Aufgabe 3

a) Das schwache Äquivalenzprinzip besagt, dass aus der nach Newton formulierten Konstanz vom Verhältnis aus träger und schwerer Masse die Möglichkeit zu einer Transformation in ein Koordinatensystem ohne Gravitation möglich ist. ✓ Daraus folgert das starke Äquivalenzprinzip im Gegensatz, dass in einem frei fallenden Koordinatensystem **alle** Vorgänge so ablaufen, als ob kein Gravitationsfeld existiert. Demnach ist eine Unterscheidung zwischen Schwerelosigkeit und Fallen in Nähe großer Masse von einem abgeschlossenen Laborsystem aus nicht möglich. ✓

b) $\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} = 0 \longrightarrow IS(x^\mu)$ $\lambda \hat{=}$ prinz. nur Stützv.

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\xi^\mu}{d\lambda}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \checkmark \qquad d\xi^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma$$

Kettenregel

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \checkmark + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \checkmark$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\sigma} = x^\sigma \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \ ?!$$

$$= \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \checkmark$$

c) $$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = 0$$

$\xi^\mu = (t', x', y')^T$, $x^\mu = (t, x, y)^T$

(freier Index: μ) $y' = y + \frac{1}{2}gt^2$ ✓

3/4

Aufgabe 3

a) Das schwache Äquivalenzprinzip besagt, dass aus der nach Newton formulierten Konstanz vom Verhältnis aus träger und schwerer Masse die Möglichkeit zu einer Transformation in ein Koordinatensystem ohne Gravitation möglich ist. ✓
Daraus folgert das starke Äquivalenzprinzip im Gegensatz, dass in einem frei fallenden Koordinatensystem <u>alle</u> Vorgänge so ablaufen, als ob kein Gravitationsfeld existiert. Demnach ist eine Unterscheidung zwischen Schwerelosigkeit und Fallen in Nähe großer Masse von einem abgeschlossenen Laborsystem aus nicht möglich. ✓

b) $$\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} = 0 \longrightarrow IS(x^\mu)$$ $\lambda \hat{=}$ prinz. nur Stützv.

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\xi^\mu}{d\lambda}\right) \underset{\uparrow \text{ Kettenregel}}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \checkmark \qquad d\xi^\mu = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\sigma}dx^\sigma$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu} \checkmark + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \checkmark$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\sigma} = x^\sigma \frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \; ?!$$

$$= \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\sigma\partial x^\nu} \checkmark$$

c) $$\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\sigma\partial x^\nu} = 0$$

$\xi^\mu = (t', x', y')^T$, $\quad x^\mu = (t, x, y)^T$

(freies Index: μ) $\qquad y' = y + \frac{1}{2}gt^2$ ✓

3/4

$\mu = 0$ liefert:

$$\frac{\partial t'}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2 t'}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = 0 \quad ✓ \qquad \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0$$

liefert für alle σ und ν 0 $\Rightarrow$ $\boxed{0 = 0}$

$\mu = 1$ liefert:

$$\frac{\partial x'}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \overbrace{\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}}^{=0} = 0$$

für $\nu = 1$ und bel. σ folgt: $\frac{d^2x}{d\lambda^2} = \boxed{\cancel{\ddot{x}} = 0}$

$\mu = 2$ liefert:

$$\frac{\partial y'}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = 0$$

ergibt ausgeschrieben über σ und ν summierend:

$$\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{dt}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + \frac{dt}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial t \partial x}$$

$$+ \frac{dt}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial t \partial y} + \frac{dx}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial t} + \frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + \frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{dy}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial t} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + \ddot{y} + g + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{d\lambda^2} = \boxed{\ddot{y} = -g\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} \; ✓ \quad (*)$$

d) die Gleichung lässt sich über zweimalige Integration lösen. Es folgt:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

$y(\lambda) = ?$ und $\frac{d^2y}{d\lambda^2} = -g$

und im allg gilt nicht $\lambda = t$

3/5

4/4

ART B.2 Lösg. 08.05.15

A1 siehe Abgabe

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right)$$

$$= c^2 d\tau^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

nur Änd. in x-Richt.

$$= \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2$$

oder:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dx_1^2 = g_{00}dt^2\left(1 - \frac{g_{11}}{g_{00}}v^2\right)$$

$$= g_{00}d\tau^2$$

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{g_{11}}{g_{00}}v^2\right)$$

3d) aus c) $\frac{d^2y}{d\lambda^2} = -g \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2$

linke Seite

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dy}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\lambda}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\underbrace{\frac{d^2x}{d\lambda^2}}_{=0} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{dx}\underbrace{\frac{d^2x}{d\lambda^2}}_{=0} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\lambda}\right)\frac{dx}{d\lambda}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \underbrace{\frac{dy}{dx}\frac{d}{d\lambda}\left(\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}\right)\frac{dx}{dy}}_{=0}$$

$y(x(t(\lambda)))$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\lambda} \Rightarrow -g\cancel{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\overbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}^{v_x^2}\cancel{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2}$$

da $\frac{dt}{d\lambda} \neq 0$ f. nicht-triv. Lösg

$$\Rightarrow \quad y''(x) = -g\frac{1}{v_x^2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \cancel{-\frac{g}{2}\left(\frac{v_x}{x}\right)^2}$$

$$= -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$