② Repartiția Poisson $X \sim Pois(\lambda)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!} & \dots \end{pmatrix} ;\ j \geq 0$$

Ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de folosirea următoarei relații de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{\lambda}{j+1} \cdot p_j ,\ j \geq 0}$$

TEMĂ: de demonstrat

Algoritm

Pas 1: Generez U ($\sim Unif(0,1)$)

Pas 2: Inițializez $\underbrace{i=0}_{\text{contor}}$, $\underbrace{p = e^{-\lambda}}_{\text{prob. curentă}}$, $\underbrace{F = p}_{\text{valoarea funcției de repartiție în punctul curent}}$

Pas 3: Dacă $U < F$ atunci $X = i$ $\boxed{\text{STOP}}$

Pas 4: $p = \frac{\lambda p}{i+1}$, $F = F + p$, $i = i+1$

Pas 5: Mergi la Pas 3.

③ Repartiția binomială $X \sim Binom(n, p)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k \geq 0 \\ k = \overline{0,n} \end{matrix}$$

Similar, ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de o relație de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_j}$$

TEMĂ: de demonstrat

Algoritm

Pas 1: Generez U ($\sim Unif(0,1)$)

Pas 2: Inițializez $c = \frac{p}{1-p}$, $i = 0$, $prob = (1-p)^n$, $F = prob$

Pas 3: Dacă $U < F$ atunci $X = i$ $\boxed{\text{STOP}}$

Pas 4: $prob = \frac{c(n-i)}{i+1} \cdot prob$, $F = F + prob$, $i = i+1$

Pas 5: Mergi la Pas 3.

Metoda respingerii pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

Fie X și Y două v.a. continue cu densitățile de probabilitate f și respectiv g. Presupunem cunoscută o metodă de simulare pentru Y. Atunci:

Căutăm o constantă $c > 0$ a.î. $\boxed{\dfrac{f(y)}{g(y)} \le c \quad \forall y}$

OBS: Cu cât c e mai mic, cu atât metoda funcționează mai rapid.

ALGORITM

1. Generez Y
2. Generez U
3. Dacă $U \le \dfrac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$ atunci $X = Y$ altfel mergi la 1

Exemplu

$X \sim \beta eta(2,4)$ $\quad f(x) = 20x(1-x)^3$, $0 < x < 1$

Aleg $Y \sim Unif(0,1)$ $\quad g(x) = 1$, $0 < x < 1$

Căutăm constanta c:

- Calculăm $\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{not}{=} h(x) = 20x(1-x)^3$
- Pentru a determina c verificăm dacă $h(x)$ are punct de maxim

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \quad x = \frac{1}{4}$

Facem tabelul de variație pt h:

x	0			$\frac{1}{4}$			1
$h'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$h(x)$	$\nearrow$			$h(\frac{1}{4})$			$\searrow$

$h(\frac{1}{4}) = \dfrac{135}{64} = c$

Așadar $\frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = \frac{20 \cdot x(1-x)^3}{\frac{135}{64} \cdot 1} = \frac{256}{27} x \cdot (1-x)^3$

$\boxed{\text{Algoritm pentru generarea unei valori din } X \sim \beta eta(2,4)}$

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generăm $\underline{U_1}$ și U_2 ($\sim Unif(0,1)$) → variabila uniformă din algoritmul general

↳ joacă rolul lui Y

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Dacă $U_2 \leq \frac{256}{27} \cdot U_1(1-U_1)^3$ atunci $X = U_1$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Obs}}$: ① Numărul de iterații necesar pentru a obține o valoare din X prin metoda respingerii este o v.a. repartizată geometric cu media c, deci alegerea constantei este importantă în eficientizarea algoritmului.

② Suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să coincidă cu suportul densității de probabilitate pt. X !

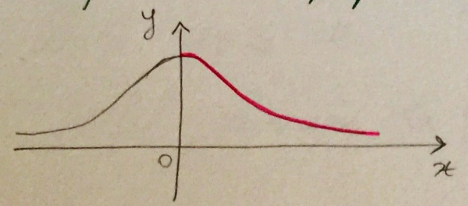
Exemplu special:

$X \sim N(0,1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x \in \mathbb{R}$

$Y \sim Exp(1) \quad g(x) = e^{-x}, \ x > 0$

observăm că suportul celor 2 v.a. nu coincide, deci nu putem aplica metoda respingerii.

$\boxed{\text{OBS}}$: Ne folosim de proprietatea de simetrie a normalei standard



Remarcăm ca v.a. $|X|$ are densitatea $\tilde{f}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x > 0$

are același suport ca Y.

Vom începe prin a genera valori din $|X|$, apoi le atribuim semn în mod aleator!

Căutăm constanta c:

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{x - \frac{x^2}{2}} = h(x)$$

TEMĂ: Faceți calculele necesare pentru a obține valoarea constantei c.

Maximizând funcția $h(x)$ obținem $\boxed{c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}}$

Calculăm $\frac{\tilde{f}(x)}{c \cdot g(x)} = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

Algoritm pentru generarea lui $|X|$ și respectiv X

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generez $Y \sim Exp(1)$

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Generez $U_1, U_2 (\sim Unif(0,1))$

$\boxed{\text{Pas 3}}$: Dacă $U_1 \leq e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}$ atunci $|X| = Y$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Pas 4}}$: Dacă $U_2 \leq \frac{1}{2}$ atunci $X = -|X|$

Altfel $X = |X|$.