TEHNICI DE SIMULARE

Pentru a construi o simulare a unui fenomen de interes parcurgem etapele:

(REPARTIȚIA UNIFORMĂ)

1. Generator de numere aleatoare

$\xrightarrow{\text{folosit pentru}}$

- → metode mecanice
- → metode matematice
- → testarea eficienței

(REPARTIȚII DISCRETE ȘI CONTINUE)

2. Generator de v. a.
   - → Metoda inversă
     - → caz discret
     - → caz continuu
   - → Metoda respingerii
     - → caz discret
     - → caz continuu

3. Elemente ale fenomenului de interes vor proveni din procese Poisson cu funcția de intensitate $\lambda(t)$

- → proces Poisson omogen vs. neomogen

SISTEME CU EVENIMENTE DISCRETE

4. Construim un program în care elementele cheie sunt:
   - variabilele
     - $\boxed{t}$: timpul trecut de la începutul simulării
     - variabile contor : numără de câte ori s-a produs un eveniment până la momentul t
     - variabile de stare (SS) : descriu starea sist. la momentul t
   - evenimente

     listă de even.

     la apariția unui even. se resetează t, contorul și SS

Metoda inversă pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

! Avem nevoie ca F (funcția de repartiție) să fie dată sub o formă explicită

(T) Fie X o v.a. având o repartiție continuă

Dacă $U \sim Uniform(0,1)$

F este f. de repartiție (continuă) a v.a. continue

Atunci $\boxed{X = F^{-1}(U)}$ are repartiția dată de funcția de repartiție F.

OBS: A simula o v.a. înseamnă a genera o valoare dintre cele posibile conform repartiției sale.

Exemplu

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

Reamintim: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Dacă $X = F^{-1}(U)$ înseamnă că

$x = F^{-1}(u)$ $\forall x$, ceea ce se reduce la rezolvarea ecuației

$\boxed{u = F(x)}$

În cazul nostru:

$u = F(x) \Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-u)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u)$

Deci $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-U)}$

OBS: Cum $1-U \sim Unif(0,1)$ putem folosi: $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln U}$

Dar dacă F nu e dat într-o formă explicită?

① Exemplu: $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$

$$\boxed{F(x) = \int_0^x \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot (\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy}$$

→ nu are formă explicită

Dar, știm relația:

Dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$ atunci

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

Atunci:

$$\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(U_i)}$$

② Exemplu: $X \sim \text{Norm}(m, \sigma^2)$

→ metoda transformării polare

II Cazul v.a. discrete

Fie X o v.a. discretă cu repartiția:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 \cdots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p_i > 0 \ \forall i \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{matrix}$$

Pentru a simula valori din v.a. X folosind metoda inversă procedăm astfel:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1) \text{ Generăm } U \sim Unif(0,1) \\ 2) \quad X = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } U < p_1 \\ x_2, & \text{dacă } p_1 \le U < p_1 + p_2 \\ \cdots & \\ x_j, & \text{dacă } \sum_{i=1}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=1}^{j} p_i \end{cases} \end{array}} \quad (*)$$

Exemplu

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & \frac{7}{30} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

- Generez $U_1 = 0.015$

  Cum $0.015 < \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{X_1 = 1}}$

- Generez $U_2 = 0.45$

  Cum $0.45 \not< \frac{1}{3} \Rightarrow X_2 \neq 1$

  Cum $0.45 \not< \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \Rightarrow X_2 \neq 2$

  Cum $0.45 < \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{2}{15} \Rightarrow \underline{\underline{X_2 = 3}}$

OBS: O eficientizare a procedeului s-ar produce dacă am reordona valorile lui X a.î. probabilitățile să fie descrescătoare. De ce?

demonstrație

$$\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=1}^{j} p_i\right) =$$

$$\overset{1}{=} F_U\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{j} p_i}_{\ge 0}\right) - F_U\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} p_i}_{\ge 0}\right)$$

$$\overset{2}{=} \sum_{i=1}^{j} p_i - \sum_{i=1}^{j-1} p_i = p_j,$$ ceea ce arată că X are repartiția dorită

Reamintim:

1 $F \to$ funcție de repartiție

$$\boxed{\mathbb{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$$

OBS: În cazul v.a. continue

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \underline{\mathbb{P}(a \le X < b)} =$$

$$= \underline{\mathbb{P}(a < X \le b)} = \mathbb{P}(a < X < b)$$

2 $U \sim Unif(a, b)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

Pentru $U \sim Unif(0,1)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Comentarii

Dacă F este funcția de repartiție a v.a. X atunci algoritmul (*) devine:

$$\boxed{X = x_j \text{ pentru } F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j)}$$

(presupunem că valorile v.a. sunt ordonate crescător)

Relația de mai sus arată că algoritmul (*) se reduce la a identifica intervalul $[F(x_{j-1}), F(x_j))$ în care se găsește U, ceea ce este echivalent cu a inversa F.

aici se folosește noțiunea de inversă generalizată pentru că F nu e bijectivă

Caz particular

Dacă $X \sim Unif(\{1, 2, \dots n\})$ atunci: (uniforma pe caz discret)

$$X = j \text{ pentru } \frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n}, \text{ ceea ce}$$

implică $\boxed{X = [n \cdot U] + 1}$ parte întreagă

! <u>Temă</u>: Justificați relația de mai sus, apoi creați o funcție în R care implementează relația de mai sus. Generați 10^6 valori din v.a. X (alegeți voi un n particular, $n \geq 10$!) și faceți histograma comparativă a acestor valori cu cele generate de funcția <u>sample</u> din R.

Aplicarea metodei inverse în cazul unor repartiții de v.a. discrete ce iau un număr infinit de valori

① <u>Repartiția geometrică</u> $X \sim Geom(p)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ p & p\cdot q & p\cdot q^2 & \dots & p\cdot q^{j} & \dots \end{pmatrix}$$

→ dacă număr câte eșecuri am până la primul succes

$$\boxed{q = 1-p}$$

<u>sau</u>

$$\odot \; X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots \\ p & p\cdot q & p\cdot q^2 & \dots & p\cdot q^{j-1} & \dots \end{pmatrix}$$

→ dacă număr câte încercări am până la primul succes

! Vom folosi în continuare reprezentarea $\odot$.

$$\mathbb{P}(X=j) = p\cdot q^{j-1} \quad \forall j \geq 1$$

probabilitatea evenimentului complementar

Cum $\sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(X=i) = 1 - \underline{\mathbb{P}(X > j-1)}$

$= 1 - \mathbb{P}($„primele $j-1$ încercări sunt eșecuri"$)$

$= 1 - q^{j-1}, \quad \forall j \geq 1$

Deci, folosind metoda inversă $X = j$ pentru $\boxed{1-q^{j-1} \leq U < 1-q^{j}}$, ceea ce este echivalent cu $q^{j} < 1-U \leq q^{j-1}$

Putem reformula astfel:

$$X = \min\{ j \mid q^{j} < 1-U \}$$

$$q^{j} < 1-U \iff \ln q^{j} < \ln(1-U) \iff$$

$$j \cdot \underbrace{\ln q}_{<0} < \ln(1-U) \iff j > \frac{\ln(1-U)}{\ln q}$$

Deci, $X = \min\left\{ j \mid j > \frac{\ln(1-U)}{\ln q} \right\}$,

ceea ce se poate rescrie:

$$\boxed{X = \left[\frac{\log(1-U)}{\log(q)} \right] + 1}$$

parte întreagă