9. Übungsblatt zu Numerik

Alles Gute nachträglich :-) THX

Becker 12,25
Gnsard 12,25
Pape 12,25

Σ: 12+13 = 25/25

Gruppe 3

Bk 78/60

Change auf über 100%

Aufg. 9.1

a) Verwende Schrankensatz. Betrachte hierzu $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x+3-(x+1)}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}$$ warum

Es gilt $q := \sup_{x \in (0,\infty)} \left| \frac{2}{(x+3)^2} \right| = \frac{2}{9} < 1$ ✓

damit gilt $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{9} |x-y|$ $\forall x, y \in (0,\infty)$, f ist Kontraktion. ✓

3/3

b)

$$x^* = f(x^*) = \frac{x^*+1}{x^*+3}$$

$$\Leftrightarrow x^{*2} + 2x^* - 1 = 0$$

$\Rightarrow x^*_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, nur $x^* = -1 + \sqrt{2}$ liegt im betrachteten Intervall und ist damit der gesuchte Fixpunkt. ✓ 1/1

c)

x_0	0	1	10
x_1	1/3 ✓	1/2 ✓	0,84615 ✓
x_2	2/5 ✓	0,42857 ✓	0,48000 ✓
x_3	0,41176 ✓	0,41667 ✓	0,42529 ✓
x_4	0,41379 ✓	0,41463 ✓	0,41611 ✓
x_5	0,41414 ✓	0,41429 ✓	0,41454 ✓

4/4

d)

x_0	0	1	10
a priori	$2{,}3225 \cdot 10^{-4}$ ✓	$3{,}4838 \cdot 10^{-4}$ ✓	0,00638 ✓
a post.	$9{,}9517 \cdot 10^{-5}$ ✓	$9{,}9552 \cdot 10^{-5}$ ✓	$4{,}4831 \cdot 10^{-4}$ ✓
$\lvert x_5 - x^*\rvert$	$7{,}2148 \cdot 10^{-5}$ ✓	$7{,}2152 \cdot 10^{-5}$ ✓	$3{,}2475 \cdot 10^{-4}$ ✓

4/4

Bemerkungen: • Die Abschätzungen sind in allen Fällen erfüllt.

Σ: 11/12

• Die a posteriori Abschätzung ist in allen Fällen besser.

• In den Fällen $x_0 = 0$ bzw $x_0 = 1$ liefert jedoch auch die a priori Abschätzung eine kleine obere Schranke. Aufgrund der großen Entfernung des Startwerts $x_0 = 10$ von x^* ist dies hier nicht der Fall ✓

1.9.2) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6}$

$\boxed{a.)}$ $h'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \overset{!}{=} 0 \iff x_{1/2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{34}}{3} \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

→ Die möglichen Extrema von h liegen nicht im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\left.\begin{aligned} h(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} < 0 \\ h(-\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} > 0 \end{aligned}\right\}$$ Die Funktion h macht mindestens einen Nulldurchlauf!

→ Da alle möglichen Extrema nicht im betrachteten Intervall liegen und die Funktion mind. einen Nulldurchlauf macht folgt, dass h für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ genau einen Nulldurchlauf macht.

4/4

$\boxed{b.)}$ $h(x) = 0$ in Fixpunktproblem umwandeln:

$g(x) := h(x) + x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}$

$g(x) = x$ beschreibt nun $h(x) = 0$ als Problem.

z.z.: g ist Selbstabbildend und eine Kontraktion auf $G := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$g(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{48} \in G$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{13}{48} \in G$

$g'(x) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3} \notin G$

$g(0) = \frac{1}{6} \in G \Rightarrow$ alle möglichen Extrema auf G und die Randwerte von G liegen nach Anwendung von g immer noch in G

↳ g ist Selbstabb. auf G

Kontraktion auf G:

Schrankensatz: $q = \sup_{x \in G} \|Dg\| < \infty$, ist $q < 1$ ist g eine Kontrak.

$g''(x) = x + \frac{3}{2} \overset{!}{=} 0 \iff x = -\frac{3}{2} \notin G$, daher Randwerte von Dg bestimmen

$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$, $g'(\frac{1}{2}) = \frac{11}{24}$, $\|g'(-\frac{1}{2})\| < \frac{11}{24}$

$\Rightarrow q = \|\frac{11}{24}\| = \frac{11}{24} < 1$, somit ist g eine Kontraktion auf G

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt von g auf G. Somit hat h auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ nur eine Nullstelle.

6/6

$\boxed{c.)}$ $|x_N - x^*| \leq 10^{-3}$, mit apriori: $|x_N - x^*| \leq \frac{q^N}{1-q}|x_1 - x_0|$

$x_0 = 0$, $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{6}$, $q = \frac{11}{24}$ aus Aufgabenteil b)

$10^{-3} = \frac{q^N}{1-q}|x_1 - x_0| \iff q^N = \frac{(1-q)}{|x_1 - x_0|} 10^{-3} =: \alpha$

$\iff N = \frac{\ln(\alpha)}{\ln(q)} \approx 7{,}34 \Rightarrow N = 8$, da $N \in \mathbb{N}$

3/3

Σ: 13/13