Aufgabe 2

Der metrische Tensor in kartesischen Koord.:

zeit ? $x^\mu \to \xi^\mu$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

In Kugelkoord. gilt:

$x^1 = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $x^2 = r\sin\vartheta \sin\varphi$, $x^3 = r\cos\vartheta$ ✓

Im neuen System sind

$\xi^1 = r$, $\xi^2 = \vartheta$, $\xi^3 = \varphi$ mit der Metrik $g'_{\alpha\beta}$.

Dabei ist

???

$$g'_{\alpha\beta} = \cancel{\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} g_{\mu\nu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} g_{\mu\nu}$$ ✓

Es gilt somit für die Metrik in Kugelkoordinaten:

$$g'_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial r}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial x^2}{\partial r}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial x^3}{\partial r}\frac{\partial x^3}{\partial r} = \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta = 1$$ ✓

$$g'_{22} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \vartheta}\right)^2 = r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta = r^2$$ ✓

$$g'_{33} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \vartheta}\right)^2 = r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\vartheta$$ ✓

$g'_{21} = g'_{31} = g'_{32} = 0$ Rechnung

Somit gilt für das ~~Strecken~~element: Linsen

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2$ ✓

$$\Rightarrow \quad g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$ ✓

3,5/5