3. Übungszettel zur Vorlesung **SS 2015**
Allgemeine Relativitätstheorie **Priv.-Doz. Dr. Ute Löw**
Abgabe bis Mo. 18. Mai 2015, 18:00 Uhr **Becker, Zeissner (Kasten 233)**

Aufgabe 1: Energie-Impulstensor **(5 Punkte)**

a) Was ist der Energie-Impuls-Tensor? Erläutern Sie kurz, was für eine Bedeutung die einzelnen Komponenten besitzen.

b) Es sei $F_{\mu\nu}$ der elektromagnetische Feldstärketensor. Berechnen Sie den Lorentzskalar $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ unter Verwendung der aus der Vorlesung bekannten Darstellung des Tensors als Funktion der elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}$ and $\vec{B}$.

c) Der Energie-Impuls-Tensor für das elektromagnetische Feld ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = \eta_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{1}$$

Es gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Berechnen Sie nun $\partial_\mu T^{\mu 0}$. Welches bekannte Erhaltungsgesetz der Elektrodynamik ergibt sich?

d) Der Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu}_{Fl} = (\rho + p)\, u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{2}$$

Dabei ist u^μ die relativistische Geschwindigkeit, ρ die Energiedichte und p der Druck. Für Materie gilt $p = 0$. Verwenden Sie erneut $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ und interpretieren Sie ihr Ergebnis für Materie in Abhängigkeit von ρ.

Aufgabe 2: Geodäten auf einer Kugel **(5 Punkte)**

Aus Aufgabe 2 von Blatt 2 ist Ihnen der Metrische Tensor und somit das Linenelement in Kugelkoordinaten bekannt:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{3}$$

Mit $r = R$ ergibt sich der metrische Tensor der Oberfläche einer Kugel mit Radius R.

a) Formulieren Sie die Geodätengleichungen.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung der Geodätischen Linie und stellen Sie die Lösung in der Form $\theta = f(\varphi)$ dar.

Hinweis: Lösen Sie die DGL für einen einfachen Spezialfall und machen Sie sich anschließend die Kugelsymmetrie zu Nutze.

Die Christoffel-Symbole für Kugelkoordinaten lauten:

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \tag{4}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta \qquad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{5}$$

Aufgabe 3: Die Robertson-Walker Metrik **(5 Punkte)**

Das Linenelement der Robertson-Walker Metrik ist gegeben durch:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right) \tag{6}$$

Dabei ist $a(t)$ der sogenannte Skalenfaktor ein Maß für die Ausdehnung des Universums und $k \in \{-1, 0, 1\}$ der Krümmungsparamter.

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \tag{7}$$