Aufgabe 3) Die Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a(t)^2}{1-kr^2} dr^2 - a(t)^2 r^2 d\vartheta^2 - a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & & \\ & & -a(t)^2 r^2 & \\ & & & -a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta \end{bmatrix}$$

Die Christoffelsymbole berechnen sich gemäß:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Da die zu betrachtende Metrik nur Elemente auf der Hauptdiagonalen hat, die ungleich Null sind, werden nur Beiträge für $\rho = \sigma$ geliefert.

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

Die vierdimensionale Metrik erlaubt 64 Christoffel-Symbole. Davon sind 24 direkt Null, da Symbole mit drei verschiedenen Indices aufgrund der Ableitungen sicher eine Null ergeben. Weitere zehn Symbole sind direkt Null, nämlich jene, welche mindestens zwei "t" Indices tragen. Demnach sind noch 30 Christoffelsymbole zu bestimmen, wobei die Symmetrie in den unteren beiden Indices ausgenutzt werden kann. ✓

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2} g^{tt}(\partial_r g_{rt} + \partial_r g_{rt} - \partial_t g_{rr}) = \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2}$$

$$\Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2} g^{tt}(\partial_\vartheta g_{\vartheta t} + \partial_\vartheta g_{\vartheta t} - \partial_t g_{\vartheta\vartheta}) = a(t)\dot{a}(t)r^2$$

$$\Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{tt}(\partial_\varphi g_{\varphi t} + \partial_\varphi g_{\varphi t} - \partial_t g_{\varphi\varphi}) = a(t)\dot{a}(t)r^2\sin^2\vartheta$$

$$\Gamma^r_{tr} = \Gamma^r_{rt} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_t g_{rr} + \partial_r g_{tr} - \partial_r g_{tr}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-kr^2}{a(t)^2}\right)\left(-\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-kr^2}{a(t)^2}\right)\left(-\frac{2a(t)^2kr}{(1-kr^2)^2}\right) = \frac{kr}{1-kr^2}$$

$$\Gamma^r_{r\vartheta} = \Gamma^r_{\vartheta r} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_r g_{\vartheta r} + \partial_\vartheta g_{rr} - \partial_r g_{r\vartheta}) = 0$$

$$\Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_r g_{\varphi r} + \partial_\varphi g_{rr} - \partial_r g_{r\varphi}) = 0$$

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_\vartheta g_{\vartheta r} + \partial_\vartheta g_{\vartheta r} - \partial_r g_{\vartheta\vartheta}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-kr^2}{a(t)^2}\right)(2a(t)^2 r) = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_\varphi g_{\varphi r} + \partial_\varphi g_{\varphi r} - \partial_r g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-kr^2}{a(t)^2}\right)(2a(t)^2 r\sin^2\vartheta)$$

$$= -r(1-kr^2)\sin^2\vartheta$$

$$\Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\vartheta t} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}(\partial_t g_{\vartheta\vartheta} + \partial_\vartheta g_{t\vartheta} - \partial_\vartheta g_{t\vartheta}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2r^2}\right)(-2a(t)\dot{a}(t)r^2) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$\Gamma^\vartheta_{rr} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}(\partial_r g_{r\vartheta} + \partial_r g_{r\vartheta} - \partial_\vartheta g_{rr}) = 0$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\vartheta r} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}(\partial_r g_{\vartheta\vartheta} + \partial_\vartheta g_{r\vartheta} - \partial_\vartheta g_{r\vartheta}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2r^2}\right)(-2a(t)^2 r) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}(\partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta} + \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta} - \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta}) = 0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}\left(\partial_{\vartheta} g_{\varphi\vartheta} + \partial_{\varphi} g_{\vartheta\vartheta} - \partial_{\vartheta} g_{\vartheta\varphi}\right) = 0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta}\left(\partial_{\varphi} g_{\varphi\vartheta} + \partial_{\varphi} g_{\varphi\vartheta} - \partial_{\vartheta} g_{\varphi\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2 r^2}\right)\left(-a(t)^2 r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$= \sin\vartheta\cos\vartheta \quad (-1)$$

-0,5P

ist mies, :(

dass es geht halt nur ums ausrechnen

$$\Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi t} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_t g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{t\varphi} - \partial_{\varphi} g_{t\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta}\right)\left(-2a(t)\dot{a}(t) r^2 \sin^2\vartheta\right)$$

$$= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad ✓$$

$$\Gamma^{\varphi}_{rr} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_r g_{r\varphi} + \partial_r g_{r\varphi} - \partial_{\varphi} g_{rr}\right) = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_r g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{r\varphi} - \partial_{\varphi} g_{r\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta}\right)\left(-2a(t)^2 r \sin^2\vartheta\right) = \frac{1}{r} \quad ✓$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_{\vartheta} g_{\vartheta\varphi} + \partial_{\vartheta} g_{\vartheta\varphi} - \partial_{\varphi} g_{\vartheta\vartheta}\right) = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_{\vartheta} g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\vartheta\varphi} - \partial_{\varphi} g_{\vartheta\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta}\right)\left(-2a(t)^2 r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$= \cot\vartheta \quad ✓$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi}\left(\partial_{\varphi} g_{\varphi\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\varphi\varphi} - \partial_{\varphi} g_{\varphi\varphi}\right) = 0$$

~~5,75~~ 4,5/5