ART 1. Blatt

$\boxed{14{,}5/20}$

Sebastian Hupe
Steven Becher
Stefan Conrad

A.2.) $\cosh \chi \equiv \gamma$

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vt? (stimmt zwar, aber das muss man zeigen. s. Übung)

a.) $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$

$$\Leftrightarrow \sinh^2 \chi \overset{(*)}{=} \cosh^2 \chi - 1 \Rightarrow \sinh \chi = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \beta\gamma$$

$$\tanh \chi = \frac{\sinh \chi}{\cosh \chi} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \beta$$

b.)

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \tanh \chi$$

$$\Lambda(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.)

$$\Lambda(\chi_2)\Lambda(\chi_1) = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 & 0 & 0 \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 \cosh \chi_1 + \sinh \chi_2 \sinh \chi_1 & -\cosh \chi_2 \sinh \chi_1 - \sinh \chi_2 \cosh \chi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \chi_2 \cosh \chi_1 - \cosh \chi_2 \sinh \chi_1 & \sinh \chi_2 \sinh \chi_1 + \cosh \chi_2 \cosh \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1 + \chi_2) & -\sinh(\chi_1 + \chi_2) & 0 & 0 \\ -\sinh(\chi_1 + \chi_2) & \cosh(\chi_1 + \chi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Argumente addieren sich beim Hintereinanderausführung der Boosts.

$\boxed{6/6}$

(*) $\sinh \chi = \text{sign}(\chi)\sqrt{\cosh^2 \chi - 1}$

$\chi = \cosh^{-1} \gamma$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \Rightarrow \chi > 0$

Hausaufgabe 3: Lorentzboosts in beliebige Richtung

a) Raum-Zeit-Vierervektor in K: $(dx^\mu) = \begin{pmatrix} c\,dt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Fragestellung war schlecht formuliert. Besser: „Geben Sie die Änderung der Koordinaten des Raum-Zeit-4-Vektors an." Der Raum-Zeit-Vektor eines ruhenden Teilchens muss natürlich nicht unbedingt im Ursprung liegen!

- Koordinatensystem so gewählt, dass Teilchen im Ursprung liegt

mit $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$ folgt $c\,dt' = \Lambda^0{}_\nu \, dx^\nu = \Lambda^0{}_0 \, c\,dt$

$\Leftrightarrow \quad dt' = \Lambda^0{}_0 \, dt$ (Bedingung an $\Lambda^0{}_0$)

$$\Rightarrow v^i = \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{\Lambda^i{}_\nu \, dx^\nu}{\Lambda^0{}_0 \, dt} = \Lambda^i{}_0 \frac{c}{\Lambda^0{}_0}$$

(1) $\Leftrightarrow \quad \Lambda^i{}_0 = \frac{\Lambda^0{}_0 v^i}{c}$ (Bedingung an $\Lambda^i{}_0$, $i = 1,2,3$)

2/2

b) mit $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich:

$$\Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 \eta_{\mu\nu} = \eta_{00} = 1$$

ausgeschrieben: $\Lambda^0{}_0{}^2 - \sum_{i=1}^{3} \Lambda^i{}_0{}^2 = 1$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad \Lambda^0{}_0{}^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\Lambda^0{}_0 v^i}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad \text{mit } v^2 = \sum_i v^{i\,2}$$

$$\Rightarrow \Lambda^i{}_0 = \frac{v^i}{c} \cdot \gamma$$

2/2

c)

0/3

4/7

Nr. 1

a)

$$S_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = S_{\mu\nu}T^{(\mu\nu)}$$

$$\frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + S_{\nu\mu}T^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu} + S_{\nu\mu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\right)$$

$$\overset{\eta \text{ ist symmetrisch}}{=} \frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} + S_{\nu\mu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + S_{\nu\mu}T^{\nu\mu}\right)$$

(*) Das Gleichheitszeichen stimmt natürlich, aber nicht, weil η symmetrisch ist, sondern, weil $S_{\mu\nu}$ symmetrisch ist! Angenommen da stünde ein nicht symmetrischer Tensor $M_{\nu\mu}$, dann

$$M_{\nu\mu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} \neq M_{\nu\mu}T^{\nu\mu}\ !$$

$$A_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}T^{[\mu\nu]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - A_{\nu\mu}T^{\mu\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - A_{\nu\mu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\right)$$

$$\overset{\eta \text{ ist symmetrisch}}{=} \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - A_{\nu\mu}T_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta}\right) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\left(A_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - A_{\nu\mu}T^{\nu\mu}\right)}_{=0}$$

s.o.! Hier muss die Antisymmetrie von $A^{\mu\nu}$ genutzt werden.

Es gilt außerdem

$$M^{\mu}{}_{\nu} = M_{\alpha\nu}\,\eta^{\alpha\mu} = M_{\alpha\nu}\,\eta^{\mu\alpha}$$

für allgemeine Tensoren $M_{\mu\nu}$!

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$$

da summiert wird

$$S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \overset{\text{Symmetrieeig.}}{=} -S_{\nu\mu}A^{\nu\mu} = -S_{\mu\nu}A^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$$

1,5/3

b)

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu} + T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right) = T_{\mu\nu}$$

Rang > 2 ?

1/2

c)

$$T^{\mu}{}_{\nu} \neq T_{\nu}{}^{\mu}$$

$$T^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} \neq T^{\alpha\mu}\eta_{\nu\alpha} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow T^{\mu\alpha}\eta_{\nu\alpha} \neq T^{\alpha\mu}\eta_{\nu\alpha}$$

$$\Rightarrow T^{\mu}{}_{\nu} \neq T_{\nu}{}^{\mu}$$

Macht bitte bei solchen Beweisen deutlich, was die zu überprüfenden Aussagen (Gleichheiten) sind und was wahre Aussagen sind. Die Gleichheit (*) ist ja z.B. eben nicht erfüllt, also sollte da auch kein „=" stehen!

1/2

4,5/7