Maik Becker
Kevin Sedlaczek
Helena Nawrath

Gruppe 2

Allgemeine Relativitätstheorie
4. Übungsblatt

$\Sigma\ 8/9$

Aufgabe 1) Paralleltransport auf S^2

$$\frac{dV^\vartheta}{d\lambda} = \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\, V^\varphi \frac{du^\varphi}{d\lambda} \qquad (1)$$

$$\frac{dV^\varphi}{d\lambda} = -\cot(\vartheta)\left(V^\varphi \frac{du^\vartheta}{d\lambda} + V^\vartheta \frac{du^\varphi}{d\lambda}\right) \qquad (2)$$

mit $V^\vartheta(\vartheta_0, \varphi_0 = 0) = V_0^\vartheta$ und $V^\varphi(\vartheta_0, \varphi_0 = 0) = V_0^\varphi$ $\quad (*)$

a) <u>Längenkreise</u>: $\varphi = \varphi_0 \Rightarrow \dfrac{du^\varphi}{d\lambda} = 0$

$$(1) \Rightarrow \frac{dV^\vartheta}{d\lambda} = 0 \Rightarrow V^\vartheta(\vartheta) = c_1 \overset{(*)}{=} V_0^\vartheta$$

$$(2) \Rightarrow \frac{dV^\varphi}{d\lambda} = -\cot(\vartheta)\, V^\varphi \frac{du^\vartheta}{d\lambda}$$

$$\frac{dV^\varphi}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\cot(\vartheta)\, V^\varphi \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

$$\frac{dV^\varphi}{d\vartheta} = -\cot(\vartheta)\, V^\varphi$$

$$\Rightarrow V^\varphi(\vartheta) = \frac{c_2}{\sin(\vartheta)} \overset{(*)}{=} \frac{V_0^\varphi \sin(\vartheta_0)}{\sin(\vartheta)}$$

$$\boxed{V(\vartheta) = V_0^\vartheta\, \vec{e}_\vartheta + \frac{V_0^\varphi \sin(\vartheta_0)}{\sin(\vartheta)}\, \vec{e}_\varphi}$$

b) Breitenkreise: $\vartheta = \vartheta_0 \Rightarrow \frac{du^\vartheta}{d\lambda} = 0$ ✓

$$\left.\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{dV^\vartheta}{d\lambda} = \sin(\vartheta_0)\cos(\vartheta_0)\, V^\varphi \frac{du^\varphi}{d\lambda} \quad ✓ \\ (2) &\Rightarrow \frac{dV^\varphi}{d\lambda} = -\cot(\vartheta_0)\, V^\vartheta \frac{du^\varphi}{d\lambda} \quad ✓ \end{aligned}\right\}\ \text{gekoppelt}$$

Das DGL-System

$$\left| \begin{aligned} V^{\varphi\prime} &= -\cot(\vartheta_0) V^\vartheta =: -\frac{B}{A} V^\vartheta \\ V^{\vartheta\prime} &= \sin(\vartheta_0)\cos(\vartheta_0) V^\varphi =: AB\, V^\varphi \end{aligned} \right| \quad ✓ ✓$$

wird gelöst durch woher? Ai Vielleicht Lösung skizzieren

$$\left| \begin{aligned} V^\varphi(\varphi) &= c_2 \cos(\cos(\vartheta_0)\varphi) - \frac{c_1}{\sin(\vartheta_0)} \sin(\cos(\vartheta_0)\varphi) \\ V^\vartheta(\varphi) &= c_2 \sin(\vartheta_0) \sin(\cos(\vartheta_0)\varphi) + c_1 \cos(\cos(\vartheta_0)\varphi) \end{aligned} \right| \quad ✓ ✓$$

Die Anfangswerte (*) liefern

$$\left| \begin{aligned} V^\vartheta(0) &= c_1 = V_0^\vartheta \\ V^\varphi(0) &= c_2 = V_0^\varphi \end{aligned} \right| \quad ✓$$

$$\Rightarrow V(\varphi) = \left(V_0^\varphi \sin(\vartheta_0)\sin(\cos(\vartheta_0)\varphi) + V_0^\vartheta \cos(\cos(\vartheta_0)\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta$$
$$+ \left(V_0^\varphi \cos(\cos(\vartheta_0)\varphi) - \frac{V_0^\vartheta}{\sin(\vartheta_0)} \sin(\cos(\vartheta_0)\varphi)\right)\vec{e}_\varphi \quad ✓$$

5/5