Numerik Blatt 5

Gruppe 3 bei Jendrny | 8.6.17

Sven Becker
Stefan Grisard
Sebastian Pape

$\Sigma: 4+8 = 12 \vee 12$

A. 5.1.)

a.) $I(f) = \int_{0,5}^{1} \exp(2x)\,dx \approx 2,335387$

Trapezregel:

Gewichte: $\hat{\alpha}_k \in \{1/2, 1/2\}$

$I^{(1)}_{[0.5,1]}(f) = \frac{1}{4}\exp(1) + \frac{1}{4}\exp(2) \approx 2,526834$ ✓

$|I(f) - I^{(1)}(f)| \approx 0,191447$ ✓

Simpson-Regel:

Gewichte: $\hat{\alpha}_k \in \{1/6, 4/6, 1/6\}$

$I^{(2)}_{[0.5,1]}(f) = \frac{0,5}{6} f(0,5) + \frac{0,5 \cdot 4}{6} f(0,75) + \frac{0,5}{6} f(1)$ ✓

$= \frac{e}{12} + \frac{e^{3/2}}{3} + \frac{e^2}{12} \approx 2,336174517$ ✓

$|I(f) - I^{(2)}(f)| \approx 7,8738215 94 \cdot 10^{-4}$ ✓

Newtons-3/8-Regel:

Gewichte: $\hat{\alpha}_k \in \{1/8, 3/8, 3/8, 1/8\}$

$I^{(3)}_{[0.5,1]} = \frac{0,5}{8} f(0,5) + 3\,\frac{0,5}{8} f(0,5 + \frac{0,5}{3}) + 3\,\frac{0,5}{8} f(0,5 + \frac{1}{3}) + \frac{0,5}{8} f(1)$

$= \frac{e}{16} + \frac{3e^{4/3}}{16} + \frac{3e^{5/3}}{16} + \frac{e^2}{16} \approx 2,335738$ ✓

$|I(f) - I^{(3)}(f)| \approx 3,510999423 \cdot 10^{-4}$ ✓

3/3

b.) (3.3) aus dem Skript:

$|I(f) - I^{(n)}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \, h^{n+2}$ ✓

Trapezregel: $|I(f) - I^{(1)}(f)| \leq \frac{1}{2} \|f^{(2)}\|_\infty \cdot h^3 = \frac{e^2}{4} \approx 1,847264025$ ✓

Simpsonregel: $|I(f) - I^{(2)}(f)| \leq \frac{1}{6} \|f^{(3)}\|_\infty \, h^4 = \frac{1}{12} e^2 \approx 0,6157546749$ ✓

Newton's-3/8-Regel: $|I(f) - I^{(3)}(f)| \leq \frac{1}{24} \|f^{(4)}\|_\infty \, h^5 = \frac{e^2}{48} \approx 0,1539386687$ ✓

Die absoluten Fehler liegen unter der berechneten oberen Schranke. Die Abschätzung der Trapezregel ist im Vergleich zu den übrigen sehr grob. ✓

1/1

$\Sigma: 4/4$

1.5.2

a) Wähle $f(x) = x^4$ ✓

$$I(f) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$ ✓

$$I_n(f) = \frac{1}{9}\left(f(-1) + 8f(-\tfrac{1}{2}) + 8f(\tfrac{1}{2}) + f(1) \right)$$ ✓

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\left(1 + 8\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 8\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1 \right)$$ ✓

$$= \frac{1}{9}\left(2 + \frac{16}{16} \right) = \frac{1}{9}(2 + 1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$$ ✓

2/3

b)
$$f(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{a_1}{4} x^4 + \frac{a_3}{3} x^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + a_4 x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{a_1}{4} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_2}{2} + a_4 - \left(\frac{a_1}{4} - \frac{a_3}{3} + \frac{a_2}{2} - a_4 \right) \right]$$

$$= \frac{2}{3} a_3 + 2a_4$$ ✓

NR:

$$f(-1) = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$
$$f(1) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$f(-\tfrac{1}{2}) = -\frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_3}{2} + a_4$$
$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{2} + a_4$$

$$I_n(f) = \frac{1}{9}\left(2a_2 + 2a_4 + 8\left(\frac{a_2}{2} + 2a_4 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2a_2 + 2a_4 + 4a_2 + 16a_4 \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(6a_2 + 18a_4 \right) = \frac{2}{3} a_2 + 2a_4$$ ✓

$\Rightarrow$ $I_n(f)$ integriert eine Funktion vom Grad $n=3$ exakt, da

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_n(f) = 0$$ ✓

4/4

c) $I^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$

Bedingungen:

① $f \geq 0$

② $\int f(x)dx > 0$

③ $I^n(f) < 0$

Wähle $f(x) = \exp(-a(x-x_\ell)^2)$

Dabei ist x_ℓ die zugehörige Stützstelle zu dem ersten negativem Gewicht. a ist so zu wählen, dass x_ℓ die einzige Stelle der Stützstellen mit $f(x) > 0$ ist.

Also soll für alle weiteren Stützstellen a so gewählt werden, dass gilt $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_{\ell-1}) = f(x_{\ell+1}) = \dots f(x_n) = 0$. ✓

Damit erfüllt f die Bedingungen ① - ③. ✓

Die Funktion wird nur im Grenzfall $a \to \infty$ unstetig, ✓ der erfolgt, wenn eine Stützstelle $(x_{\ell-1})_k \xrightarrow{k\to\infty} x_\ell$ existiert. ✓

In jedem anderen Fall ist ① - ③ durch die gestellten Anforderungen erfüllt. ✓

2/3

Σ: 8/8

Ist hier jemand, der Dünsch heißt?

Isst hier jemand jemanden, der Dünsch heißt?

q.e.d.

Alternativ: 5.2 c):

Seien $\{\varphi_i, i=0,\dots,n\}$ die zu den Quadraturpunkten $x_0,\dots,x_n$ gehörenden Hutfunktionen aus Kap. II 3, also:

stückw. lineare, stetige $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$

Es gilt $\varphi_i(x) > 0$ auf (x_{i-1}, x_{i+1}) (und sonst 0)

Sei $f := \varphi_i$, dann gilt: $f \geq 0$, $\int f\,dx > 0$

Sei also $\alpha_i < 0$ für ein $i \Rightarrow I^n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_i(x_j) = \alpha_i < 0$ $\square$