5. Übungszettel zur Vorlesung **SS 2015**
Allgemeine Relativitätstheorie **Priv.-Doz. Dr. Ute Löw**
Abgabe bis Mo. 15. Juni 2015, 18:00 Uhr **Becker, Zeissner (Kasten 233)**

Aufgabe 1: Symmetrien des Krümmungstensors **(3 Punkte)**
Zeigen Sie die Symmetrierelationen von $\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$:

$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -\mathrm{R}_{\nu\mu\rho\lambda} \tag{1}$$
$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -\mathrm{R}_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{2}$$
$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = \mathrm{R}_{\rho\lambda\mu\nu} \tag{3}$$
$$\mathrm{R}_{\mu\nu\rho\lambda} + \mathrm{R}_{\mu\lambda\nu\rho} + \mathrm{R}_{\mu\rho\lambda\nu} = 0 \tag{4}$$

Aufgabe 2: Riemann'scher Krümmungstensor des Torus **(6 Punkte)**
Zur Erinnerung: Die Aufgabe 2) vom letzten Aufgabenzettel ist auch noch abzugeben.

Aufgabe 3: Friedmann-Robertson-Walker Universum I **(10 Punkte)**
Das Linenelement der Robertson-Walker Metrik ist gegeben durch:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \tag{5}$$

Dabei ist k der Krümmungsparameter und $a(t)$ der Skalenfaktor, der ein Maß für die Größe des Universum ist.

a) Bertachten Sie zunächst einen Lichtstrahl, der sich in radialer Richtung bewegt. Bestimmen Sie die Wellenlänge λ_2 in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Emission t_1 und der Detektion t_2.
Zum Zeitpunkt der Emission hat das Licht die Wellenlänge λ_1

Der Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu}_{Fl} = (\rho + p)\, u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \tag{6}$$

In der Kosmologie werden Energie und Materie im Universum durch das Modell einer idealen Flüssigkeit beschrieben. Betrachten sie den Energie-Impuls-Tensor im Ruhesystem eines Beobachters, der sich mit einem Teilchen (z.B. einer Galaxie) mitbewegt, da der Energie-Impuls-Tensor dort eine besonders einfache Form annimmt.

b) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor im Ruhesystem eines mitbewegten Beobachters.

Die Einsteinsche Feldgleichungen sind gegeben durch:

$$8\pi G T_{\mu\nu} = \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{R}}{2} g_{\mu\nu} \tag{7}$$

Dabei ist $\mathrm{R}_{\mu\nu} = \mathrm{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$ der Ricci-Tensor und $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ der Ricci Skalar.

c) Bestimmen Sie zunächst den Ricci-Tensor. Nehmen Sie dabei an, dass der Ricci-Tensor diagonal ist und die räumlichen Komponenten sich in folgender Form schreiben lassen:

$$\mathrm{R}_{ii} = K g_{ii} \tag{8}$$

Berechnen Sie die R_{22} Komponente und leiten Sie daraus die Konstante K ab. Berechnen Sie im Anschluss den Ricci-Skalar R.

d) Setzen Sie ihre bisherigen Ergebnisse in die Einsteinschen Feldgleichungen ein. Zeigen Sie, dass sich aus den drei räumlichen Komponenten nur eine unabhängige Gleichung ergibt.

e) Berechnen Sie die $\nu = 0$ Komponente der Gleichung $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis äquivalent zu folgender Form ist:

$$d\left(\rho a^3\right) = -p\, d\left(a^3\right) \tag{9}$$

Welchem bekannten Gesetz entspricht diese Gleichung?

Die Christoffelsymbole der Robertson-Walker-Metrik sind:

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{\dot{a}}{a} g_{rr} \qquad \Gamma^t_{\theta\theta} = \frac{\dot{a}}{a} g_{\theta\theta} \qquad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{a}}{a} g_{\varphi\varphi}$$

$$\Gamma^r_{tr} = \Gamma^r_{rt} = \Gamma^\theta_{t\theta} = \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi t} = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1-kr^2} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta(1-kr^2) \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$