5. Übungszettel zur Vorlesung **SS 2015**
Allgemeine Relativitätstheorie **Priv.-Doz. Dr. Ute Löw**
Abgabe bis Mo. 15. Juni 2015, 18:00 Uhr **Becker, Zeissner (Kasten 233)**

Aufgabe 1: Friedmann-Robertson-Walker Universum II **(6 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um die Fortsetzung der auf dem letzten Zettel bearbeiteten Aufgabe. Ziel ist es die Abhängigkeit des Skalenfaktors a von der Zeit zu bestimmen.

a) Finden Sie einen Ausdruck für die Energiedichte ρ in Abhängigkeit vom Skalenfaktor. Lösen Sie dazu die Gleichung :

$$d\left(\rho a^3\right) = -p d\left(a^3\right) \tag{1}$$

Verwenden Sie dazu die Zustandsgleichung $p = \alpha\rho$. Dabei ist α eine Konstante, die von der betrachteten Energieform abhängt. Schließen Sie aus ihrem Ergebnis $\rho(a, \alpha)$ welchen Wert α für Staub (d.h. hier: nicht relativistische Materie) annehmen muss.

b) Um α für Strahlung (Photonen) zu bestimmen, gehen Sie davon aus, dass der Energie-Impuls-Tensor der Hydrodynamik auch die Photonen beschreibt. Der Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2}$$

Vergleichen Sie zur Bestimmung von α die lorentzinvarianten Spuren.

c) Bestimmen Sie nun aus der Friedmann-Gleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa\rho + \frac{k}{a^2}$$

für ein flaches Universum ($k = 0$) die Abhängigkeit des Skalenfaktors von der Zeit für Strahlung und Materie.

Aufgabe 2: Test der ART: Ablenkung von Lichtstrahlen **(6 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll die Ablenkung von Lichstrahlen in einem Gravitationsfeld berechnet werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
Betrachten Sie ein Photon, das sich auf einer lichtartigen Trajektorie um eine kugelförmige schwere Masse M bewegt. Die Koordinaten können so gewählt werden, dass die Trajektorie in der Äquatorebene ($\theta = \pi/2$) liegt.
Hinweis: Grundsätzlich ist eine Skizze zur Bearbeitung dieser Aufgabe möglicherweise hilfreich. Die Schwarzschildmetrik ist gegeben durch:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \tag{3}$$

a) Aus der Vorlesung sind die Erhaltungsgrößen der Schwarzschildmetrik $e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$ und $l = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$ bekannt (mit G = 1). Nutzen sie diese, um die Umlaufgleichung

$$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2}{l^2} - v^2(1 - 2Mv) \tag{4}$$

herzuleiten. Dabei ist $v = 1/r$.

b) Leiten Sie hieraus die folgende DGL 2. Ordnung ab:

$$\frac{dv}{d\varphi^2} + v = 3Mv \tag{5}$$

c) Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Lösung der homogenen Version dieser DGL ($\frac{dv}{d\varphi^2} + v = 0$) schreiben lässt als:

$$v(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{B} \tag{6}$$

Was ist dann die physikalische Interpretation der Größe B?

d) Setzen Sie nun die obige Lösung in die rechte Seite der ursprünglichen DGL ($3Mv^2$) ein, und demonstrieren Sie, dass

$$v(\phi) = \frac{\sin\phi}{B} + \frac{M}{B^2}(1-\cos\phi)^2, \tag{7}$$

diese gestörte Gleichung löst.

e) Rechnen Sie nach, dass ein Lichtstrahl mit $B >> M$ auf seinem Weg um den Winkel

$$\alpha = \frac{4M}{B} \tag{8}$$

abgelenkt wird.

Aufgabe 3: Eigenabstand **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie den Eigenabstand $\rho(r)$ eines Beobachters im Abstand r einer Punktmasse M, deren Einfluss auf die Raumzeit durch die Schwarzschildmetrik beschrieben werde, vom Schwarzschildradius R_S. Es sei $r > R_S$. Der Eigenabstand ist gegeben durch:

$$\rho(r) = \int_{R_S}^{r} \sqrt{g_r r(r')} dr' \tag{9}$$

Nehmen Sie dabei an, dass sich der Beobachter in der Nähe des Schwarzschildradius befinde, d.h sie können r' schreiben als $r' = R_S + \lambda$ mit $\lambda \ll R_S$. Nähern $\rho(r)$ sinnvoll. Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf von $\rho(r)$ in der N'ähe des Schwarzschildradius.