Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

Aufgabe 1: Kurzfragen 20 Punkte

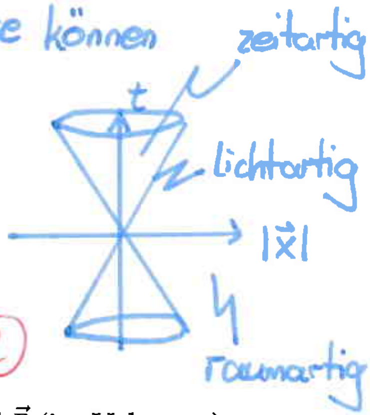
a) Wann nennt man zwei Ereignisse raum-, licht- und zeitartig. Zeichnen Sie einen Lichtkegel und markieren Sie entsprechende Ereignisse. [2P]

raumartig: $x_\mu x^\mu > 0 \rightarrow ct > |\vec{x}|$ Die Ereignisse können nicht kausal zusammenhängen

lichtartig: $x_\mu x^\mu = 0 \rightarrow ct = |\vec{x}|$ Die Ereignisse hängen nur über den Lichtweg zusammen

zeitartig: $x_\mu x^\mu < 0 \rightarrow ct < |\vec{x}|$ Die Ereignisse können auch mit $v<c$ in Verbindung stehen

2



b) Sie messen in Ihrem Ruhesystem ein elektrisches Feld $\vec{E}$ und ein Magnetfeld $\vec{B}$ (im Vakuum). In Ihrem System stehen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ senkrecht zueinander. Was können Sie über den Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem beliebigen Inertialsystem aussagen? [2P]

Sie stehen immer noch senkrecht aufeinander!

2

c) Ein wagemutiger Experimentalphysiker hat sich in eine grosse Box einschliessen lassen. Seine erste Messung ergibt eine Gravitationsbeschleunigung $\approx g$. Was kann er tun, um feststellen, ob er sich auf der Erde befindet oder in einem gleichmäßig beschleunigten Raumschiff? (Seine Zwillingsschwester hat für ein gut ausgestattetes Labor in seiner Box Sorge getragen.) [2P]

Auf der Erde müssten bei einer präzisen Messung Objekte nicht auf parallelen Bahnen verlaufen, sondern auch ein wenig aufeinander zu, wegen des Zentralpotentials.

2

d) Wodurch wird im Allgemeinen die Ableitung $\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\nu}$ eines Vektors A nach den Koordinaten beim Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie ersetzt? Warum ist diese Ersetzung erforderlich? [2P]

- Kovariante Ableitung mit Christoffelsymbol $\quad V_{\mu;\rho} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma^\nu_{\rho\mu} V_\nu$
- Nötig zur Einhaltung des Kovarianzprinzips

2

Maik Becker 166384

e) Wie lautet die Geodätengleichung und welche Rolle spielt sie in der allgemeinen Relativitätstheorie? [2P]

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

→ Liefert BGL eines Teilchens in der ART

2

f) Wie können Sie entscheiden, ob eine vorgegebene Metrik, gegeben durch $d\tau^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, einen gekrümmten oder einen flachen Raum beschreibt? [2P]

flacher Raum → Der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet in allen Komponenten

gekrümmter Raum → sonst

2

g) Nennen Sie einen essenziellen Unterschied zwischen den Einsteingleichungen und den Maxwellgleichungen. [2P]

Die Einsteingleichungen sind gekoppelte Tensorgleichungen mit vielen Lösungen, die die Krümmung des Raums durch Massen beschreiben. Sie sind kovariant.

Die Maxwell-Gleichungen (4!) beschreiben die E-Dynamik.

2

h) Inwiefern unterscheiden sich die Vakuumlösungen der Einsteingleichungen ($R_{\mu\nu} = 0$) in 2, 3 und 4 Dimensionen? [2P]

→ ~~Unabhängige~~ Anzahl unabhängiger Komponenten C in Abhängigkeit der Dimension

$$C_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

$$C_2 = \frac{4 \cdot 3}{12} = 1 \quad , \quad C_3 = \frac{9 \cdot 8}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

$$C_4 = \frac{16 \cdot 15}{12} = \frac{240}{12} = 20$$

2

d = 2,3 nur triviale Vakuum lösungen

Maik Becker 166384

i) Wie groß ist der Schwarzschildradius des schwarzen Loches Gargantua, dessen Masse 100 Millionen Sonnenmassen betragen soll. Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer Distanz in unserem Sonnensystem? [2P]

$R_S = \frac{2GM}{c^2}$

G = Gravitationskonstante

$M = 100 \cdot 10^6$ Sonnenmassen

1 ~~0~~

j) Nennen Sie zwei wesentliche Unterschiede zwischen der Reissner-Nordström-Lösung und der Schwarzschildlösung. [2P]

0

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

Aufgabe 2: Christoffelsymbole **9 Punkte**

Hinweis: Bei dieser Aufgabe gilt die Einstein'sche Summenkonvention nicht.

Zeigen Sie, dass für eine **diagonale** Metrik die Christoffelsymbole folgende Form haben.

$$(a)\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu \neq \rho$$

$$(b)\Gamma^{\mu}_{\rho\rho} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x^{\mu}} \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \rho$$

$$(c)\Gamma^{\mu}_{\mu\rho} = \frac{\partial(\log|g_{\mu\mu}|^{\frac{1}{2}})}{\partial x^{\rho}}$$

a) Es gilt: $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$

Um überhaupt Beiträge zu erhalten muss gelten: $\sigma = \rho$

$\Rightarrow \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$

Da $\mu \neq \nu \neq \rho$ gelten soll sind $g_{\nu\rho} = g_{\mu\rho} = g_{\mu\nu} = 0$, also

$\Rightarrow \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0$ q.e.d.

3

b) Es gilt: $\Gamma^{\mu}_{\rho\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\rho g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\rho\lambda} - \partial_\lambda g_{\rho\rho})$

Um Beiträge zu erhalten muss gelten $\mu = \lambda$, wegen Diagonalgestalt der Metrik

$\Rightarrow \Gamma^{\mu}_{\rho\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu}(\partial_\rho g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\rho})$

Da $\mu \neq \rho$ gelten soll ist $g_{\rho\mu} = 0$, also

$\Rightarrow \Gamma^{\mu}_{\rho\rho} = -\frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\mu g_{\rho\rho} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \cdot \frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x^\mu}$ q.e.d

3

c) Es gilt: $\Gamma^{\mu}_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\rho})$

Um Beiträge zu erhalten muss gelten $\mu = \lambda$, wie oben!

$\Rightarrow \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu}(\partial_\mu g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{\mu\rho})$

$= \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\rho g_{\mu\mu} = \partial_\rho \log|g_{\mu\mu}|^{1/2}$ q.e.d.

3

Maike Becker 166384

Aufgabe 3: Paralleltransport auf dem Kegel **10 Punkte**

Gegeben ist die Metrik für die Oberfläche eines Kegels:

$$ds^2 = adr^2 + r^2 d\varphi^2$$

dabei ist $a \geq 1$ eine reelle Konstante.

a) Berechnen Sie alle nicht verschwindenden Christoffelsymbole.

b) Stellen Sie die Gleichungen für den Paralleltransport auf.

c) Lösen Sie die Gleichungen für den Spezialfall $r = const.$ mit den Anfangswerten: $V^r(\varphi = 0) = 1$ und $V^\varphi(\varphi = 0) = 1$

d) Bestimmen Sie für die gegebenen Anfangswerte $V^r(\varphi = 2\pi)$ und $V^\varphi(\varphi = 2\pi)$. Für welchen Wert von a ergibt sich der Startvektor? Interpretieren Sie das Ergebnis.

a) $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$

$\Rightarrow \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$
wg. Diagonalgestalt

$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2a}(-\partial_r r^2) = -\frac{r}{a}$ ✓

$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{2r^2}(\partial_r r^2) = \frac{1}{r}$ ✓ 2/2

b) $\frac{dV^r}{d\tau} + \left(-\frac{r}{a}\right) V^\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ ✓

$\frac{dV^\varphi}{d\tau} + \frac{1}{r} V^r \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{r} V^\varphi \frac{dr}{d\tau} = 0$ ✓ 1/1

c) $r = const.$, also $\frac{dr}{d\tau} = 0$ ✓

$\Rightarrow \frac{dV^r}{d\tau} - \frac{r}{a} V^\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ und $\frac{dV^\varphi}{d\tau} + \frac{1}{r} V^r \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ ist zu lösen.

$\Rightarrow \frac{dV^r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{r}{a} V^\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ und $\frac{dV^\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{r} V^r \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

$$\Rightarrow \frac{dV^r}{d\varphi} - \frac{r}{a} V^\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dV^\varphi}{d\varphi} + \frac{1}{r} V^r = 0 \qquad (2)$$

[Nebenbemerkung: $\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ löst auch!]

(1) ableiten und in (2) einsetzen:

$$\Rightarrow \frac{d^2V^r}{d\varphi^2} + \frac{1}{a} V^r = 0 \checkmark \Rightarrow V^r(\varphi) = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) + B\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) \quad (3)$$

(2) ableiten und in (1) einsetzen: 3/3 ✓

$$\Rightarrow \frac{d^2V^\varphi}{d\varphi^2} + \frac{1}{a} V^\varphi = 0 \checkmark \Rightarrow V^\varphi(\varphi) = C\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) + D\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) \quad (4)$$

AB: $V^r(\varphi=0) = 1$, $V^\varphi(\varphi=0) = 1$

$\hookrightarrow V^r(0) = B \stackrel{!}{=} 1$ ✓

$\hookrightarrow V^\varphi(0) = D = 1$ ✓

(3) und (4) in (1) und (2) liefert:

$$A\sqrt{\tfrac{1}{a}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) - \sqrt{\tfrac{1}{a}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) - C\frac{r}{a}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) - \frac{r}{a}\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) = 0$$

und

$$C\sqrt{\tfrac{1}{a}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) - \sqrt{\tfrac{1}{a}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\right) + A\frac{1}{r}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) + \frac{1}{r}\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) = 0$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt: $A = \frac{r}{\sqrt{a}}$ und $C = -\frac{\sqrt{a}}{r}$

Also: Endresultat:

$$V^r(\varphi) = \frac{r}{\sqrt{a}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) + \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) \checkmark \quad 2/2$$

$$V^\varphi(\varphi) = -\frac{\sqrt{a}}{r}\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right) + \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{a}}\varphi\right)$$

Rückseite beachten

d) $v^r(2\pi) = \frac{r}{\sqrt{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\, 2\pi\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\, 2\pi\right)$

$v^\varphi(2\pi) = -\frac{\sqrt{a}}{r} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\, 2\pi\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\, 2\pi\right)$

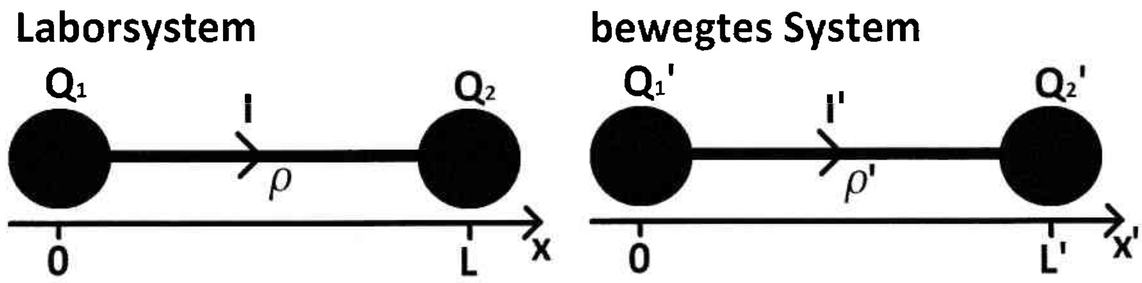
Für $a=1$ ergibt sich wieder der Startvektor! ✓ Der Radius der Kegelkreisfläche ist dann aber gleich Null! ⨍

1/2

9/10

Name: ____________________ Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 4: Bewegte Ladung in der SRT **10 Punkte**



Ein Beobachter im Laborsystem sieht den konstanten Ladungsfluss ($I = const.$) durch einen ungeladenen Draht von einem ruhenden Ladungsreservoir mit der Ladung $Q_1(t)$ in ein anderes mit der Ladung $Q_2(t)$. Ein weiterer Beobachter sieht den selben Vorgang aus einem mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zum Laborsystem bewegten System.

Im Laborsystem gilt $Q_1(t) = Q_0 - It$ und $Q_2(t) = -Q_0 + It$. Nehmen Sie an, dass der Leiter ungeladen ($\rho = 0$) ist.

a) Überlegen Sie sich, wie $Q_1'(t')$, $Q_2'(t')$ und ρ' aussehen.

b) Zeigen Sie explizit mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a), dass die Gesamtladung wie erwartet erhalten ist.

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

Aufgabe 5: Drehimpulserhaltung in der ART **15 Punkte**

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der Drehimpuls, definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

in der Schwarzschildmetrik erhalten ist.
Ausgangspunkt für den Beweis sind die Geodätengleichungen der Schwarzschildmetrik

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + 2\cot\theta\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} = 0 \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{dL_3}{d\tau} = 0$, indem Sie $\frac{dL_3}{d\tau}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

explizit berechnen und mit den Geodätengleichungen vergleichen.

(b) Zeigen Sie dann $\frac{dL_1}{d\tau} = 0$ und $\frac{dL_2}{d\tau} = 0$.

Hinweis: Führen Sie die Linearkombinationen

$$-\sin\phi L_1 + \cos\phi L_2 = r^2\frac{d\theta}{d\tau} \tag{4}$$

$-\varphi$

$$\cos\phi L_1 + \sin\phi L_2 = -r^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\phi}{d\tau} \tag{5}$$

ein und vergleichen Sie deren Ableitungen mit den Geodätengleichungen.

(c) Beschreiben Sie in einem Satz inwiefern die Drehimpulserhaltung die Lösung der Geodätengleichungen der Schwarzschildmetrik vereinfacht.

a) $$\vec{L} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\varphi\cos\vartheta - r\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\vartheta \\ \dot{r}\sin\varphi\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\sin\varphi\cos\vartheta + r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\vartheta \\ \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \cancel{r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta} + \cancel{r^2\dot{\vartheta}\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta} + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi\sin^2\vartheta$$
$$- \cancel{r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta} - \cancel{r^2\dot{\vartheta}\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta} + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi\sin^2\vartheta$$

$$= r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta$$

V 3

$$\frac{dL_3}{d\tau} = 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + r^2\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + r^2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

$$= r^2 \sin^2\vartheta \underbrace{\left(\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cot\vartheta\right)}_{=0 \text{ laut Geodätengleichung}}$$

$= 0$ q.e.d.

V ③

b) $\Rightarrow -\sin\varphi\, L_1 + \cos\varphi\, L_2 = r^2\dot{\vartheta} \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\Leftrightarrow -\dot{\varphi}\cos\varphi\, L_1 - \sin\varphi \frac{dL_1}{dt} - \dot{\varphi}\sin\varphi\, L_2 + \cos\varphi \frac{dL_2}{dt} = 2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} \quad (1)$

$\Rightarrow \cos\varphi\, L_1 + \sin\varphi\, L_2 = -r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\, \dot{\varphi} \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\Leftrightarrow -\dot{\varphi}\sin\varphi\, L_1 + \cos\varphi \frac{dL_1}{dt} + \dot{\varphi}\cos\varphi\, L_2 + \sin\varphi \frac{dL_2}{dt} = -2\dot{r}r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}$
$- r^2\dot{\vartheta}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\dot{\varphi} - 2r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\ddot{\varphi} \quad (2)$

$(1) \Rightarrow$

③

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

Aufgabe 6: Radialer freier Fall ins Schwarze Loch 20 Punkte

Beachten Sie, dass die Aufgabe ab Aufgabenteil c) unabhängig von Aufgabenteil a) und b) mit der in b) angegebenen Metrik gelöst werden kann. Auch Teile von f) sind mit der angegeben Gleichung unabhängig vom Rest der Aufgabe lösbar.

Gegeben ist die Schwarzschildmetrik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2.$$

Betrachten Sie im folgenden ein Objekt, welches sich radial, d.h. $d\theta = d\phi = 0$, auf die Singularität bei $r = 0$ zubewegt.

a) Um das frei fallende Objekt, das sich nahe am Schwarzschildradius R_s befindet, zu untersuchen, schreiben Sie die Metrik in die Koordinate $x = r - R_s$ um und nähern Sie anschließend sinnvoll für den Fall $x \ll R_s$.

Hinweis: Auch nach ihrer Näherung sollte die prinzipielle Form der Schwarzschildmetrik erhalten bleiben: $ds^2 = f(x)\, dt^2 - \frac{1}{f(x)} dx^2$.

b) Bringen Sie die Metrik durch eine geeignete Koordinatentransformation in die Form der Rindler Metrik $ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2$.

c) Bestimmen Sie alle nicht verschwindende Christoffel-Symbole der Rindler-Metrik.

d) Bestimmen Sie die Geodätengleichungen und überführen Sie sie in eine Differentialgleichung in $X(T)$.

(**Tipp:** $\frac{dX}{d\lambda} = \frac{dX}{dT}\frac{dT}{d\lambda} = \dot{X}T'$)

e) Für $x \ll R_s$ vereinfacht sich die Differentialgleichung zu $\frac{d^2X}{dT^2} = \frac{2}{X}\left(\frac{dX}{dT}\right)^2$. Lösen Sie die angegebene Differentialgleichung.

Tipp: $\frac{d}{dt} ln(f) = \frac{\dot{f}}{f}$

f) Transformieren Sie das Ergebnis zurück, sodass Sie eine Gleichung der Form $x(t) = \frac{A}{(t+B)^2}$ erhalten. Betrachten Sie nun $x(t)$ für große Zeiten $t \to \infty$. Kann ein entfernter Beobachter ein Objekt den Schwarzschildradius überqueren sehen?

Substitution: $r = x + R_s$
$dr = dx$

a) $ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2$

$\Rightarrow ds^2 = \left(\frac{x}{x+R_s}\right) dt^2 - \left(\frac{x}{x+R_s}\right)^{-1} dx^2$

Mit $x \ll R_s$ folgt: $ds^2 \approx \left(\frac{x}{R_s}\right) dt^2 - \left(\frac{x}{R_s}\right)^{-1} dx^2$ ✓, also $f(x) = \frac{x}{R_s}$

2/2

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

b) fehlt 0/4

c) $ds^2 = x^2 dT^2 - dX^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Gamma^X_{TT} = \frac{1}{2} g^{XX}(\partial_T g_{TX} + \partial_T g_{TX} - \partial_X g_{TT}) = -\frac{1}{2}(-2X) = X$ ✓

$\Gamma^T_{TX} = \Gamma^T_{XT} = \frac{1}{2} g^{TT}(\partial_T g_{XT} + \partial_X g_{TT} - \partial_T g_{XT}) = \frac{1}{2x^2}(2x) = \frac{1}{X}$ ✓

2/2

d) $\frac{d^2T}{d\tau^2} = -\frac{2}{X}\frac{dT}{d\tau}\frac{dX}{d\tau} \quad (1)$ ✓

$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -X\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 \quad (2)$

$\cancel{(1) \Rightarrow \frac{d^2T}{dX^2}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \frac{dT}{dX}\frac{d^2X}{d\tau^2} =}$

$(2) \Rightarrow \frac{d^2X}{dT^2}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 + \frac{dX}{dT}\frac{d^2T}{d\tau^2} = -X\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2$

(1) einsetzen ergibt:

$\Rightarrow \frac{d^2X}{dT^2}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 - \frac{2}{X}\frac{dX}{dT}\frac{dT}{d\tau}\frac{dX}{d\tau} = -X\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 \qquad \frac{dT}{d\tau} \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{d^2X}{dT^2} - \frac{2}{X}\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 = -X$ ✓ 6/6

Name: Maik Becher Matrikelnummer: 166384

e) $\frac{d^2X}{dT^2} = \frac{2}{X}\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 \overset{!}{\Rightarrow} X'' = \frac{2X'^2}{X}$

$\Leftrightarrow \frac{X''}{X'} = 2\frac{X'}{X}$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{X''}{X'} = 2\frac{d}{dT}\ln(X)$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{d}{dT}\ln(x')$ ✓ $= 2\frac{d}{dT}\ln(x)$ ✓ $\Big| \int dT$

$\Rightarrow \ln(x') = 2\ln(x) + A$ ✓ mit $A = \text{const}$

$\Leftrightarrow x' = \tilde{A}\, e^{2\ln(X)} = \tilde{A} X^2$ ✓

$\Leftrightarrow X'(T) = \tilde{A}\, X(T)^2$ ✓ Separation von Variablen

1,5/3

f) fehlt 0/3

11,5/20

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

Aufgabe 7: Randall-Sundrum Modell 20 Punkte

Nehmen Sie ein (1+2)-dimensionales Universum an, d.h. mit einer Zeitdimension t, einer Raumdimension x, sowie einer raumartigen Extradimension u. Die Metrik dieser Raumzeit ist wie folgt gegeben:

$$ds^2 = f(u)\,dt^2 - g(u)\,dx^2 - du^2.$$

Dabei sind $f(u)$ und $g(u)$ die sogenannten Warpfunktionen.
Die Christoffelsymbole sind:

$$\Gamma^t_{tu} = \Gamma^t_{ut} = \frac{f'}{2f} \quad , \quad \Gamma^x_{xu} = \Gamma^x_{ux} = \frac{g'}{2g} \quad , \quad \Gamma^u_{tt} = \frac{f'}{2} \quad , \quad \Gamma^u_{xx} = -\frac{g'}{2}.$$

Dabei ist $f' := \frac{df}{du}$.

a) Bestimmen Sie die R_{uu}-Komponente des Ricci-Tensors explizit durch Einsetzten in den Riemannschen Krümmungstensor. Bestimmen Sie den Ricciskalar R (siehe Hinweis).

Hinweise:
Der Riemannsche-Krümmungstensor ist: $R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\eta_{\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\eta}$

Die restlichen nicht verschwindenen Komponenten des Ricci-Tensors sind:

$$R_{tt} = \frac{1}{4}\left(2f'' + \frac{f'g'}{g} - \frac{f'^2}{f}\right), \quad R_{xx} = -\frac{1}{4}\left(2g'' + \frac{f'g'}{f} - \frac{g'^2}{g}\right).$$

b) Stellen Sie die Einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante im Vakuum, $R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, auf.
Bestimmen Sie durch Lösen dieser Gleichungen die Warpfunktionen $f(u)$ und $g(u)$.
Verwenden Sie dafür den Ansatz $f(u) = \exp(ku)$ und $g(u) = \exp(mu)$.

c) Verwenden Sie im Folgenden $f(u) = g(u) = \exp(\pm k|u|)$ mit $k > 0$. Ermitteln Sie durch Ausführen der u-Integration die effektive Wirkung aus:

$$S = \frac{1}{G_u}\int dtdx \int_{-L}^{L} du \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(u)|}\,R(u).$$

Dabei ist $g_{\mu\nu}$ die Metrik ausgewertet an der Stelle u, R der Ricciskalar und G_u die extradimensionale Gravitationskonstante. Ermitteln Sie durch Vergleich mit

$$S = \frac{1}{G_N}\int dtdx \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(0)|}\,R(0)$$

die effektive Newtonsche Gravitationskonstante G_N. Betrachten Sie anschließend den Grenzfall $L \to \infty$. Für welches Vorzeichen im Exponenten von $f(u) = \exp(\pm k|u|)$ ergibt sich keine sinvolle Lösung?

d) Das Randall-Sundrum Modell wird eingeführt um ein Problem von Raumzeiten mit zusätzlichen ungewarpten raumartigen Extradimensionen zu lösen. Welches Problem ergibt sich für solche Raumzeiten bezüglich des Gravitationsgesetzes?

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

a) $R_{uu} = R^{\lambda}_{u\lambda u} = \partial_u \Gamma^{\lambda}_{u\lambda} + \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{uu} + \Gamma^{\eta}_{u\lambda}\Gamma^{\lambda}_{u\eta} - \Gamma^{\eta}_{uu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}$

$$= \partial_u \frac{f'}{2f} + \partial_u \frac{g'}{2g} + \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \left(\frac{g'}{2g}\right)^2$$

$$= \frac{2ff'' - 2f'^2}{4f^2} + \frac{2gg'' - 2g'^2}{4g^2} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{g'^2}{4g^2}$$

$$= \frac{2ff'' - f'^2}{4f^2} + \frac{2gg'' - g'^2}{4g^2}$$

$$= \frac{f''}{2f} - \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \frac{g''}{2g} - \left(\frac{g'}{2g}\right)^2$$

(u) 3,5/4

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{xx}R_{xx} + g^{uu}R_{uu}$ ✓

$$= \frac{1}{f}\cdot\frac{1}{4}\left(2f'' + \frac{f'g'}{g} - \frac{f'^2}{f}\right) + \frac{1}{g}\cdot\frac{1}{4}\left(2g'' + \frac{f'g'}{f} - \frac{g'^2}{g}\right)$$

$$- \frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{4f^2} - \frac{g''}{2g} + \frac{g'^2}{4g^2}$$

$$= \cancel{\frac{f''}{2f}} + \frac{f'g'}{4fg} - \cancel{\frac{f'^2}{4f^2}} + \cancel{\frac{g''}{2g}} + \frac{f'g'}{4fg} - \cancel{\frac{g'^2}{4g^2}} - \cancel{\frac{f''}{2f}} + \cancel{\frac{f'^2}{4f^2}} - \cancel{\frac{g''}{2g}} + \cancel{\frac{g'^2}{4g^2}}$$

$$= \frac{f'g'}{2fg}$$

(u) FF 3/3

b) $R_{tt} - \frac{R}{2} g_{tt} = \Lambda g_{tt}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(2f'' + \frac{f'g'}{g} - \frac{f'^2}{f}\right) - \frac{f'g'}{4fg} f = \Lambda f$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''}{2} + \cancel{\frac{f'g'}{4g}} - \frac{f'^2}{4f} - \cancel{\frac{f'g'}{4g}} = \Lambda f$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''}{2} - \frac{f'^2}{4f} = \Lambda f$$

Name: Maik Becker Matrikelnummer: 166384

$$R_{xx} - \frac{R}{2} g_{xx} = \Lambda g_{xx}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\left(2g'' + \frac{f'g'}{f} - \frac{g'^2}{g}\right) - \frac{f'g'}{4fg} g = \Lambda g$$

$$\Leftrightarrow -\frac{g''}{2} - \frac{f'g'}{4f} + \frac{g'^2}{4g}$$

Gut Jetzt nur noch kürzen...

1/4

7,5/26