4. Übungszettel zur Vorlesung **SS 2015**
Allgemeine Relativitätstheorie **Priv.-Doz. Dr. Ute Löw**
Abgabe bis Mo. 01. Juni 2015, 18:00 Uhr **Becker, Zeissner (Kasten 233)**

Aufgabe 1: Paralleltransport auf S^2 **(6 Punkte)**

Der Paralleltransport eines Vektors V auf einer Kurve $u(t)$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$\frac{dV^m}{d\lambda} + \Gamma^m_{jk} V^j \frac{du^k}{d\lambda} = 0 \tag{1}$$

Untersuchen Sie den Paralleltransport eines Vektors auf der Kugeloberfläche S^2:

$$V = V^\theta \vec{e}_\theta + V^\varphi \vec{e}_\varphi \tag{2}$$

mit den Anfangswerten:

$$V^\theta(\theta_0, \varphi_0 = 0) = V_0^\theta \tag{3}$$

$$V^\varphi(\theta_0, \varphi_0 = 0) = V_0^\varphi \tag{4}$$

indem Sie die DGLs durch einsetzen der Christoffelsymbole aufstellen.
Berechnen Sie dann explizit den Paralleltransport auf Breitenkreisen $\theta = \theta_0$ und auf Längenkreisen $\varphi = \varphi_0$. Was erwarten sie für einen parallelen Transport entlang eines Längenkreises? Dabei sind folgende Christoffelsymbole für die Rechnung relevant:

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \tag{5}$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{6}$$

Aufgabe 2: Riemann'scher Krümmungstensor des Torus **(6 Punkte)**

Der Torus kann wie folgt durch die Winkel θ und φ parametrisiert werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta(a + r\cos\varphi) \\ \sin\theta(a + r\cos\varphi) \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{7}$$

dabei sind a und r konstant.

a) Berechnen Sie die Tangentialvektoren und bestimmen Sie damit die Komponenten des metrischen Tensors.

b) Bestimmen Sie die Krümmungsmatix.

c) Ermitteln Sie die Gauß'sche Krümmung.

d) Geben Sie die sich daraus ergebende R_{1212} Komponente des Riemann'schen Krümmungstensors an. Warum reicht in diesem Fall die Bestimmung einer Komponente aus?

e) Berechnen Sie unabhängig davon die R_{1212} Komponente des Riemann'schen Krümmungstensors aus folgender Darstellung:

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} \tag{8}$$

Aufgabe 3: Affiner Zusammenhang **(3 Punkte)**
Berechnen Sie explizit das Transformationsverhalten des affinen Zusammenhangs

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \tag{9}$$

in der Koordinatendarstellung unter Koordinatentransformationen.