② Repartiția Poisson $X \sim Pois(\lambda)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ & & \dots & & \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^j}{j!} & \end{pmatrix} ; j \geq 0$$

Ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de folosirea următoarei relații de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{\lambda}{j+1} \cdot p_j \, , \, j \geq 0}$$

TEMĂ: de demonstrat

Algoritm

Pas 1: Generez U ($\sim Unif(0,1)$)

contor prob. curentă valoarea funcției de repartiție în punctul curent

Pas 2: Inițializez $i=0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$

Pas 3: Dacă $U < F$ atunci $X = i$ STOP

Pas 4: $p = \frac{\lambda p}{i+1}$, $F = F + p$, $i = i+1$

Pas 5: Mergi la Pas 3.

③ Repartiția binomială $X \sim Binom(n, p)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ & \dots & & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k \geq 0 \\ k = \overline{0,n} \end{matrix}$$

Similar, ideea centrală în folosirea metodei inverse este legată de o relație de recurență:

$$\boxed{p_{j+1} = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_j}$$

TEMĂ: de demonstrat

Algoritm

Pas 1: Generez U ($\sim Unif(0,1)$)

Pas 2: Inițializez $c = \frac{p}{1-p}$, $i=0$, $prob = (1-p)^n$, $F = prob$

Pas 3: Dacă $U < F$ atunci $X = i$ STOP

Pas 4: $prob = \frac{c(n-i)}{i+1} \cdot prob$, $F = F + prob$, $i = i+1$

Pas 5: Mergi la Pas 3.

Metoda respingerii pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

Fie X și Y două v.a. continue cu densitățile de probabilitate f și respectiv g. Presupunem cunoscută o metodă de simulare pentru Y. Atunci:

Căutăm o constantă $c > 0$ a.î. $\boxed{\frac{f(y)}{g(y)} \le c \ \forall y}$

OBS: Cu cât c e mai mic, cu atât metoda funcționează mai rapid.

ALGORITM

1. Generez Y
2. Generez U
3. Dacă $U \le \frac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$ atunci $X = Y$ altfel mergi la 1

Exemplu

$X \sim Beta(2,4)$ $f(x) = 20x(1-x)^3$, $0<x<1$

Aleg $Y \sim Unif(0,1)$ $g(x) = 1$, $0<x<1$

Căutăm constanta c:

- Calculăm $\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{not}{=} h(x) = 20x(1-x)^3$
- Pentru a determina c verificăm dacă h(x) are punct de maxim

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \quad x = \frac{1}{4}$

Facem tabelul de variație pt h:

x	0			$\frac{1}{4}$			1
$h'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$h(x)$	$\nearrow$			$h(\frac{1}{4})$			$\searrow$

$h(\frac{1}{4}) = \frac{135}{64} = c$

Așadar $\dfrac{f(x)}{c\cdot g(x)} = \dfrac{20\cdot x(1-x)^3}{\frac{135}{64}\cdot 1} = \dfrac{256}{27}\, x\cdot(1-x)^3$

$\boxed{\text{Algoritm pentru generarea unei valori din } X \sim \beta eta(2,4)}$

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generăm $\underbrace{U_1}_{\text{joacă rolul lui } Y}$ și U_2 $\xrightarrow{}$ variabila uniformă din algoritmul general $(\sim Unif(0,1))$

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Dacă $U_2 \leq \frac{256}{27}\cdot U_1(1-U_1)^3$ atunci $X = U_1$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Obs}}$: ① Numărul de iterații necesar pentru a obține o valoare din X prin metoda respingerii este o v.a. repartizată geometric cu media c, deci alegerea constantei este importantă în eficientizarea algoritmului.

② Suportul densității de probabilitate pt. Y trebuie să coincidă cu suportul densității de probabilitate pt. X !

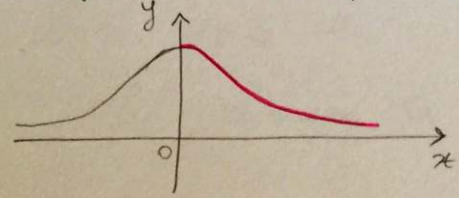
Exemple special:

$X \sim N(0,1)$ $\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in\mathbb{R}$

$Y \sim Exp(1)$ $\quad g(x)=e^{-x},\ x>0$

observăm că suportul celor 2 v.a. nu coincide, deci nu putem aplica metoda respingerii.

$\boxed{\text{OBS}}$: Ne folosim de proprietatea de simetrie a normalei standard



Remarcăm ca v.a. $|X|$ are densitatea $\tilde{f}(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x>0$

are același suport ca Y.

Vom începe prin a genera valori din $|X|$, apoi le atribuim semn în mod aleator!

Căutăm constanta c:

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{x-\frac{x^2}{2}}=h(x)$$

TEMĂ: Faceți calculele necesare pentru a obține valoarea constantei c.

Maximizând funcția $h(x)$ obținem $\boxed{c=\sqrt{\frac{2e}{\pi}}}$

Calculăm $\frac{\tilde{f}(x)}{c\cdot g(x)}=e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

Algoritm pentru generarea lui $|X|$ și respectiv X

$\boxed{\text{Pas 1}}$: Generez $Y \sim Exp(1)$

$\boxed{\text{Pas 2}}$: Generez $U_1, U_2 (\sim Unif(0,1))$

$\boxed{\text{Pas 3}}$: Dacă $U_1 \leq e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}$ atunci $|X| = Y$ și STOP

Altfel, revenim la $\boxed{\text{Pas 1}}$

$\boxed{\text{Pas 4}}$: Dacă $U_2 \leq \frac{1}{2}$ atunci $X = -|X|$

Altfel $X = |X|$.