Aufgabe 2) Test der ART: Ablenkung von Lichtstrahlen

a) $$ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\vartheta - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

$$= \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2 \text{, denn } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr^2}{d\tau^2} - r^2\frac{d\varphi^2}{d\tau^2}$$ !! dt für Licht? $d\tau = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr^2}{d\varphi^2}\frac{d\varphi^2}{d\tau^2} - r^2\frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \stackrel{\wedge}{=} \frac{e^2}{r^2} \quad \Big| \cdot \left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$\frac{e^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} \rightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = e^2 - \frac{dr^2}{d\varphi^2}\frac{d\varphi^2}{d\tau^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right) l^2 \frac{1}{r^2}$$ Uff

$$\Leftrightarrow 0 = e^2 - \left(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}\right)^2 l^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right) l^2 \frac{1}{r^2}$$ fast f

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{e^2}{l^2} - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 - v^2(1-2Mv) \quad \text{mit } v = \frac{1}{r}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2}{l^2} - v^2(1-2Mv)$$ ✓ □

b) $$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2}{l^2} - v^2 + 2Mv^3 \quad \Big| \frac{d}{dv}$$ $f\,\frac{d}{dv}\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = 0!$ $\Big| \cdot \frac{d}{d\varphi}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{d^2}{d\varphi^2}v = -2v + 6Mv^2$$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}v + v = 3Mv^2$$ ✓ □

3/5

c) $\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = 0$ Harmonischer Oszillator

Folglich löst $v(\varphi) = \frac{1}{B}\sin\varphi$ die DGL.

Der Vorfaktor $1/B$ beschreibt dabei eine Stauchung oder Streckung von $v = 1/r$. $B = r_{min}$

d) $\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = 3\frac{M}{B^2}\sin^2\varphi$

$$\frac{d}{d\varphi^2}\left(\frac{\sin\varphi}{B} + \frac{M}{B^2}(1-\cos\varphi)^2\right) + \frac{\sin\varphi}{B} + \frac{M}{B^2}(1-\cos\varphi)^2$$

$$= -\frac{\sin\varphi}{B} + \frac{2M}{B^2}\cos\varphi - 2\frac{M}{B^2}\cos(2\varphi) + \frac{\sin\varphi}{B} + \frac{M}{B^2} - 2\frac{M}{B^2}\cos\varphi + \frac{M}{B^2}\cos^2\varphi$$ ✓

$$= \frac{M}{B^2}\left(\cos^2\varphi - 2\cos(2\varphi) + 1\right)$$ ✓

$$= \frac{M}{B^2}\left(\cos^2\varphi - 2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi + 1\right)$$ ✓

$$= \frac{M}{B^2}\left(2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + 1\right)$$ ✓

$$= 3\frac{M}{B^2}\sin^2\varphi$$ ✓ $\square$

3/6