K L A U S U R

Spezielle

und

Allgemeine Relativitätstheorie

SS 10

Zeit: 120 min

Hinweise

- Lesen Sie alle Aufgaben sorgfälltig durch,
- wählen Sie aus jedem Themengebiet eine Aufgabe aus und löse Sie diese.
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Lösungswege ausreichend kommentieren.
- Viel Erfolg!

Astronomische Daten

Gravitationskonstante $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{ks}^2}$

1. Erde

Masse	$m_{♁} = 5,977 \cdot 10^{24}$ kg
mittlerer Radius	$r_{♁} = 6368$ km
mittlerer Bahnradius	$\bar{r} = 1,496 \cdot 10^{8}$ km

2. Sonne

Masse	$m_{\odot} = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg
Radius	$r_{\odot} = 6,96$ km

3. Himmelskörper des Sonnessystems

(relative Angaben bezogen auf die Erde)

Körper	Bahnradius	Umlaufzeit	Masse	Radius	g in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Sonne ☉				109	275
Merkur ☿	0,387	0,241	0,055	0,383	3,70
Venus ♀	0,723	0,615	0,815	0,950	8,87
Erde ♁	1	1	1	1	9,81
Mars ♂	1,52	1,88	0,107	0,533	3,73
Jupiter ♃	5,20	11,86	318	11,2	24,9
Saturn ♄	9,54	29,5	95,2	9,41	11,1
Uranus ⛢	19,2	84,0	14,6	4,1	9,0
Neptun ♅	30,1	164,8	17,2	3,8	11,4
Pluto ♇	39,8	247,7	$3 \cdot 10^{-3}$	0,18	0,6
Erdmond	60,3 $r_{♁}$	$7,42 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,273	1,63

Themengebiet I: Spezielle Relativitätstheorie

1. Lorentz-Tranformation

Durch Kernumwandlung werden in einem Versuch ^{6}He-Kerne erzeugt, diese werden beschleunigt, und treten dann in Form eines gepulsten Strahls aus einer Blende. Nach der Blende fliegen sie mit der Geschwindigkeit $v = 0,6$ c geradlinig weiter. Die Bewegung der Kerne wird im Laborsystem $\mathrm{S}(x, t)$ sowie in einem mit dem ersten Puls mitbewegten System $\mathrm{S}'(x', t')$ beschrieben. Die Ortsachsen der beiden Systeme sind gleich gerichtet und fallen zusammen.

Der erste Puls durchläuft die Blende ($x = x' = 0$) zum Zeitpunkt $t = t' = 0$.

a) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für das S-System mit der Weltlinie des ersten He-Kern-Pulses. Führen Sie das Diagramm in den folgenden Teilaufgaben fort.

[Für die Zeichnung: DIN A4 Querformat; t-Achse: 2 cm $\widehat{=}$ $1,0 \cdot 10^{-8}$ s; x-Achse: 2 cm $\widehat{=}$ 3 m]

(2 Punkte)

b) Die Halbwertszeit des ^{6}He beträgt $T = 805$ ms. Berechnen Sie, in welcher Entfernung von der Blende (S-System) noch 99,9 % der ausgesandten Teilchen unzerfallen ankommen. (2 Punkte)

Die Teilchenpulse werden im zeitlichen Abstand $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-8}$ s ausgesandt.

c) Tragen Sie die Weltlinien der nächsten beiden Teilchenpulse in das Minkowski-Diagramm aus Teilaufgabe 1 a ein. Berechnen Sie sodann, welcher zeitliche Abstand $\Delta t'$ dem Austreten der einzelnen Pulse aus der Blende von einem Beobachter im S′-System zugeordnet wird. Begründen Sie Ihren Ansatz.

(3 Punkte)

d) Zeichnen Sie eine Zeitachse ($t' = 0$) und die Ortsachse ($x' = 0$) des S′-Systems in das Minkowski-Diagramm ein, und eichen Sie die beiden Achsen. Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen. (2 Punkte)

e) Erläutern Sie, wie im Minkowski-Diagramm der in Teilaufgabe 1 a zu bestimmende zeitliche Abstand $\Delta t'$ bestimmt werden könnte, und tragen Sie diese Linie ein. (2 Punkte)

Ein ^{6}He-Kern des ersten Pulses zerfällt zum Zeitpunkt $t' = 3,0 \cdot 10^{-8}$ s unter β^--Emission, wobei das ausgesandte Elektron mit der Geschwindigkeit u' vom Betrag $\frac{c}{3}$ relativ zum ^{6}He-Kern entgegen dessen Flugrichtung ausgesandt wird.

f) Zeichnen Sie ohne Benutzung der Formel zur Geschwindigkeitsaddition die Weltlinie dieses bewegten Elektrons in das Minkowski-Diagramm ein. Berechnen Sie sodann die Geschwindigkeit u des Elektrons relativ zum Laborsystem S und bestimmen Sie zeichnerisch, wo und wann im S-System die Kollision dieses β^--Teilchens mit dem nachfolgenden Puls stattfindet.

(3 Punkte)

Durch den Beschuß eines Targets mit den ^{6}He-Kernen entstehen Nuklide, die einem β^+-Zerfall unterliegen. Sie emittieren Positronen, die im S-System die Gesamtenergie $W = 5,2$ MeV haben.

Ein Elektron der S-Geschwindigkeit $u = \frac{c}{3}$ (in positiver x-Richtung) kollidiert mit einem solchen Positron, das sich in negativer x-Richtung bewegt. Die beiden Stoßpartner zerstrahlen in zwei verschiedene γ-Quanten. Das eine γ-Quant fliege in positiver, das andere in negativer x-Richtung.

g) Berechnen Sie für jedes γ-Quant die Energie im S-System. Begründen Sie sodann, dass bei dieser Umwandlung mindestens zwei γ-Quanten entstehen müssen. (6 Punkte)

(20 Punkte)

2. Relativistische Kinematik

Ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und Eigenzeit τ bewege sich mit einer Geschwindigkeit $|\vec{u}| < \mathrm{c}$ relativ gegen das Inertialsystem $\mathrm{S}(t, \vec{x})$. Mit dem Teilchen sei das System $\mathrm{S}'(\tau, \vec{x}')$ fest verbunden. Die Achsen der beiden Systeme seien gleich orientert. Die verallgemeinerte Newtonsche Bewegungsgleichung ist

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} ,$$

mit $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ und E als der relativistischen Energie des Teilchens.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die 0-Komponente der Kraft durch $F^0 = \frac{\gamma}{\mathrm{c}} \frac{dE}{dt}$ gegeben ist.
(1 Punkt)

Für Teilchen, die zusäztlich eine Ladung q tragen, lautet die kovariante Form der Lorentz-Kraft

$$F^\mu = \frac{q}{\mathrm{c}} \left[\partial^\mu \left(u_\nu \mathcal{A}^\nu \right) - \frac{d\mathcal{A}^\mu}{d\tau} \right] \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^\mu = (V, \vec{\mathcal{A}})$$

als dem Viererpotential, $V(\vec{x}, t)$ dem elektrischen Potential, der Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $|\sum_{i=1}^3 u^i| = const.$, und $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial(\mathrm{c}t)}, -\vec{\nabla})$.

b) Berechnen Sie zunächst das Skalarprodukt $u_\nu \mathcal{A}^\nu$. Bestätigen Sie sodann, dass sich die 0-Komponente der Lorentz-Kraft F^μ darstellen läßt als

$$\frac{dE}{dt} = q\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}} ,$$

verwenden Sie an geeigneter Stelle die Maxwell-Gleichung: $\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, V$.
[Teilergebnis: $u_\nu \mathcal{A}^\nu = \gamma(\mathrm{c}V - \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{A}})$] (4 Punkte)

Das Teilchen wird auf die Geschwindigkeit u_0 beschleunigt. Nach Durchlaufen einer bestimmten Strecke s zerfällt es in zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2.

c) Berechnen Sie die kinetische Energie, die das Teilchen mindestens haben muss, damit seine Geschwindigkeit größer als 80% der Lichtgeschwindigkeit ist.
(2 Punkte)

Betrachten Sie nun den Zerfall des Teilchens in seinem Ruhesystem.

d) Geben Sie die Erhaltungsgrößen für den Teilchenzerfall an. Berechnen Sie sodann die relativistischen Energien E_1' und E_2' der beiden Teilchen im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens.
$\left[\text{Teilergebnis: } (p_1')^2 \mathrm{c}^2 = \mathrm{c}^4 \left\{ \left(\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0} \right)^2 - m_1^2 \right\} \right]$ (8 Punkte)

Betrachten Sie nun den Zerfall des Teilchens im ruhenden Laborsystem. Die Komponenten der Impulse im Laborsystem $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ können jeweils zerlegt werden in einen Anteil parallel ($\|$) und senkrecht ($\perp$) bezüglich des Teilchenimpulses $\vec{p}_0$.

e) Erläutern Sie, dass für die Energie und Impulskomponenten der Zerfallsteilchen im Laborsystem

$$E_i = \gamma E'_i + \gamma\beta\, \vec{p}'_{i\parallel} \mathrm{c} \qquad \text{und} \qquad \vec{p}_{i,\parallel} = \gamma\, \vec{p}'_{i\parallel} + \frac{\gamma\beta}{\mathrm{c}} E'_i\,, \quad i = 1, 2\,,$$

gilt. (2 Punkte)

Abschließend wird der Spezialfall untersucht, dass eines der beiden Zerfallsteilchen im Laborsystem stehen bleibt. Der Impuls $\vec{p}_m$ den das zerfallende Teilchen dazu haben muss, wird als magischer Impuls bezeichnet.

f) Berechnen Sie den magischen Impuls $\vec{p}_m$ des zerfallenden Teilchens, wenn das Teilchen 1 im Laborsystem stehen bleiben soll. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse. (3 Punkte)

(20 Punkte)

Themengebiet II: Allgemeine Relativitätstheorie

3. Wurmloch, Morris-Thorne Metrik

In der 1986 erschienenen Novelle *Contact* des US-amerikanischen Astrophysikers C. E. Sagan werden Menschen durch eine Reihe von Wurmlöchern transportiert. Als akademisches Beispiel eines durchfahrbaren Wurmlochs werde die von Morris und Thorne 1988 im Am. J. Phys. (56):395–412, veröffentlichte Metrik

$$ds^2 = -\mathrm{c}^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \,, \quad \begin{cases} -\infty < t < \infty \,, \\ -\infty < l < \infty \,, \\ 0 \leq \theta \leq \pi \,, \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \,, \end{cases} \tag{3.1}$$

mit den Koordinaten $x^0 = \mathrm{c}t$, $x^1 = l$, $x^2 = \theta$ und $x^3 = \phi$ und der Konstanten b_0 betrachtet.

a) Diskutieren Sie ohne Rechnung die physikalischen und geometrischen Eigenschaften der Morris-Thorne Metrik (3.1) bzgl. (4 Punkte)

   α) der Koordinaten t, l, θ und ϕ,

   β) der Raum-Zeit selbst, d.h. geben Sie die Symmetrien der Raum-Zeit an, diskutieren Sie evtl. vorhandene asymmptotisch flache Bereiche und die Existenz oder Nichtexistenz eines Ereignishorizonts.

b) Berechnen Sie die nicht-verschwindenen Koeffizienten des Christoffel-Symbols der Morris-Thorne Metrik. (4 Punkte)

   $\big[$Teilergebnis: $\Gamma^1_{22} = -l \,,\ \Gamma^1_{33} = -l \sin^2\theta \big]$

Im Sitzungsbericht der Preußischen Akademie der Wissenschaften vom 25. November 1915 gibt Einstein folgende Feldgleichung der Gravitation an,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = -\kappa T_{\mu\nu} \,, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{\mathrm{c}^4} \,, \tag{3.2}$$

mit $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ als dem Ricci-Tensor, $\mathcal{R}$ dem Krümmungskalar, G als der Newtonschen Gravitationskonstanten und $T_{\mu\nu}$ als dem Energie-Impuls-Tensor. Für die Morris-Thorne Metrik findet man

$$\mathcal{R}_{11} = -2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{R} = -2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \,.$$

c) Geben Sie die nicht-verschwindenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors an. Ist es möglich im Labor einen Energie-Impuls-Tensor äquivalent zu dem der Morris-Thorne Metrik zu erzeugen? Diskutieren Sie dazu speziell die T_{00}-Komponente des Energie-Impuls Tensors. (4 Punkte)

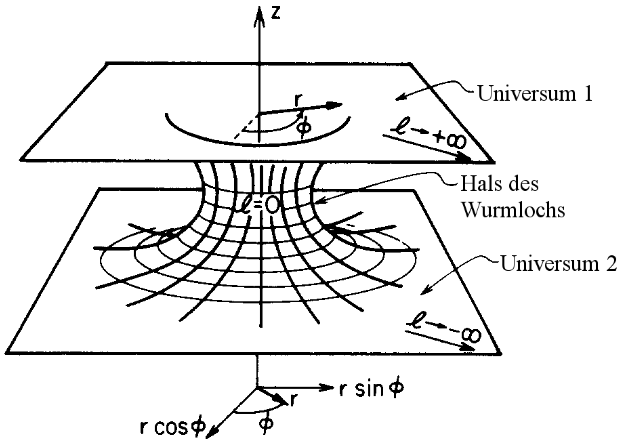
Die linke Seite der Einstein Gleichung (3.2) kann erweitert werden durch hinzufügen eines Terms $-\Lambda g_{\mu\nu}$, ohne das dadurch die allgemeine Kovarianz der Feldgleichung zerstört wird.

d) Erklären Sie kurz die Bedeutung der universellen Konstante Λ und begründen Sie, ohne Rechung, weshalb diese Konstante sehr klein sein muss. (2 Punkte)

Zum Abschluss der Diskussion der Morris-Thorne Metrik soll die Einbettung der Äquatorialebene, $\theta = \frac{\pi}{2}$, für den fixen Zeitpunkt t in den zylindersymmetrischen Raum (r, ϕ, z), beschrieben durch das Linienelement

(3.3) $$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \ .$$

betrachtet werden, wie es die nebenstehende Skizze zeigt.



e) Zeigen Sie, dass $z(r) = \pm b_0 \ln\left[(r/b_0) + \sqrt{(r/b_0)^2 - 1}\right]$ mit $l = \pm\sqrt{r^2 - b_0^2}$ gilt, verwenden Sie an geeigneter Stelle (3 Punkte)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) \ , \quad a \neq 0 \ .$$

Betrachten Sie abschließend die kovariante Ableitung $D_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} V_\sigma$ eines kovarianten Vektors V_μ. Allgemein gilt für die Anwendung der kovarianten Ableitung auf ein Tensorfeld $B_{\nu\mu}$: $D_\gamma B_{\nu\mu} = \partial_\gamma B_{\nu\mu} - \Gamma^\xi_{\nu\gamma} B_{\xi\mu} - \Gamma^\xi_{\mu\gamma} B_{\nu\xi}$.

f) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass $D_\gamma D_\nu V_\mu - D_\nu D_\gamma V_\mu = R^\sigma{}_{\mu\nu\gamma} V_\sigma$, mit dem Riemann Tensor $R^\sigma{}_{\mu\nu\gamma} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\xi_{\mu\gamma}\Gamma^\sigma_{\xi\nu} - \Gamma^\xi_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\xi\gamma}$, gilt. (3 Punkte)

(20 Punkte)

4. Schwarzschild-Metrik

In seinem Aufsatz „Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", veröffentlicht im Sitzungsbericht d. k. Preuss. Akad. Wissen. vom 3. Februar 1916, Seiten 189-196, schreibt K. Schwarzschild: „... so ergibt sich das Linienelement, welches die strenge Lösung des Einsteinschen Problems bildet:"

$$\begin{aligned} ds^2 &= A(R)\,\mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dR^2}{A(R)} - R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \,, \\ A(R) &= \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) \,,\; R = \left(r^3 + \alpha^3\right)^{\frac{1}{3}} \,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit der Konstanten α, welche von der Größe der im Nullpunkt befindlichen Masse abhängt.

a) Erklären Sie zunächst in Ihren eigenen Worten, was man in der Allgemeinen Relativitätstheorie unter dem Kovarianzprinzip versteht. (2 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes in der Äquatorialebene, $\theta = \frac{\pi}{2}$, der durch (4.1) beschriebenen Raumzeit.

b) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned} &A(R)\,\mathrm{c}^2\dot{t}^2 - \frac{1}{A(R)}\dot{R}^2 - R^2\dot{\phi}^2 = const. = \mathrm{c}^2 \,, \quad A(R)\dot{t} = const. = k \,, \\ &R^2\dot{\phi} = const. = h \,, \end{aligned}$$

mit $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ als der Ableitung nach der Eigenzeit τ, gegeben sind. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für die Bewegung in der Äquatorialebene

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{\mathrm{c}^2(k^2-1)}{h^2} + \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{h^2}x - x^2 + \alpha x^3$$

mit $x = \frac{1}{R}$ gilt. (2 Punkte)
[Zwischenergebnis: $(\frac{dR}{d\phi})^2 + R^2 A(R) = \frac{\mathrm{c}^2 R^4}{h^2}\{k^2 - A(R)\}$]

Nimmt man die Sonne, als ruhendes Zentralgestirn an, so gelten für die Bewegungen der Planeten um die Sonne die drei Keplerschen Gesetze. Das 3. Keplersche Gesetz besagt, dass die Quadrate der Umlaufzeiten (T_1, T_2) zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen (a_1, a_2) ihrer Bahnellipsen. Insbesondere folgt daraus, $T^2/a^3 = const$. Die Winkelgeschwindigkeit eines Planeten auf einer kreisförmigen Umlaufbahn ist $\omega = \frac{d\phi}{dt}$.

d) Leiten Sie vermittelst der Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe 4 b das 3. Keplersche Gesetz für eine kreisförmigen Planetenorbit, $k = 1$, in der durch (4.1) beschriebenen Raumzeit ab.

Schwarzschild schreibt: „Bis zur Sonnenoberfläche hin ist die Abweichung dieser Formel vom dritten Keplerschen Gesetz völlig unmerklich." Überprüfen Sie diese Aussage, verwenden Sie $\alpha = \frac{2MG}{\mathrm{c}^2}$, und berechnen Sie die beiden Kepler-Konstanten aus dem Umlauf des Merkur um die Sonne.
[Ergebnis: $\frac{T^2}{r^3+\alpha^3} = \frac{8\pi^2}{\alpha \mathrm{c}^2} = const.$] (5 Punkte)

Eine am Ort R_A im Gravitationsfeld (4.1), $\alpha = \frac{2GM}{c^2}$, ruhende Quelle sendet eine monochromatische elektromagnetische Welle der Frequenz ν_A aus. Am Ort R_B ruht ein Beobachter, welcher die Frequenz der Welle mit ν_B beobachtet. Aufgrund des Gravitationsfeldes gilt

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{g_{00}(R_A)}{g_{00}(R_B)}} \,. \tag{4.2}$$

Untersuchen Sie nun abschließend folgende Situationen:

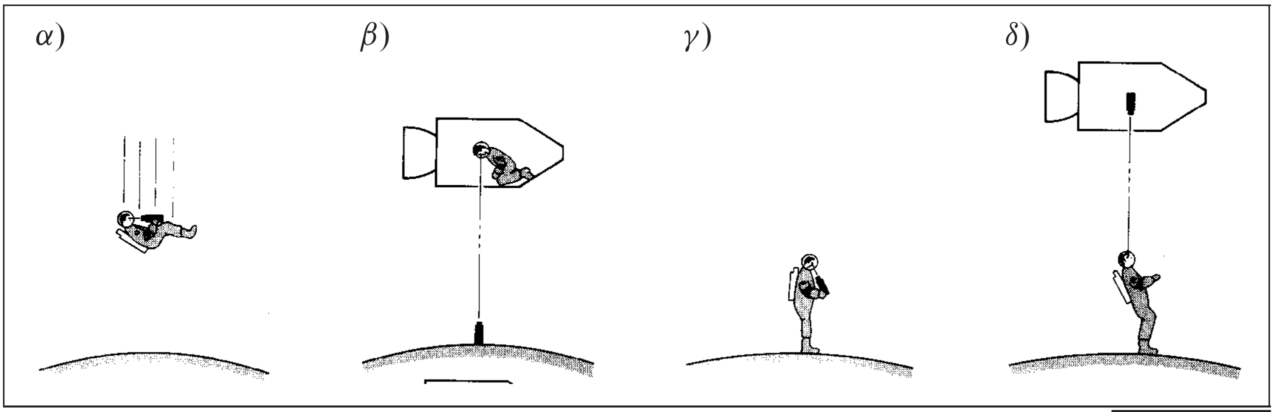
e) In einem frei fallenden Satellitenlabor wird die Wellenlänge eines Helium-Neon Lasers mit 632,8 nm gemessen. Welche Wellenlänge würde der Experimentator messen, wenn

α) er und der Laser frei in Richtung eines Neutronensterns fallen? (1 Punkt)

β) er frei im Satellitenlabor fällt und der Laser von der Oberfläche eines Neutronensterns, $m = 10^{30}$ kg, $R = 10^4$ m, in radialer Richtung auf ihn strahlt. Das Labor befinde sich sehr nahe am Stern, d.h. $1/R_{\text{Lab}} = 0$. (2.5 Punkte)

γ) beide auf der Oberfläche des Neutronensterns stehen. (1 Punkt)

δ) er auf dem Neutronenstern steht und der Laser sich im frei fallenden Satellitenlabor befindet. Das Labor befinde sich wieder sehr nahe am Stern. (2.5 Punkte)

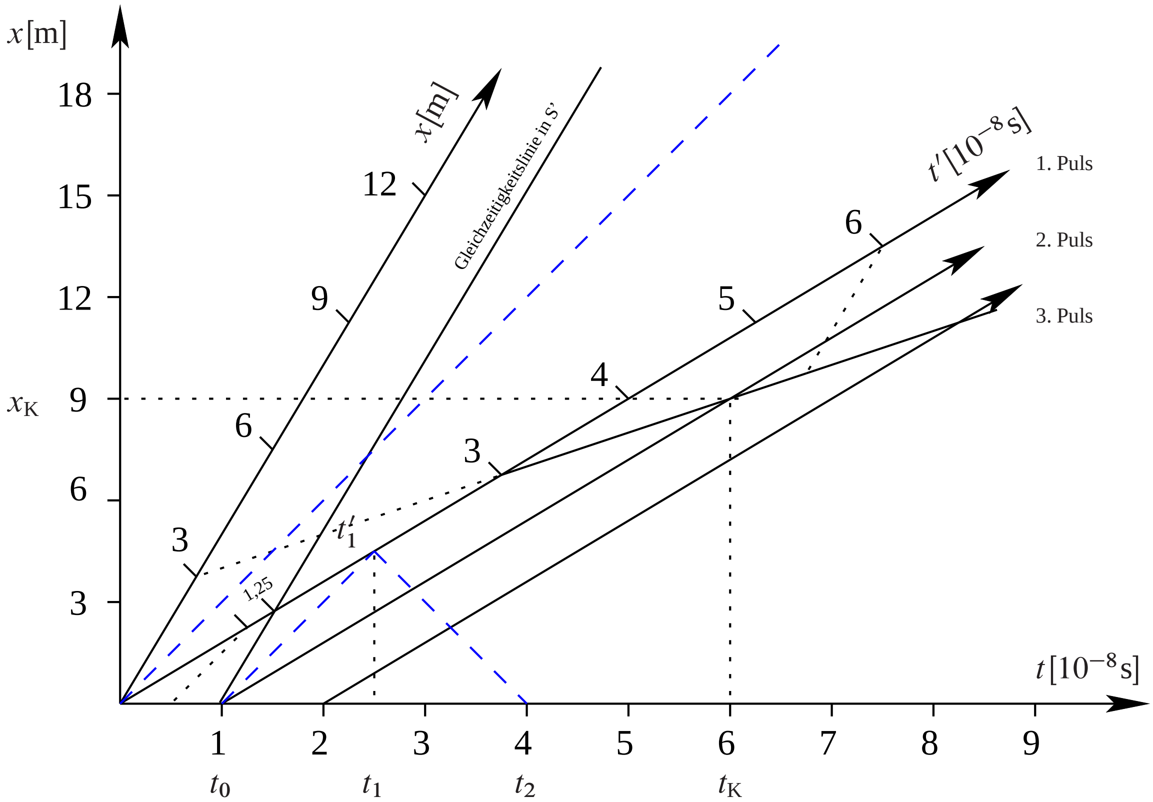


(20 Punkte)

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Minkowski-Diagramm:



b) Radioaktives Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t'} \;\Rightarrow\; t' = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right) = \frac{T}{\ln 2} \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right) .$$

Lorentz-Transformation von S′ nach S,

$$\frac{t}{t'} = \gamma \;\Rightarrow t = t'\gamma = \frac{T}{\ln 2} \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Einsetzen der Zahlenwerte, $N(t) = 0,999 N_0$, $T = 805$ ms, $\gamma = \frac{5}{4}$,

$$t = \frac{5}{4} \frac{805 \cdot 10^{-3}}{\ln 2} \ln\left(\frac{1}{0,999}\right) \;\Rightarrow\; t = 1,45 \text{ ms} .$$

Für den zurückgelegten Weg in S gilt $x = v \cdot t$ und damit

$$x = 0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ m} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 261 \text{ km}} .$$

c) S und S′ sind gleichberechtigte Inertialsysteme. S′ bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v. Die Pulse, welche aus der Blende austreten, stellen in S ortsfeste Ereignisse dar, die an vielen in S′ ortsfesten Uhren vorbeifliegen. Lorentz-Transformation:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \ \Rightarrow\ \Delta t' = \frac{5}{4} \cdot 1 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s} \ \Rightarrow\ \boxed{\Delta t' = 1,25 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}}\ .$$

d) Die Weltlinie des 1. Pulses aus Teilaufgabe a ist die t'-Achse. Die Eichung der t'-Achse kann z.B. über ein Lichtsignal und dem k-Kalkül erfolgen: Lichtsignal zum Zeitpunkt t_0 in Richtung S′, trifft das Teilchen zum Zeitpunkt $t_1' = k\,t_0$ wird dort reflektiert und erreicht S zum Zeitpunkt $t_2 = k\,t_1'$, d.h. $t_2 = k^2 t_0$. Es gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} x_0 &=& \frac{\mathrm{c}}{2}(t_2 - t_0) \\ x_0 &=& \frac{v}{2}(t_2 + t_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v}{\mathrm{c}} = \frac{t_2 - t_0}{t_2 + t_0} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\ ,$$

damit kann die t'-Achse über Lichtsignale geeicht werden. Die x'-Achse ergibt sich durch Spiegelung der t'-Achse an der Lichtlinie.

e) Parallelen zur x'-Achse sind Gleichzeitigkeitslinien in S′, d.h. eine Gleichzeitigkeitslinie durch den Punkt $(1,0 \cdot 10^{-8}$ s; 0 m) im S-System ergibt im S′-System die gesuchte Zeit $\Delta t'$.

f) Mit der angegebenen Geschwindigkeit im System S′ folgt, dass das Elektron in der Zeit $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$ s, den Weg

$$\Delta x' = -\frac{3 \cdot 10^8}{3} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = -3\ \mathrm{m}$$

zurücklegt, damit kann die Weltlinie konstruiert werden. Aus der Lorentz-Transformation vom S′-System in das S-System folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{c}\,dt &=& \gamma(\mathrm{c}\,dt' + \beta dx') \\ dx' &=& \gamma(dx' + \beta \mathrm{c}\,dt') \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{v + u'}{1 + \frac{u'v}{\mathrm{c}^2}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{15}}\mathrm{c} = \frac{4}{15}\frac{15}{12}\mathrm{c} \Rightarrow \boxed{u = +\frac{\mathrm{c}}{3}}\ .$$

Dem Minkowski-Diagramm entnimmt man für die Kollision $\boxed{t_K = 6,0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s};\ x_K = 9\ \mathrm{m}}$.

g) Für den Prozess gilt Viererimpulserhaltung: $p_+ + p_- = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2}$. Daraus folgt (i) Energieerhaltung: $E_- + E_+ = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$ und (ii) Impulserhaltung: $\vec{p}_- + \vec{p}_+ = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2}$. Für die relativitische Gesamtenergie des Elektrons gilt $E_- = m(u)\mathrm{c}^2 = \gamma m_0 \mathrm{c}^2$, mit m_0 als der Ruhemasse des Elektrons und $m(u) = \gamma m_0$ als der relativistischen Masse des Elektrons. Die Energieerhaltung lautet damit insgesamt

$$(*) \qquad \gamma m_0 \mathrm{c}^2 + E_+ = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{E_{\gamma_2} = \gamma m_0 \mathrm{c}^2 + E_+ - E_{\gamma_1}}\ .$$

Beachtet man die Richtung der Impulse, so folgt für die Beträge der Impulse

$$(**) \qquad p_- - p_+ = p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2} = \frac{E_{\gamma_1}}{\mathrm{c}} - \frac{E_{\gamma_2}}{\mathrm{c}} \Rightarrow p_-\mathrm{c} - p_+\mathrm{c} = E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2}\ .$$

Addition der Gleichung ($*$) mit ($**$) ergibt

$$2E_{\gamma_1} = E_- + E_+ + p_-\mathrm{c} - p_+\mathrm{c} \;\Rightarrow\; E_{\gamma_1} = \frac{1}{2}\left(E_- + E_+ + p_-\mathrm{c} - p_+\mathrm{c}\right) \;,$$

mit

$$E_- + p_-\mathrm{c} = m(u)\mathrm{c}^2 + \gamma m_0 u\mathrm{c} = \gamma m_0 \mathrm{c}^2 + \gamma m_0 u c = \gamma(1+\beta)m_0\mathrm{c}^2 \;,$$

und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = E_0^2 + p^2\mathrm{c}^2$ folgt schließlich

$$(***) \qquad \boxed{E_{\gamma_1} = \frac{1}{2}\left[\gamma(1+\beta)m_0\mathrm{c}^2 + E_+ - \sqrt{E_+^2 - E_0^2}\right]} \;.$$

Mit $u = \frac{\mathrm{c}}{3}$ ist $\beta = \frac{1}{3}$ und $\gamma = \frac{3}{\sqrt{8}}$. Einsetzen der Zahlenwerte in Gleichung ($***$) ergibt

$$E_{\gamma_1} = \frac{\mathrm{MeV}}{2}\left[\frac{3}{\sqrt{8}}\frac{4}{3}\cdot 0,511 + 5,2 - \sqrt{(5,2)^2 - (0,511)^2}\right] \;\Rightarrow\; \boxed{E_{\gamma 1} = 0,374\ \mathrm{MeV}} \;,$$

und aus ($**$) erhält man

$$E_{\gamma_2} = \left(\frac{3}{\sqrt{8}}\cdot 0,511 + 5,2 - 0,374\right)\mathrm{MeV} \;\Rightarrow\; \boxed{E_{\gamma_2} = 5,368\ \mathrm{MeV}} \;.$$

Aufgabe 2

a) Aus der Invarianz des Linienelements folgt

$$\mathrm{c}^2 d\tau^2 = \mathrm{c}^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = \mathrm{c}^2 dt^2\left[1 - \left(\frac{d\vec{x}}{\mathrm{c}dt}\right)^2\right] = \frac{\mathrm{c}^2 dt^2}{\gamma^2} \;\Rightarrow\; d\tau = \frac{dt}{\gamma} \;,$$

damit ist $F^\mu = \gamma(dp^\mu/dt)$ und schließlich mit $p^\mu = (E/\mathrm{c}, \vec{p})$ folgt für die 0-Komponente

$$F^0 = \frac{\gamma}{\mathrm{c}}\frac{dE}{dt} \qquad \triangleleft$$

b) Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a, $\gamma d\tau = dt$, und $x^\mu = (\mathrm{c}t, \vec{x})$, folgt

$$u^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu(t(\tau)) = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \;\Rightarrow\; u^\mu = \gamma(\mathrm{c}, \vec{u}) \;.$$

Damit ist

$$u_\nu \mathcal{A}^\nu = \gamma(\mathrm{c}, \vec{u})\cdot\begin{pmatrix} V \\ \vec{\mathcal{A}} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{u_\nu \mathcal{A}^\nu = \gamma(\mathrm{c}V - \vec{u}\cdot\vec{\mathcal{A}})} \;.$$

Die 0-Komponente von ∂^μ ist gerade die Ableitung $\partial/\partial(\mathrm{c}t)$, somit

$$F^0 = \frac{q}{\mathrm{c}}\left[\partial^0 u_\nu \mathcal{A}^\nu - \frac{d\mathcal{A}^0}{d\tau}\right] \overset{!}{=} \frac{q}{\mathrm{c}}\left[\frac{\gamma}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{c}V - \vec{u}\cdot\vec{\mathcal{A}}\right) - \gamma\frac{dV}{dt}\right] = \frac{q\gamma}{\mathrm{c}}\left[\frac{\partial V}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \frac{dV}{dt}\right] \;.$$

Da gilt $V = V(\vec{x}, t)$ lautet das Differential

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}\,d\vec{x} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{u}(\vec{\nabla}V)\,,$$

eingesetzt in F^0 ergibt

$$F^0 = \frac{q\gamma}{c}\left[\cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} - \vec{u}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} - \vec{u}(\vec{\nabla}V)\right] = \frac{q\gamma}{c}\vec{u}\underbrace{\left[-\vec{u}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{u}(\vec{\nabla}V)\right]}_{=\vec{\mathscr{E}}} \Rightarrow F^0 = \frac{q\gamma}{c}\vec{u}\cdot\vec{\mathscr{E}}$$

Mit $F^0 = \frac{q}{c}\frac{dE}{dt}$ folgt schließlich

$$\frac{q}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{q\gamma}{c}\vec{u}\cdot\vec{\mathscr{E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = q\vec{u}\cdot\vec{\mathscr{E}}}\,.$$

c) Ist $E = mc^2$ die relativistische Energie und $E_0 = m_0c^2$ die Ruheenergie des Teilchens, dann ist seine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = E - E_0$. Mit $m = \gamma m_0$ besteht zwischen der relativistischen Energie und der Ruheenergie der Zusammenhang $E = \gamma E_0$, damit ist $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)E_0$. Die Geschwindigkeit soll 80% der Lichtgeschwindigkeit betragen, d.h. $\beta = 0,8$ und somit $\gamma = \frac{5}{3}$. Die kinetische Energie ist damit

$$E_{\text{kin}} = \left(\frac{5}{3} - 1\right)E_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\text{kin}} \geq \frac{2}{3}\,m_0c^2}\,.$$

d) Erhaltungsgrößen (Lehrbuch): Viererimpulserhaltung (Energie- und Impulserhaltung) Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens folgt aus der Energieerhaltung $E_0 = E_1' + E_2'$ und aus der Impulserhaltung $\vec{p}_1{}' = -\vec{p}_2{}'$, bzw. $|\vec{p}_1{}'| = |\vec{p}_2{}'|$. Mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{E_0^2 + \vec{p}^{\,2}c^2}$ erhält man aus der Energieerhaltung für den Impuls $\vec{p}_1$,

$$E_0 - E_2' = E_1' \;\Rightarrow\; m_0^2c^4 + m_1^2c^4 + \cancel{(\vec{p}_1{}')^2c^2} - 2m_0c^2\sqrt{m_2^2c^4 + (\vec{p}_1{}')^2c^2} = m_1^2c^4 + \cancel{(\vec{p}_1{}')^2c^2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2)c^4}{2m_0c^2} = \sqrt{m_1^2c^4 + (\vec{p}_1{}')^2c^2} \;\Rightarrow\; m_1^2c^4 + (\vec{p}_1{}')^2c^2 = c^4\left[\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}\right]^2$$

$$\Rightarrow\; (\vec{p}_1{}')^2c^2 = c^4\left\{\left[\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}\right]^2 - m_1^2\right\}$$

Einsetzen in die relativistische Energie-Impuls-Beziehung ergibt für das Teilchen 1,

$$(E_1')^2 = m_1^2c^4 + c^4\left[\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}\right]^2 - m_1^2c^4 = c^4\left(\frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_1' = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}\,c^2}\,,$$

und aus der Energieerhaltung folgt für das Teilchen 2,

$$E_2' = E_0 - E_1' = m_0c^2 - \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}\,c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_2' = \frac{m_0^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m_0}\,c^2}\,.$$

e) Im Laborsystem gilt ebenfalls die Viererimpulserhaltung. Aus der Impulserhaltung folgt

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{1\|} + \vec{p}_{2\|} + \underbrace{\vec{p}_{1\perp} + \vec{p}_{2\perp}}_{=0} \;\Rightarrow\; \vec{p}_0 = \vec{p}_{1\|} + \vec{p}_{2\|}\,, \quad \vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp}\,.$$

Die Lorentz-Transformation vom Ruhesytem in das Laborsystem erfolgt parallel zum Impulsvektor $\vec{p}_0$, für die Rücktransformation des Impulsvektors $p^\mu = (E/\mathrm{c}, \vec{p})$ gilt

$$\vec{p}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu} p'^{\nu} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} E_i/\mathrm{c} \\ \vec{p}_{i\|} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_i/\mathrm{c} \\ \vec{p}'_{i\|} \end{pmatrix},$$

daraus liest man für die beiden Komponenten der beiden Teilchen

$$E_i = \gamma E'_i + \gamma\beta\,\vec{p}_{i\|}\mathrm{c} \quad , \qquad \vec{p}_{i\|} = \gamma\beta E'_i + \gamma\,\vec{p}'_{i\|}\mathrm{c}$$

ab.

f) Das Teilchen 1 soll im Laborsystem stehen bleiben, d.h. $\vec{p}_1 = \vec{0} = \vec{p}_{1\|} + \vec{p}_{1\perp}$. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe e folgt damit $\beta = -\frac{\vec{p}'_{1\|}\mathrm{c}}{E'_1}$. Da $\vec{p}_\perp = 0$ ist, muss die zur Transformation senkrechte Komponente von $\vec{p}'_1$ verschwinden, somit ist $\vec{p}'_1 = \vec{p}_{1\|}$. Mit $E = m\mathrm{c}^2$ und $\vec{p} = m\vec{v}$ erhält man $\beta = \frac{|\vec{v}|}{\mathrm{c}} = \frac{|\vec{v}|m\mathrm{c}}{m\mathrm{c}^2} = \frac{|\vec{p}|\mathrm{c}}{E}$, und weiter mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{m_0^2\mathrm{c}^4 + \vec{p}^2\mathrm{c}^2}$,

$$\beta = \frac{|\vec{p}_m|\mathrm{c}}{\sqrt{m_0^2\mathrm{c}^4 + \vec{p}_m^2\mathrm{c}^2}} \;\Rightarrow\; m_0^2\mathrm{c}^2 + \vec{p}_m^2 = \frac{\vec{p}_m^2}{\beta^2} \;\Rightarrow\; \vec{p}_m^2 = \frac{m_0^2\mathrm{c}^2\beta^2}{1-\beta^2}\,,$$

und damit

$$\vec{p}_m^2 = \frac{m_0^2\mathrm{c}^2\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2\mathrm{c}^2\frac{(\vec{p}'_1)^2\mathrm{c}^2}{(E'_1)^2}}{1-\frac{(\vec{p}'_1)^2\mathrm{c}^2}{(E'_1)^2}} = \frac{m_0^2\mathrm{c}^4(\vec{p}'_1)^2}{(E'_1)^2 - (\vec{p}'_1)^2\mathrm{c}^2} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{p}_m^2 = \frac{m_0^2}{m_1^2}\,(\vec{p}'_1)^2}\,.$$

Der Impuls $(\vec{p}'_1)^2$ wurde im Aufgabenteil d bereits berechnet.

Aufgabe 3

a) α) Die Koordinate t ist die Eigenzeit eines ruhenden Beobachters; θ und ϕ sind sphärische Polarkoordinaten; l ist die radiale Koordinate, welche die Eigenlänge zur einer bestimmten Koordinatenzeit t angibt.

β) Es handelt sich um eine statische, kugelsymmetrische Raum-Zeit, die zwei asymmptotisch flache Bereiche für $l \to \pm\infty$ besitzt. Die Morris-Thorne Metrik weißt keinen Ereignishorizont auf.

b) Die nicht-verschwindenden Christoffel-Symbole werden über die Euler-Lagrange-Gleichungen bestimmt. Aus der Metrik folgt die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{c}^2\dot{t}^2 + \dot{l}^2 + (b_0^2 + l^2)\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\right] \tag{4.3}$$

Als affinen Parameter wähle man λ, d.h. $\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$, damit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen allgemein

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}^{\mu}} - \frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}} = 0 \, .$$

· t-Koordinate: Die Lagrange-Funktion ist nicht explizit von t abhängig,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\mathrm{c}^2\dot{t}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{c}^2\dot{t} = const. \ \Rightarrow \ \Gamma^0_{\mu\nu} \equiv 0 \, .$$

· l-Koordiante:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\dot{l} - l\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) = \ddot{l} - l\dot{\theta}\dot{\theta} - l\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{\phi} \\ &\Rightarrow \boxed{\Gamma^1_{22} = -l \, , \quad \Gamma^1_{33} = -l\sin^2\theta} \, . \end{aligned}$$

· θ-Koordinate:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\left[(b_0^2 + l^2)\dot{\theta}\right] - (b_0^2 + l^2)\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 2l\dot{l}\dot{\theta} + (b_0^2 + l^2)\ddot{\theta} - (b_0^2 + l^2)\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$\Rightarrow \ 0 = \ddot{\theta} + \frac{2l}{(b_0^2 + l^2)}\dot{l}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\phi} \ \Rightarrow \boxed{\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{l}{(b_0^2 + l^2)} \, , \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta}$$

· ϕ-Koordinate: Die Lagrange-Funktion ist nicht explizit von ϕ abhängig,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\left[(b_0^2 + l^2)\sin^2\theta\dot{\phi}\right] \ \Rightarrow \ (b_0^2 + l^2)\sin^2\theta\dot{\phi} = const. \\ \Rightarrow \ 0 &= 2l\dot{l}\sin^2\theta\dot{\phi} + (b_0^2 + l^2)2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + (b_0^2 + l^2)\sin^2\theta\ddot{\phi} \\ &= \ddot{\phi} + \frac{2l}{(b_0^2 + l^2)}\dot{l}\dot{\phi} + 2\cot\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi} \\ &\Rightarrow \boxed{\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{l}{(b_0^2 + l^2)} \, , \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta} \end{aligned}$$

c) Dem Linienelement der Morris-Thorne Metrik entnimmt man

$$g_{00} = -\mathrm{c}^2 \, , \ g_{11} = 1 \, , \ g_{22} = (b_0^2 + l^2) \quad \text{und} \quad g_{33} = (b_0^2 + l^2)\sin^2\theta \, .$$

Damit folgt für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$\begin{aligned} -\kappa T_{00} &= -\frac{\mathrm{c}^2 b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \ \Rightarrow \ T_{00} = \mathrm{c}^2\frac{b_0^2}{\kappa(b_0^2 + l^2)^2} \, , \\ -\kappa T_{11} &= -\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \, , \\ -\kappa T_{22} &= \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)} = -\frac{\kappa T_{33}}{\sin^2\theta} \, . \end{aligned}$$

Die T_{00}-Komponente ist die Energiedichte des Feldes (Lehrbuch), zur Erzeugung eines Morris-Thorne Energie-Impuls-Tensors müßte die Energiedichte negativ sein, dies ist im Labor unmöglich.

d) Die universelle Konstante Λ wird als kosmologische Konstante bezeichnet. Im nicht-relativtischen Grenzfall geht die Einsteinsche Feldgleichung (3.2) in die Newtonschen Feldgleichungen über. Mit dem Zusatz der kosmologischen Konstaten Λ ergibt sich ein Zusatzterm. Dieser steht im Widerspruch zur empirischen Verifikation der Newtonschen Feldgleichungen im Sonnensystem und muss deshalb sehr klein sein.

e) Aus der Invarianz des Linienelements ds^2 folgt mit $dt = d\theta^2 = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 1\right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \equiv dl^2 + (b_0^2 + l^2) d\phi^2 \,. \tag{4.4}$$

Aus dieser Gleichung liest man sofort

$$r^2 \equiv b_0^2 + l^2 \;\Rightarrow\; l^2 = r^2 - b_0^2 \;\Rightarrow\; \boxed{l = \pm\sqrt{r^2 - b_0^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dl}{dr} = \frac{\pm r}{\sqrt{r^2 - b_0^2}} \tag{4.5}$$

und

$$dl^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 1\right] dr^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{dl}{dr}\right)^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 1\right] \tag{4.6}$$

ab. Gleichung (4.5) eingesetzt in (4.6) ergibt

$$\frac{r^2}{r^2 - b_0^2} = \left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 1\right] \;\Rightarrow\; \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - b_0^2} - 1 = \frac{\cancel{r^2} - \cancel{r^2} + b_0^2}{r^2 - b_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\pm b_0^2}{\sqrt{r^2 - b_0^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dr} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,, \qquad x = \frac{r}{b_0}\,.$$

Integration durch Trennung der Variablen ergibt

$$z(x) = \pm b_0 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \;\Rightarrow\; \boxed{z(r) = \pm b_0 \ln\left(\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1}\right)}$$

f) Mit $B_{\nu\mu} = \mathrm{D}_\nu V_\mu$ folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\gamma(\mathrm{D}_\nu V_\mu) &= \partial_\gamma(\mathrm{D}_\nu V_\mu) - \Gamma^\xi_{\nu\gamma}(\mathrm{D}_\xi V_\mu) - \Gamma^\xi_{\mu\gamma}(\mathrm{D}_\nu V_\xi) \\ &= \partial_\gamma(\partial_\nu V_\mu - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} V_\sigma) - \Gamma^\xi_{\nu\gamma}(\partial_\xi V_\mu - \Gamma^\sigma_{\xi\mu} V_\sigma) - \Gamma^\xi_{\mu\gamma}(\partial_\nu V_\xi - \Gamma^\sigma_{\nu\xi} V_\sigma)\,.\end{aligned}$$

Für $\mathrm{D}_\nu(\mathrm{D}_\gamma V_\mu)$, vertauschen von ν und γ und ausnutzen der Symmetrieeigenschaft $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\gamma(\mathrm{D}_\nu V_\mu) - \mathrm{D}_\nu(\mathrm{D}_\gamma V_\mu) &= \cancel{\partial_\gamma\partial_\nu V_\mu} - \partial_\gamma(\Gamma^\sigma_{\nu\mu} V_\sigma) - \cancel{\Gamma^\xi_{\nu\gamma}(\partial_\xi V_\mu - \Gamma^\sigma_{\xi\mu} V_\sigma)} - \Gamma^\xi_{\mu\gamma}(\partial_\nu V_\xi - \Gamma^\sigma_{\nu\xi} V_\sigma) \\ &\quad - \cancel{\partial_\nu\partial_\gamma V_\mu} + \partial_\nu(\Gamma^\sigma_{\gamma\mu} V_\sigma) + \cancel{\Gamma^\xi_{\gamma\nu}(\partial_\xi V_\mu - \Gamma^\sigma_{\xi\mu} V_\sigma)} + \Gamma^\xi_{\mu\nu}(\partial_\gamma V_\xi - \Gamma^\sigma_{\gamma\xi} V_\sigma) \\ &= -(\partial_\gamma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) V_\sigma - \cancel{\Gamma^\sigma_{\nu\mu}(\partial_\gamma V_\sigma)} - \cancel{\Gamma^\xi_{\mu\gamma}(\partial_\nu V_\xi)} + \Gamma^\xi_{\mu\gamma}\Gamma^\sigma_{\nu\xi} V_\sigma \\ &\quad + (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\gamma\mu}) V_\sigma + \cancel{\Gamma^\sigma_{\gamma\mu}(\partial_\nu V_\sigma)} + \cancel{\Gamma^\xi_{\mu\nu}(\partial_\gamma V_\xi)} - \Gamma^\xi_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\gamma\xi} V_\sigma \\ &= (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\xi_{\mu\gamma}\Gamma^\sigma_{\xi\nu} - \Gamma^\xi_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\xi\gamma}) V_\sigma \equiv R^\sigma{}_{\mu\nu\gamma} V_\sigma \qquad \triangleleft\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Kovarianzprinzip (Lehrbuch): Im Gravitationsfeld gültige Gleichungen müssen folgende Bedingungen erfüllen

- Kovarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Gesetze müssen die Form einer Riemann-Tensorgleichung haben.
- Gültigkeit im Lokalen Inertialsystem: Für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ muss sich das entsprechende Gesetz der Speziellen Relativitätstheorie ergeben.

b) In der Äquatorialebene lautet das Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \mathrm{c}^2 d\tau^2 = A(r)\, \mathrm{c}^2 dt^2 - \frac{dR^2}{A(R)} - R^2 d\phi^2 \ ,$$

daraus folgt sofort die erste Bewegungsgleichung,

$$\boxed{\mathrm{c}^2 = const. = A(R)\, \mathrm{c}^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{A(R)} \dot{R}^2 - R^2 \dot{\phi}^2} \ ,$$

da die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante ist. Daraus liest man die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\dot{t}, R, \dot{R}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}(A(R)\, \mathrm{c}^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{A(R)} \dot{R}^2 - R^2 \dot{\phi}^2)$ ab. Die Lagrange-Funktion ist nicht explizit von t und φ abhängig, d.h.

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left[A(r) \mathrm{c}^2 \dot{t}^2 \right] \ \Rightarrow \ \boxed{A(R) \dot{t} = const. = k} \ ,$$
$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left[-R^2 \dot{\phi} \right] \ \Rightarrow \ \boxed{R^2 \dot{\phi} = const. = h} \ ,$$

c) Für die Bewegung in der Äquatorialebene gilt $R = R(\phi)$, d.h. $\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dR}{d\phi} \frac{h}{R^2}$, eingesetzt in die erste Bewegungsgleichung aus Teilaufgabe b ergibt

$$\mathrm{c}^2 = A(R) \mathrm{c}^2 \left(\frac{k}{A(R)} \right)^2 - \frac{1}{A(R)} \left(\frac{dR}{d\phi} \right)^2 \frac{h^2}{R^4} - R^2 \frac{h^2}{R^4} = \frac{\mathrm{c}^2 k^2}{A(R)} - \frac{h^2}{R^4 A(R)} \left(\frac{dR}{d\phi} \right)^2 - \frac{h^2}{R^2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{dR}{d\phi} \right)^2 = \frac{A(R) R^4}{h^2} \left\{ \frac{\mathrm{c}^2 k^2}{A(R)} - \mathrm{c}^2 - \frac{h^2}{R^2} \right\} \Rightarrow \left(\frac{dR}{d\phi} \right)^2 + R^2 A(R) = \frac{\mathrm{c}^2 R^4}{h^2} \left[k^2 - A(R) \right] \ .$$

Mit $R = 1/x$ und $\frac{dR}{d\phi} = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{d\phi} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\phi}$ erhält man daraus

$$\frac{1}{x^4} \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{x^2}(1 - \alpha x) = \frac{\mathrm{c}^2}{x^4 h^2}(k^2 - 1 + \alpha x)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 = -x^2(1 - \alpha x) + \frac{\mathrm{c}^2}{h^2}(k^2 - 1 + \alpha x)$$
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 = \frac{\mathrm{c}^2(k^2 - 1)}{h^2} + \frac{\mathrm{c}^2 \alpha}{h^2} x - x^2 + \alpha x^3} \ .$$

d) Mit $x = 1/R$ folgt aus der zweiten Bewegungsgleichung $A(R)\dot{t} = (1-\alpha/R)\dot{t} = (1-\alpha x)\dot{t} = 1$, und damit

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt}\frac{1}{1-\alpha x} = \frac{h}{R^2} = hx^2 \;\Rightarrow\; \omega = x^2 h(1-\alpha x)\;.$$

Für eine kreisförmigen Orbit gilt $\frac{dx}{d\phi} = 0$ und $\frac{d^2x}{d\phi^2} = 0$, mit $k = 1$ und dem Ergebnis aus Teilaufgabe c folgt,

$$0 = \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{h^2}x - x^2 + \alpha x^3 = x\left(\frac{\mathrm{c}^2\alpha}{h^2} - x + \alpha x^2\right) \;\Rightarrow\; h^2 = \frac{\alpha \mathrm{c}^2}{x(1-\alpha x)}\;.$$

Ableitung nach ϕ und auswerten der Bedingung $\frac{d^2x}{d\phi^2} = 0$ ergibt

$$2\frac{dx}{d\phi}\frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{h^2}\frac{dx}{d\phi} - 2x\frac{dx}{d\phi} + 3\alpha x^2\frac{dx}{d\phi} \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{d\phi^2} = \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{2h^2} - x + \frac{3}{2}\alpha x^2$$

$$\Rightarrow\; 0 = \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{2h^2} - x + \frac{3\alpha}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{c}^2\alpha}{h^2} = 2x\left(1 - \frac{3}{2}\alpha x\right)$$

$$\Rightarrow x(1-\alpha x) = 2x\left(1 - \frac{3}{2}\alpha x\right) \;\Rightarrow\; 1 - \alpha x = 2 - 3\alpha x \;\Rightarrow\; \alpha x = \frac{1}{2}\;.$$

Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man die Umlaufzeit zu

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = x^4h^2(1-\alpha x)^2 = x^4\frac{\alpha \mathrm{c}^2}{x(1-\alpha x)}(1-\alpha x)^2 = x^3\alpha \mathrm{c}^2(1-\alpha x) = \frac{x^3\alpha \mathrm{c}^2}{2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\alpha \mathrm{c}^2}{2R^3} = \frac{\alpha \mathrm{c}^2}{2}\cdot\frac{1}{r^3+\alpha^3} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{T^2}{r^3+\alpha^3} = \frac{8\pi^2}{\alpha \mathrm{c}^2} = const.}$$

Kepler-Konstante mit den relativen Daten des Merkur

$$\frac{T_{☿}^2}{r_{☿}^3} = \frac{(0,241\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\ \mathrm{s})^2}{(0,387\cdot 1,496\cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{T_{☿}^2}{r_{☿}^3} \simeq 3\cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}}$$

Konstante aus der Schwarzschild-Metrik,

$$\frac{8\pi^2}{\alpha_\odot \mathrm{c}^2} = \frac{8\pi^2}{2Gm_\odot} = \frac{4\pi^2\ \mathrm{s}^2}{6,673\cdot 10^{-11}\cdot 1,98\cdot 10^{30}\mathrm{m}^3} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{8\pi^2}{\alpha_\odot \mathrm{c}^2} \simeq 3\cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}}\,.$$

e) α) Befindet sich der Beobachter relativ zum Laser in Ruhe, so mißt er die (Eigen-)wellenlänge, welche auch im frei fallenden Satellitenlabor gemessen wurde, 632,8 nm.

β) Der Sender befindet sich auf dem Neutronenstern, der Emfänger in der Raumstation, $1/R_B = 0$, aus (4.2) folgt mit $\mathrm{c} = \nu\cdot\lambda$,

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(R_A)}{g_{00}(R_B)}} \simeq \left[1 - \frac{2GM}{R\mathrm{c}^2}\right]^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \lambda_B = \lambda_A\left[1 - \frac{2GM}{R\mathrm{c}^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\lambda_B = 632,8\ \mathrm{nm}\cdot\left[1 - \frac{2\cdot 6,673\cdot 10^{-11}\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}\cdot 10^4}\right]^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda = 685,7\ \mathrm{nm}}\,.$$

γ) Sender und Empfänger befinden sich auf der Oberfläche des Sterns, d.h. $r_A = r_B$ und folgt aus (4.2) für die Wellenlänge 632,8 nm.

δ) Der Empfänger steht auf der Sternenoberfläche $r_B = R$, der Sender im Satelitenlabor sehr nahe an der Oberfläche, d.h. $1/R_A = 0$, damit folgt

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} \simeq \left[1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} \, ,$$

einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\lambda_B = 632,8 \text{ nm} \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{30}}{9 \cdot 10^{16} \cdot 10^4}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 584 \text{ nm}} \, .$$