Numerik Zettel Nr. 2

Sebastian Pape
183846
Stefan Grisard
183624
Steven Beck
183621

Nr. 1

Σ : 2 + 3 + 6 = ~~11~~ 12

Die Mantissenlänge begrenzt die größt mögliche Zahl $\sum_{i=}^{\infty} \frac{1}{i}$ die Summe annehmen kann und zusätzlich auch den Minimalsten Wert den $\frac{1}{i}$ annehmen kann! Darüber hinaus entstehen bei periodischen Zahlen (z.B. $\frac{1}{3}$) Rundungsfehler.

Abschätzung

$$\max\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\} = (1-b^{-m})b^{e_{max}}$$ (siehe Vorlesung, Stichwort Overflow)

Es sei m die Mantissenlänge und b die Basis (z.B. b=10 (dezimal)). Zusätzlich kann $\frac{1}{i}$ nicht beliebig klein werden.

$\min\{\frac{1}{i}\} = b^{e_{min}-1}$ (siehe Vorlesung, Stichwort Underflow).

Der letzte Summand lautet

$$\min\{\tfrac{1}{i}\} = \frac{1}{(1-b^{-m})b^{e_{max}}} = \frac{1}{\max(i)}$$ ......

okay, aber was ist denn nun die Abschätzung nach oben von $\sum_i \frac{1}{i}$ ..... $\leq \ln(2b^{t+1})$ (-1)

2/3

Nr. 3.

a)

$x_0 = 0, \; y_0 = 1$

$x_1 = 1, \; y_1 = 0$

$y_2 = 3, \; y_2 = 22$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \overset{!}{=} 1 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \overset{!}{=} 0 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \overset{!}{=} 22 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = -a_1 - 1 \\ 1 + 3a_1 - 9a_1 - 9 = 22 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow a_0 = 1, \; a_1 = -5, \; a_2 = 4$

$\Rightarrow f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

b) Horner-Schema

	4	-5	1
2	–	8	6
	4	3	7

$f(x) = (4x-5)x + 1$

$f(2) = 7, \; f(-2) = 27$

6/6

Wenn $rd_t\left(\frac{1}{i}\right) = 0 \Rightarrow$ keine weitere Aufadd.

Dies gilt, wenn $\frac{1}{i} \leq \frac{1}{2} b^{-t-1} \Leftrightarrow i \geq 2b^{(t+1)}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} rd_t\left(\frac{1}{i}\right) \leq \sum_{i=1}^{2b^{t+1}} rd_t\left(\frac{1}{i}\right) < \int_1^{2b^{t+1}} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big|_1^{2b^{t+1}}$$

$$= \ln\left(2b^{t+1}\right) = (t+1)\ln(2b)^1$$

A.2.3.)

K	2	1	0
	4	-4	1
-2		-8	26
	4	-13	27

— Koeffizienten

K	2	1	0
	4	-5	1
2		8	6
	4	3	7

Numerik 2 Blatt

A.2.1)

$$P_0 = 1 \;,\; P_0^{-1} = 1 \;\Rightarrow\; \mathcal{K}_\infty(P_0) = \|P_0\|_\infty \|P_0^{-1}\|_\infty = 1$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det P_1}$$

$$\|P_1\|_\infty = \max\{1, 2\} = 2$$

$$\|P_1^{-1}\|_\infty = \max\{1, 2\} = 2$$

$$\mathcal{K}_\infty(P_1) = \|P_1\|_\infty \|P_1^{-1}\|_\infty = 4$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;,\; \det P_2 = 4 - 2 = 2$$

$$P_2^{-1} = \frac{1}{\det P_2} (\mathrm{Ad}\, P_2)^T$$

$$\mathrm{Ad}(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\|P_2\|_\infty = \max\{1, 3, 7\} = 7$$

$$\|P_2^{-1}\|_\infty = \max\{1, 4, 2\} = 4$$

$$\mathcal{K}_\infty(P_2) = \|P_2\|_\infty \|P_2^{-1}\|_\infty = 28$$

3/3