2η Σειρά Ασκήσεων στην Τεχνητή Νοημοσύνη

7ο Εξάμηνο, Ακαδημαϊκή Περίοδος 2021 – 2022

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Μητρώου**
Στεφανάκης Γεώργιος	el18436

Άσκηση 1η

1.

$$
\begin{aligned}
&(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \big((r \wedge s) \vee t\big) \equiv \\
&\big((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)\big) \Rightarrow \big((r \wedge s) \vee t\big) \equiv \\
&\neg\big((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)\big) \vee \big((r \wedge s) \vee t\big) \equiv \\
&\big(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(q \vee p)\big) \vee \big((r \wedge s) \vee t\big) \equiv \\
&\big((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)\big) \vee \big((r \vee t) \wedge (s \vee t)\big) \equiv \\
&\big((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big) \vee \big((r \vee t) \wedge (s \vee t)\big) \equiv \\
&\big((p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big) \vee \big((r \vee t) \wedge (s \vee t)\big) \equiv \\
&(p \vee \neg q \vee r \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee r \vee t) \wedge (p \vee \neg q \vee s \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee s \vee t) \equiv \\
&\{[p, \neg q, r, t], [q, \neg p, r, t], [p, \neg q, s, t], [q, \neg p, s, t]\}
\end{aligned}
$$

Αφού ισχύει ότι $p \vee \neg p = q \vee \neg q = 1$.

2.

$$
\begin{aligned}
&\big(\forall x.\forall y.\exists z.\, q(x,y,z) \vee \exists x.\forall y.\, p(x,y)\big) \wedge \neg\big(\exists x.\exists y.\, p(x,y)\big) \equiv \\
&\big(\forall x.\forall y.\exists z.\, q(x,y,z) \vee \exists k.\forall l.\, p(k,l)\big) \wedge \big(\forall i.\forall j.\, \neg p(i,j)\big) \equiv \\
&\Big(\forall x.\forall y.\, q\big(x,y,f(x,y)\big) \vee \forall l.\, p(c,l)\Big) \wedge \big(\forall i.\forall j.\, \neg p(i,j)\big) \equiv \\
&\Big(\forall x.\forall y.\, q\big(x,y,f(x,y)\big) \vee \forall l.\, p(c,l)\Big) \wedge \big(\forall i.\forall j.\, \neg p(i,j)\big) \equiv \\
&\Big(q\big(x,y,f(x,y)\big) \wedge p(c,l)\Big) \wedge \big(\neg p(i,j)\big) \equiv \\
&\Big\{\big[q\big(x,y,f(x,y)\big)\big], [p(c,l)], [\neg p(i,j)]\Big\}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2η

1. $\forall x.\, R(x,x)$
2. $\forall x.\forall y.\, \big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big)$
3. $\forall x.\forall y.\forall z.\, \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big)$

- Προτάσεις 1 και 2:
  Έχουμε $\Delta^I = \{a,b,c\}$ και $R^I = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a)\}$. Ισχύει η ανακλαστική αφού τα (a,a), (b,b), (c,c) ανήκουν στο R^I ενώ ισχύει και η συμμετρική γιατί για κάθε ζεύγος στο R^I υπάρχει το συμμετρικό του. Όμως δεν ισχύει η τρίτη πρόταση καθώς $(b,a),(a,c) \in R^I$ ενώ $(b,c) \notin R^I$.
- Προτάσεις 1 και 3:
  Έχουμε $\Delta^I = \{a,b,c\}$ και $R^I = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$. Ισχύει η ανακλαστική και η μεταβατική όμως δεν ισχύει η συμμετρική αφού $(a,b) \in R^I$ ενώ $(b,a) \notin R^I$.
- Προτάσεις 2 και 3:

Έστω τώρα $\Delta^I = \{a, b, c\}$ και $R^I = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$. Εδώ ισχύουν η συμμετρική και η μεταβατική ενώ η ανακλαστική δεν ισχύει αφού $(c,c) \notin R^I$.
Συνεπώς, αφού μπορεί να ισχύουν οποιεσδήποτε δύο από τις τρείς προτάσεις και να μην ισχύει η τρίτη, καμία από τις τρεις δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων δύο.

Άσκηση 3η

Μετατρέπουμε αρχικά τις προτάσεις της βάσης γνώσης σε CNF:

1. $\forall x. \exists y. \left(A(x) \Rightarrow R(x,y) \wedge C(y)\right) \equiv \left(\neg A(x) \vee R\left(x, f(x)\right)\right) \wedge \left(\neg A(x) \vee C\left(f(x)\right)\right)$
2. $\forall x. \exists y. \left(B(x) \Rightarrow S(y,x) \wedge D(y)\right) \equiv \left(\neg B(z) \vee S(q(z), z)\right) \wedge \left(\neg B(z) \vee D\left(q(z)\right)\right)$
3. $\forall x. \left(D(x) \Rightarrow A(x)\right) \equiv \neg D(y) \vee A(y)$
4. $\forall x. \forall y. \left(S(x,y) \Rightarrow T(y,x)\right) \equiv \neg S(w,l) \vee T(w,l)$
5. $\forall x. \forall y. \forall z. \left(T(x,y) \wedge R(y,z) \wedge C(z) \Rightarrow Q(x)\right) \equiv \neg T(i,j) \vee \neg R(j,k) \vee \neg C(k) \vee Q(i)$

Έχουμε την πρόταση $r : \forall x. \left(B(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \neg r : \neg\left(\forall x. \left(B(x) \Rightarrow Q(x)\right)\right) \equiv \exists x. \left(B(x) \wedge \neg Q(x)\right) \equiv B(s) \wedge \neg Q(s)$, όπου s σταθερά. Τα literals που περιέχονται στη βάση γνώσης, αφού προσθέτουμε στη γνώση την $\neg r$, είναι τα εξής.

$$\left\{\begin{array}{c} \{\neg A(x), R\left(x, f(x)\right)\} \\ \{\neg A(x), C\left(f(x)\right)\} \\ \{\neg B(z), S(q(z), z)\} \\ \{\neg B(z), D\left(q(z)\right)\} \\ \{\neg D(y), A(y)\} \\ \{\neg S(w,l), T(w,l)\} \\ \{\neg T(i,j), \neg R(j,k), \neg C(k), Q(i)\} \\ \{B(s)\} \\ \{\neg Q(s)\} \end{array}\right\}$$

Για $i = s$, από τις 7 και 9, προκύπτει ως αναλυθέν η φόρμουλα $\{\neg T(s,j), \neg R(j,k), \neg C(k)\}$ η οποία δεν είναι προφανής αντίφαση, άρα προστίθεται στη γνώση.

$$\left\{\begin{array}{c} \{\neg A(x), R\left(x, f(x)\right)\} \\ \{\neg A(x), C\left(f(x)\right)\} \\ \{\neg B(z), S(q(z), z)\} \\ \{\neg B(z), D\left(q(z)\right)\} \\ \{\neg D(y), A(y)\} \\ \{\neg S(w,l), T(w,l)\} \\ \{\neg T(s,j), \neg R(j,k), \neg C(k), Q(s)\} \\ \{B(s)\} \\ \{\neg Q(s)\} \\ \{\neg T(s,j), \neg R(j,k), \neg C(k)\} \end{array}\right\}$$

Για $z = s$, οι φόρμουλες 3, 4 και 8 δίνουν τις φόρμουλες $\{S(q(s), s)\}$ και $\{D\left(q(s)\right)\}$ οι οποίες μπορούν να προστεθούν στη βάση γνώσης.

$$\left\{\begin{matrix} \{\neg A(x), R(x, f(x))\} \\ \{\neg A(x), C(f(x))\} \\ \{\neg B(s), S(q(s), s)\} \\ \{\neg B(s), D(q(s))\} \\ \{\neg D(y), A(y)\} \\ \{\neg S(w, l), T(w, l)\} \\ \{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k), Q(s)\} \\ \{B(s)\} \\ \{\neg Q(s)\} \\ \{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k)\} \\ \{S(q(s), s)\} \\ \{D(q(s))\} \end{matrix}\right\}$$

Για $y = q(s)$, μέσω των 12 και 5, έχουμε τη φόρμουλα $\{A(q(s))\}$, συνεπώς:

$$\left\{\begin{matrix} \{\neg A(x), R(x, f(x))\} \\ \{\neg A(x), C(f(x))\} \\ \{\neg B(s), S(q(s), s)\} \\ \{\neg B(s), D(q(s))\} \\ \{\neg D(q(s)), A(q(s))\} \\ \{\neg S(w, l), T(w, l)\} \\ \{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k), Q(s)\} \\ \{B(s)\} \\ \{\neg Q(s)\} \\ \{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k)\} \\ \{S(q(s), s)\} \\ \{D(q(s))\} \\ \{A(q(s))\} \end{matrix}\right\}$$

Για $x = q(s)$, λόγω των 1, 2 και 5, έχουμε τις $\left\{R\left(q(s), f\big(q(s)\big)\right)\right\}$ και $\left\{C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\}$, συνεπώς:

$$\left\{\begin{array}{c}
\left\{\neg A\big(q(s)\big), R\left(x, f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{\neg A\big(q(s)\big), C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\{\neg B(s), S(q(s), s)\} \\
\left\{\neg B(s), D\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{\neg D\big(q(s)\big), A\big(q(s)\big)\right\} \\
\{\neg S(w, l), T(w, l)\} \\
\{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k), Q(s)\} \\
\{B(s)\} \\
\{\neg Q(s)\} \\
\{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k)\} \\
\{S(q(s), s)\} \\
\left\{D\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{A\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{R\left(q(s), f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\}
\end{array}\right\}$$

Για $j = q(s)$ και $k = f\big(q(s)\big)$, λόγω των 7 και 14, έχουμε το $\left\{\neg T\big(s, q(s)\big), \neg C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\}$ και λόγω της 15 φτιάχνεται και το $\left\{\neg T\big(i, q(s)\big)\right\}$.

$$\left\{\begin{array}{c}
\left\{\neg A\big(q(s)\big), R\left(x, f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{\neg A\big(q(s)\big), C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\{\neg B(s), S(q(s), s)\} \\
\left\{\neg B(s), D\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{\neg D\big(q(s)\big), A\big(q(s)\big)\right\} \\
\{\neg S(w, l), T(w, l)\} \\
\left\{\neg T\big(s, q(s)\big), \neg R(q(s), k), \neg C(k), Q(s)\right\} \\
\{B(s)\} \\
\{\neg Q(s)\} \\
\{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k)\} \\
\{S(q(s), s)\} \\
\left\{D\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{A\big(q(s)\big)\right\} \\
\left\{R\left(q(s), f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{\neg T\big(s, q(s)\big), \neg C\left(f\big(q(s)\big)\right)\right\} \\
\left\{\neg T\big(i, q(s)\big)\right\}
\end{array}\right\}$$

Με $w = s$ και $l = q(s)$, λόγω των 6 και 17, φτιάχνουμε το $\{\neg S(s, q(s))\}$.

$$\left\{\begin{array}{c}
\{\neg A(q(s)), R(x, f(q(s)))\} \\
\{\neg A(q(s)), C(f(q(s)))\} \\
\{\neg B(s), S(q(s), s)\} \\
\{\neg B(s), D(q(s))\} \\
\{\neg D(q(s)), A(q(s))\} \\
\{\neg S(s, q(s)), T(s, q(s))\} \\
\{\neg T(s, q(s)), \neg R(q(s), k), \neg C(k), Q(s)\} \\
\{B(s)\} \\
\{\neg Q(s)\} \\
\{\neg T(s, j), \neg R(j, k), \neg C(k)\} \\
\{S(q(s), s)\} \\
\{D(q(s))\} \\
\{A(q(s))\} \\
\{R(q(s), f(q(s)))\} \\
\{C(f(q(s)))\} \\
\{\neg T(s, q(s)), \neg C(f(q(s)))\} \\
\{\neg T(i, q(s))\} \\
\{\neg S(s, q(s))\}
\end{array}\right\}$$

Εδώ, παρατηρούμε την προφανή αντίφαση των διαζευκτικών $\{S(q(s), s)\}$ και $\{\neg S(s, q(s))\}$. Άρα, άτοπο και συνεπώς:

$$K \vDash \forall x. (B(x) \Rightarrow Q(x))$$

Άσκηση 4η

1. $\forall x. \exists y. (\text{Χώρα}(x) \Rightarrow \text{Ήπειρος}(y) \land \text{ΑνήκειΣε}(x, y))$
2. $\exists x. (\text{Χώρα}(x) \land \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(x), 300.000.000))$
3. $\neg\exists x. \exists y_1. \exists y_2. \exists y_3. (\text{Χώρα}(x) \land \text{Ήπειρος}(y_1) \land \text{Ήπειρος}(y_2) \land \text{Ήπειρος}(y_3) \land \neg(y_1 \approx y_2) \land (y_1 \approx y_3) \land (y_2 \approx y_3) \land \text{ΑνήκειΣε}(x, y_1) \land \text{ΑνήκειΣε}(x, y_2) \land \text{ΑνήκειΣε}(x, y_3))$
4. $\exists x. \Big(\text{Χώρα}(x) \land \text{ΑνήκειΣε}(x, \text{Αμερική}) \land \forall y. \big(\text{Χώρα}(y) \land \text{ΑνήκειΣε}(y, \text{Ευρώπη}) \Rightarrow \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(x), \text{πληθυσμός}(y))\big)\Big)$
5. $\exists x. \exists y. \big(\text{Χώρα}(x) \land \text{Χώρα}(y) \land \neg(x \approx y) \land \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(x), 1.000.000.000) \land \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(y), 1.000.000.000) \land \forall z. (\text{Χώρα}(z) \land \neg(z \approx x) \land \neg(z \approx y)) \Rightarrow \neg\text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(z), 1.000.000.000)\big)$
6. $\forall x. \big(\text{Χώρα}(x) \land \neg(x \approx \text{Κίνα}) \land \neg(x \approx \text{Ινδία}) \Rightarrow \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(\text{Κίνα}), \text{πληθυσμός}(x)) \land \text{ΜεγαλύτεροΑπό}(\text{πληθυσμός}(\text{Ινδία}), \text{πληθυσμός}(x))\big)$

Άσκηση 5$^{\eta}$

1.

$$\forall x.\big(p(x) \Rightarrow q(a)\big) \equiv \forall x.\big(\neg p(x) \lor q(a)\big)$$
$$\big(\forall x.p(x)\big) \Rightarrow q(a) \equiv \neg\big(\forall x.p(x)\big) \lor q(a) \equiv \big(\exists x.\neg p(x)\big) \lor q(a)$$

Εάν $val\big(q(a)\big) = \text{True}$ τότε ικανοποιούνται και οι δύο προτάσεις. Άρα μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $val\big(q(a)\big) = \text{False}$. Αν θέλουμε να ικανοποιήσουμε την πρώτη πρόταση, πρέπει $val\big(p(x)\big) = \text{False}$ για κάθε x. Όμως, για τις τιμές που αναφέραμε, αυτόματα η δεύτερη πρόταση είναι αληθής, συνεπώς και οι δύο είναι αληθείς. Άρα δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί την πρώτη πρόταση αλλά όχι τη δεύτερη.

2.

$$\exists x.\big(p(x) \Rightarrow q(a)\big) \equiv \exists x.\big(\neg p(x)\big) \lor q(a)$$
$$\big(\exists x.p(x)\big) \Rightarrow q(a) \equiv \neg\big(\exists x.p(x)\big) \lor q(a) \equiv \big(\forall x.\neg p(x)\big) \lor q(a)$$

Όμοια με πριν, πρέπει $val\big(q(a)\big) = \text{False}$ για να μην είναι αληθείς και οι δύο προτάσεις.
Αν ισχύει η πρώτη, τότε $val\big(p(x)\big) = \text{False}$ για κάποιο x_0. Τότε στη δεύτερη πρόταση ο όρος $\forall x.\neg p(x)$ δεν είναι ποτέ αληθής, αφού το $\neg p(x)$ δεν είναι αληθές για κάθε x και συνεπώς η δεύτερη πρόταση είναι ψευδής. Άρα υπάρχει ερμηνεία που ικανοποιεί μονό την πρώτη πρόταση και όχι τη δεύτερη.

Άσκηση 6$^{\eta}$

1.

$$r(x,b) \leftarrow r(a,x).$$
$$r(x,z) \leftarrow r(x,y), r(y,z)$$

Το πρόγραμμα δεν έχει καμία συνάρτηση και οι μόνες σταθερές είναι τα a, b. Συνεπώς για το σύμπαν Herbrand έχουμε $UP = \{a, b\}$. Το μοναδικό κατηγόρημα που υπάρχει είναι το r και έχει δύο ορίσματα, άρα για τη βάση Herbrand παίρνουμε, σύμφωνα με το UP, $BP = \{r(a,a), r(a,b), r(b,b), r(b,a)\}$.

2.

$$q(0) \leftarrow .$$
$$p(x) \leftarrow p\big(f(x)\big)$$

Το πρόγραμμα περιέχει τον όρο $q(0)$ και τη συνάρτηση $f(x)$ συνεπώς το σύμπαν Herbrand είναι το $UP = \big\{q(0), f\big(q(0)\big), f^2\big(q(0)\big), f^3\big(q(0)\big), \ldots\big\}$. Το μοναδικό κατηγόρημα είναι το p το οποίο δέχεται ένα όρισμα, συνεπώς για την βάση Herbrand έχουμε ότι $BP = \Big\{p\big(q(0)\big), p\Big(f\big(q(0)\big)\Big), p\Big(f^2\big(q(0)\big)\Big), p\Big(f^3\big(q(0)\big)\Big), \ldots\Big\}$.

Άσκηση 7η

1. Forward Chaining

Ξεκινώντας αρχικά από τη γνώση K οριστικών προτάσεων, θα εφαρμόζουμε τους κανόνες του προγράμματος για να παράξουμε νέα γνώση μέχρι να μην μπορούμε να προσθέσουμε κάτι στη γνώση. Τότε θα ελέγξουμε εάν τα ζητούμενα βρίσκονται στη γνώση ή όχι.

1η επανάληψη:

$\text{mother}(A, B)$
$\text{father}(A, C)$
$\text{mother}(B, D)$
$\text{mother}(E, D)$
$\text{father}(F, E)$
$\text{father}(G, E)$

2η επανάληψη:

$\text{mother}(A, B)$
$\text{father}(A, C)$
$\text{mother}(B, D)$
$\text{mother}(E, D)$
$\text{father}(F, E)$
$\text{father}(G, E)$
$\text{parent}(A, B)$
$\text{parent}(A, C)$
$\text{parent}(B, D)$
$\text{parent}(E, D)$
$\text{parent}(F, E)$
$\text{parent}(G, E)$

3η επανάληψη:

$\text{mother}(A, B)$
$\text{father}(A, C)$
$\text{mother}(B, D)$
$\text{mother}(E, D)$
$\text{father}(F, E)$
$\text{father}(G, E)$
$\text{parent}(A, B)$
$\text{parent}(A, C)$
$\text{parent}(B, D)$
$\text{parent}(E, D)$
$\text{parent}(F, E)$
$\text{parent}(G, E)$
$\text{sibling}(B, E)$
$\text{sibling}(E, B)$
$\text{sibling}(F, G)$
$\text{sibling}(G, F)$
$\text{grandparent}(A, D)$
$\text{grandparent}(F, D)$
$\text{grandparent}(G, D)$

$4^η$ επανάληψη:
$\text{mother}(A, B)$
$\text{father}(A, C)$
$\text{mother}(B, D)$
$\text{mother}(E, D)$
$\text{father}(F, E)$
$\text{father}(G, E)$
$\text{parent}(A, B)$
$\text{parent}(A, C)$
$\text{parent}(B, D)$
$\text{parent}(E, D)$
$\text{parent}(F, E)$
$\text{parent}(G, E)$
$\text{sibling}(B, E)$
$\text{sibling}(E, B)$
$\text{sibling}(F, G)$
$\text{sibling}(G, F)$
$\text{grandparent}(A, D)$
$\text{grandparent}(F, D)$
$\text{grandparent}(G, D)$
$\text{cousin}(A, F)$
$\text{cousin}(F, A)$
$\text{cousin}(F, G)$
$\text{cousin}(G, F)$
$\text{cousin}(A, G)$
$\text{cousin}(G, A)$

Εδώ θα σταματήσουμε την προσθήκη και θα πάρουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\text{cousin}(A, F) = \text{True}$$
$$\text{sibling}(A, G) = \text{False}$$

2. Backward Chaining

Ξεκινώντας από τη γνώση K οριστικών προτάσεων, θα εφαρμόζουμε τους κανόνες του προγράμματος ξεκινώντας από την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε και προχωρώντας ανάποδα θα ψάξουμε για μία ανάθεση μεταβλητών που να την ικανοποιεί.

Αναζήτηση για $\text{cousin}(A, F)$:

- Ψάχνουμε X τέτοιο ώστε $\text{grandparent}(A, X)$ και $\text{grandparent}(F, X)$.
  - Για το $\text{grandparent}(A, X)$, ψάχνουμε Y για το οποίο ισχύει $\text{parent}(A, Y)$ και $\text{parent}(Y, X)$.
    - Για το $\text{parent}(A, Y)$, πρέπει να αποδείξουμε είτε $\text{father}(A, Y)$ είτε $\text{mother}(A, Y)$.
      - ✓ Για το $\text{mother}(A, Y)$, βλέπουμε πως στη γνώση για $Y = B$ ισχύει. Άρα κάνουμε την ανάθεση μεταβλητής και προσθέτουμε το $\text{parent}(A, B)$ στη γνώση.
    - Για το $\text{parent}(B, X)$, θα αναζητήσουμε X για το οποίο ισχύει είτε $\text{father}(B, X)$ είτε $\text{mother}(B, X)$.
      - ✓ Βλέπουμε πως υπάρχει το $\text{mother}(B, D)$, συνεπώς κάνουμε την ανάθεση $X = D$ και προσθέτουμε την πρόταση στη βάση. Επιπλέον, προσθέτουμε το $\text{grandparent}(A, D)$ καθώς αυτή η πρόταση αποδείχτηκε.
  - Θα αναζητήσουμε το $\text{grandparent}(F, D)$ αν ισχύει. Δηλαδή, ψάχνουμε κάποιο H τέτοιο ώστε $\text{parent}(F, H), \text{parent}(H, D)$.

- Για το $\text{parent}(F, H)$, πρέπει είτε $\text{father}(F, H)$ είτε $\text{mother}(F, H)$.
    - ✓ Παρατηρούμε ότι για $H = E$, ισχύει ότι $\text{father}(F, E)$. Επομένως κάνουμε την ανάθεση και προσθέτουμε στη βάση την πρόταση αυτή.
- Ελέγχουμε εάν υπάρχει το $\text{parent}(E, D)$ ψάχνοντας είτε το $\text{father}(E, D)$ είτε το $\text{mother}(E, D)$.
    - ✓ Υπάρχει το $\text{mother}(E, D)$ συνεπώς αληθεύει και το $\text{parent}(E, D)$ και το $\text{grandparent}(F, D)$.

- Έχουμε πλέον αποδείξει ότι ισχύουν τα $\text{grandparent}(A, D)$ και $\text{grandparent}(F, D)$ συνεπώς σταματάμε τη διαδικασία και καταλήγουμε ότι $\text{cousin}(A, F) = \text{True}$.

Αναζήτηση για $\text{sibling}(A, G)$:

- Ψάχνουμε X τέτοιο ώστε $\text{parent}(A, X)$ και $\text{parent}(G, X)$.
    - Για το $\text{parent}(A, X)$ πρέπει να δείξουμε είτε $\text{mother}(A, X)$ είτε $\text{father}(A, X)$.
        - Υπάρχει το $\text{mother}(A, B)$ συνεπώς κάνουμε την ανάθεση $X = B$.
    - Για το $\text{parent}(G, B)$, πρέπει να δείξουμε είτε $\text{mother}(G, B)$ είτε $\text{father}(G, B)$.
        - Δεν υπάρχει τη γνώση κανένα από τα $\text{mother}(G, B)$ και $\text{father}(G, B)$, συνεπώς κάνουμε backtracking και ψάχνουμε άλλη τιμή για το X.
        - Υπάρχει το $\text{mother}(A, C)$ συνεπώς κάνουμε την ανάθεση $X = C$.
    - Για το $\text{parent}(G, C)$, πρέπει να δείξουμε είτε $\text{mother}(G, C)$ είτε $\text{father}(G, C)$.
        - Δεν υπάρχει κανένα από τα $\text{mother}(G, C)$ και $\text{father}(G, C)$, συνεπώς κάνουμε backtracking και ψάχνουμε άλλη τιμή για το X.
- Δεν υπάρχει άλλη πιθανή ανάθεση για το X. Συνεπώς το πρόγραμμα τερματίζει με $\text{sibling}(A, G) = \text{False}$.

Άσκηση 8η

Με αρχική γνώση μόνο το γεγονός $\text{add}(x, 0, x)$, θέλουμε να βρούμε αντικατάσταση για τη μεταβλητή u τέτοια ώστε να ισχύει το $\text{add}\left(s(0), u, s\big(s(0)\big)\right) \leftarrow \text{add}\big(s(0), v, s(0)\big)$, όπου $s(v) = u$. Όμως αυτό ταιριάζει με το γεγονός που είναι στη βάση μας, όπου το πρώτο και το τρίτο όρισμα ταυτίζονται, αν αντικαταστήσουμε τα $x \leftarrow s(0)$ και $v = 0 \Rightarrow u = s(0)$.

Άσκηση 9η

$$A \sqsubseteq r.B$$
$$B \sqsubseteq \exists s.(A \sqcap C)$$
$$s \equiv r^{-}$$
$$A(a)$$
$$\neg C(a)$$

$IN = \{a\}, CN = \{A, B, C\}, RN = \{s, r\}$

Δεν μπορεί να υπάρξει μοντέλο για αυτή τη γνώση. Το πρώτο αξίωμα δηλώνει ότι κάθε άτομο που έχει την ιδιότητα A θα σχετίζεται με τουλάχιστον ένα άτομο του κόσμου που έχει την ιδιότητα B μέσω του r. Το δεύτερο αξίωμα δηλώνει πως κάθε άτομο που έχει την ιδιότητα B θα σχετίζεται με τουλάχιστον ένα άτομο που έχει τις ιδιότητες A και C.

Όμως, αφού το άτομο a έχει την ιδιότητα A, θα υπάρχει κάποιο άτομο x τέτοιο ώστε $r(a, x)$. Το τρίτο αξίωμα που δηλώνει ότι οι ρόλοι s, r είναι συμπληρωματικοί σημαίνει πως στον κόσμο πρέπει να υπάρχει και το $s(x, a)$. Αυτό είναι άτοπο λόγω του πέμπτου αξιώματος, που λέει ότι το a δεν μπορεί να έχει και την ιδιότητα C, και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει η σχέση $s(x, a)$ καθώς το a δεν θα βρίσκεται στην τομή των A και C.