A1)

Maik Becker
Helena Nawrath
Kevin Sedlaczek
Gruppe 2

a) Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\alpha\beta}$ tritt als Quellterm in den relativistischen Feldgleichungen der Gravitation auf. Er ist definiert als:

1	2	3	Σ
5	1	4,5	10,5

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} w & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix}$$

Dabei beschreiben die einzelnen Komponenten: $(i,k = 1,2,3)$

T^{00}: den Energiefluss in zeitartige Richtung (raumart. 3D-Vol-El.)

T^{i0}: Energiestromdichte in räuml. i-Richt.

T^{0k}: den Impulsfluss der k-ten Komp. d. Imp. in zeitart. Richt.

T^{ik}: den Impulsfluss der k-ten Komp. d. Imp. in räuml. i-Richt.

1/1

b) $$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}$$
$$= -E^{1^2} - E^{2^2} - E^{3^2} - E^{1^2} + B^{3^2} + B^{2^2} - E^{2^2} + B^{3^2} + B^{1^2} - E^{3^2} + B^{2^2} + B^{1^2}$$
$$= -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad ✓ \; 1/1$$

c) Aus $T^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ folgt:

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = \underbrace{\partial_\mu \left(\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{0\beta}\right)}_{①} - \frac{1}{4} \underbrace{\partial_\mu \eta^{\mu 0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}_{②} = 0$$

① $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{0\beta}\right)$ (liefert aufgrund der Minkowski-Metrik nur Beiträge für $\alpha=\beta$)

$\mu = 0$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(1\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-E^1)(-E^1) - 1(-E^2)^2 - 1(-E^3)^2\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2}$$

$\mu = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1(-B^3)(-E^2) - 1\cdot B^2(-E^3)\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(-B^3E^2 + B^2E^3\right)}$$

$\mu = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(1\cdot E^2\cdot 0 - 1\cdot B^3(-E^1) - 1\cdot 0 - 1(-B^1)(-E^3)\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x^2}\left(B^3E^1 - B^1E^3\right)}$$

$\mu = 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left(0 - 1\cdot(-B^2)(-E^1) - 1\cdot(B^1)(-E^2) - 1\cdot 0\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x^3}\left(B^1E^2 - B^2E^1\right)}$$

② $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\eta^{\mu 0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)$ (liefert aufgrund der Minkowski-Metrik nur Beiträge für $\mu = 0$)

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(1\cdot\left(2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)\right)\right) = \boxed{\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right)}$$

$$① = \boxed{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2 + \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})}$$

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2 - \vec{\nabla}\cdot\vec{S} - \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)}_{\omega}$$ (Satz von Poynting) ✓

schön! 1,5/1,5

d) $T_{Fl}^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}$

Für Materie gilt:

$T_m^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ ✓ mit $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt:

$$\partial_\mu T_m^{\mu\nu} = \partial_\mu (\rho u^\mu u^\nu) = 0$$

$$0 = \partial_\mu T_m^{\mu 0} = \partial_\mu \rho u^\mu u^0$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\rho v^\mu \cdot c)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^0} (\rho c^2) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i \cdot c)$$
$$0 = c \left(\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) \right)$$ ✓ 1,5 I.A. T

Dies ergibt eine Kontinuitätsgleichung für die Masse. Solltet ihr eigentlich mit $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ machen

5/5