[redacted]

e) Wie groß ist der Schwarzschildradius der Erde (grobe Abschätzung)? Die Erde hat eine Masse von etwa $6 \cdot 10^{24}$ kg. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus? [3P]

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \approx \frac{10^{-7} \cdot 10^{24}}{10^{16}} \approx \underline{10^{-5}\,\mathrm{k}}$$

$M \approx$

$c \approx 10^8$

$G \approx 10^{-7}$

⇒ Sehr klein ⇒ Schwarzschildradius ergibt nur Sinn wenn Erdenmasse kollabiert

3

f) Was beobachtet ein frei fallender Beobachter/eine frei fallende Beobachterin wenn er/sie beim Fall in ein schwarzes Loch den Schwarzschildradius passiert? [2P]

⇒

g) Geben Sie den metrischen Tensor in der "Newton'schen Näherung" an. [2P]

$$g_{00}(x) \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2}$$

2

h) Warum werden die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie in tensorieller Form formuliert? [2P]

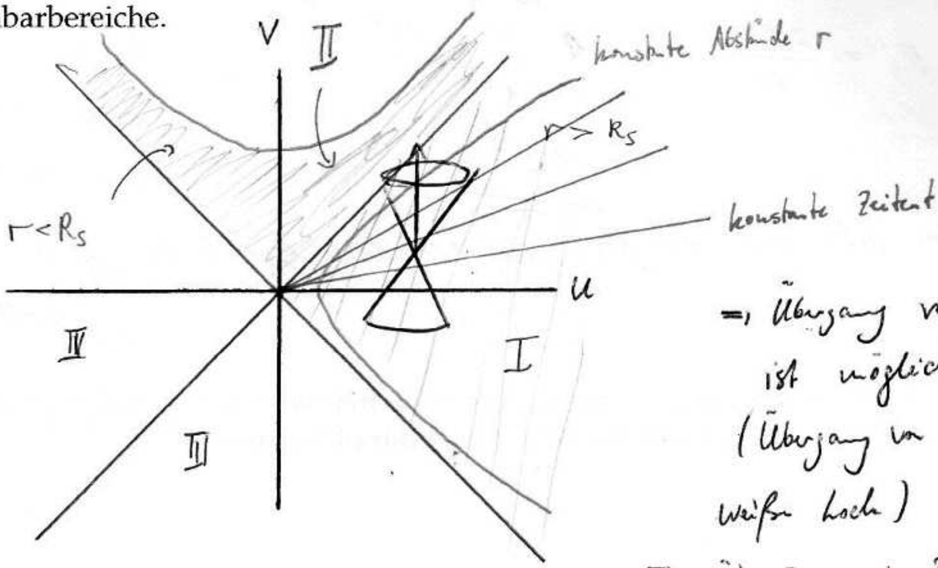
⇒ Damit wird das Prinzip der Kovarianz bewahrt

⇒ Gesetze bleiben forminvariant unter Koordinatentrafo

2

[redacted]

i) Zeichnen Sie das Kruskal-Diagramm der Schwarzschildlösung. Wählen Sie einen Bereich aus und diskutieren Sie die möglichen Übergänge aus dem von Ihnen gewählten Bereich in die Nachbarbereiche. [3P]




⇒ Übergang von I nach II ist möglich! ⇒ Wurmloch (Übergang von schwarzen zum weißen Loch)

⇒ Übergänge in Bereiche III und IV nicht möglich, da Minkowskikegel nur in positiver Zeitachse durchlaufen werden kann

3

[redacted]

## Aufgabe 2: Paralleltransport entlang eines Breitenkreises 15 Punkte

Der Paralleltransport eines Vektors $V$ auf einer Kurve $u(s)$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{dV^m}{ds} + \Gamma^m_{jk} V^j \frac{du^k}{ds} = 0. \qquad \text{mit} \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta \;, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

Untersuchen Sie den Paralleltransport des Vektors $V = V^\theta \vec{e}_\theta + V^\phi \vec{e}_\phi$ auf der Kugel $S^2$ entlang des Breitenkreises $\theta = \frac{\pi}{3}$. Der Anfangspunkt des Paralleltransportes sei bei $\phi = 0$ , dort zeige der Vektor in $\theta$-Richtung, also

$$V(\phi = 0, \theta = \pi/3) = \vec{e}_\theta.$$

Berechnen Sie $V(\phi)$.

In welche Richtung zeigt der Vektor bei $\phi = \pi$ und bei $\phi = 2\pi$?

Aus der Gleichung für den Paralleltransport erhält man folgende Gleichungen, mit $u^i = \begin{pmatrix}\theta \\ \varphi\end{pmatrix}$

(I) $\quad \frac{dV^\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\, V^\varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0$

(II) $\quad \frac{dV^\varphi}{ds} + \cot\theta\, V^\varphi \frac{d\theta}{ds} + \cot\theta\, V^\theta \frac{d\varphi}{ds} = 0$

Betrachtung der Gleichungen für $\frac{d\theta}{ds} = 0$ ($\theta_0 = \text{const}$):

$\frac{dV^\theta}{ds} - \sin\theta_0\cos\theta_0\, V^\varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad \Big| \; \frac{dV^i}{ds} = \frac{\partial V^i}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = V^{i\prime}\dot\varphi$

$\wedge \quad \frac{dV^\varphi}{ds} + \cot\theta_0\, V^\theta \frac{d\varphi}{ds} = 0$

$\Leftrightarrow \dot\varphi V^{\theta\prime} - \sin\theta_0\cos\theta_0\, V^\varphi\dot\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad V^{\theta\prime} - \sin\theta_0\cos\theta_0\, V^\varphi = 0 \quad \Big| \; V^{\varphi\prime} = \frac{V^{\theta''}}{\sin\theta_0\cos\theta_0}$

$\wedge \; V^{\varphi\prime}\dot\varphi + \cot\theta_0\, V^\theta\dot\varphi = 0 \qquad \wedge \; V^{\varphi\prime} + \cot\theta_0\, V^\theta = 0 \quad \Big| \; V^{\theta\prime} = -\frac{V^{\varphi''}}{\cot\theta_0}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V^{\varphi''} + \cos^2\theta_0\, V^\varphi = 0 \\ \wedge \; V^{\theta''} + \cos^2\theta_0\, V^\theta = 0 \end{array}\right\}$ Entkoppelte DGL's $\Rightarrow \gamma^2 := \cos^2\theta_0 \Rightarrow \gamma = |\cos\theta_0|$

Setzen jeweils Schwingung mit Frequenz $\gamma$ als Ansatz:

$\Rightarrow V^\varphi(\varphi) = A^\varphi \sin(\gamma\varphi) + B^\varphi \cos(\gamma\varphi) \Rightarrow V^\varphi(0) = 0 = B^\varphi$

$\Rightarrow V^\theta(\varphi) = A^\theta \sin(\gamma\varphi) + B^\theta \cos(\gamma\varphi) \Rightarrow V^\theta(0) = 1 = B^\theta$

[redacted]

Koeffizienten $A^i$ durch Einsetzen der Ansätze in gekoppelte DGL:

$$\Rightarrow V^{\theta} = A^{\theta}\sin(\gamma\varphi) + \cos(\gamma\varphi) \quad\Big|\quad V^{\theta\prime} = +\gamma A^{\theta}\cos(\gamma\varphi) - \gamma\sin(\gamma\varphi)$$

$$V^{\varphi} = A^{\varphi}\sin(\gamma\varphi) \quad\Big|\quad V^{\varphi\prime} = \gamma A^{\varphi}\cos(\gamma\varphi)$$

(*) $\Rightarrow \gamma A^{\theta}\cos(\gamma\varphi) - \gamma\sin(\gamma\varphi) - \sin\theta_0\cos\theta_0 \cdot A^{\varphi}\sin(\gamma\varphi) = 0 \quad |$ für $\varphi = \frac{\pi}{2\gamma}$

$\Rightarrow -\gamma - \sin\theta_0\cos\theta_0 A^{\varphi} = 0 \Rightarrow A^{\varphi} = \frac{-\gamma}{\sin\theta\cos\theta_0} = \underline{-\frac{1}{\sin\theta_0}}$ für $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ Gleichung (*) für $\varphi = 0$: $\underline{A^{\theta} = 0}$

Lösungen für $V^i$:

$V^{\theta}(\varphi) = \cos(\gamma\varphi)$ ✓

$V^{\varphi}(\varphi) = -\frac{1}{\sin\theta_0}\sin(\gamma\varphi)$ | Vorfaktor aufgrund der nicht normierten Basis)

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} V^{\theta} \\ V^{\varphi} \end{pmatrix}$ für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} \cos((\cos\frac{\pi}{3})\cdot\pi) \\ -\sin((\cos\frac{\pi}{3})\cdot\pi) \end{pmatrix}$ für $\pi \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} \cos((\cos\frac{\pi}{3})\cdot 2\pi) \\ -\sin((\cos\frac{\pi}{3})\cdot 2\pi) \end{pmatrix}$ für $2\pi \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

15

[redacted]

## Aufgabe 3: Veranschaulichung der Robertson-Walker Metrik — 20 Punkte

(a) Das Linienelement $ds$ auf der Sphäre $S^2$ ist gegeben durch

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2.$$

Gehen Sie von den Koordinaten $(\theta, \phi)$ über zu den Koordinaten $(\rho = \sin\theta, \phi)$ und bestimmen Sie $ds^2$ in diesen neuen Koordinaten.

(b) Geben Sie den metrischen Tensor $g$ explizit als Matrix an.

(c) Berechnen Sie den affinen Zusammenhang $\Gamma^i_{jk}$ mit $i, j, k = \rho, \phi$.

Die neue Form der Metrik ist der zeitunabhängige räumliche Anteil der Robertson-Walker Metrik

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{d\rho^2}{1 - K\rho^2} + \rho^2 d\Phi^2\right)$$

in zwei Dimensionen für $K = 1$.

(d) Gehen Sie von vierdimensionalen Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x^1 &= \sin\alpha(\sin\theta\cos\phi) \\ x^2 &= \sin\alpha(\sin\theta\sin\phi) \\ x^3 &= \sin\alpha(\cos\theta) \\ x^4 &= \cos\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

aus und bestimmen Sie das Linienelement auf der dreidimensionalen Sphäre $S^3$ in den Koordinaten $\alpha, \theta, \phi$.

(e) Setzen Sie $\sin\alpha = \rho$ und vergleichen Sie mit der Roberston-Walker Metrik

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{d\rho^2}{1 - K\rho^2} + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\Phi^2\right)$$

im vierdimensionalen Raum.

a) $\rho = \sin\theta \Rightarrow d\rho = \cos\theta \, d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{d\rho}{\cos\theta} \Leftrightarrow d\theta^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2\theta} = \frac{d\rho^2}{1-\sin\theta^2}$

$\Rightarrow \underline{ds^2 = \frac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2 d\varphi^2}$ (2)

b) $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ mit $u^i = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$

(2)

[redacted]

c) $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$ $\qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\varrho^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho^2} \end{pmatrix}$

⇒ für $i=1$:

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_j g_{k1} + \partial_k g_{j1} - \partial_1 g_{jk})$$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0 ,$$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(1-\varrho^2)\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{1}{1-\varrho^2}\right)\right) \qquad \Rightarrow \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(1-\varrho^2)(-\partial_1(\varrho^2))$$

$\frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{11})$ $= \frac{(1-\varrho^2)\varrho}{(1-\varrho^2)^2}$

$$= \frac{1}{2}(1-\varrho^2)\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}(1-\varrho^2)^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\varrho^2)(+2\varrho)(1-\varrho^2)^{-2}$$

$$= \frac{\varrho}{1-\varrho^2}$$

$= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22}$ $\qquad = -\varrho(1-\varrho^2)$

$$= -\varrho(1-\varrho^2)$$

(2)

für $i=2$:

$$\Rightarrow \Gamma^2_{jk} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_j g_{k2} + \partial_k g_{j2} - \partial_2 g_{jk})$$

$$\Rightarrow \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$$

$$= \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varrho^2}\cdot 2\varrho = \frac{1}{\varrho}$$

$$\Rightarrow \Gamma^2_{11} = 0 = \Gamma^2_{22}$$

Nicht verschwindende Zusammenhänge:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\varrho}{1-\varrho^2}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\varrho(1-\varrho^2)$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\varrho}$$

d) $x^4$ = als „Zeitkoordinate", $x^i$ ⇒ kann betrachtet werden als Kugel mit Radius $\sin\alpha$

Verwende einfaches Linienelement für Kugelkoordinaten

$$\Rightarrow ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = d\alpha^2 - \sin^2\alpha\, d\theta^2 - \sin^2\alpha \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$= d\alpha^2 - \sin^2\alpha\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$dx^4 = -\sin\alpha\, d\alpha$

$dx^1 = \cos\alpha(\sin\theta\cos\varphi)\,d\alpha + \sin\alpha\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi$

$dx^2 = \cos\alpha(\sin\theta\sin\varphi)\,d\alpha + \sin\alpha\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi$

$dx^3 = \cos\alpha\cos\theta\, d\alpha - \sin\alpha\sin\theta\, d\theta$

e) Würde man $\sin\alpha = \varrho$ setzen, so erhält man die Robertson-Walker-Metrik für $d\varrho = 0$ und $R^2(t) = 1$

$\Rightarrow ds^2 = dt^2 - \varrho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \Rightarrow$ Universum mit festem Radialteil!

(10)

[redacted]

**Aufgabe 4: In der Nähe eines Schwarzen Loches (Rindler Koordinaten) 15 Punkte**

Der Eigenabstand $\rho(r)$ eines Beobachters vom Schwarzschildradius $R_S$ ist (für $r > R_s$) gegeben durch

$$\rho(r) = \int_{R_s}^{r} \sqrt{g_{rr}(r')}dr'.$$

Betimmen Sie $\rho(r)$ in niedrigster Näherung, indem Sie $r' = R_S + \lambda$ setzen und in $\lambda$ entwickeln, wobei $\lambda << R_s$ ist.

Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf von $\rho(r)$ in der Nähe des Schwarzschildradius.

$$\rho(r) = \int_{R_s}^{r} \sqrt{g_{rr}(r')}\, dr' \qquad \Big|\ r' = R_s + \lambda \Rightarrow.$$

$$g_{rr} = -A(r') \approx -\left(1 - \frac{R_s}{r'}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{R_s}{r'} - 1}$$

$$\overset{\text{Näherung}}{=} \frac{1}{\frac{R_s}{r'}} = \frac{r'}{R_s}$$

$$= \int_{R_s}^{r} \sqrt{\frac{1}{\frac{R_s}{r'} - 1}}\, dr'$$

$$= \int_{R_s}^{r} \sqrt{\frac{1}{\frac{R_s}{R_s+\lambda} - 1}}\, d\lambda$$

$$= \int_{R_s}^{r} \sqrt{\frac{1}{\frac{R_s}{\frac{R_s}{\lambda}+1} - 1}}\, d\lambda \qquad \Big|\ \text{Näherung } \frac{R_s}{\lambda} + 1 \approx \frac{R_s}{\lambda}$$

$$= \int_{R_s}^{r} \sqrt{\frac{1}{\lambda - 1}}\, d\lambda \qquad \sqrt{\frac{1}{\lambda-1}} = (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2\sqrt{\lambda - 1}$$

$$= 2\sqrt{\lambda - 1}\,\Big|_{\lambda = R_s}^{\lambda = r}$$

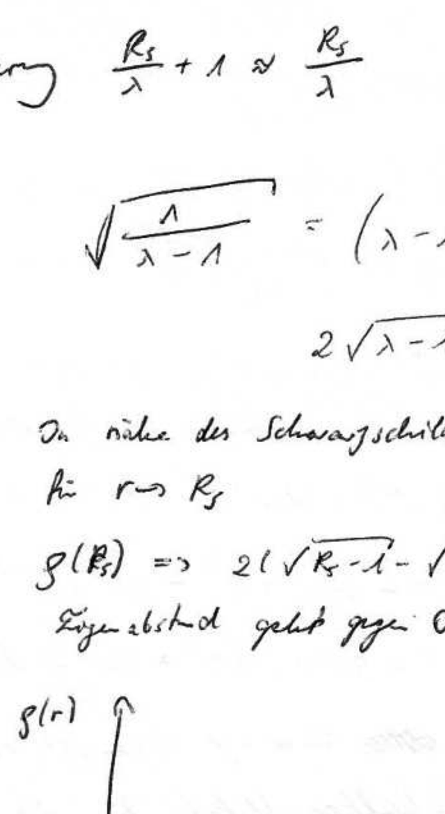
?

$$= 2\left(\sqrt{r-1} - \sqrt{R_s - 1}\right)$$

In nähe des Schwarzschildradius: $\rho(r)$ für $r \to R_s$

$\rho(R_s) \Rightarrow 2(\sqrt{R_s - 1} - \sqrt{R_s - 1})$

Eigenabstand geht gegen 0




10

**Aufgabe 5: Spezielle Relativitätstheorie: Das Zwillingsparadoxon 15 Punkte**

Ein Raumschiff bewegt sich 2 Jahre auf geradem Weg mit konstanter Beschleunigung $a = 10\frac{m}{s^2}$ von der Erde weg, dann bremst es zwei Jahre mit $a = -10\frac{m}{s^2}$ ab und begibt sich auf den Rückflug, der in gleicher Weise stattfindet. Vergleichen Sie das Älter von einem Zwillingspaar von denen der Bruder auf der Erde bleibt und die Schwester die beschriebene Reise unternimmt.

Alter bestimmt durch die Eigenzeit:

$d\tau_B^2 = dt_B^2 \Rightarrow$ Bruder in ruhendem System!

Schwester nicht im Inertialsystem, System beschleunigt!

Koordinatentrafo (Beschleunigung in x-Richtung):

$dt_B = dt_S = dt' \quad x = \frac{1}{2} a t'^2$ (Bewegung über 2 Jahre simuliert durch die 1 Jahr Beschleunigung mit a verdoppelt)

Für relativistische Abstand gilt:

$$ds^2 = dt'^2 - dx^2$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= a t' \, dt' \\ dx^2 &= a^2 t'^2 \, dt'^2 \end{aligned}\right\} \; ds^2 = (1 - a^2 t'^2)\, dt'^2$$

$$g_{00} = 1 + a^2 t'^2$$

Vergleich der Eigenzeit:

$$d\tau_B = \int_0^{1\,\text{Jahr}} \sqrt{\frac{g_{00}(t_B)}{g_{00}(t_S)}}\, dt'$$

$$= \frac{1}{\cancel{a}} \int_0^{1\,\text{Jahr}} \sqrt{\frac{1}{1 + a^2 t'^2}}\, dt' \qquad a t' = \lambda, \quad \frac{d\lambda}{a} = dt'$$

$$= \frac{1}{a} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(1\,\text{Jahr})} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\, d\lambda$$

Jahr ⇒ 365 Tage ⇒ $t_{Jahr} = 31\,536\,000$ s

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arsinh}(a \cdot t_{Jahr}) - \underbrace{\operatorname{arsinh}(0)}_{\hat{=}\,0}$$

=

14

⇒ In jedem Fall wäre die Schwester beim Wiedertreffen weniger gealtert! ⇒ Weil sie in einem beschleunigten Inertialsystem war!

[redacted]

## Aufgabe 6: Der Weyl-Tensor **15 Punkte**

Man kann den Riemannschen Krümmungstensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ zerlegen in einen Anteil, der nur vom Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ und vom Krümmungsskalar R abhängt und einem neuen Tensor , dem sogenannten Weyl-Tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}$, der die gleichen Symmetrien wie der Riemannsche Krümmungstensor, aber nur triviale Kontraktionen hat.
D.h. es soll gelten

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + S_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{2}$$

wobei

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = \alpha_1 g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} R + \alpha_2 g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} R + \alpha_3 g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + \alpha_4 g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + \alpha_5 g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} + \alpha_6 g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} \tag{3}$$

mit noch unbestimmten Koeffizienten $\alpha_i$ , $i = 1 \ldots 6$.
Bestimmen Sie aus den Symmetrierelationen

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = -S_{\nu\mu\rho\sigma} \tag{4}$$

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = -S_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{5}$$

$$g^{\mu\rho} S_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\nu\sigma} \tag{6}$$

und

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} + S_{\mu\sigma\nu\rho} + S_{\mu\rho\sigma\nu} = 0 \tag{7}$$

die Koeffizienten $\alpha_i$ mit $i = 1 \ldots 6$ und somit den Weyltensor.

$-S_{\nu\mu\rho\sigma} = \alpha_1 g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} R + \alpha_2 g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho} R + \alpha_3 g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} + \alpha_5 g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + \alpha_4 g_{\nu\sigma} R_{\nu\rho} + \alpha_6 g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma}$

Koeffizienten vergleich mit $S_{\mu\nu\rho\sigma}$ liefert:

$\alpha_1 = \alpha_2$ , $\alpha_3 = \alpha_6$ , $\alpha_4 = \alpha_5$ ✓

$\Rightarrow g^{\mu\rho} S_{\mu\nu\rho\sigma} = \alpha_1 g_{\nu\sigma} R + \alpha_2 \delta^\rho_\sigma g_{\nu\rho} R + \alpha_4 \delta^\rho_\sigma + \alpha_3 R_{\nu\sigma} + \alpha_5$

5