SRT: K ruhend mit $\vec{x}, t$; K' mit v und $\vec{x}', t'$; v in x-Richtung: $ct'=\gamma(ct-\beta x)$, $x'=\gamma(x-\beta ct)$, $y'=y$, $z'=z$; $\beta=v/c$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\gamma & \pm\beta\gamma & 0 & 0\\ \pm\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

von K→K': $-\beta\gamma$; beliebige v-Richtung: $\Lambda^0_i=-\gamma v_i/c$, $\Lambda^i_0=-\gamma v_i/c$, $\Lambda^0_0=\gamma$, $\Lambda^i_j=\delta_{ij}+v_iv_j(\gamma-1)/\vec{v}^2$

von K'→K: $+\beta\gamma$; Geschwindigkeitsvektor: $v^\mu=(cdt,dx,dy,dz)^T$

Längenkontraktion: $l'=l/\gamma$, Zeitdilatation: $t'=t/\gamma$, Geschwindigkeitsaddition: $w'=(w-v)/(1-wv/c^2)$

Rel. Dynamik: BGL $f^\alpha=m\,d^2x^\alpha/d\tau^2$; Kraftkomponente betrachtet aus K': $f^0=\gamma/c\,\vec{v}\vec{F}$ (cf^0: auf Teilchen übertragene Leistung in K'); $\vec{f}=\vec{F}+(\gamma-1)\vec{F}\cdot\vec{v}/\vec{v}^2\cdot\vec{v}$; Kraft längs Bewegungsrichtung geboostet: $\vec{f}=\vec{F}_\perp+\gamma\vec{F}_\parallel$

Rel. E-Dynamik: Maxwell: inh. $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j^\nu$, hom. $\partial_\alpha\tilde{F}^{\alpha\beta}=0$ mit 4er-Strom $j^\mu=(c\rho,j^1,j^2,j^3)^T$, geboostet: Λj^μ

Bewegung von Ladung in em. Feld: $dp^\mu/d\tau=f^\mu=q/c\cdot F^\mu_{\ \nu}\,dx^\nu/d\tau$; 4er-Impuls: $p^\alpha=(E/c,\vec{p})$; $E=mc^2\gamma$; $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$

$F_{\mu\nu}=\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\gamma}F^{\beta\gamma}$; E-p-Beziehung: $E^2=m^2c^4+c^2\vec{p}^2$

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{bmatrix},\quad F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{bmatrix};\quad \tilde{F}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c\\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c\\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0\end{bmatrix}$$

Verhalten von E', B' bei Boost in x-Richtung: $\vec{E}'=\begin{pmatrix}E_x\\ \gamma(E_y-\beta B_z)\\ \gamma(E_z+\beta B_y)\end{pmatrix}$; $\vec{B}'=\begin{pmatrix}B_x\\ \gamma(B_y+\beta E_z)\\ \gamma(B_z-\beta E_y)\end{pmatrix}$

Kovariante Ableitung: $g_{\mu\nu;\lambda}=\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda-\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma}$

$V_{\mu;\rho}=\partial V_\mu/\partial x^\rho-\Gamma^\nu_{\rho\mu}V_\nu$ Ableitung eines kovarianten Vektors

$V^\mu_{;\rho}=\partial V^\mu/\partial x^\rho+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}V^\sigma$ Ableitung eines kontravarianten Vektors

$V^{\mu\alpha}_{;\nu}=\partial V^{\mu\alpha}/\partial x^\nu+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}V^{\sigma\alpha}+\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}V^{\mu\sigma}$ " kontravarianter Tensor

Äquivalenzprinzip:

1. Träge Masse <=> Schwere Masse; 2. Gravitationskraft <=> Trägheitskraft
3. In lokalen IS gelten SRT-Gesetze ohne Gravitation; Massepunkt bewegt sich auf Geraden $\xi^\alpha=a^\alpha\tau+b^\alpha$, $d^2\xi^\alpha/d\tau^2=0$

Geodätengleichung: $d^2x^\mu/d\tau^2=-\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\,dx^\lambda/d\tau\cdot dx^\nu/d\tau$ (Trafo in lokale Koordinaten)

Christoffelsymbole: $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$; $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho}+\partial_\nu g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\nu})$

Newtonscher Limes: $g_{00}(\vec{r})=1+2\Phi(\vec{r})/c^2$

$\mathbb{R}^3$: Kugelkoordinaten: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$; $\Gamma^r_{\vartheta\vartheta}=-r$, $\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r\sin^2\vartheta$, $\Gamma^\vartheta_{r\vartheta}=1/r$

→ $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,r^2,r^2\sin^2\vartheta)$; $\Gamma^\varphi_{r\varphi}=1/r$, $\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}=\cot\vartheta$, $\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}=-\sin\vartheta\cos\vartheta$

$\mathbb{R}^3$: Zylinderkoordinaten: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ → $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,r^2,1)$; $\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r$, $\Gamma^\varphi_{r\varphi}=1/r$, $\Gamma^z_{\mu\nu}=0$

Paralleltransport: DGL $dV^\mu/d\tau+\Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\rho\,dx^\nu/d\tau=0$ → Änderung eines an Kurve verschobenen Vektors

$d/d\tau(g_{kl}V^k dx^l/d\tau)=g_{kl;s}\,dx^l/d\tau\,dx^s/d\tau=0$ Länge eines Vektors bleibt bei Paralleltransport erhalten

$d/d\tau(g_{kl}V^kW^k)=0$ Paralleltransport entlang geschlossenen Weges nicht notwendigerweise gleich

Riemannscher Krümmungstensor: $R^\lambda_{\ \mu\nu\alpha}=\partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}+\Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\eta}-\Gamma^\eta_{\mu\alpha}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}$

→ $R_{\lambda\mu\nu\alpha}=g_{\lambda\sigma}R^\sigma_{\ \mu\nu\alpha}=\frac{1}{2}[\partial_{\alpha\mu}g_{\lambda\nu}-\partial_{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}-\partial_{\nu\mu}g_{\lambda\alpha}+\partial_{\nu\lambda}g_{\mu\alpha}]+g_{\eta\sigma}[\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}-\Gamma^\eta_{\alpha\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}]$

Symmetrie: $R_{\lambda\mu\nu\alpha}=R_{\nu\alpha\lambda\mu}$; Antisymmetrie: $R_{\lambda\mu\nu\alpha}=-R_{\mu\lambda\nu\alpha}$, $R_{\lambda\mu\nu\alpha}=-R_{\lambda\mu\alpha\nu}$, $R_{\lambda\mu\nu\alpha}=R_{\mu\lambda\alpha\nu}$

Zyklische Vertauschung: $R_{\lambda\mu\nu\alpha}+R_{\lambda\nu\alpha\mu}+R_{\lambda\alpha\mu\nu}=0$; Unabhängige Komponenten in Abh. der Dimension: $c_n=n^2(n^2-1)/12$

Gaußsche Krümmung in 2D: $K=R_{1212}/\det g$; $\vec{x}=\vec{x}(K_1,K_2)$ → $d^2\vec{x}/ds^2=K_n\vec{n}+K_g(\vec{n}\times d\vec{x}/ds)$, $K_n\hat{=}$ normale Krümmung

Ricci-Skalar: $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ (in 2D: $R=2R_{1212}/\det g$); Krümmung in Abh. von R: $R=-2K_g$, $R_{2112}=-R_{1212}$

Bianchi-Identität: $R_{\lambda\mu\nu\alpha;\eta}+R_{\lambda\mu\alpha\eta;\nu}+R_{\lambda\mu\eta\nu;\alpha}=0$; Ricci-Tensor: $R_{\mu\nu}=R^\lambda_{\ \mu\lambda\nu}=g^{\lambda\alpha}R_{\alpha\mu\lambda\nu}$; in 2D: $R_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}R_{1212}/\det g$

Einsteinsche Feldgleichung: $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\ |\cdot g^{\mu\nu}$ <=> $R=\frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\mu$ (Spur von $T_{\mu\nu}$)

Allg. Form radialsym. stationärer Metrik: $d\tau^2=B(r)dx^{0\,2}-A(r)dr^2-r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2)$; Schwarzschildmetrik: $B(r)=1-\frac{2GM}{c^2r}$, $A=1/B$

Schwarzschildradius: Singularität ⇒ $R_s=2GM/c^2$; Schwarzschild: Massepunkt im Ursprung ⇒ $T_{\mu\nu}=0$ (für $\vec{x}\neq 0$)

Christoffelsymbole der Schwarzschildmetrik: ⇒ $R_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\rho_\rho)=0$

$\Gamma^r_{rr}=A'/2A$, $\Gamma^r_{\vartheta\vartheta}=-r/A$, $\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r\sin^2\vartheta/A$, $\Gamma^r_{tt}=B'/2A$, $\Gamma^t_{rt}=\Gamma^t_{tr}=B'/2A$, $\Gamma^\vartheta_{r\vartheta}=\Gamma^\vartheta_{\vartheta r}=-1/r$, $\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}=-\sin\vartheta\cos\vartheta$, $\Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=1/r$, $\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}=\Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta}=\cot\vartheta$

Ricci-Tensor: $R_{\mu\nu}=\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}-\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}-\Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta}$; Schwarzschild: $R_{rr}=B''/2B-\frac{1}{4}B'/B\cdot(B'/B+A'/A)-\frac{1}{r}\cdot A'/A$

$R_{\vartheta\vartheta}=-1+\frac{r}{2A}(B'/B-A'/A)+1/A$, $R_{\varphi\varphi}=\sin^2\vartheta\,R_{\vartheta\vartheta}$, $R_{tt}=-\frac{1}{2}B''/A+\frac{1}{4}B'/A(B'/B+A'/A)-\frac{1}{r}B'/A$

BGL Schwarzschild ⇒ Bewegung in einer Ebene ⇒ aus Geodätengleichung ergibt sich Konstante der Bewegung: $l=r^2\,d\varphi/d\lambda=\mathrm{const.}$ ($\vartheta=\pi/2$) → $l\hat{=}$ Drehimpuls pro Masse

Energie-Impulstensor: $c=1$, $T^{00}(x)=\sum_n E_n\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_n(t))$ Energiedichte

$T^{0i}(x)=\sum_n p^0_n\,dx^i_n/dt\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_n(t))$ ~~Impulsdichte~~ Energiestromdichte

$T^{ij}(x)=\sum_n p^i_n\,dx^j_n/dt\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_n(t))$ Impulsstromdichte

$T^{i0}(x)=\sum_n p^i_n\,dx^0_n/dt\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_n(t))$ Impulsdichte

In E-Dynamik: $T^{00}=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$, $T^{0i}=\frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})=T^{i0}$, $T^{ij}=-\frac{1}{4\pi}(E^jE^i+B^iB^j-\frac{1}{2}\delta^{ij}(\vec{E}^2+\vec{B}^2))$

Verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung: $\partial_tT^{00}+\partial_iT^{0i}=0$, $\partial_t\rho+\vec{\nabla}\vec{j}=0$; Perfekte Flüssigkeit $T_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(\rho\,p\,p\,p)$

EM-Tensor: $T^{\mu\nu}_{em}=g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

Kurzfragenwissen: • Kosmologische Konstante in Einsteingleichungen: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$
→ Λ sehr klein → weg in Newton → Interpretation als konstante Massen-/Energiedichte des Vakuums
→ $\Lambda \approx 10^{-26} \cdot 1{,}9\, m/kg \cdot \varrho_{vac}$

- Gesetze der ART gelten in jedem Koordinatensystem → realisiert durch Gesetze in kovarianter Form → Koordinatentrafos
- Trafogesetz für Tensor mit m kov., n kontr. Indices: $T'^{\mu_1' \dots \mu_n'}_{\nu_1' \dots \nu_m'} = \Lambda^{\mu_1'}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu_n'}_{\mu_n} \Lambda^{\nu_1}_{\nu_1'} \dots \Lambda^{\nu_m}_{\nu_m'} T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$
- Krümmungstensor weg bei flacher Raumzeit (wenn Trafo in euklidische Metrik möglich)
- Periheldrehung in ART: rosettenartig; in Newton: feste Ellipse
- Singularitäten in Schwarzschildmetrik: Echte: $r = 0$, Hebbare (Koordinatenbedingte): $r = R_S$
- Prinzip der Kovarianz: Gesetze in Form von Riemann-Tensorgleichungen, Gültigkeit in lokalen IS ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) muss SRT-Gesetzen folgen
- Minkowski-Regel: a) $x_\mu x^\mu = 0 \rightarrow ct = |\vec{x}| \rightarrow$ Lichtartig: Ereignis kann mit $v = c$ erreicht werden
  b) $x_\mu x^\mu < 0 \rightarrow ct < |\vec{x}| \rightarrow$ zeitartig: c erreicht Ereignis nicht, c) $x_\mu x^\mu > 0 \rightarrow ct > |\vec{x}| \rightarrow$ raumartig: $v < c$ erreicht Ereignis
- Die Eigenzeit τ ist immer die kürzeste Zeit! ($\gamma > 1$)

Zusätze: Allg. Koordinatentrafo: $dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\varrho} dx^\varrho$; Metriktrafo: $g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$
Nützlich: $\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\lambda} = \eta_\mu{}^\lambda = \delta_\mu{}^\lambda$, $\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \eta^\mu_\mu = 4$
Beweis der Lorentzinvarianz der Kontraktion: $x^\mu x_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \Lambda^\sigma_\mu x'_\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu g^{\alpha\nu} x'_\alpha \Lambda^\sigma_\mu g_{\beta\sigma} x'^\beta = \dots = x'^\mu x'_\mu$

Ultimativer Zusammenhang: $\frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{d\vartheta}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}$

Minkowski-Raum: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$; Riemann-Raum: $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$
Zusätzliche Bedingung der Geodätengleichung: $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow c^2 = g^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$
Robertson-Walker-Metrik: $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)$
$k = 0$ flach, $k = -1$ Sattelpunktmetrik, $k = 1$ Kugel; $\varrho = \omega p \rightarrow p = 0, \omega = 0$: Materie, $\omega = \frac{1}{3}$: Strahlung
$\omega = -1$: Vakuum; Expansionsparameter (Hubble): $H < \dot{a}/a$
~~Eigenstan~~ Eigenabstand Beobachter ↔ R_S: $\varrho(r) = \int_{R_S}^{r} \sqrt{g_{rr}(r')}\, dr'$
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3/kg s^2$

Mathematik: Kugelkoordinaten: $\vec{r} = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)^T$
4D: $\vec{r} = (\sin\alpha \sin\vartheta \cos\varphi, \sin\alpha \sin\vartheta \sin\varphi, \sin\alpha \cos\vartheta, \cos\alpha)^T$
Ableitungen:
$\partial_x \sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$
$\partial_x \cos^2(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
$\partial_x \cot(x) = -\csc^2(x)$, wobei $\csc(x) = 1/\sin(x)$
$\partial_x \sin(x)\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0