{9}$; e) $-\frac{1}{3}$.

**Rădăcina pătrată din număr raţional :** ***§1)** a) 1,7; b) 4,9; c) 1,18; d) 4,4; e) 4,1; f) 0,34; g) 1,12; h) 0,216; i) 0,96; j) 7,5; k) 1,25; l) 0,196; m) 4,3; n) 0,21; o) 0,576. **§2)** a) 9/5; b) 3/2; c) 15/7; d) 5/3; e) 2/3; f) 8/5; g) 13/6; h) 4/3; i) 1; j) 1/3. ****§3)** a) –19/3; b) –8/5; c) 5/2. **§4)** a) 20; b) –8/3; c) 2; d) ø. **§6)** a) 0,3; b) 0,2; c) 3/5; d) 0,6; e) 12; f) 1/2; g) 1/6; h) 3; i) 9/5; j) 61/30; k) 9/2; l) –1. **§7)** a) 36; b) 77; c) 36; d) 6; e) 221; f) 0,84; g) 15; h) 10; i) 30; j) 12; k) –5; l) 3; m) 2; n) –1; o) 1/3; p) –2; r) –30; s) 6. **§8)** a) 18; b) 39/20; c) 0,72; d) 44/21; e) 9/20; f) –1; g) –10/9; h) –769/500. **§9)** a) –9/2; b) 1/45; c) 1/18; d) 1; e) 3/8. **§10)** a) 72; b) 9,2; c) 6,03; d) 9. *****§11)** a) a şi 9; b) –12 şi –3; c) 72,2, 8 şi 18; d) –96, –6, –24; e) 5; –5; 45; –45; f) 49, –51, 1, –3; g) –37, –2, –5, –10; h) 11. **§12)** a) 4x + 1; b) 1; c) 1. **§13)** a) 0; b) –4x + 4; c) x + 4. **§14)** A = {0; 1; 2; 3; 4}; B = {0; 1; 2; 3; 4; 5}; C = {–2; –1; 0; 1; 2}; D = {–2; –1}; E = {–4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3}. **§15)** a) 35; b) –4; c) –1/96; d) 1/2; e) –1/3; f) 3/8; g) –5; h) 5/4; i) 1; j) 1/3. **§16)** a) 1/2; b) 9; c) 0,9; d) 1/5; e) 1/20; f) 3.

**Adunarea şi scăderea numerelor reale :** ***§1)** i) 5/4; – 5/4; 9/4; 1/4; ii) $6\sqrt{2}$; 0; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **§2)** a) $3\sqrt{6}$; b) $-3\sqrt{8} - 4\sqrt{3}$; c) $-\sqrt{3}$; d) $4\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{2} - 1$ f) 13. ** **§4)** a) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$; b) $12\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$; c) $-\sqrt{2} - 6$; d) $11 - 14\sqrt{3}$; e) $2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; f) $13\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$; g) $29\sqrt{2}/14$; h) $51\sqrt{8}/10$; i) $11\sqrt{3}/6$; j) $1,5\sqrt{3} - 4,7$; k) $4,4\sqrt{2} - 4,4\sqrt{3}$. **§5)** a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{6} + \sqrt{5}$; c) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{3}$; e) $3 + \sqrt{2}$; f) $5\sqrt{3}/2$; g) $\sqrt{3}/2 - 3\sqrt{2}/2$; h) $5\sqrt{13}/2$; **§6)** a) $6\sqrt{6}$; b) $-5\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{3}$; d) $2 - 5\sqrt{7}$. *****§8)** A = {1,2,3,4,0}; B = {4,5}; C = {3}; a) A; b) F; c) A; d) A; e) A. **§9)** 450 km. **§10)** a) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$; b) $6\sqrt{6} - 3\sqrt{7}$; c) $2 - 3\sqrt{2}$; d) $8\sqrt{10} - 1$; e) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

**Înmulţirea şi împărţirea numerelor reale :** ***§1)** a) 0; b) $-2\sqrt{6}$; c) $13\sqrt{6}$; d) $20\sqrt{30}$; e) $-2\sqrt{6}$; f) $4\sqrt{12} - 3$; g) $4\sqrt{3} - 5$; h) $3\sqrt{3} + 2$; i) $2\sqrt{3}$; j) $8\sqrt{5} - 14$; k) $\sqrt{6} + 1$; l) $\sqrt{7}$; **§2)** a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 16; d) $\sqrt{5}$; e) $6\sqrt{5}$; f) $4\sqrt{7}$; g) 1; h) 4. ****§3)** a) $9\sqrt{6} + 30$; b) $6\sqrt{10} + 83$; c) $-9\sqrt{6} - 18$; d) $6\sqrt{77} - 153$; e) $2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$; f) $4\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$; g) $6\sqrt{20} - 2\sqrt{30}$; h) $4\sqrt{6} + \sqrt{12}$; i) $7\sqrt{3} - 28$. **§4)** a) $\sqrt{2} + 10$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 7$; c) $2\sqrt{14} + 28$; d) $8\sqrt{6} - 3$; e) $12\sqrt{7} + 21$; f) $8\sqrt{3} - 50$. **§5)** a) $49\sqrt{12}$;

b) 0; c) $4\sqrt{3}-1$; d) $2\sqrt{3}+5$; e) $4\sqrt{3}-4$; **§6)** a) 10; b) 9; c) $-6\sqrt{2}-2$; d) $6\sqrt{2}$; e) –6; f) 13. **§7)** a) $7\sqrt{5}/9$; b) $-\sqrt{6}/24$; c) $\sqrt{2}/5$; d) $5\sqrt{3}/12$; e) $19\sqrt{10}/24$; f) $\sqrt{2}/15-2/3$; g) $\left(5\sqrt{15}+2\sqrt{10}\right)/6$; h) $\frac{3\sqrt{21}-22\sqrt{7}}{12}$. **§8)** a) $2\sqrt{2}+6$; b) $\sqrt{2}-2\sqrt{6}$; c) $4\sqrt{6}$; d) $11\sqrt{2}-12$; e) $\sqrt{12}$; f) $\sqrt{3}$. **§9)** a) 8; b) $-6\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{2}$; d) –10; e) –6; f) $\sqrt{18}$; g) 1; h) $9\sqrt{3}$; i) 0; j) $2\sqrt{2}$.

**Scoaterea și introducerea factorilor : **1)** $6\sqrt{10}$; $20\sqrt{6}$; $16\sqrt{5}$; $6\sqrt{15}$; b) 20; c) 75; d) $9\sqrt{6}$; e) 2/3; f) 4x / 5; $4x^2\sqrt{2}/3y^2$; $x^2\sqrt{2x}/7$; $xy\sqrt{x}/8$; g) $-2x\sqrt{-2x}/5$; h) $a^3\sqrt{a}$; i) $-2a^3\sqrt{2}$; j) 1/25; k) 1/13; l) 1/24. **§2)** a) $5\sqrt{3}$; b) $6\sqrt{3}$; c) $7\sqrt{2}$; d) $-7\sqrt{5}$; e) $7\sqrt{6}$; f) $-4\sqrt{10}$; g) $14\sqrt{2}$; h) $21\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$; i) $13\sqrt{3}$; j) $10\sqrt{5}$; k) $42\sqrt{2}$. §5) a) 8; $3\sqrt{6}$; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}$; e) $13\sqrt{3}$; f) $44\sqrt{2}$. *****§6)** a) $2-3\sqrt{3}$; b) $-7-11\sqrt{2}$; c); d) $3-\sqrt{7}$; e) $2\sqrt{2}-2$.

**Raționalizarea numitorului : *§1)** a) $3\sqrt{2}/2$; b) $2\sqrt{3}$; c) $-4\sqrt{6}/3$ d) $-\sqrt{3}/6$; e) $2\sqrt{5}/5$; f) $4\sqrt{15}/15$; g) $\sqrt{15}/4$. ****§2)** a) –6; b) $6\sqrt{5}/5$; c) $\sqrt{3}/3$; d) $2\sqrt{2}$; e) $\sqrt{15}$; f) $\sqrt{2}/2$; g) $\sqrt{2}/2$; h) $3\sqrt{15}+15$; i) $\sqrt{6}/4$; j) $14\sqrt{2}+76$. **§3)** a) 37/4; b) $\left(-18\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)/6$; c) $27\sqrt{6}-289$; d) 7/4; e) 11/18; f) $\left(11\sqrt{3}+102\right)/3$; g) $5-17\sqrt{5}/5$; h) $2\sqrt{2}+\frac{8}{5}$; i) $9+10\sqrt{6}/3$; j) $23/3+\sqrt{2}/2$. **§4)** a) $\sqrt{20}>\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{20}{25}}$; b) $2\sqrt{24}=\sqrt{96}>\frac{4}{\sqrt{54}}=\sqrt{\frac{8}{27}}$; c) $-4\sqrt{2}<-3\sqrt{2}$. **§5)** a) $\left(15\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)/12$; b) $\sqrt{2}/10$; c) $3\sqrt{2}/4$; d) $\left(23\sqrt{2}+2\right)/4$. **§6)** a) $7\sqrt{3}/3$; b) 7 / 4; c) $2-\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}/2$; e) –4/9; f) –28/3. *****§7)** a) 1; b) 23; c) 21/25; d) 5/8; e) $23\sqrt{6}/36$; f) 2. **§8)** a) $4\sqrt{3}/27$; b) 10/9; c) –875/9; d) $3+\sqrt{3}$; e) $-\frac{77}{24}-\frac{149\sqrt{10}}{60}$ f) –137/6; g) 11/12; h) –266.

**Calcularea mediilor : *§1)** a) 6,4; b) 0,87; c) –1; d) $1{,}4\sqrt{2}$; e) $3\sqrt{3}-3{,}(3)$; f) $3{,}5\sqrt{3}$. **§2)** a) 30; b) 4/5; c) $4\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{2}$; e) 1; f) $6\sqrt{3}-3$; g) $12-4\sqrt{5}$. **§3)** a) 6; b) 1; c) $41\sqrt{2}/11$; d) $-8\sqrt{2}/9$. ****§4)** a) $52^{-19}$; $2^{-17}$; $5^{-1}$; $2^{-15}$; b) 25/144; 1/6; 4/25. **§5)** a) $63\sqrt{5}/25-5\sqrt{2}/8$; b) $15\sqrt{2}/8$; c) $\left(28\sqrt{3}+9\sqrt{2}\right)/24$; d) $\left(3-\sqrt{7}\right)/2$; e) 1/2; **§6)** a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{231}/7$; c) 1; d) 1/2; e) 2/3. **§7)** a) –90; b) $m_a = 26$ $m_g = 24$; c) 17; 15; 225/17. **§8)** 1,4375. **§9)** 5. **§10)** 25. **§11)** 30; 20; 10. **§12)** a) $m_a = 7$; $m_g = 3\sqrt{5}$; $m_h = 45/7$; b) $m_a = 6{,}5$; $m_h = 72/13$. **§13)** $m_a = 25$; $m_h = 16$.

## *Capitolul VI* : Modele de lucrări semestriale (sem. I)

Testul 1 : Subiectul I : §1). a). –9; b). 0,(14); c). $-\frac{3}{2}$; §2). a). $\frac{1}{8}$; b). $\frac{4}{3}$; c). –15; §3). b). 45°; c). 8; §4). a). 30°; b). 18; c). 12; Subiectul II : §1). a). A ∩ Z = {4; –8; 0; 5}; b). $P=\frac{4}{5}$; c). 4; §2). a). x ∈ {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}; b). x = 15; §3). a). AE || BM, AB || ME => AEMB paralelogram => (BM) ≡ (AE); b). analog MCAF paralelogram => (MC) ≡ (AF) => (BC) ≡ (FE) și cum BC || EF => FECB paralelogram; c). AM mediana corespunzătoare ipotenuzei in triunghi dreptunghic => AM = $\frac{BC}{2}=\frac{12}{2}=6$, și cum (FB) ≡ (AM) ≡ (EC) => $P_{FECB}$ = 12 + 12 + 6 + 6 = 36. **Testul 2 : Subiectul I : §1).** 12; b). 17; c). 2,(3); §2). a). 2; b). 5; c). 3°; §3). b). 145°; c). 48 cm²; §4). a). 90°; b). 5 cm; c). 25 cm². **Subiectul II : §1).** a). A = {0; 1; 2; 3; 4} și B = {4; 5; 6; 9}; b). A – B = {0; 1; 2; 3}, A ∪ B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9}; c). a ∈ {4; 3; 2; 1; 0}; §2). a). a = 23; b = 7; b). $m_{a_p}=\frac{19}{9}$; §3). a). $A_{ABCD}$ = 24 · 18 = 432 cm²; $P_{ABCD}$ = 84 cm; MNPQ = romb pentru că (MN) ≡ (NP) ≡ (PQ) ≡ (QM); c). $A_{MNPQ}=\frac{MP\cdot NQ}{2}=\frac{24\cdot 18}{2}=216\,cm^2$. **Testul 3 : Subiectul I : §1).** a). 11; b). 4; c). 4,(6); §2). a). 15; b). $2^{11}$; c). 6, §3). a). 16; b). 154°; c). 80; §4). a). 30°; b). 24; c). 20; **Subiectul II : §1).** a). $-\frac{1}{2^{80}}$; b). (60; 15); c). 10 ∈ Z; §2). a). A = {–12; –6; –4; 2}; b). –5; §3). a). trapez; b). se arată ∢E ≡ ∢MAN; c). se arată MN || AC || EF.

## *Capitolul VII* : Calcul algebric

**Reducerea termenilor asemenea : *§1)** a) –3x – 5y; b) –25x + 5y; c) $-2x^2+7x$; d) 3x + y; e) 15a – 5ab; f) $-a^2b-2ab-4ab^2$; g) $-3x^3y-x^2y^2-2xy^3$; h) $9ax^3y-12ax^2y$. §2) a) –ab – 7a; b) –3a + 17b; c) 18 + a; d) $2x^2+5x+2$; e) $3y^2-2y+3$; f) a – 8; g) 6 – 6a. ****§3)** a) –x/4 + 2y/3; b) –0,5x – 0,8y; c) 0,8a – 1,6b; d) 3a + 10ab; e) 2,8ax – 8,35ay. **§4)** a) $7x\sqrt{2}$; b) $4x\sqrt{3}-6y\sqrt{2}$; c) $16x\sqrt{2}-6x\sqrt{3}$; d). $3xy\sqrt{5}+5x\sqrt{2}$; e) $\left(9x\sqrt{2}-11y\sqrt{2}\right)/4$; f) $8x\sqrt{5}-8y$. **§5)** a) –7/3; b) 3/2; c) 1/2; d) 7; e) 0.

**Înmulțirea : *§1)** a) $-8x^3y$; b) $48x^6y^3$; c) $3x^7y^2z/2$; d) $x^4y\sqrt{6}$; e) $-18x^6$; f) $-x^4y^3/2$; g) $x^3$; h) $x^{2n}$. ****§2)** a) $6x^2+10x$; b) $-8x^2y-12xy^2$; c) $6x^4y-6x^3y$; d) $-3x^3y+15x^2y-6xy$; e) $-64x^4y+72x^3y^2$; f) $4x^2y^2-2x^3y\sqrt{3}$; g) $-30x^{11}\sqrt{10}+120x^9$; h) $-x^6y^2+x^4y^4$. **§3)** a) 8x – 35y; b) –11x – y; c) 10x + 1; d) –2x + 17y; e) $10x^2+11x-8$; f) –9x + 10; g) –21x – 56; h) –x + 20y; i) 13x – 30y. **§4)** a) $-3x^3+16x^2y$; b) $4x^2+2x-6$; c) $3ab^2-7ab$; d) $x^2+5x+6$; e) $2x^2-7x-4$; f) $-3x^2+12x-12$; g) $-x^3+5x^2-4x$; h) $-8x^2+8x+30$; i) $-8x^2+16x\sqrt{2}-12$; j) $x^2\sqrt{6}-xy-y^2\sqrt{6}$; k) $x^4-1$; l) $4x^3+6x^2-2x-3$; m) $-x^{2n}+5x^n-6$. **§5)** a) $x^5-2x^4-14x^3-5x^2$; b) $a^3b+ab^3+a^2b^2+b^4$; c) $5ay^3+5a^2x^2y^2-2axy-2a^2x^3$; d) $3a^3b-a^2b^2-2ab^3$. **§6)** a) $5x^2+2x-2$; b) $3x^2-2x-48$; c) $8x^2+7x/2-1$; d) 1,9x – 1; e) $-5\sqrt{2}x^2/2+7\sqrt{2}/2xy-xy$; f) $-12x^3+115x^2$; g) $-3x^4+15x^2-18$; h) $4x^3y^3-24x^2y^4$. **§7)** a) 0; b)–

$1/10$; c) $5/3$; d) $-28/15$; e) $1/2$; f) 0; g) $-23\sqrt{3}/21$; h) 0.

**Formule de calcul prescurtat :** ∗§1) a) $x^4 + 2x^3 + x^2$; b) $16x^2y^2 - 16xy + 4$; c) $9x^2y^2 + 6x^2y^3 + y^4$; d) $16x^4 - 8x^2y^4 + y^8$; e) $2x^4 + 2x^3\sqrt{2} + x^2$; f) $x^2/4 - 6x + 36$; g) $0{,}09x^6 + 0{,}6x^3y + y^2$; h) $16x^2/5 + 8xy/3 + 5y^2/9$; i) $25x^2/2 - 20xy + 8y^2$; j) $x^2/2 - 8x + 32$; k) $0{,}25x^4y^2 + 1{,}5x^2y + 9/4$; l) $9x^4/4 - 1{,}5x^2 + 0{,}25$; m) $49x^2/9 - 14xy^2/9 + y^4/9$; n) $121x^2/81 + 44x/27 + 4/9$; o) $x^2/9 + 2x/9 + 1/9$; p) $\frac{841}{8100}x^4 + \frac{29}{450}x^2y^3 + \frac{1}{100}y^6$. §2) a) $9 - x^2/16$; b) $2 - 9x^2$; c) $25x^2y^2/3 - 4/5$; d) $2x^2/3 - y^4$; e) $8 - x^2$; f) $4x^6y^4 - x^2y^2$; g) $16 - x^4$; h) $x^4/81 - y^4$; i) 16; j) $27x^2 - y^2$. §3) a) $x^2 + 8x + 35$; b) $3x^2 + 4x + 3$; c) $-6x^2 + 24x - 18$; d) $-2x^2 - 3x\sqrt{2} + x\sqrt{7} - 7 - \sqrt{14}$; e) $10 + 4x$; f) $-x^2 - 10x - 16$; g) $209/36$; h) $10xy - 91y^2/9 - 11x^2/4$; i) $123/8 - 6\sqrt{2}$; j) $2 + 3\sqrt{2}$. ∗∗§4) a) $-x^2 + 12x + 24$; b) $x^2 - 24x + 8$ c) $-2x^2 - 25y^2 - 15xy$; d) $-15 - 30\sqrt{2}$ e) $-a^2/2 + 10b^2 - 11ab/4$; f) $-33x^2/4 + 1 - 31x\sqrt{2}/8$; g) $5x\sqrt{6}/3 + 35/6$; h) $x^2 + 12 - 3x\sqrt{2} + x\sqrt{6}$; i) $-x^3 + 25x^2 - 33x + 5$; j) $-4\sqrt{6}$. §5) a) 2; b) 6; c) $33 + 9\sqrt{2}$; d) 2; e) $4\sqrt{10} + 7$; f) 2. §8) a) $5/32$; b) 2; c) $39/54$; d) $17/8$; e) $21/32$; f) $2/9$. §9) a) $9/5$; b) $-19/11$; c) $\varnothing$; d) $1/2$; e) $-13/11$; f) $-1/3$.

**Împărţirea :** ∗§1) a) $-2a^4y$; b) $-0{,}8ay$; c) $9x/2$; d) $6x^2$; e) $x^2 - 3x$; f) $4x - 2$; g) $3x^3 + 4x^3 - x$; h) $-1{,}6x^2 + \ + x$; i) $x^2 + 3/5$; j) $-2x^2/10 - 4x + 10$; k) $3x^2/4 - 3x/2$. ∗∗§2) a) $6x^2 + 10x$; b) $-2x$; c) $-x^2 - 2$; d) $-4x - 5$; e) $-8x^2 - 7x - 1$; f) $2x - 1$; g) $x + 5$; h) 0; i) $-x - 1$; j) $-5x - 3$. §3) a) 4; b) 0; c) 0; d) $1/10$; e) $-9/2$; f) $2/9$; g) $-1$.

**Descompunerea în factori :** ∗§1) a) $2(x - 2)$; b) $5(x + 2)$ c) $3x(4xy - 1)$; d) $4y(x - 2)$; e) $5x(2x - 5y)$; f) $8x^2y^3(3xy - 4)$; g) $x(2 + 4x + x^2)$; h) $6xy^2(3x^3y - 4x + 2y^3)$. §2) a) $(x^2 - 3y)^2$; b) $(x^4 + 2y^2)^2$; c) $(x + 5)^2$; d) $(x^2 - 8)^2$; e) $(3x - y)^2$; f) $(xy^2 - 2)^2$; g) $(3x^2y + 2z)^2$; h) $(0{,}4ax^2 - 3)^2$; i) $\left(x^2 - 3\sqrt{2}\right)^2$; j) $\left(x^2y - x\sqrt{5}\right)^2$. §3) a) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1)$; b) $(5xy^2 - 2)(5xy^2 + 2)$; c) $(x/2 - 2)(x/2 + 2)$; d) $(xy^2/3 - 6)(xy^2 + 6)$; e) $(1{,}8 - x^3)(1{,}8 + x^3)$; f) $(1{,}1x^4 - 1)(1{,}1x^4 + 1)$; g) $\left(\sqrt{5} - x^2\right)\left(\sqrt{5} + x^2\right)$; h) $\left(x\sqrt{7} - 2\right)\cdot\left(x\sqrt{7} + 2\right)$; i) $\left(x\sqrt{5} - 0{,}5\right)\left(x\sqrt{5} + 0{,}5\right)$; j) $\left(0{,}7 - 2x^2\sqrt{2}\right)\left(0{,}7 + 2x^2\sqrt{2}\right)$; k) $\left(x/\sqrt{3} - y^2\right)\cdot\left(x/\sqrt{3} + y^2\right)$; l) $\left(x/\sqrt{6} - 0{,}2y^3\right)\cdot\left(x/\sqrt{6} + 0{,}2y^3\right)$. ∗∗§4) a) $x^2(6x + y)^2$; b) $2(x^2 + y)^2$; c) $3x(3xy - 1)^2$; d) $x^2(4x^2y - z)^2$; e) $x(1/2 + x)^2$; f) $3(1/2 + 2x)^2$; g) $2(3x^2/2 - 1)^2$; h) $\sqrt{3}\left(5x + \sqrt{3}\right)^2$. §5) a) $2(2x^2 + 1)(2x^2 - 1)$; b) $3(3y^3 - 2)(3y^3 + 2)$; c) $x(6x - 5)\cdot(6x + 5)$; d) $9(3x - 7)(3x + 7)$; e) $x(3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1)$; f) $2(2 - 3x^2y)(2 + 3x^2y)$; g) $x^2y(1 - 2xy)(1 + 2xy)$; h) $2(x/2 - 3)(x/2 + 3)$; i) $2(x^2/3 - 2)(x^2/3 + 2)$; j) $5x\left(x\sqrt{2} - 1\right)\left(x\sqrt{2} + 1\right)$. §8) a) $(x - y)(3 + x)$; b) $(3x - 1)(a + 2)$; c) $x(a + 1)(2a + x)$; d) $(5x + e)(ax + 3)$; e) $(2x + 3y)\cdot(1 + x + 2y^2)$; f) $(x^2 - a + b)\cdot(x^2 + a - b)$; g) $(3x - 2x^3 - 1)\cdot(3x + 2x^3 + 1)$; h) $(1 - x)\cdot(x + 3/5)$; i) $(x + 4)(x - 2)$; j) $(1 + 2x)(7 - 2x)$; k) $(5x + 6)(4 - x)$. §9) a) $(2xy^3 - 5)(2xy^3 + 5)$; b) $x(x-1)^2\cdot(x + 1)^2$; c) $x^2\left(2\sqrt{2}x - y\sqrt{3}\right)^2$; d) $\left(x\sqrt{7} + 0{,}6\right)\left(x\sqrt{7} - 0{,}6\right)$; e) $\left(x\sqrt{3} + 2y + 1\right)\cdot\left(x\sqrt{3} + 2y - 1\right)$; f) $(x + a)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)$; g) $(x + y)(x + 1)^2$; h) $(x - 2)(x + 2)(x + y)$; i) $(7x^4 + 9y^2)\left(\sqrt{7}x^2 - 3y\right)\left(\sqrt{7}x^2 + 3y\right)$; j) $(xyz^2 - xy - 2)(xyz^2 + xy + 2)$; k) $4x(x - y)^2\cdot(x + y)^2$; l) $(x - 2y)(1 + 4x + 3xy)$; m) $(a - 2)(2y + 3x)$; n) $(4x^4 + 1)(2x^2 + 1)\left(x\sqrt{2} - 1\right)$; o) $\left(2x\sqrt{5} - 3y\right)^2$; p) $2(3x^2 - 5x + 2) = 2(3x - 2)(x - 1)$. §10) a) $(0{,}8y^3 - 0{,}9x^2)(0{,}8y^3 + 0{,}9x^2)$; b) $(3x - y - 1)^2$; c) $(x + 2)\cdot(x + 7)$; d) $(x^2 + 6)\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$; e) $(x - y + 2)^2$; f) $2(y - 1/4)(y + 1/4)$; g) $(x - 5)\cdot(x - 1)$; h) $2y^2\left(3yx - \sqrt{2}\right)^2$; i) $\left(2x - \sqrt{2}y^2/\sqrt{3}\right)\left(2x + \sqrt{2}y^2/\sqrt{3}\right)$; j) $(2x - y - 1{,}5)^2$; k) $(x - 1)\cdot(3x + 2)$; l) $\left(\sqrt{2}x^2/3 + 6y\right)^2$; m) $[2(x - 5) + 3/2]^2$; n) $(x - 1)\cdot(5 - 2x)$; o) $(x + y)\cdot(a - b + x + y)$. §11) a) $x + 1$; b) $x(2x - 1)$; c) $x + 3$. ∗∗∗§13) a) $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$; b) $2\sqrt{6} - 1$; c) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$; d) $2\sqrt{7} - \sqrt{3}$; e) $1 + 3\sqrt{3}$; f) $4 - 2\sqrt{3}$; g) $3 - \sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$; h) $-2\sqrt{2}$; i) 2.

**Rezolvarea ecuaţiilor $x^2 = a$, $a \in Q$ :** ∗§3) a) 1,6 cm; b) 6 cm; c) 28,8 mm; d) 2,56 m. ∗∗§5) a) $x = 13$ şi $x = -13$; b) $x = 1{,}12$ şi $x = -1{,}12$; c) $x = 49$ şi $x = -49$; d) $x = 3{,}2$ şi $x = -3{,}2$; e) $x = 9/4$ şi $x = -9/4$; f) $x = 5/2$ şi $x = -5/2$; g) $x = 2$ şi $x = -2$; h) $x = 1$ şi $x = -1$; i) $x = 1/2$ şi $x = -1/2$. §6) a) $3/2$ şi $-3/2$; b) $-3$ şi 3; c) 12 şi $-12$; d) $15/2$ şi $-15/2$; e) 4 şi $-4$; f) 9 şi $-9$. §7) 14/6 cm, 54/15 cm.

## *Capitolul VIII* : Ecuaţii şi inecuaţii

∗§1) a) 3; b) 6; c) $1/2$; d) 5; e) $-14/5$; f) 0. §2) a) $-6$; b) $-1$; c) $-10$; d) $\varnothing$. §3) a) DA; b) DA; c) NU; d) NU. ∗∗§4) a) 4 şi $-6$; b) 3 şi $-6$; c) $2/15$ şi $-8/15$; d) 0 şi $-2/3$. §5) a) $\varnothing$ b) 3; c) 0; d) 1. §6) a) NU; b) DA; c) NU; §7) a) 5; b) 1; c) $-1$; d) $8/14$; e) $-1$. §8) a) $11/19$; b) 0; c) 2 şi $-2$; d) $5/3$ şi $-5/3$; e) 0. §9) a) 4; b) 2; c) 0; d) 2; e) $-3/2$; f) $-4/3$; g) $-7/13$; h) 0; i) $\varnothing$. §10) a) 1; b) 19; c) $5/12$; d) $5/4$; e) $-5/7$; f) $-7/13$. §11) a) $-5/2$; b) $5/3$; c) $-2/5$; d) $5/3$; e) $-22/3$; f) 1; g) $-10/21$; h) $29/6$; i) $-33/18$. §12) a) $\varnothing$; b) $\varnothing$; c) R; d) $4\sqrt{2}/5$; e) $\left(12 - 16\sqrt{2}\right)/7$; f) $-5/9\sqrt{2}$; g) $-2\sqrt{2}/3$; h) $\varnothing$; i) $-\sqrt{5}/3$; j) 36. §13) a) $\varnothing$; b) $-10/11$; c) $1/5$; d) 1; e) $-20/61$; f) $-3$. ∗∗∗§14) a) $x = 5$; b) $x = \left(5 - \sqrt{5}\right)/5$; c) $x = -4\sqrt{3}/3$; d) $-8\sqrt{5}/5$. §16) a) $mx = m + 1$, se discută după coeficientul variabilei x; i) dacă $m \neq 0 \Rightarrow$ există soluţie şi este $x = \frac{m+1}{m}$; ii) dacă $m = 0 \Rightarrow$ se înlocuieşte în ecuaţie valoarea $m = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 1$ cum nici un nr. real nu verifică această ecuaţie $\Rightarrow x \in \varnothing$, nu există soluţii; b) $x = mx + 1 \Leftrightarrow x(1 - m) = 1$ se discută coeficientul lui $x \Rightarrow$ i) dacă $1 - m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{1-m}$ ; ii) dacă $1 - m = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 1 \cdot x + 1 \Rightarrow x = x + 1 \Rightarrow x \in \varnothing$, nu există soluţii; c) $2(x - m) = mx - 4 \Rightarrow x(2 - m) = 2m - 4 \Rightarrow$ i) dacă $2-m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2m-4}{2-m} = \frac{2(m-2)}{2-m} = \frac{-2(2-m)}{(2-m)} = -2$ ; ii) dacă $2-m = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow 2(x-2) = 2x - 4$ $\Rightarrow 2x - 4 = 2x - 4 \Rightarrow$ orice număr real verifică această ecuaţie $\Rightarrow x \in R$; j) $m^2x + mx = m + 1 \Leftrightarrow x(m^2 + m) = m + 1 \Leftrightarrow$ i) d). $m^2 + m \neq 0$(ceea ce înseamnă că $m(m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ şi $m \neq -1) \Rightarrow x = \frac{m+1}{m^2+m} = \frac{(m+1)}{m(m+1)} = \frac{1}{m}$ ; ii) dacă $m^2 + m = 0$ $\Rightarrow m(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 0$ sau $m = -1$; deci a) dacă $m = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 + 1 \Rightarrow x \in \varnothing$; b) dacă $m = -1 \Rightarrow 1 \cdot x - 1 \cdot x = -1 + 1$ $\Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in R$; o) $mx + x = a \Leftrightarrow x(m + 1) = a \Leftrightarrow$ i) dacă $m + 1 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{a}{m+1}$ ; ii) dacă $m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow -x + x = a$ $\Rightarrow 0 \cdot x = a \Rightarrow$ a) dacă $a = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in R$; b) dacă $a \neq 0 \Rightarrow x \in \varnothing$. §17) a) $ax - 3 - x = 0 \Leftrightarrow x(a - 1) = 3$ pentru $a = 1$, ecuaţia nu are soluţii , pentru $a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{3}{a-1}$, cum $x \in Z$ şi $a \in Z \Rightarrow (a-1)/3 \Rightarrow a - 1 \in D_3 \Leftrightarrow a - 1 \in \{-1; 1; 3; -3\} \Rightarrow a \in \{0; 2; 4; -2\}$ $\Rightarrow x \in \{-3; 3; 1; -1\}$; b) $x \in \{12; -12; 4; -4\}$; c) $x = \frac{a+6}{a+1}$ dacă $a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{a+1+5}{a+1} \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{a-1} \Rightarrow a \in \{0; -2; 4; -6\}$, $x \in \{0; 2; -4; 6\}$.

**Inecuaţii de forma ax + b > 0 :** *§1). a). $\frac{1}{2}; -2; 0; -\frac{3}{2}$ ; b). $-2; -\frac{3}{2}$ ; c). 3; d). 3; e). toate; f). ø. **§2). a). {0}; b). ø; c). {0; 1}; d). {0}; e). {0; 1; 2}; f). ø; g). {3; 4; 5;....}; h). {0; 1}; i). {0}; j). {1; 2; 3; ...}; k). {1; 2; 3; ...}; l). {0; 1}; m). {0}; n). N; o). {0; 1; 2; 3}; p). N*; r). N; s). N*. **3).** a). {–3; – 2; ...}; b). {2; 3; ...}; c). {2; 3; ...}; d). {...; 2; 3}; e). {...; –11; –10}; f). {...; –5; –4}; g). ø; h). {...; –3; –2}; i). {...; –2; –1}; j). {0; 1; 2; ...}.

**4).** a). $\left(-\infty; \frac{36}{7}\right]$; b). $\left[\frac{2}{19}; +\infty\right)$; c). $\left(\frac{1}{27}; +\infty\right)$; d). $[-1; +\infty)$; e). $(-\infty; 2,5]$; f). $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right)$; g). $\left(-\infty; -\frac{7}{12}\right]$.

**Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii :** *§1) x = 5. §2) 63; 65; 67. **§3) x = 140. §4) x = 32. §5) a) a = 35; b = 15 ; b) idem. §6) x = 24 şi y = 30. §7) x = 2500, y = 5050, z = 5150. §8) x = 8. §9) x = 12; y = 20. §10) x = 16; y = 38; z = 6. §11) m(∢A) = 40°; m(∢B) = 50°; m(∢C) = 90°. §12) x = 8, y = 4. §13) x = 10; y = 24. §14) 48; 32; 40. §15) 36; 15; 108. §16) 8/19. §17) 8. §18) 12. §19) 24; 20. §20) 8; 10. §21) x = 32; y = 10. §22) x = = 11; y = 4. §23) x = 29; y = 2. §24) x = 30; y = 15. §25) x = 6000; y = 8000. §26) x = 10; y = 4. §27) AC = 21 cm; AB = 28 cm; BC = 35 cm. §28) AB = $4\sqrt{3}$ cm; CD = $8\sqrt{3}$ cm; A = $24\sqrt{3}$ cm². §29) 8 cm şi 12 cm. §30) 24 şi 32. §31) 27 ani şi 3 ani. §32) $4\sqrt{2}$ ; $4\sqrt{2}$ ; A = 16 cm². §33) 8000 lei şi 12000 lei. §34) 30 şi 16. ***§35) 40 km/h. §36) v = 80 km/h; d = 400 km. §37) 72; 12. §38) t = 30 minute; d = 2,5 km. §39) t = 0,5 h; d = 10 km. §40) 6 şi 2. §41) 15 bănci şi 33 elevi. §42) un robinet mic umple în 70 min, iar 2 robinete mari în 35/4 min.. §43) 120 km/h. §44) 4 ore şi 60 km. §45) x = suma depusă, y = dobândă pe an $\Rightarrow x + x \cdot \frac{y}{4} = 224000$ şi $x + x \cdot \frac{y}{2} = 248000 \Rightarrow x = 200000$ şi dobândă 48%. §46) 9 copii şi 100000 lei. §47) 46.

## *Capitolul IX* : Coordonate carteziene în plan

§1) A × A ={(1;1); (1;3) (3;1); (3;3)}. §2) A × B ={(2;1); (3;1); (4;1); (2;2); (3;2); (4;2); B × A = {(1;2); (1;3); (1;4); (2;2); (2;3); (2;4)}. §3) a) A ∪ B = B; A – B = ∅; B ∩ A = A; b) a = 1; b = 1 sau b = 2; c = 1 sau c = 2; d = 1 sau d = 2; e = 1. §4) A = {1; 2; 3}; B = {2; 3; 4; 5}. §5) a) B = {1; 4}; B = {2; 4} sau B = {3; 4}; b) A × B = {(1;4); (2;4); (3;4)}. §10) a) pătrat; b) triunghi dreptunghic isoscel; c) romb; d) paralelogram; e) paralelogram; f) romb; ***§14) D(0; 4); B(–3; 4); C(3; 4); sau D(0;–4); B(–3;–4); C(3;–4). §15) B(–9; 4) şi M(–11/2; 4) sau B(5; 4) şi M(3/2; 4).

## *Capitolul X* : Modele de lucrări semestriale (sem. II)

**Testul 1 : Subiectul I : §1).** a). –2; b). {0; 1; 2; 3}; c). $18\sqrt{3}$; **§2).** a).5x; b). $(2x - 1)^2$; c). $-\sqrt{2}$ ; **§3).** b). 16 cm; c). 3 cm; **§4).** a). $6\sqrt{3}$ ; b). $4\sqrt{3}$ ; c). $2\sqrt{3}$ . **Subiectul II : §1).** a). $\frac{}{3}$ ; b). 13; c). {–3; –2; –1; 0; 1; 2; .....} **§2).** a). A = $(x + 3)^2$; b). a + b = –5; **§3).** a). $\frac{3}{5}$ ; b). $\frac{45}{4}$ ; c). ∢AED ≡ ∢DEF (90°) şi m(∢EDF) = m(∢EAD) = 90° – m(∢EDA). **Testul 2 : Subiectul I : §1).** a). 16; b). 10; c). 4; **§2).** a).–x; b). $\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right)$; c). $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; **§3).** b). 4; c). 20; **§4).** a). 12; b). 150; c). $\frac{3}{4}$ . **Subiectul II : §1).** a). $5\sqrt{3} - 1$; b). 10; c). x ∈ {–2; 2}. **§2).** a). A = $(3x + 2)^2$; b). $4\sqrt{3}$ ; **§3).** a). 8 cm; b). AB || CD => T.F.A. => ΔAOB ≈ ΔCOD; c). 6 cm². **Testul 3 : Subiectul I : §1).** a). –1; b). $-\frac{9}{2}$ ; c). 1; **§2).** a).a; b). 2; c). b = –a; **§3).** b). 4; c). $9\sqrt{3}$ ; **§4).** a). $5\sqrt{2}$ ; b). $5\sqrt{5}$ ; c). A. **Subiectul II : §1).** a). $13\sqrt{6} - 2$ ; b). 28%; c). {–6; –5; –4; –3; .....} **§2).** a). $x^2 + 1$; b). 7; **§3).** a). $75\sqrt{15}$ ; b). $\frac{15\sqrt{15}}{2}$ ; c).ΔADE ~ ΔACB => P = 85. **Varianta 6 - M.E.C.T. - mai 2008: Subiectul I : §1).** a). 17; b). 8; c). 1; **§2).** a). 3; b). $\frac{9}{2}$ ; c). a sau $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ; **§3).** a). desen; b). $20\sqrt{2}$ ; c). $3,2 \ sau \ \frac{16}{5}$ . **§4).** a). $\frac{1}{3}$ ; b). 36 c). $\frac{1}{4}$ . **Subiectul II : §1).** a). 2; b). x = 6 ani; c). x ∈ {–3; –2; –1}; **§2).** a). 3 ∈ N; b). 1 ∈ N; **§3).**

a). $\cos(\sphericalangle DBC) = \frac{6}{10}$; b). AC = 16 cm; Aria = 96 cm²; c). $DE = \frac{2}{3}DO$; DE = 4 cm. **Varianta 9 - M.E.C.T. - mai 2008: Subiectul I** : §1). a). 2; b). 2; c). 1; §2). a). $\frac{1}{2}$; b). 3; c). $a$ *sau* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; §3). b). 3; c). 20; §4). a). 2; b). $\sqrt{20}$ *sau* $2\sqrt{5}$ c). 10. **Subiectul II** : §1). a). 4; b). a = 36; c). x = −1; §2). a). A = 1 ∈ N; b). (b + c)(a + d) = $\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5})$; §3). a). ΔAMD ~ ΔPMB; b). $\frac{AD}{BP} = \frac{1}{2}$; c). AM² = MN · MP.

# GEOMETRIE

## *Capitolul XI* : Recapitulare clasa a VI-a

§1) se pot arăta ΔADB ≡ ΔAFC și ΔADN ≡ ΔAFM și ΔBCM ≡ ΔCBN. §2) 30°; 30° și 120°. §3) 66°; 66° și 48°. §4) 70°; 70°; 40°. §5) isoscel. §7) 80°; 80° și 20°. §9) 60°; 30°. §10) 20°; 70°. §12) 24 cm; 30°; 4 cm. §16) ΔAMQ ≡ ΔCMB, M mijlocul lui AC.

## *Capitolul XII* : Patrulatere

**Suma unghiurilor unui patrulater** : §1) a) 69°; 69°; 148°;74°; b) 72°; 72°; 96°; 120°; c) 90°; 40° 120°; d) 120°; 90°; 60°; 90°; e) 120°; 130°; 90°; 30°; f) 64°; 160°; 96°; 40°; §2) 120°; 90°; 60°; 90°; §3) 110°; 80°; 110°; 60°; §4) 45°; 135°; 60°; 120°; §5) 110°; 57°30'; 102°30'; 90°; §6) 210°; 30°; 75°; 45° concav.

**Paralelogramul :** ∗§6) 28 cm; §7) a) BC = 32 cm; b) AB = 40 cm; BC = 20 cm; c) AB = 26 cm; BC = 94 cm; d) AB = 45 cm; BC = 15 cm; e) AB = 49 cm; BC = 11 cm; f) AB = 50 cm; BC = 10 cm; §8) a) m(∢B) = 120°; m(∢C) = 60°; b) m(∢B) = 80°; m(∢A) = 100°; c) m(∢D) = 85°; m(∢C) = 95°; d) m(∢B) = 54°; m(∢A) = 126°; e) m(∢D) = 60°; m(∢A) = 120°; §9) a) AD = BC = 8 cm; b) m(∢B) = m(∢D) = 50°; c) m(∢B) = m(∢D) = 60°; e) laturi paralele două câte două; f) ∢B și ∢D suplementare ⇒ laturi paralele; g) ΔAOB ≡ ΔCOD; h) ∢A ≡ ∢C; §10) diagonalele se înjumătățesc. ∗∗ §12) se demonstrează că AP ∥ CQ și AP ≡ CQ; prin ΔAPM ≡ ΔBQM. §13) APCN paralelogram - diagonalele se înjumătățesc, APNB paralelogram - AP ∥ BN și AP ≡ BN; §14) laturile opuse sunt paralele și congruente; §15) AECF - laturile opuse sunt paralele două câte două și DEBF - laturile opuse sunt paralele și congruente; §16) diagonalele se înjumătățesc; §17) diagonalele se înjumătățesc; §18) laturile opuse sunt paralele două câte două; §19) diagonalele se înjumătățesc; §20) ΔAMO ≡ ΔCNO, paralelogram, diagonalele se înjumătățesc; §21) paralelogram ΔBPM ≡ ΔCQM; §22) ΔABD ≡ ΔCDB ⇒ două laturi paralele și congruente; §23) două laturi sunt paralele și congruente; §24) laturi paralele două câte două ⇒ DMBN paralelogram ⇒ [MB] ≡ [DN] ⇒ [AM] ≡ [NC] ⇒ AMCN paralelogram; §25) ΔAMQ ≡ ΔCMB, M mijlocul lui AC; ∗∗∗§28) a) ΔFAE ≡ ΔADG; b) ΔFDG ≡ ΔFAB; §29) a) ΔBMC isoscel ⇒ RE ∥ AB, E mijlocul lui BC; b) AMCN paralelogram ⇒ AN ∥ MC; ARCP paralelogram deoarece PA ∥ RC și PA ≡ RC; c) sunt diagonale în paralelogram ⇒ se înjumătățesc.

**Linia mijlocie într-un triunghi :** ∗§1) 3,5 cm; 3 cm; 4,5 cm; §2) 24 cm; §4) ΔMEF echilateral (isoscel cu un unghi de 60°) ⇒ ME = 2,1 cm ⇒ MN = 4,2 cm ⇒ $P_{\Delta MNP}$ = 12,6 cm. §5) 12 cm; §7) laturile opuse sunt congruente; ∗∗§8) laturile sunt linii mijlocii;§9) BC = 6cm. §10) AM și MN sunt linii mijlocii; §11) ΔAMO ≡ ΔCPO; §12) diagonalele se înjumătățesc; §13) 27 cm §14) 14 cm. §16) BD; BC și DC sunt linii mijlocii. ∗∗∗§17) 24 cm.

**Dreptunghiul :** ∗§1) 36cm; §2) a) BC=104 cm; b) AB= 76 cm; BC= 68 cm; c) AD= 36 cm; AB= 108 cm; d) BC= 64 cm; AB = 80 cm; e) DC = 109 cm; BC = 35 cm; f) DC = 86,4 cm; DA = 57,6 cm; g) AD = 54 cm; DC = 90 cm; §3) ΔADO ≡ ΔCBO ⇒ ABCD paralelogram, ∢DAO ≡ ∢ADO ⇒ ΔDOA isoscel ⇒ diagonale congruente ⇒ dreptunghi; b) diagonale congruente și se înjumătățesc; d) din suma unghiurilor de 360° ⇒ ∢A ≡ ∢B ≡ ∢D = 90°; e) la fel; g) AB ∥ DC ⇒ m(∢A) + m(∢D) = 90° și m(∢B) + m(∢C) = 90°; f) [AO] ≡ [OB] ≡ [OC] ≡ [OD]. ∗∗§4) ΔEBC ≡ ΔDCB ⇒ două laturi sunt congruente și paralele; §5) ΔADO ≡ ΔBCO; {O} = AC ∩ BD și ΔAOK≡ΔCOL ⇒ diagonalele se înjumătățesc; §6) laturi opuse paralele și congruente; §7) 24 cm;§8) două laturi sunt congruente și paralele ⇒ paralelogram cu un unghi drept ⇒ dreptunghi; §9) ΔEBC ≡ ΔEAF ≡ ΔCDF; §10) MC linie mijlocie în ΔPAB. ∗∗∗§11) bisectoarele exterioare și interioare ale aceluiași unghi sunt perpendiculare și se arată că FC ∥ AE, {F} = AF ∩ FC și {E} = AE ∩ CE ; §12) se arată că AECF paralelogram, E ∈ (DC), F ∈ (AB) și apoi DGBH paralelogram, G ∈ (AB), H ∈ (DC); §13) prin congruență de triunghiuri ⇒ laturi congruente două câte două iar bisectoarea exterioară este perpendiculară pe cea interioară.

**Rombul :** ∗§1) 0,64; §2) 2,3 cm; §3) a) 150°; 30°; 150°; b) 36° 144°; 36°; 144°; c) 30°; 150°; 30°;150°; d) 130°; 50°; 130°; 50°; e) 60°; 120°; 60°; 120°; f) 108°; 72°; 108°; 72°; g) 60°; 120°; 60°; 120°; h) 41°; 139°; 41°; 139°; i) 80°; 100°; 80°; 100°; §4)a) paralelogram cu diagonale perpendiculare b) paralelogram cu laturi consecutive congruente; c) paralelogram cu diagonalele bisectoare pentru unghiuri; d) diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare. ∗∗§8) paralelogram cu doua laturi consecutive congruente; §9). diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare; §10). paralelogramul în care o diagonală este bisectoare => romb. §11). diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare. §12). paralelogram cu diagonale perpendiculare. §13). paralelogram în care o diagonală este bisectoare. 14) ΔECD ≡ ΔFBC ⇒ ΔECF isoscel cu un unghi de 60°; §15) CA inaltime si bisectoare in ΔCNM ⇒ Δ isoscel ⇒ CA mediana ⇒ DB = MA = MN/2; §16) paralelogram cu diagonalele perpendiculare. ∗∗∗§17). a). mediane în triunghiuri dreptunghice congruente; b). MP și respectiv NQ sunt diagonale în dreptunghiul MNPQ; c). QM, PN respectiv QP și MN sunt linii mijlocii => QM ≡ PN, QM ∥ PN și QP ≡ MN, QP ∥ MN. §18) paralelogram cu diagonale congruente; §19) BA = CF/2 ⇒ ΔCAF dreptunghic, m(∢CAF) = 90°; DA = EC/2 ⇒ ΔCAE dreptunghic ⇒ m(∢CAE) = 90° ⇒ m(∢EAF) = 180° ⇒ coliniaritate.

**Pătratul :** ∗§1) m(∢BCD) = 90° ⇒ romb cu un unghi drept; §2) a) dreptunghi cu diagonalele perpendiculare b) romb cu un unghi drept; c) dreptunghi cu diagonalele perpendiculare; §3) romb cu un unghi drept; §4) romb cu un unghi drept; §5) se foloseste congruenta triunghiurilor ⇒ paralelogram cu diagonalele perpendiculare. ∗∗§6) dreptunghi; isoscel dreptunghic; §7) paralelogram; dreptunghic, M trebuie ales la mijlocul lui BC si ΔABC isoscel; M trebuie ales la mijlocul lui BC si ▵ABC dreptunghic; §8) paralelogram in care o diagonala este bisectoare ⇒ romb cu un unghi drept ⇒ patrat; §9) ▵ABG ≡ ▵AFC; §10) paralelogram cu un unghi drept; §11) AM linie mijlocie in ▵CEB si mediana in ▵CAB ⇒ AM = EB/2 = CB/2 ⇒ [EB] ≡ [CB]; ∗∗∗§12) bisectoarea formeaza cu laturile dreptunghiului triunghiuri dreptunghice isoscele congruente doua cate doua; §13) BF ∩ DG = {L}; se arata ca m(∢BLG) + m(∢G) = $90^\circ$ ⇒ AG ⊥ BF; §14) doua laturi opuse sunt congruente si paralele ⇒ paralelogram cu doua laturi consecutive congruente ⇒ romb; §15) EO inaltime si mediana in ▵BED; §16) a) se arata ca ▵ADM este echilateral ⇒ DM = DC/3; b) m(∢C) + m(∢CDE) = $90^\circ$ ⇒ DE ⊥ BC; c) se opune unghiului de $30^\circ$.

**Trapezul :** ∗∗§3) ▵ADF isoscel ⇒ [AF] ≡ [AD] ≡ [BC] si FC ∥ AB; §4) trapez dreptunghic §5) trapez; §6) trapez cu diagonalele congruente; §7) EF linie mijlocie ⇒ EFCB trapez; a) isoscel; b) dreptunghic; §8) trapez isoscel; §9) fie AD ∩ BC = {E}; m(∢EBA) = $180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$; m(∢EAB) = $27^\circ$ ⇒ m(∢E) = $90^\circ$ §10) a) patrulater cu toate laturile congruente; b) AE ∥ BC cum BD ⊥ AE (diagonale ale rombului) ⇒ DB ∥ BC; §11) AB = DC/2 si AB ∥ DC ⇒ AB linie mijlocie in ▵ODC ⇒ OM, DB, AC sunt mediane deci sunt concurente; §12) Se arata ca ∢ABD ≡ ∢ADB ≡ ∢AEC ≡ ∢ACE si ▵ABC ≡ ▵ADC; §13) m(∢B) = $120^\circ$ ⇒ m(∢BAC) = m(∢BCA) = $30^\circ$; cum m(∢D) = $60^\circ$ ⇒ m(∢ACD) = $90^\circ$ ⇒ AC⊥CD; CM si BM sunt mediane in triunghiuri dreptunghice si congruente ⇒ ▵BMC isoscel; [CM] ≡ [BM]; CM = AD/2 = MD ⇒ ▵CMD isoscel cu un unghi de $60^\circ$ ⇒ echilateral ⇒ [CM] ≡ [CD] ≡ [BC] ⇒ echilateral; ∗∗∗§14) trapez isoscel; §15) ▵DEC ≡ ▵CFD ⇒ [EC] ≡ [DF] ⇒ [OE] ≡ [OF] ⇒ ▵OEF isoscel; cum ▵OAB e isoscel ⇒ EF ∥ AB ∥ DC ⇒ trapeze; [DE] ≡ [CF] ca inaltimi ale unor triunghiuri congruente; §16) AB ∥ CE ⇒ trapez cu diagonalele congruente; §17) Fie ED ∩ AB = {M} si ED ∩ AC = {N}; se arata ca ▵AME ≡ ▵AND ⇒ ▵AMN isoscel ⇒ MN ∥ BC ⇒ ED ∥ BC; cum [EB] ≡ [CD] ⇒ trapez isoscel; §18) a) ▵AMD si ▵PBC dreptunghice, KM mediana este jumatate din ipotenuza ⇒ KM = AD/2, LP = BC/2; b) ∢LCP ≡ ∢LPC ≡ ∢PCD ⇒ PL ∥ DC; c) analog KM ∥ DC si KL ∥ DC.

**Linia mijlocie în trapez :** ∗§1) a) 7 cm; b) 2 cm; c) 6 cm; d) 16 şi 8; §2) a) 4 cm; 2 cm; 4 cm; 10 cm; b) 14 cm; 3 cm; 10 cm; c) 6 cm; 2 cm; 8 cm; d) 10cm; 8 cm; 12 cm; e) 3 cm; 15cm; 9 cm; 1,5 cm; ∗∗§3) 12 cm; §4) 12 cm; §5) 5,5 cm; §6) AB linie mijlocie ⇒ P = 28 cm; §7) 12 cm; §8) se arată ca EF linie mijlocie in ▵BCO, {O} = BE ∩ DC; §9) 6 cm; 15 cm; ∗∗∗§10) se arată că DF ∥ AM ∥ EG ⇒ AEMD romb ⇒ ED ⊥ AM ⇒ AM = DF + EG = 16 cm.

**Arii :** ∗§1) 24 $cm^2$; 20 cm. §2) 15 cm. §3) 15. §4) 24 $cm^2$. ∗∗§10) 120 $cm^2$. §11) 9,6 cm. §12) 144 $cm^2$. §13) 60 $cm^2$.

## *Capitolul XIII* : Relaţii metrice

**Teorema lui Thales :** ∗§1) a) 6 cm; b) 6 cm; c) 2 cm; d) 9 cm; e) 25 cm; 10 cm; §2) 3 cm; 5 cm; §3) a) A; b) A; c) F; ∗∗§4) a) 6 cm; 9 cm; b) 9cm; 12 cm; c) 3 cm; 9 cm; 2 cm; d) 8 cm; 4 cm; e) 5 cm; 4 cm; 10 cm; f) 10 cm; 15 cm; 5 cm; §5) a) 8 cm; 12 cm; 4 cm; 4 cm; 9 cm; b) 9 cm; 18 cm; 12 cm; c) 6 cm; 9 cm; 10 cm; §6) a) 6 cm; b) 16 cm; 24 cm; §14) se arată că ▵NMC isoscel ⇒ [MN] ≡ [NC] ⇒ PNCR paralelogram ⇒ [PR] ≡ [NM] iar PN ∥ MR ⇒ trapez isoscel; §15) MT linie mijlocie în ▵PAQ ⇒ [AT] ≡ [TQ] ≡ [QC] ⇒ MQ linie mijlocie ⇒ [MS] ≡ [MT]; §16) ▵ABM ~ ▵BFC şi ▵CAM ~ ▵CEB şi adunând membru cu membru ⇒ relaţia cerută; §17) 45 cm; §18) AFDE romb ⇒ AD⊥FE, P = 48 cm; §22) PT ∥ BC, QP ∥ BC, KT ∥ BC; §23) se arată că AQ/QD = AM/ MB ⇒ QM ∥ BD; §25) MN ∥ BD ( reciproca Thales) şi MQ ∥ AC (reciproca Thales), QP ∥ BD, cum AC ⊥ BD ⇒ MN ⊥ NP; ∗∗∗§27) se arată că MP ∥ AB şi NP ∥ BC; §28) MQ ∥ BD ∥ PN. §29) se arată că AT / TB = AM / MC.

**Teorema fundamentală a asemănării :** ∗§1) a) 10 cm; 6 cm; b) 6 cm; 9 cm; 8 cm; 12 cm; ∗∗§4) 12 cm;8 cm; 4 cm; §9) a) 36 cm; b) 36 cm; c) 19 cm; §10) 26 cm; ∗∗∗§11) se caută triunghiuri asemenea; §12) MO/AB = OD/BD; OD/OB = DC/AB ⇒ OD/BD=DC/(AB + DC) ⇒ MO = AB DC/(AB + DC) ; MN = 2 MO ; §13) se calculează AB şi DC, vezi problema. §14) se caută triunghiuri asemenea; §15) a) ▵ABM ≈ ▵EDA ⇒ ▵EDA isoscel; b) ▵MAB ≈ ▵MEC; c) se caută unghiuri congruente; §16) MN = 3AB/2 ⇒ DC = 2AB; se caută valoarea raportului OD/OB din ▵AOB ~ ▵DOC.

**Cazurile de asemănare :** ∗∗§5) ▵ABD ~ ▵DBC, ▵ABD ~ ▵ADC, ▵DBC ~ ▵ADC; a) 6 cm; 5 cm; b) 12 cm; $8\sqrt{3}$ cm; 8 cm; c) 6 cm; 6 cm; $6\sqrt{2}$ cm; §6) se caută triunghiuri asemenea; §7) cazul U.U.; ∗∗∗§17) ▵BDM ~ ▵ECM; §18) ▵BEC ~ ▵ADC.

### Relaţii metrice în triunghiuri dreptunghice

**Teorema înălţimii :** ∗∗§2) a) $AD^2$ = BD DC ⇒ AD = 8 cm; b) BD = 4 cm; DC = 12 cm; d) BD = 2 cm; CD = 18 cm; AD = 6 cm; e) DC = 18 cm; BC = 8 cm; AD = 12 cm; f) BD = 14 cm; DC = 20 cm; AD = $2\sqrt{70}$ cm; §3) a) AD = $4\sqrt{3}$ cm; b) AD = $5\sqrt{3}$ cm; c) AD = $6\sqrt{3}$ ; §4) h = 12 cm; §5) BF = 16 cm; §6) AC = 20 cm.

**Teorema catetei :** ∗∗§4) a) P = $\left(15+3\sqrt{5}\right)$ cm; b) AB = $6\sqrt{5}$ cm; BC = $12\sqrt{5}$ cm; c) BC = $24\sqrt{2}$ cm; BD = $8\sqrt{2}$ cm; d) P = 60 cm; e) AC = 45 cm; AB = $9\sqrt{5}$ cm; f) AB = $3\sqrt{66}$ cm; BC = $3\sqrt{55}$ cm; BD = $3\sqrt{30}$ cm; §5) AD = 20 cm; DC = 15 cm ⇒ [AC] ≡ [BC]; §6) P = $14\left(4+\sqrt{5}\right)$ cm; DB = $7\sqrt{5}$ cm; §7) DB = 8; P = $\left(20+12\sqrt{3}\right)$ cm; §8) P = $\left(45+15\sqrt{5}\right)/2$ cm; §9) OD = 9 cm OB = 12 cm; OA = 12 cm; AD = 15 cm; OF = 64/3 cm; BF = 80/3 cm; ED = 54/4 cm.

**Teorema lui Pitagora :** ∗∗§8) P = 60 cm; §17) a) ∢EBG = ∢EBD + ∢DBG; b) ▵MBA ~ ▵MGH ⇒ BM = $24\sqrt{2}$ cm; MG = $32\sqrt{2}$ cm; c) RP linie mijlocie in ▵GEB ⇒ $P_{[illegible]} = 12\sqrt{2}$ cm; d) D ortocentru în ▵HAC deoarece ▵BCD ≡ ▵ABH şi ▵BCD ~ ▵TCA, unde CD ∩ AH = {T}; §18) AE = $45\sqrt{7}/16$ cm; AC = $5\sqrt{7}$ cm; BD = $\sqrt{499}$ cm; §19) P = $\left(16+22\sqrt{2}\right)$ cm; §20) BD = 8 cm; AC = $8\sqrt{3}$ cm; §21) linia mijlocie = 11 cm; §22) $6\sqrt{2}$ cm; §23) AB = 20 cm; BC = 40 cm; AC = $20\sqrt{3}$ cm; §24) 80 cm; §25) [PM] ≡ [MN]; MN = 10 cm; PN = $10\sqrt{2}$ cm; se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; §26) se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; §27) se aplică teorema lui Pitagora în ▵ADC şi ▵ADB; §28) BD = $2\sqrt{134}$ cm; P = $\left(24+16\sqrt{2}\right)$ cm; §29) linia mijlocie = 14cm; §30) 72/7 cm; §31) DB = 16 cm; §32) AE = 8 cm; §33) $4\sqrt{2}$ cm; AC = $8\sqrt{5}$ cm; BD = $4\sqrt{13}$ cm; ∗∗∗§38) $4\sqrt{2}$ cm; §39) AO = 20/3 cm; §40) $288\sqrt{3}/\left(12\sqrt{3}-2\right)$ cm; §41) DC = 20 cm; §42)

P = $\left(11\sqrt{2}-6\sqrt{13}\right)$ cm; $\sqrt{393}/2$ cm; **§43)** se ajunge la reciproca teoremei lui Pitagora; **§45)** PFAE este dreptunghi ⇒ [EF] ≡ [AP] ⇒ AP minim este înălțimea triunghiului, AP = 156/5 cm; **§46)** a) se aplică teorema lui Pitagora in ΔAOB, ΔDOC și ΔAOD, ΔBOC și se însumează relațiile; b) OM = AB/2; ON = DC/2; ⇒ MN = (AB + DC)/2, MN > AD; oblica mai lungă decât perpendiculara, {O} = AC ∩ BD, M și N mijloacele bazelor AB și DC, M, O, N coliniare; **§47)** se află diagonalele și se arată ca ΔAOD isoscel ⇒ bisectoarea din vârf este și înălțime; **§48)** se calculează BC și AC prin metoda scoaterii factorului comun și apoi se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; **§49)** fie CD ⊥ AB, 2AB = 3AC ⇒ AB/3 = AC/2 = k ⇒ se calculează CD, AD, DB și CB în funcție de k și se verifică relația cerută; **§50)** a) se duce NH ∥ BC, H ∈ (OC) ⇒ NH = BC/2, cum OP = linie mijlocie ⇒ OP = BC/2 și OP ∥ BC ∥ NH ⇒ ONHP paralelogram ⇒ [NE] ≡ [PE]; b) din ΔOGP ~ ΔAGD ⇒ GP = GA/2 ⇒ GP = AP/3 cum QP = AP/2 ⇒ QP/GP = 3/2; c) se află QN prin teorema lui Pitagora în ΔQTN, TN ∥ AB, T ∈ (AC), se calculează QP în ΔQPO, din [QP] ≡ [QN] ⇒ ABCD pătrat; **§51)** a) se aplică teorema catetei pentru AB și AC și se calculează raportul $AC^2/AB^2$; b) se inlocuiesc BD, CD și AD în funcție de laturile triunghiului; c) se ridică la pătrat relația dată ⇒ 2 AC AB ≤ $BC^2$ dar AC AB = AD BC ⇒ 2 BC AD ≤ $BC^2$ ⇒ 2AD ≤ BC, dar BC este dublul medianei corespunzătoare ipotenuzei și mediană este mai mare sau egală decât înălțimea.

**Elemente de trigonometrie :** ∗∗§4) AB= 24 cm; AC= 18 cm; §5) DB = $6\sqrt{5}$ cm; AC = $12\sqrt{5}$; §6) $24\sqrt{5}/5$ cm; §7) $\left(8\sqrt{2}+16\right)$ cm; §8) a)76 cm b) 52 cm; §9) AD = $4\sqrt{3}$ cm; linia mijlocie = $6\sqrt{3}$ cm; §10) P = 68cm; sin(∢AOB) = 120/169; §11) se duce AE ⊥ DC, E ∈ (DC) ⇒ P = $\left(8\sqrt{2}+8\sqrt{3}+8\right)$ cm; §12) $20+16\sqrt{2}$; §13) P = 44 cm ; §14) se observă că triunghiul este dreptunghic, AE= 240/17 cm, sin(∢B)= 30/34. ∗∗∗ **§17)** se duce AE ⊥ BD, E ∈ (BD) ⇒ AD = 12 cm ⇒ linia mijlocie = 15 cm; **§18)** sin (∢BDC) = $\sqrt{5}/5$ și cos(∢ADB) = $2\sqrt{5}/5$; **§19)** sin(∢EAD) = $\sqrt{10}/10$; **§20)** tg(∢C)=16/30, sin(∢AEB)= $\sqrt{10}/10$ și tg(∢BEC)= 4/3; **§21)**a) se aplică formulele pentru sin(∢B) și cos(∢B); b) cos(∢B) și sin(∢B) sunt numere subunitare care prin ridicare la putere se micșorează; c) se împarte relația la $5^n$ și se observă că 3/5 = sin(∢B) și 4/5= cos(∢B) pentru triunghiul dreptunghic de laturi 3 cm,4 cm și respectiv 5 cm, ajungând la expresia de la punctul b).

**Aplicații : arii :** ∗∗§2) P = 64 cm; A = 192 $cm^2$ ; §3) A = $\left(36+12\sqrt{3}\right)$ $cm^2$; §4) se duce înălțimea corespunzătoare laturii AC și se calculează aceasta prin teorema lui Pitagora în ambele triunghiuri dreptunghice ce s-au format; A = 924 $cm^2$ și se calculează celelalte două înălțimi din formula ariei aplicată fiecarei laturi și înălțimi corespunzătoare; **§5)** P= 50 cm; **§6)** BC = $8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ cm; §7) BC = 14 cm; AD = $40\sqrt{3}/7$ cm; §8) P = $\left(8+8\sqrt{2}\right)$ cm; §9) $A_{\Delta ABD}$ = 45 $cm^2$ ; $A_{\Delta ACD}$ = 39 $cm^2$ se calculează BD și DC prin teorema bisectoarei; §9) sin(∢B) = 15/39; cos(∢C) = 4/5; A = 420 $cm^2$; §10) A = $35\sqrt{3}/2$; sin(∢B) = $3{,}5\sqrt{3}/\sqrt{79}$ ; **§11)** se arată că ΔAPN ≈ ΔABC în raportul de asemănare 1/4 ⇒ raportul ariilor = 1/16 $A_{\Delta APN}$ = $A_{\Delta EQR}$ = $A_{\Delta PEN}$ = $A_{\Delta EFD}$ = $A_{\Delta RQC}$ ⇒ $A_{\Delta EFD}$ = 9$cm^2$ , $A_{NFER}$ = 3/16 din $A_{\Delta ABC}$; $A_{TDMB}$ = 2/16 din $A_{\Delta ABC}$; **§12)** 100/3$cm^2$; **§18)** h = 168/25 cm, A = 168 $cm^2$ **§19)** h = 390/17 cm, se duce CE ⊥ DB, E ∈ (DB) și se calculează EC, ED și EB, apoi se observă că ΔDEC ≈ ΔDFB, BF⊥DC, F ∈ DC, A = 390 $cm^2$; **§20)** A = $36\sqrt{3}$ ; **§21)** A = 84 $cm^2$; **§22)** $A_{\Delta AED}$ = $\left(6+9\sqrt{3}\right)$ $cm^2$; $A_{ABCD}$ = $\left(12+9\sqrt{3}\right)$; **§23)** $A_{\Delta AED}$= $\left(9\sqrt{3}-6\right)$ $cm^2$ ; $A_{ABCDE}$ = $\left(6+9\sqrt{3}\right)$ $cm^2$; **§24)** $A_{\Delta AED}$ = 4 $cm^2$ ; $A_{\Delta EAB}$ = ($A_{ABCDE}$ − $A_{\Delta BEC}$)/2 = 6 $cm^2$ ; $A_{GHCB}$ = 15 $cm^2$; **§25)** 96$cm^2$ . **§26)** 240 $cm^2$; **§27)** 25 $cm^2$; **§28)** 120 $cm^2$; **§29)** 12 cm; **§30)** 432 $cm^2$; **§31)** din ΔADE ≈ ΔABC se calculează latura pătratului ⇒ $A_{\Delta ADE}$ = 432/49 $cm^2$ și $A_{\Delta EFC}$ = 768/49 $cm^2$ ; **§32)** 57600/529 $cm^2$; **§33)** a) 144 $cm^2$ b) $40\sqrt{3}$ $cm^2$ ; c) $16\sqrt{3}$ $cm^2$ ; d) 80 $cm^2$ **§34)** a) 51 $cm^2$; b) $125\sqrt{3}/2$ $cm^2$; c) 204 $cm^2$; **§35)**30 $cm^2$; **§36)** a) 192 $cm^2$; b) $12\sqrt{3}$ $cm^2$; c) 768 $cm^2$; **§37)** fie înălțimile EO⊥BC, E ∈ (BC), OF ⊥ AB, F ∈ (AB), ele sunt linii mijlocii; ∗∗∗ **§40)** se află aria din 2$A_{\Delta ADE}$ + 2$A_{\Delta ODC}$ − $A_{ABCD}$ = $2\sqrt{3}$ $cm^2$; {O} = FC ∩ DE; **§41)** se calculează aria din 2$A_{\Delta EBA}$ + 2$A_{\Delta AOD}$ − $A_{ABCD}$ = 4,5 $cm^2$; {O}= AE ∩ DF; **§42)** $9\sqrt{3}$ $cm^2$; **§43)** $A_{MNPQ}$ = MN NP = (BC/2) (AD/2) = $A_{ABCD}$/2, pentru ca NP linie mijlocie in ΔADC, AD⊥BC, D ∈ (BC); **§44)** $A_{\Delta MDC}$ = MN DC/2 = AD DC/2 = $A_{ABCD}$/2 unde MN⊥ DC, N ∈ (DC); **§45)** $A_{MNPQ}$ = MN NP = (BD/2) (AC/2) = $A_{ABCD}$/2; **§46)** 24 $cm^2$; **§47)** A = 108,P= $\left(24+2\sqrt{85}\right)$ cm; **§48)** AE = $AB\sqrt{5}/5$ ; **§49)** $A_{\Delta AOB}$ = 12 $cm^2$; $A_{\Delta DOC}$ = 27 $cm^2$ , $A_{\Delta BOC}$ = $A_{\Delta AOD}$ = ($A_{ABCD}$ − $A_{\Delta AOB}$ − $A_{\Delta DOC}$)/2 = 18 $cm^2$; **§50)** se arată că ΔBCM ≡ ΔADB ≡ ΔDBC ≡ ΔDCK.

## *Capitolul XIV* : Cercul

**Arce, coarde, unghi la centru, unghi înscris :** ∗∗ §9) a)OD bisectoare ⇒ ∢AOD ≡ ∢DOC ⇒ m(∢AOD) = 36° ⇒ ∢DOA ≡ ∢CBA ⇒ OD ∥ BC ⇒ BCDO trapez; b) ΔOCE ≡ ΔDOC ⇒ [OD] ≡ [CE] și OD ∥ CE ⇒ OECD paralelogram; c) ΔOBE ≈ ΔCBO ⇒ $OB^2$ = CB OE = CB DC; §10) a) DM ∥ AN, DN ∥ AM, AD bisectoarea unghiului ∢A ⇒ AMDN romb; b) ∢DAC ≡ ∢DFC ≡ DC/2, dar ∢DAC ≡ ∢ADF ⇒ ∢ADF ≡ ∢DFC ⇒ AFCD trapez inscris într-un cerc ⇒ trapez isoscel, analog BDAE trapez isoscel; ∗∗∗§11) ducem AD⊥BC, D ∈ (BC) și BE⊥AC, E ∈ (AC), H ortocentru, AD intersectează cercul în H'. Să arătăm că [HD] ≡ [H'D] m(∢H'BC) = m(H'C)/2 = m(∢CAD), dar ∢CAD ≡ ∢EBC (au complementul comun ∢C) ⇒ ∢EBC ≡ ∢H'BD ⇒ ΔHBD ≡ ΔH'BD; §12) fie {M} = BC ∩ C(O;OA), O mijlocul lui AB, {N} = BC ∩ C(O';O'A) unde O' mijlocul luiAC, AB diametru ⇒ m(∢AMB) = 90°, AC diametru ⇒ m(∢ANC) = 90° ⇒ AM și AN înălțimi ⇒ M = N.

**Tangenta la cerc, triunghi înscris și circumscris, patrulater înscris și circumscris :** ∗∗§3) a) ΔAOC ≡ ΔAOB ⇒ ∢BAO ≡ ∢CAO ⇒ O ∈ bisectoarei unghiului ∢A; b) 45/4 cm; §4) tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente ⇒ suma bazelor este egală cu suma laturilor neparalele; §6) a) 3 cm; b) 3 cm; §7) a) 13 cm; b) 25/2 cm; c) 169/5 cm; §8) fie O centrul cercului OM ⊥ AD, ON ⊥ DC, OP ⊥ BC, OQ ⊥ AB, dacă AM =

x ⇒ [MD] ≡ [DN] ≡ [ON] ≡ [OM] ≡[OQ] ≡ [AQ] ≡ [OP] ≡ [AM], QB = BP = 2 – x, NC = PC = 6 – x ⇒ A = 12 $cm^2$; ***§9) a) ∢BEC ≡ ∢BDC ⇒ BEDC inscriptibil, m(∢AEO) + m( ∢ADO) = 180° ⇒ AEOD inscriptibil; b) să arătăm că DF⊥MD, ∢MDC ≡ ∢MCD (ΔMCD isoscel), ∢MCD ≡ ∢AED (EDCB inscriptibil), ∢AED ≡ ∢AOD (AEOD inscriptibil), ∢AOD ≡ ∢FDO (ΔFDO isoscel) ⇒ ∢MDC ≡ ∢FDO, m(∢MDC) + m(∢MDB) = 90° ⇒ m(∢FDO) + m(∢MDB) = 90° ⇒ MD⊥FD ⇒ MD tangenta. Analog ME⊥EF;c) m(∢FEM) + m(∢FDM) = 180° ⇒ EMDF inscriptibil; d) centrul cercului circumscris lui MEFD este chiar mijlocul lui FM; §10) a) AB diametru ⇒ m(∢AMB) = 90° ⇒ BM înălțime, AC diametru ⇒ m(∢ANC) = 90° ⇒ CN înălțime ⇒ ∢BMC ≡ ∢BNC ⇒ BNMC inscriptibil; b) m(∢BMC) = 90° ⇒ BC diametrul cercului circumscris lui BNMC ⇒ centrul este mijlocul lui BC; §11) a) ΔAFE ≈ ΔABC pentru că ∢A e comun și ∢AEF ≡ ∢ACB pentru că EFCB inscriptibil; Analog ΔDFC ≈ ΔABC ≈ ΔDBE; b) ∢EDH ≡ ∢EBH ( EBDH inscriptibil), ∢FDH ≡ ∢FCH (FCDH inscriptibil), m(∢EBH) = 90° – m(∢A), m(∢FCH) = 90° – m(∢A) ⇒ m(∢EDF) = 180° – 2m(∢A); §14) a) AB diametru ⇒ m(∢ACB) = m(∢ADB) = 90° ⇒ m(∢ECF) = m(∢EDF) =90° ⇒ ECDF inscriptibil; b) vezi problema 15); §15) a) BC = rază ⇒ ΔCOB echilateral ⇒ ΔADO echilateral, arcele BC ≡ AD ⇒ ABCD trapez isoscel; b) se calculează m(∢MAP) = 180°– m(∢DAC) = 105°, m(∢MBP) = 105° ⇒ nu este inscriptibil; c) MP bisectoarea ∢APB (ΔAMP ≡ ΔBMP), PO bisectoarea ∢DPC (ΔPDO ≡ ΔPCO) ⇒ O, M, P coliniare; §16)a) se notează AC = x ⇒ BC = 2x, AB = $x\sqrt{3}$ cm, CO = OB ⇒ raza cercului înscris este $x/\left(\sqrt{3}+1\right)$, fie IG⊥ AB, IE⊥ AC și IF⊥CB ⇒ [AE] ≡ [EI] ≡ [IG] ≡ [AG] ≡ [IF]; EC = CF = $x\sqrt{3}/\left(\sqrt{3}+1\right)$; FO = $x/\left(\sqrt{3}+1\right)$ ⇒ [FO] ≡ [FI] ⇒ ΔFIO dreptunghic isoscel ⇒ m(∢IOB) = 135° ⇒ ΔIOB inscriptibil; b) ΔAIE ≡ ΔIOF; §17) a) AD/BC = AO/BO (ΔAOD ≈ ΔBOC) și CO/BO = DC/AB (ΔAOB ≈ ΔDOC) ⇒ AD/BC = DC/AB; b) presupunem că B, O, D nu sunt coliniare ⇒ BD intersectează AC în O' ⇒ AD/BC = AO'/BO' (ΔAO'D ≈ ΔBO'C), DC/AB = CO'/BO' (ΔAO'B ≈ ΔDO'C) ⇒ AO'/BO' = CO'/BO' ⇒ O' mijloc ⇒ O = O'; §18) a) ΔOA'E ≡ ΔOCE dreptunghice (I.C.) ΔOA'E ≡ ΔOAB dreptunghice (C.U.), ∢A ≡ AC/2 ≡ ∢A'OE); b) [OE] ≡ [AB] (din a), ∢A'OE ≡ ∢OAB ⇒ OE || AB ⇒ paralelogram; c)∢CEO ≡ ∢OEA' ≡ ∢EOB ⇒ trapez isoscel; d) ΔAOB ≈ ΔACA' (∢AOB ≡ ∢ACA'), BC = $5r\sqrt{13}/13$. §19) a) [EC] ≡ [MC] ≡ [CF] ⇒ [BC] ≡ [EF], se calculează în funcție de razele cercurilor în trapezul dreptunghic OEFO'; b) EC⊥OE, CF⊥O'F și CM⊥OO' unde [EC] ≡ [CM] ≡ [CF] (raze în semicercuri de diametru EF tangent la OE, O'F, OO'; c) EE' || BC || FF' și cum [EC] ≡ [CF] ⇒ [TM] ≡ [MR], {T} = EE' ∩ AO și {R} = FF' ∩ AO. Ducem MQ⊥AC, Q ∈ (AC) și CS⊥FF', S ∈ (FF') ⇒ ΔMQC ≡ ΔCSF ⇒ [MQ] ≡ [CS] ≡ [MR] ⇒ EFF'E' poate fi circumscris unui cerc de centru M , MT, MQ, MR raze, tangent la EE', FF', EF și E'F'.

**Pozițiile relative a două cercuri :** **§3) a) m(∢ABD) = m(∢ABC) = 90° pentru că se opun diametrelor ⇒ m(∢DBC) = 180° ⇒ D, B, C coliniare; b) ΔODB ≈ ΔOCB (isoscele) ⇒ ∢D ≡ ∢C ⇒ ΔABD ≡ ΔABC ⇒ cercuri congruente; §4) AB și CD tangente cercului mic ⇒ se află la aceeași distanță de O ⇒ [AB] ≡ [CD] ⇒ ΔOAB ≡ ΔOCD ⇒ ∢AOB ≡ ∢COD ⇒ C, O, B ⇒ coliniare A, O, D coliniare ⇒ ∢CDO ≡ ∢OAB ⇒ CD || AB și [CD] ≡ [AB] ⇒ ABDC paralelogramînscris în cerc ⇒ dreptunghi; ***§9) a) ΔOAB și Δ O'AB' sunt isoscele, ∢A este comun ⇒ ∢B ≡ ∢B' ⇒ BD || B'D' ; b) BC ⊥ AB' și B'C' ⊥ AB' ⇒ BC || B'C'; c) ΔAOD și ΔAO'D' isoscele cu ∢AOD ≡ ∢AO'D' ⇒ ∢OAD ≡ ∢O'AD' ⇒ A, D, D' coliniare; d) m(∢ADC) = m(∢AD'C') = 90° ⇒ DC || D'C'; §10) a) fie BC ∩ AD = {H}, ABCD trapez ⇒ ΔABH ≈ ΔDCH ⇒ AB/CD = AH/DH ⇒ AO/DO' = AH/DH și ∢OAH ≡ ∢HDO' ⇒ ΔAOH ≈ ΔDO'H, A, H, D coliniare ⇒ O, H, O' coliniare ⇒ BC, AD, OO' concurente; b) {M} = AC ∩ BD; {P} = MO ∩ CD ⇒ MO mediană; DP/BO = MP/MO =CP/AO ⇒ [PD] ≡ [CP] ⇒ P mijlocul lui CD ⇒ P = O; §11) a) m(∢BDC) = m(∢BEC) = 90° ⇒ BEDC inscriptibil; b) centrul cercului circumscris ΔABC isoscel aparține înălțimii AO; centrul cercului circumscris patrulaterului AEOD este mijlocul lui AO ( AO se opune ∢ADO drept ⇒ AO diametru); c) fie O' mijlocul lui AO, AO = 5/4 cm,AO' = 5/8 cm, AO'' = 125/8 cm, O'' centrul cercului circumscris ΔABC ⇒ O'O'' = 15 cm.

## *Capitolul XV* : Poligoane regulate

*§1) $10\sqrt{3}/3$ cm; ** §2) 36 $cm^2$ ; §3) $48\pi$ $cm^2$; §4) 25/2 $cm^2$; §5) $12\sqrt{3}$ $cm^2$; §6) $50\sqrt{3}$ $cm^2$; §7) $150\sqrt{3}$ $cm^2$; §8) $432\sqrt{3}/25$ $cm^2$; §9) $3\sqrt{3}/8$ ; §10) $4\sqrt{3}\pi$ cm; §11) 1/2; §12) $3\pi$ $cm^2$; §13) $3\sqrt{3}/2$ ; §14) $64\pi/3$ $cm^2$; §15) $16\sqrt{2}$ cm; §16) $50\sqrt{2}$ ; §17) 72 $cm^2$; §18) $48\sqrt{3}$ $cm^2$; §19) A = $12\pi$ $cm^2$; L = $4\pi\sqrt{3}$ cm; §20) $A_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$ $cm^2$; $A_{\Delta ACF}$ = $8\sqrt{3}$ $cm^2$; $A_{EFCD} = 12\sqrt{3}$ $cm^2$; §21) $\left(18\sqrt{3}-6\pi\right)$ $cm^2$ ; §22) $\left(36\sqrt{3}-16.5\pi\right)$ ; §23) $(100-26\pi)$ $cm^2$; §24) $\left(36\sqrt{3}-18\pi\right)$ $cm^2$ ***§27) ABCD trapez isoscel, MN linie mijlocie ⇒ BCNM trapez isoscel; b) $48\pi$ $cm^2$; §28) l = $12\sqrt{3}$ cm, L = 24 cm; §29) a) A = $\pi R^2/3 - R^2\sqrt{3}/2$ ; b) $\pi R^2 a^\circ/360^\circ - \left[R^2 \operatorname{tg}(a^\circ/2)\right]/2$ ; c) $\pi R^2/4 - R^2/2$ ;

## *Capitolul XVII :* Recapitulare finală

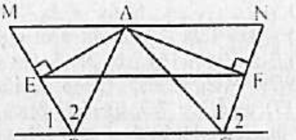
§1) a) $-10\sqrt{3}$ ; b) $\sqrt{2}$ ; c) $27\sqrt{2}$ ; d) $\left(\sqrt{6}-5\right)/\sqrt{3}$ ; e) 0; f) $-\sqrt{2}$ ; g) $\left(6-4\sqrt{6}\right)/\left(2-3\sqrt{6}\right)$ ; §2) a) $21\sqrt{10}$ ; b) $10\sqrt{6}-246$ ; c) $58-4\sqrt{2}$ ; d) $25\sqrt{2}+48$ ; e) 15; f) $32\sqrt{15}-64\sqrt{3}-30\sqrt{2}$ ; g)–20; h) $11\sqrt{2}+6$ ; §3) $2\sqrt{7}$ ;§4) a) 1; b) $12-5\sqrt{3}$ ; c) $10\sqrt{2}$ ; d) $7-5\sqrt{2}$ ; §5) $\sqrt{x,(y)-x,(z)} = \sqrt{18x+y+z/9}$ ⇒ $(y+z) \vdots 9$ ⇒ y+z=9 ⇒ $\sqrt{2x+1} \in N$ ⇒ x= 4; (y, z) ∈ {(1; 8); (2; 7); (3; 6); (8; 1); (7; 2); (6; 3)}; §6) $a = \sqrt{(\overline{xy}-x+\overline{xz}-y+\overline{zx}-z)/9 \cdot 10^{1990}}$ ⇒ $a = \sqrt{10(x+y+z)}/3 \cdot 10^{995} \in Q$ ⇒ x + y + z = 10; §7) –4a +1; §8) $\sqrt{4-x} \in N$ ⇒ x ∈ {3; 4}; $\sqrt{7-y} \in N$ ⇒ y ∈ {3; 6; 7} și $\sqrt{12-z} \in N$ ⇒ z ∈ {3; 8; 11; 12}. $\sqrt{x-y+z} \in N$ ⇒ (3; 3; 3); §9) 3(2x + 1)/(3x + 1) = 2 + 1/(3x + 1) ∈ Z ⇒ 3x + 1 ∈ {1; –1} ⇒ x = 0; analog (x – 2)/ (4x + 1) ∈ Z ⇒ x ∈ {–1; 0; 2}; x comun ⇒ x = 0; §10) $\overline{ab}$ ∈ {39; 45; 60} ; §11) ultima cifră a numărului de sub radical este 7 ⇒ nu este pătrat perfect; §12) $a = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ ; $b = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ ; ab = 6; p = 2; §13)

a) $6x^2-11x-2$; b) $6x^2+2x-10$; c) $13x^2-25x-3$; d) $11x^2-12x-27$; e) $-2x^3-4x^2-7x+1$; f) $6a^4b+9a^3b^2$; g) $-4x^2-2x-3$; h) $7x+6$; i) $14x-x^2-12$; j) $2x^2-4x-10$; k) $-6x^2+5ax+9ax^3-4a^2-3a^2x^2$; l) $-5x^2$; §14) a) $7+10x-16x^2$; b) $25x^2/4-y^2/9$; c) $-16x^2/225+3/4$; d) $-13x^2/9+724x^4/225$; e) $x^3/3-y^2/2$; §15) a) 16/5; b) 9; c) 49/29; d) $\varnothing$; e) 16/5; f) $-9/8$; g) 12/58; h) 21/12; i) $-5/2$; j) $-7/3$; k) 3; l) $-1$; §16) a) $n=2$; b) $n=1$; c) $x=0$; d) $n=3$; §17) a) $-5/2$ și 7/2; b) $-6$ și 8; c) 37/64; d) $\varnothing$; e) $-1/5$; f) $-11/15$; §18) a) dacă $m=-1$ $x\in\varnothing$, dacă $m\neq-1\Rightarrow x=3m/(m+1)$; b) dacă $m=1/4$, $x\in\varnothing$, dacă $m\neq 1/4\Rightarrow x=4/(4m-1)$; c) dacă $m=3\Rightarrow x\in\varnothing$; dacă $m\neq3\Rightarrow x=(4+2m)/(3-m)$; d) dacă $m=2\Rightarrow x\in R$, dacă $m\neq2\Rightarrow x=2/7$; e) dacă $m=-2\Rightarrow x\in R$, daca $m\neq2\Rightarrow x=1/3$; f) dacă $m=-1/2\Rightarrow x\in R$, dacă $m\neq-1/2\Rightarrow x=3m$; §19) a) $15x^2+20x+15$; b) $7x^2-16x\sqrt{3}+79$; c) $29x^2/5+86y^2/9-4xy/3-6xy\sqrt{5}$; d) $35x^2/16-35/9+2x$; §20) a) $(2-3x)^2$; b) $(3x-2y)(3x+2y)$; c) $(-3)(2x+3)$; d) $(6x-2)(4-2x)$; e) $3y(2x-y)$; f) $(3x^3+2)(x^3-2)$; g) $(3x^2+3x-y^2)(3x^2+3x+y^2)$; h) $(2-ab)(11ab-2)$; i) $(5x+y+3)(5x-y-3)$; j) $(b+2a)(5x+2y)$; k) $(1+2a)(7+3a^2)$; l) $(-a-4b)(3a+2b)$; m) $(5b+1)(2a^2+3a+4)$; n) $(a^2+2ab-4b^2)(a+2b)^2$; o) $(3y+x+z)(3y+x-z)$; p) $(a-b)(b-c)(a-c)$; §21) $x^2<(3-\sqrt{2})^2\Rightarrow\sqrt{2}-3<x<3-\sqrt{2}\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}$; §22) $a=\left|\sqrt{2}-2\right|+\left|2+\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{3}-3\right|+\left|\sqrt{3}+3\right|+\ldots+\left|\sqrt{n}-n\right|+\left|\sqrt{n}+n\right|$ $=4+6+\ldots+2n=n^2+n-2=n^2-1+n-1=(n-1)(n+2)$, dacă $a\,\vdots\,3\Rightarrow(n-1)\,\vdots\,3$ sau $(n+2)\,\vdots\,3\Rightarrow n=3k+1$ sau $n=3p+1$ $\Rightarrow$ dacă $n=3r+1\Rightarrow(n-1)\,\vdots\,3$ și $(n+2)\,\vdots\,3\Rightarrow a\,\vdots\,9$; §23) $m=0$, $m^{1999}=0$; §24) $a=1$; $b=1$; $(2a-b)/(a+2b)\in Q$; §25) efectuînd calculele expresia devine $2(x+y)-3=9$; §26) $E=\left|x-3\right|+\left|2x-y\sqrt{5}\right|+\left|3-2\sqrt{2}\right|=5-2\sqrt{2}$; §27) a) $a=1+\sqrt{5}$; $b=\sqrt{5}-1$; $E=\left(\sqrt{5}+3\right)/2$; §28) $a=\sqrt{3}$; $b=\sqrt{2}\Rightarrow(a+b)/(a-b)-2\sqrt{6}=\left(5\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)/\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=5\in Q$. §29) a) $ad=bc=k>0\Rightarrow\sqrt{k^2}=(k+k)/2$; b) $\sqrt{(a+c)(b+d)}=\sqrt{ab+2ad+cd}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ pentru că $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}=\sqrt{abcd}=\sqrt{ad\cdot bc}=\left(\sqrt{ad}\right)^2=ad$; §31) 1000 lei; 1000 lei; §32) 1litru de 10%; 3litri de 6%; 12 litri de 3% și se obțin 16 litrii; §33) 12 km/h; §34) a) 1500 $cm^2$; b) 120 $cm^2$; §35) 140.000 lei; §36) $135\sqrt{7}/4$ $cm^2$; §37) $45^0$; $60^0$; $75^0$; $A=\left(9+3\sqrt{3}\right)/2$ $cm^2$; §38) se demonstrează că $AK=BK/4\Rightarrow AK=2$ cm; §39) se știe că în orice triunghi o latură este mai mică decât suma celorlalte două $\Rightarrow$ se aplică în AOB, BOC și COD; AOD; §40) a) în $\Delta ADC$, M ortocentru; b) ABCD romb $\Rightarrow[AD]\equiv[DC]\Leftrightarrow$ DM bisectoare $\Leftrightarrow$ D, M, B coliniare; §41) b) în $\Delta BFE$, H este ortocentru $\Rightarrow BF\perp HE$, dar $HE\parallel BC\Rightarrow BF\perp BC$; §42) se calculează toate unghiurile și se ține seama de $\Delta BCE$ isoscel; §43) $AD\cap BC=\{M\}$, din $\Delta MAQ\sim\Delta MPC\Rightarrow MA/MP=MQ/MC\Rightarrow MA\cdot MC=MP\cdot MQ$; din $\Delta MAB\sim\Delta MDC\Rightarrow MA/MD=MB/MC\Rightarrow MA\cdot MC=MB\cdot MD\Rightarrow MP\cdot MQ=MB\cdot MD\Rightarrow\Delta MPQ\approx\Delta MDQ\Rightarrow PB\parallel DQ\Rightarrow$ trapez; §44) a) $EF=(DC-AB)/2=QA$ pentru că ABCD este trapez isoscel; b) $CD=8$ cm; $AB=14$ cm; $AD=BC=6$ cm; §45) a) se formează paralelogramele ACBP și AQCB $\Rightarrow AP\parallel BC\parallel AQ\Rightarrow$ BPQC trapez; b) isoscel; §46) se observă $\Delta ODM\sim\Delta BDA$ și $\Delta OBN\sim\Delta DBC$; §47) $\sphericalangle ACF\equiv\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle ACF\equiv\sphericalangle CAD$ pentru că $CF\parallel AD\Leftrightarrow\sphericalangle CAD\equiv\sphericalangle BAD$, AD bisectoare; §48) a) $\sphericalangle ABM+\sphericalangle MBC+\sphericalangle NCB+\sphericalangle DCN=180^0$, $\sphericalangle P+\sphericalangle MBC+\sphericalangle NCB=180^0\Rightarrow\sphericalangle P=\sphericalangle ABM+\sphericalangle NCD\Rightarrow\sphericalangle P=2\sphericalangle ABM\Rightarrow$ bisectoarea este paralelă cu AB; b) bisectoarea unghiului $\sphericalangle P$ intersecteaza AB și BC in Q respectiv $S\Rightarrow AM/BM=MQ/MP=NQ/NP=DN/CN$, s-a folosit teorema bisectoarei; §49) notăm $AC\cap DM=\{P\}$, $AC\cap BD=\{O\}$, $AC\cap DN=\{Q\}$, ducem prin O o paralelă la BC care intersectează DN în $S\Rightarrow$ OS linie mijlocie în $\Delta DBN\Rightarrow OS=BN/2=BC/4$; $\Delta OSQ\approx\Delta CNQ\Rightarrow OQ=1/2$din QC; analog $OP=1/2$ din $AP\Rightarrow[OQ]\equiv[OP]\Rightarrow OQ=OP=1/3$ din $OC\Rightarrow AP=PQ=1/3$ din AC; §50) c.m.m.d.c.-ul catetelor este $3\Rightarrow AB=3x$ și $AC=3y$, $x,y\in N\Rightarrow$ aplicând teorema lui Pitagora $x^2+y^2=25\Rightarrow x=3$; $y=4\Rightarrow A=54$ $cm^2$; §51) în $\Delta ABC$ se duce bisectoarea AD și prin D se duc paralelele la AB și $AC\Rightarrow$ se formează un pătrat; din asemănarea triunghiurilor $\Rightarrow$ latura pătratului este $4\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm și lungimea bisectoarei este $4\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm; §52) se observă că $\Delta ADC$ și $\Delta DBC$ sunt isoscele $\Rightarrow[AD]\equiv[DC]\equiv[BC]$; b) $\Delta BDC\sim\Delta BCA$; §53) o mediană este congruentă cu jumătățile laturii pe care cade $\Rightarrow$ triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow A=26\sqrt{7}$ $cm^2$; §54) paralela prin O la baze este împărțită de O în două părți congruente, cum mediană în $\Delta MDC$ imparte orice paralela la DC în două părți egale $\Rightarrow$ O,M și mijloacele bazelor sunt coliniare; §55) a) $[DF]\equiv[AD]$ și $\Delta BEG\sim\Delta BAD$ cu raportul de asemănare 1/2 pentru că $BE=AB/2$; $GE=AD/2=DF/2$; b) se arată că $\Delta AGD$ echilateral c) GF este linie mijlocie în $\Delta BDC$; d) AGFD romb $\Rightarrow BD\perp AF$; §56) DE linie mijlocie în $\Delta ABC\Rightarrow$ E mijloc $\Rightarrow$ EG linie mijlocie în $\Delta ADC\Rightarrow$ G mijloc; DF linie mijlocie în $\Delta ABC\Rightarrow$ F mijloc $\Rightarrow$ HF linie mijlocie în $\Delta ABD\Rightarrow$ H mijloc; §57) 270 $cm^2$; §58) $BC=8$ cm; $AB=10$ cm; $DC=14$ cm; §59) se duce $AD\perp BC$, $D\in(BC)\Rightarrow A=150$ $cm^2$; $P=60$ cm; §60) $L\cdot l=192$ $cm^2$ și $4l=3L\Rightarrow L=16$ cm, $l=12$ cm; §61) $(2x+2)^2=(2x-2)^2+(2x)^2 x=4\Rightarrow A=24$ $cm^2$; §62) $P=\left(6\sqrt{3}+2\sqrt{6}+6\right)$cm; §63) $A=84$ $cm^2$; $\sin\sphericalangle C=4/5$; $AE=8$ cm; §64) $\Delta ADC$ dreptunghic $\Rightarrow h=24$ cm $\Rightarrow AB=3$ cm $\Rightarrow$ linia mijlocie este 10cm $\Rightarrow A=240$ $cm^2$; §65) $\Delta DBC$ dreptunghic $\Rightarrow AD=120/17$ cm și $A=25440/289$ $cm^2$; §66) centrul cercului este în exteriorul trapezului, raza este $5\sqrt{185}/8$ cm; §67) 48 cm și 32 cm; §68) $\Delta ABC$ și $\Delta ADC$ sunt dreptunghice $\Rightarrow A_{\Delta ABC}=16$ $cm^2$ și $A_{\Delta ADC}=8\sqrt{3}$ $cm^2$; §69) $m(BC)=60^0\Rightarrow m(AC)=120^0$, BD bisectoare $\Rightarrow m(AD)=m(DC)=60^0\Rightarrow$ ABCD trapez isoscel $\Rightarrow A=27\sqrt{3}$ $cm^2$; aria triunghiului echilateral este $27\sqrt{3}$ $cm^2$; §70) $BD=24$ cm; $AB=15$ cm; raza este înălțimea în $\Delta AOD\Rightarrow$ raza este $36/5\Rightarrow$ aria pătratului este 2592/25 $cm^2$; §71) a) $A_{ABCD}=192$ $cm^2$; b) aria cercului este $100\pi$ $cm^2$; c) $\Delta DAB\equiv\Delta DEB$, $\Delta DEB\equiv\Delta BCD\Rightarrow$ trapez isoscel.

## *Capitolul XVIII* : Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare

§1) $a=\sqrt{7-5\sqrt{3}+\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{7-5\sqrt{3}+5-\sqrt{3}}=\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}=\left|3-\sqrt{3}\right|=3-\sqrt{3}$; $b=\sqrt{5-5\sqrt{3}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{5-5\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$; $a-b=3-\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)=3-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=1$, deci $a-b$

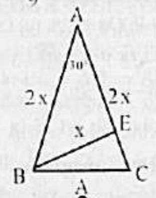
este număr rațional. §2) Prin A se duce paralela la BC care intersectează bisectoarele exterioare BE și CF în M, respectiv N. MN || BC și MB secantă $\Rightarrow \sphericalangle M \equiv \sphericalangle B_2$ (alt. int.) și $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$ (ipoteză) $\Rightarrow \sphericalangle M \equiv \sphericalangle B_1$; $\triangle AMB$ isoscel, $[AM] \equiv [AB]$. $\triangle AMB$ ($[AM] \equiv [AB]$ și $AE \perp BM$ $\Rightarrow$ E = mijloc [MB]. Analog F = mijlocul [CN], deci EF este linie mijlocie in trapezul BCNM (BC || MN)




E = mijloc [MB]. Analog F = mijlocul [CN], deci EF este linie mijlocie în trapezul BCNM (BC || MN) $\Rightarrow$

$EF = \frac{MN + BC}{2} = \frac{AM + AN + BC}{2} = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{P_{ABC}}{2} = 20 \Rightarrow P_{ABC} = 40$ cm. §3) $\overline{a,(b)} = \frac{9a+b}{9}$; $\overline{b,(c)} = \frac{9b+c}{9}$

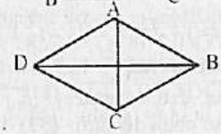
$\overline{c,(a)} = \frac{9c+a}{9}$; $\frac{9a+b}{9 \cdot 51} = \frac{9b+c}{9 \cdot 61}$; $9 \cdot 61a + 61b = 9 \cdot 51 + 51c$. a, b, c consecutive $\Rightarrow$ $a = x$, $b = x + 1$, $c = x + 2$; $9 \cdot 61x + 61(x + 1) = 9 \cdot 51(x + 1) + 51(x + 2)$; $10 \cdot 61x + 61 = 10 \cdot 51x + 11 \cdot 51$; $100x = 500 =$. $x = 5 \Rightarrow a = 5$; $b = 6$; $c = 7$.



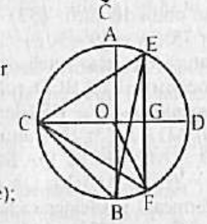

$S = \overline{a,(b)} + \overline{b,(c)} + \overline{c,(a)} = 5\frac{6}{9} + 6\frac{7}{9} + 7\frac{5}{9} = 20$. §4) A = 72 cm, $x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2} \Rightarrow$

$AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm. $AE = 3\sqrt{6} \Rightarrow EC = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{6} \Rightarrow BC = 6\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$;

$P_{\triangle ABC} = 12\sqrt{2} + 6\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. §5) c). $p = n(n + 3)(n + 1)(n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 =$ $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$ dacă $t = n^2 + 3n$ atunci $p = (n^2 + 3n + 1)^2$. Exemple : a). $p = 11^2$; b). $p = 19^2$. §6) Notează rombul ABCD ca în figura alăturată, pentru că BD > AC.

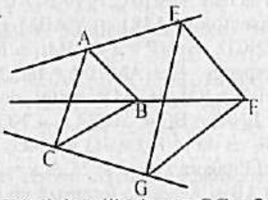



$\frac{AC \cdot BD}{2} = 540 \Rightarrow AC \cdot BD = 1080$. Dar $\frac{AC}{BD} = \frac{8}{15}$; atunci $\frac{1080}{BD^2} = \frac{8}{15}$, deci BD = 45 cm iar AC = 24 cm. §7) a). În $\triangle OGF$, $2GO = OF$ adică $m(\sphericalangle OGF) = 30°$, $\triangle OCF$ este isoscel iar $\sphericalangle OCF \equiv \sphericalangle OFC$. Atunci $\triangle ECF$ e echilateral iar OF bisectoare, deci $OF \perp EC$; b). OD și EF au același mijloc și sunt perpendiculare; c). $m(\sphericalangle CBE) = m(\sphericalangle CFE) = 60°$; $m(\sphericalangle CEB) = 1/2m(BC) = 45°$. §8) a). $\sphericalangle EFG \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle FEG \equiv \sphericalangle BAC$ (unghiuri cu laturile paralele);



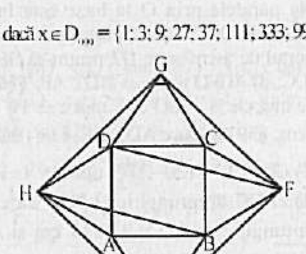

b). $BF \cap CG = \{O\} \Rightarrow \frac{OC}{OG} = \frac{OB}{OF} = \frac{BC}{FG} = r$; $BF \cap AE = \{O'\} \Rightarrow \frac{O'B}{O'F} = \frac{O'A}{O'E} = \frac{AB}{EF} = r$.

Atunci $\Rightarrow \frac{OB}{BF} = \frac{O'B}{BF}$, deci OB = O'B și O coincide cu O'. §9) 0. §10) Fie M și N mijloacele laturilor (AB) și (AC) și $BN \cap CM = \{G\}$. Notând $GN = x \Rightarrow BG = 2x$ și $MG = y \Rightarrow GC = 2y$ (demonstrația aceasta se face notând cu S și T mijloacele lui (BG) și (GC) $\Rightarrow$ MN și ST linii mijlocii în $\triangle ABC$ și respectiv $\triangle GBC \Rightarrow MN \parallel ST$ și $(MN) \equiv (ST) \Rightarrow$ MNTS paralelogram $\Rightarrow (MG) \equiv (GT)$ și $(NG) \equiv (GS)$). Se duce prin C paralela la BN care intersectează AG în Q. În $\triangle AQC$, N mijlocul laturii (AC) $\Rightarrow$ (GN) linie mijlocie $\Rightarrow QC = 2x$. $(BG) \equiv (QC)$ și $BG \parallel QC \Rightarrow$ BGCQ paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele se înjumătățesc $\Rightarrow$ AG mediană în $\triangle ABC$.



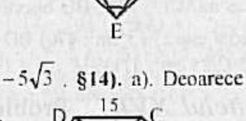

§11) $0,(x) = \frac{x}{9}$; $\overline{0,0(0x)} = \frac{x}{990} \Rightarrow \frac{1}{0,(x)} + \frac{1}{0,0(0x)} = \frac{1}{\frac{x}{9}} + \frac{1}{\frac{x}{990}} = \frac{9}{x} + \frac{990}{x} = \frac{999}{x} \in \mathbb{N}$ dacă $x \in D_{999} = \{1; 3; 9; 27; 37; 111; 333; 999\}$.

Cum x este cifră $\Rightarrow x \in \{1; 3; 9\}$. §12). Alegem $\triangle AEH \equiv \triangle BEF \equiv \triangle CGF \equiv \triangle DGH$. HA = AE = BE = BF = CG = CF = DH = DG (laturi în triunghiul echilateral de latură a) și $\sphericalangle HAE \equiv \sphericalangle EBF \equiv \sphericalangle GCF \equiv \sphericalangle GDH$ $(360° - 90° - 60° - 60°)$; $\triangle AEH \equiv \triangle BEF \equiv \triangle CGF \equiv \sphericalangle DGH \Rightarrow HE = EF = FG = GH \Rightarrow$ EFGH pătrat. b). $\triangle HEB \equiv \triangle FGD$ (L.U.L.: HE = FG (a), BE = CG, $\sphericalangle DGF \equiv \sphericalangle HEB$ (75°)); c). HB = DF (în $\triangle \equiv$ se opun $\sphericalangle \equiv$) și HB = BF (laturi în $\triangle \equiv$) $\Rightarrow$ HBFD paralelogram $\Rightarrow HB \parallel DF$. §13). $a = 5\sqrt{3} + 11\sqrt{5}$; $b = 10\sqrt{3} + 7\sqrt{5}$;




$n = \left|-4\sqrt{5}\right| + |b - a| = 4\sqrt{5} + \left|10\sqrt{3} + 7\sqrt{5} - 5\sqrt{3} - 11\sqrt{5}\right| = 4\sqrt{5} + \left|5\sqrt{3} - 4\sqrt{5}\right|$.

Deoarece $5\sqrt{3} - 4\sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left|5\sqrt{3} - 4\sqrt{5}\right| = -5\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$; $n = 4\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$. §14). a). Deoarece $EF \parallel DC \parallel AB \Rightarrow \triangle PEF \sim \triangle PCD \sim \triangle PAB$. Ținând cont că $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ se află PA = 25/2 cm, PB = 15 cm $\Rightarrow P_{\triangle PAB} = 105/2$ cm. b). Deoarece $\triangle PEF \sim \triangle PAB$ se află PE = 5/2 cm; PF = 3 cm. Calculăm EF = 5 cm $\Rightarrow P_{\triangle PEF} = 21/2$ cm. c). Deoarece $AC \perp BC \Rightarrow \triangle ACB$ este dreptunghic ($m(\sphericalangle ACB) = 90°$). Aplicând teorema lui Pitagora $\Rightarrow$ BC = 15 cm. Considerând $CT \perp AB$, $T \in (AB)$, calculăm CT = 12 cm. Dar [CT] este și înălțimea trapezului. Atunci $A_{ABCD} = 240\ cm^2$.



**Lucrarea este avizată cu numărul 74896/2002 în cadrul Comisiei Naționale de Matematică pentru a fi utilizată în clasă și la pregătirea suplimentară a elevilor.**

Culegerea cuprinde probleme și exerciții corespunzătoare programei școlare a clasei a 7-a, prezentate în diferite grade de complexitate. În funcție de aceasta, exercițiile și problemele au rezultate, indicații sau rezolvări integrale.

Adresându-se tuturor categoriilor de elevi, cartea poate fi folosită și în clasă și în pregătirea individuală, ea devenind un instrument sigur pentru învățarea matematicii.

ISBN 978-606-93132-3-7