

PROCESE POISSON

- PROCES STOCHASTIC
(RANDOM PROCESS)

def. →
informală

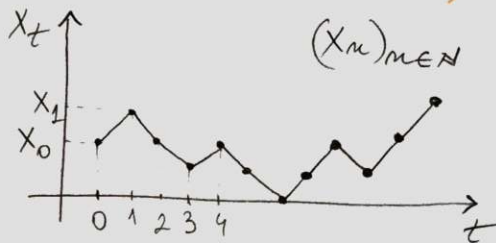
"șir de v.a. indexate după timp"

$$(X_t)_{t \in I}$$

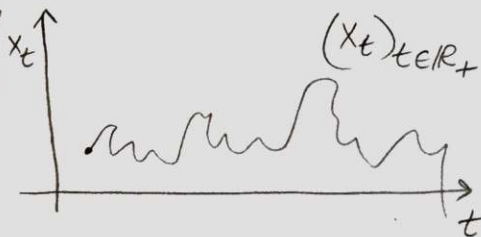
→ mulțimea momentelor de timp

→ poate fi discret sau
continuu

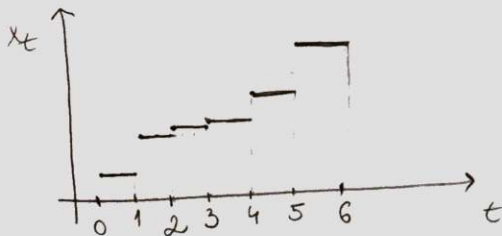
ex. 1) RANDOM WALK



2) MIȘCAREA BROWNIANĂ



3) PROCESE POISSON



- PROCES POISSON
 - OMOGEN (DE RATA λ)
 - NEOMOGEN (CU FUNCTIA DE INTENSITATE $\lambda(t)$)

1) PROCES POISSON OMOGEN

Presupunem că evenimentele de același fel au loc la momente de timp aleatoare în intervalul $[0, t]$. Notăm cu $N(t)$ (sau N_t) numărul de evenimente produse în acest interval.

$(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ se numește PROCES POISSON OMOGEN DE RATA λ , $\lambda > 0$ dacă:

- $N(0) = 0$ (procesul începe la momentul 0)
 - $N(t+s) - N(s)$ și $N(s)$ sunt independente (numărul de evenimente produse în două intervale disjuncte constituie v.a. independente)
 - $N(t+s) - N(s)$ și $N(t)$ au aceeași repartiție (repartiția nr. de evenimente produse într-un anumit interval depinde numai de lungimea intervalului)
 - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(h) = 1)}{h} = \lambda$
 - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0$
- (într-un interval infinitesimal de lungime h probabilitatea de a se produce exact 1 eveniment este aproximativ egală cu λh , pe când probabilitatea de a se produce 2 sau mai multe evenimente este aproximativ egală cu 0).

OBS: Numărul de evenimente produse în intervalul $[0, t]$ este o v.a. Poisson de medie λt .

CONVENȚIE: Notăm cu X_1 momentul apariției primului eveniment și pentru $n > 1$ natural X_n reprezintă timpul scurs între evenimentele $n-1$ și respectiv n .

Teorema: X_1, X_2, \dots, X_n sunt v.a. i.i.d. repartizate $\text{Exp}(\lambda)$.

[OBS]: Notăm cu $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ momentul de timp la care are loc evenimentul n .

Atunci $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

2) PROCES POISSON NEOMOGEN

Spunem că $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ se numește PROCES POISSON NEOMOGEN cu FUNCȚIA DE INTENSITATE $\lambda(t)$

dacă:

- a) $N(0) = 0$
- b) $N(t+s) - N(s)$ și $N(s)$ sunt v.a. independente
- c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(\text{"exact 1 eveniment s-a produs în intervalul } [t, t+h] \text{"})}{h} = \lambda(t)$
- d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(\text{"două sau mai multe evenimente se produc în intervalul } [t, t+h] \text{"})}{h} = 0$

→ arată cât e de probabil să se producă un eveniment într-o vecinătate a momentului t .

OBS: Funcția $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ se numește funcția de valoare medie.

Teoremă: v.a. $N(t+s) - N(t)$ este o v.a. Poisson de medie $m(t+s) - m(t)$.

OBS: Presupunem că un număr de evenimente au loc conform unui proces Poisson de rată λ și că, independent de ce s-a produs până atunci, are loc un eveniment la momentul t cu probabilitatea $p(t)$. Atunci numărul total de evenimente urmează un proces Poisson cu funcția de intensitate $\boxed{\lambda(t) = \lambda \cdot p(t)}$.

Exercițiu: ① Fie un proces Poisson omogen cu rată $\lambda = 0.6/\text{oră}$. Determinați probabilitatea ca niciun eveniment să nu aibă loc în intervalul 16:00 - 20:00.

② Pentru un proces Poisson omogen de rată λ determinați:
 $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$

$$\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) \text{ pentru } s < t.$$

ce se întâmplă dacă $s > t$?