

Aufgabe 1: Das Zwillingsparadoxon

(5 Punkte)

Ein Raumschiff bewegt sich zwei Jahre auf geradem Weg mit konstanter Beschleunigung $a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ von der Erde weg, dann bremst es zwei Jahre mit $a = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ab und begibt sich auf den Rückflug, der in gleicher Weise stattfindet. Vergleichen Sie das Alter von einem Zwillingspaar von denen einer auf der Erde bleibt und der andere die beschriebene Reise unternimmt

Aufgabe 2: Der Metrische Tensor in Kugelkoordinaten

(5 Punkte)

Es soll eine Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten durchgeführt werden: $x^\mu = (ct, x, y, z)^T \rightarrow \xi^\mu = (ct, r, \Theta, \varphi)^T$. Berechnen Sie den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 3: Äquivalenzprinzip

(5 Punkte)

a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen schwachem und starkem Äquivalenzprinzip.

In einem lokalem Inertialsystem (z.B. einem frei fallenden Fahrstuhl) gilt für kräftefreie Körper das zweite Newtonsche Gesetz:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (1)$$

b) Transformieren Sie diese Gleichung in ein beliebiges System mit den Koordinaten x^μ , dabei sollten Sie folgendes Ergebnis erhalten:

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = 0 \quad (2)$$

c) Nun bewege sich ein kräftefreier Körper in einem lokalem Inertialsystem ξ , das frei im homogenen Schwerfeld der Erde falle. ($\xi^\mu = (t', x', y')^T$; $x^\mu = (t, x, y)^T$ mit $t' = t$, $x' = x$ und $y' = y + \frac{1}{2} g t^2$) Welche drei Gleichungen ergeben sich aus Gleichung (3)?

d) Bestimmen Sie mit den in c) erhaltenen Gleichungen $y(x)$.