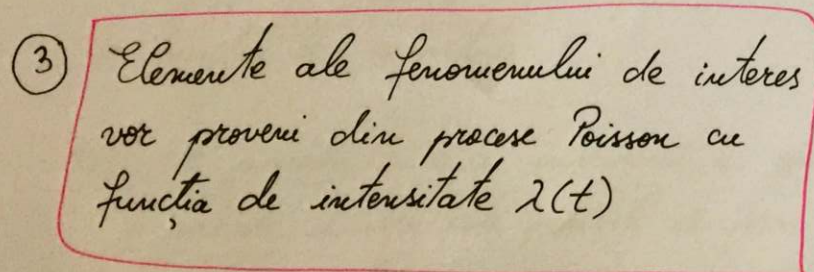
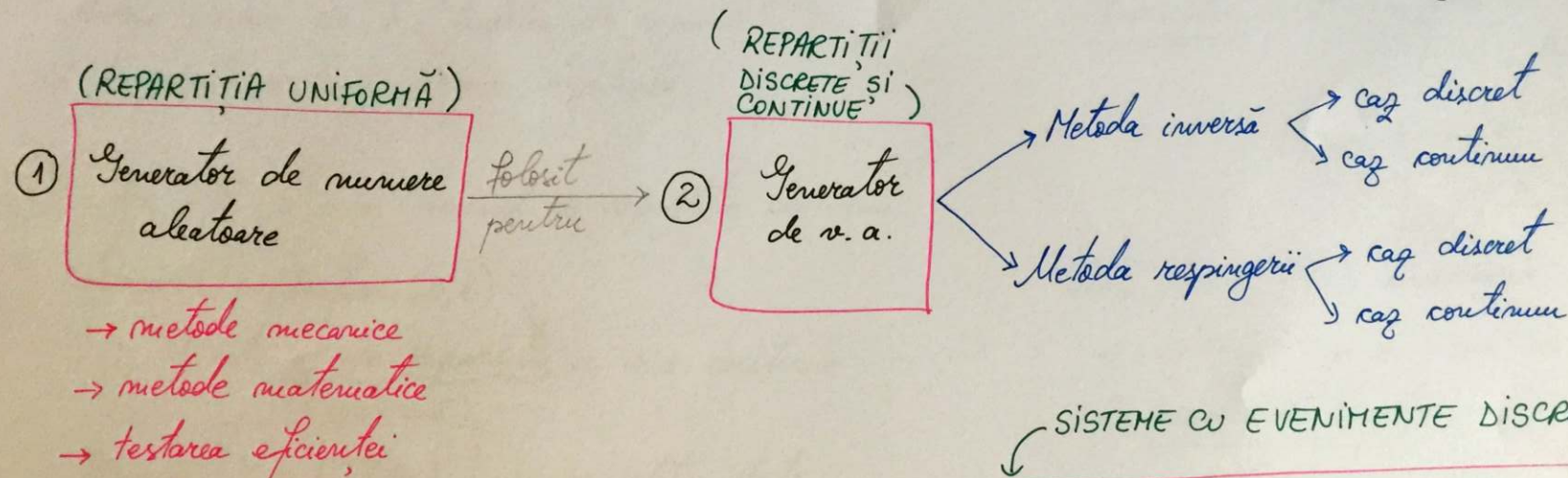


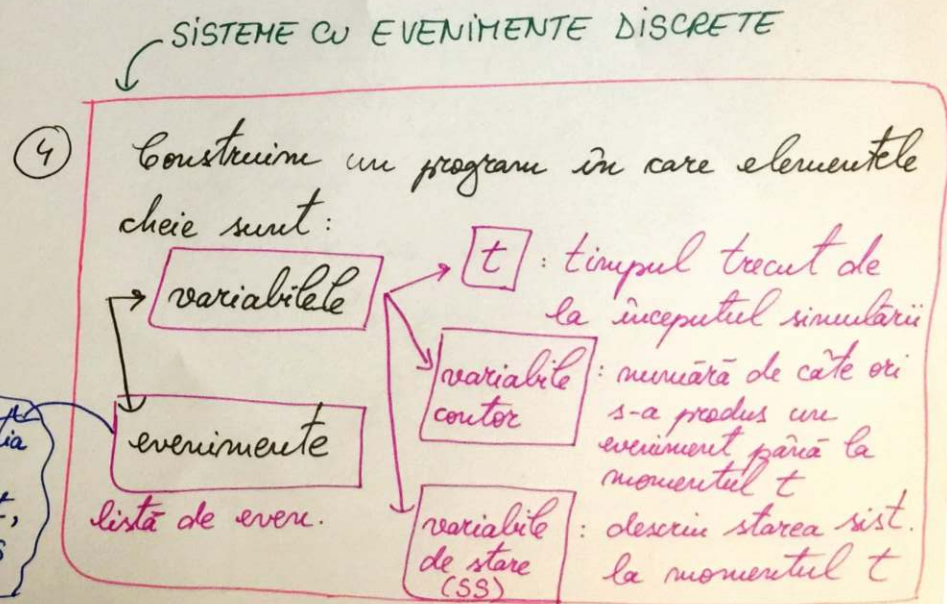
TEHNICI DE SIMULARE

Pentru a construi o simulare a unui fenomen de interes parcurgem etapele:



→ proces Poisson omogen vs. neomogen

la apariția unui even. se resetează t , contorul și SS



Metoda inversă pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

! Avem nevoie ca F (funcția de repartiție) să fie dată sub o formă explicită

(T) Fie X o v.a. având o repartiție continuă

Dacă $U \sim \text{Uniform}(0,1)$

F este f. de repartiție a v.a. continue (continuă)

Atunci $X = F^{-1}(U)$ are repartiția dată de funcția de repartiție F .

[OBS]: A simula o v.a. înseamnă a genera o valoare dintre cele posibile conform repartiției sale.

Example

$X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$
Repartiție: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Dacă $X = F^{-1}(U)$ înseamnă că

$x = F^{-1}(u) \forall x$, ceea ce se reduce la rezolvarea ecuației

$$\boxed{u = F(x)}$$

În cazul nostru:

$$u = F(x) \Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - u)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - u)$$

$$\text{Deci } \boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - U)}$$

[OBS]: Cum $1 - U \sim \text{Unif}(0,1)$ putem folosi:
 $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln U}$

Dar dacă F nu e dat într-o formă explicită?

① Exemplu: $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot (\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \rightarrow \text{nu are formă explicită}$$

Dar, ştim relativ:

Dacă X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$ atunci

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

Atunci:

$$X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(U_i)$$

② Exemplu: $X \sim \text{Norm}(m, \sigma^2)$

\rightarrow metoda transformării polare

II Cazul v.a. discrete

Fie X v.a. discretă cu repartiția:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p_i > 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{matrix}$$

Pentru a simula valori din v.a. X folosind metoda inversă procedăm astfel:

- 1) Generăm $U \sim \text{Unif}(0,1)$ (*)
- 2)
$$X = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } U < p_1 \\ x_2, & \text{dacă } p_1 \leq U < p_1 + p_2 \\ \dots \\ x_j, & \text{dacă } \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=1}^j p_i \end{cases}$$

demonstrație

$$P(X = x_j) = P\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=1}^j p_i\right) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} F_U\left(\sum_{i=1}^j p_i\right) - F_U\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i\right)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^j p_i - \sum_{i=1}^{j-1} p_i = p_j, \text{ ceea ce arată } \\ \text{că } X \text{ are repartiția dorită}$$

Exemplu

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & \frac{7}{30} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

- Generăm $U_1 = 0.015$

$$\text{Cum } 0.015 < \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{X_1 = 1}}$$

- Generăm $U_2 = 0.45$

$$\text{Cum } 0.45 \not< \frac{1}{3} \Rightarrow X_2 \neq 1$$

$$\text{Cum } 0.45 \not< \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \Rightarrow X_2 \neq 2$$

$$\text{Cum } 0.45 < \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{2}{15} \Rightarrow \underline{\underline{X_2 = 3}}$$

OBS: O eficientizare a procedurii s-ar produce dacă am reordona valorile lui X a.p. probabilitățile să fie descrescătoare. Dece?

Reamintim:

- ① $F \rightarrow$ funcție de repartiție

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

OBS: În cazul v.a. continue

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X < b) = \\ &= \underline{\underline{P(a < X \leq b)}} = P(a < X < b) \end{aligned}$$

- ② $U \sim \text{Unif}(a,b)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Pentru $U \sim \text{Unif}(0,1)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Comentarii

Dacă F este funcția de repartiție a v.a. X atunci algoritmul (*) devine:

$$X = x_j \text{ pentru } F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j)$$

(presupunem că valorile v.a. sunt ordonate crescător)

Relația de mai sus arată că algoritmul (*) se reduce la a identifica intervalul $[F(x_{j-1}), F(x_j))$ în care se găsește U , ceea ce este echivalent cu a inversa F .

→ aici se folosește noțiunea de inversă generalizată pentru că F nu e bijectivă

Caz particular

Dacă $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, n\})$ atunci:
(uniforma pe caz discret)

$$X = j \text{ pentru } \frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n}, \text{ ceea ce}$$

implică $X = \lfloor n \cdot U \rfloor + 1$ ← parte întreagă

! Temă: Justificați relația de mai sus, apoi creați o funcție în R care implementează relația de mai sus. Generați 10^6 valori din v.a. X (alegeți voi un n particular, $n \geq 10$) și faceți histograma comparativă a acestor valori cu cele generate de funcția sample din R.

Aplicarea metodei inverse în cazul unor repartiții de v.a. discrete ce iau un număr infinit de valori

① Repartiția geometrică $X \sim \text{Geom}(p)$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ p & p \cdot q & p \cdot q^2 & \dots & p \cdot q^{j-1} & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{dacă numărăm câte eșecuri am până la primul succes}$$

$$q = 1 - p$$

sau

$$\odot X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots \\ p & p \cdot q & p \cdot q^2 & \dots & p \cdot q^{j-1} & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{dacă numărăm câte încercări am până la primul succes}$$

! Vom folosi în continuare reprezentarea \odot .

$$P(X=j) = p \cdot q^{j-1} \quad \forall j \geq 1$$

probabilitatea evenimentului complementar

$$\text{Cum } \sum_{i=1}^{j-1} P(X=i) = 1 - \underline{P(X > j-1)}$$

$$= 1 - P(\text{"primele } j-1 \text{ încercări sunt eșecuri"})$$

$$= 1 - q^{j-1}, \quad \forall j \geq 1$$

Deci, folosind metoda inversă $X=j$ pentru $1 - q^{j-1} \leq U < 1 - q^j$, ceea ce este echivalent cu $q^j < 1 - U \leq q^{j-1}$

Putem reformula astfel:

$$X = \min \{ j \mid q^j < 1 - U \}$$

$$q^j < 1 - U \Leftrightarrow \ln q^j < \ln(1 - U) \Leftrightarrow$$

$$j \cdot \underbrace{\ln q}_{< 0} < \ln(1 - U) \Leftrightarrow j > \frac{\ln(1 - U)}{\ln q}$$

$$\text{Deci, } X = \min \left\{ j \mid j > \frac{\ln(1 - U)}{\ln q} \right\},$$

ceea ce se poate rescrie:

$$X = \left\lceil \frac{\log(1 - U)}{\log(q)} \right\rceil + 1$$

parte întreagă