## Aufgabe 1 Kurzfragen (10 Punkte)

**a)** In welchen Koordinatensystemen gelten die Gesetze der ART? Wie wird das erreicht? (1P)

Jn jedem. Durch Formulierung ~~in tea~~ der Gesetze in Koordinaten unabhängiger Form (Tensorschreibweise)

1

**b)** Geben Sie das Transformationsgesetz für einen Tensor mit $m$ kovarianten und $n$ kontravarianten Indizes an. (1P)

$$T^{\mu_1' \dots \mu_m'}{}_{\nu_1' \dots \nu_n'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu_m'}{}_{\mu_m} \Lambda_{\nu_1'}{}^{\nu_1} \cdots \Lambda_{\nu_n'}{}^{\nu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$$

1

**c)** Leiten Sie mittels *Komma-zu-Semikolon*–Regel die Geodätengleichung ab. (1P)

~~Geodäte im flachen Raum: $(\partial_\mu)^2 x$~~

0

**d)** Wann verschwindet der Krümmungstensor? Wann verschwindet der Riemanntensor? Wo verschwindet z.B. der Riemann-, aber nicht der Krümmungstensor? (1P)

Krümmungstensor verschwindet bei lok. flacher Raumzeit

Riemann tensor verschwindet bei flacher Raumzeit.

0.5

**e)** Wie gross ist die Gravitationsrotverschiebung zwischen zwei Punkten in unterschiedlicher Entfernung einer Schwarzschildmasse? (1P)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \cancel{g} \frac{a_g r}{c^2}$$

$a_g$ ergibt sich aus der Masse

0

**f)** Skizzieren Sie die Bahn des Merkur in der ART und zum Vergleich in der Newtonschen Gravitation. (1P)

ART


Perihel verschiebt sich pro Umlauf

Newton

feste Ellipse

(1)

**g)** Welche Singularitäten findet man in der Schwarzschildmetrik? Wie unterscheiden sie sich? (1P)

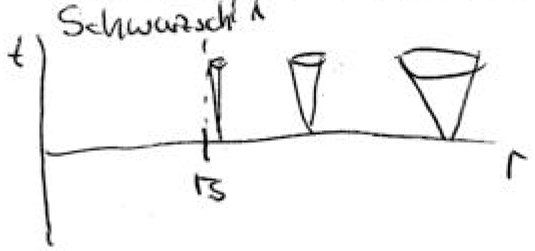
$r = 0$ „echte" Singularität, da $R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \to \infty$ für $r \to 0$

(1)

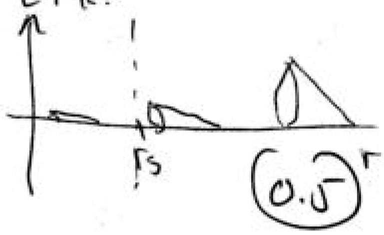
$r = 2GM$ Koordinatensingularität („schlechtes Koordinatensystem)

**h)** Skizzieren Sie die Lichtkegel außerhalb, auf und innerhalb des Schwarzschildradius in Schwarzschild- und Eddington-Finkelstein–Koordinaten. Was ist der wesentliche Unterschied? (1P)

Schwarzschild




EFK:




(0.5)

Schwarzschild: Beobachter sieht nie jmd. hereinfallen

EFK: Erreicht innen von $r_s$, kommt nicht mehr raus

**i)** Wodurch unterscheiden sich die Metrik einer massiven und einer Hohlkugel mit Radius $R$ und Gesamtmasse $M$ für $r > R$ und $r < R$? (1P)

$r > R$ gar nicht, beide sind quasi punktförmig
$\Rightarrow$ Schwarzschildmetrik

$r < R$: Schwarzschildmetrik, da Vakuum (Hohlkugel)
: keine Schwarzschildmetrik, da kein Vakuum (Vollkugel)

(1)

**j)** Was besagt das *No-Hair*–Theorem? (1P)

Das nach außen betrachtet jede Masse wie eine Punktmasse aussieht und deshalb die kugelsymmetrische Schwarzschildmetrik gilt

(0)

[redacted] [redacted]

## Aufgabe 2 Die Poincaré–Halbebene (15 Punkte)

Im Folgenden soll die 2–dimensionale Metrik

$\Sigma = 4{,}25/15$

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right) \tag{1}$$

betrachtet werden. Hierin ist $a$ eine (reell–wertige) Konstante und $y > 0$.

**a)** Berechnen Sie den Abstand zwischen zwei Punkten $y_a$ und $y_b$ ($> y_a$) für konstante Koordinate $x$! Wie interpretieren Sie ihr Ergebnis für $y_a \to 0$? (2 P)

**b)** Berechnen Sie alle nicht verschwindenden Christoffel–Symbole! (4 P)

**c)** Stellen Sie die Geodätengleichungen für $x(\lambda)$ und $y(\lambda)$ als Funktion des affinen Parameters $\lambda$ auf! (2 P)

**d)** Berechnen Sie aus der Geodätengleichung für $x(\lambda)$ eine Konstante der Bewegung $\kappa$! (2 P)

*Tipp: Benutzen Sie die Relation* $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{-1}\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\ln\frac{df(x)}{dx}$ !

**e)** Berechnen Sie alle Komponenten des Ricci–Tensors, sowie den Ricci–Skalar! Kommentieren Sie auch kurz Ihr Ergebnis für den Ricci–Skalar! (5 P)

*Tipp: Benutzen Sie die Relation* $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = |g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu|g|^{\frac{1}{2}}$, *worin* $|g|$ *die Determinante der Metrik ist!*

a) $\cancel{ds^2 = \frac{a^2}{dy}}$ $\quad \Delta s = \int_{y_a}^{y_b} \sqrt{\frac{a^2}{y^2}(x^2 + dy^2)}$

$=$

(**) siehe letzte Seite der Aufgabe

b) $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2/y^2 & 0 \\ 0 & a^2/y^2 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} y^2/a^2 & 0 \\ 0 & y^2/a^2 \end{pmatrix}$

$|g| = \frac{a^4}{y^4}$

$1 = x$
$2 = y$

$\Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{-1/2} \partial_y \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{1/2} = \frac{y^2}{a^2}\,\partial_y\left(\frac{a^2}{y^2}\right) = -2\,\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{a^2}}\,\frac{\cancel{a^2}}{y^3}$

$= -\frac{2}{y}$

$\Gamma^x_{xx} = \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{-1/2} \partial_x \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{1/2} = 0$

$$\Gamma^{y}_{yy} = \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{-1/2} \partial_y \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{1/2} = -\frac{2}{y}$$

$$\Gamma^{y}_{xy} = \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{-1/2} \partial_x \left(\frac{a^4}{y^4}\right)^{1/2} = 0 = \Gamma^{y}_{yx} \quad (*)$$

siehe letzte Seite der Aufgabe

Nicht verschw. Christoffelsymbole:

$$\Gamma^{y}_{yy} = \Gamma^{x}_{xy} = \Gamma^{x}_{yx} = -\frac{2}{y} \quad = -\Gamma^{y}_{xx} = \frac{2}{y}$$

0P

c) Geodäte: $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \Gamma^{x}_{xy} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + \Gamma^{x}_{yx} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{d\lambda^2} - \frac{4}{y} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} = 0$$

0,5P

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \Gamma^{y}_{yy} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + \Gamma^{y}_{xx} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} - \frac{2}{y} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \frac{2}{y} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

d) $x'' - \frac{4}{y} x' y' = 0 \quad | : x'$

$$\Leftrightarrow \frac{x''}{x'} - \frac{4y'}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''}{x'} = \frac{4y'}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\ln\left(x'\right)\right) = \frac{4y'}{y} \quad \Big| \int d\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(x') = 4\ln(y)$$

0,5 P

$$\Leftrightarrow x' = e^{4\ln(y)} = y^4$$

---

$$x'' - \frac{4}{y}x'y' = 0 \quad | : x' \qquad\qquad x' = \frac{d}{d\lambda}x(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''}{x'} - 4\frac{y'}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\ln\left(x'\right)\right) = 4\frac{y'}{y} \quad \int d\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(x') = 4\ln(y) \qquad (\text{da } y>0)$$

$$\Leftrightarrow x' = y^4$$

e) $\cancel{R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu}} = R^\delta{}_{\sigma\delta\nu} = \partial_\delta \Gamma^\delta_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\delta_{\delta\sigma} + \Gamma^\delta_{\delta\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\delta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\delta\sigma} = R_{\sigma\nu}$

$$R_{xx} = \underbrace{\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{xx}}_{0} - \underbrace{\partial_x \Gamma^\sigma_{\sigma x}}_{0} + \underbrace{\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{xx}}_{0} - \underbrace{\Gamma^\sigma_{x\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma x}}_{0} = 0$$

$$R_{yy} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{yy} - \partial_y \Gamma^\sigma_{\sigma y} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{yy} - \Gamma^\sigma_{y\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma y}$$

$$= \partial_y\left(-\frac{2}{y}\right) - \partial_y\left(-\frac{2}{y}\right) - \partial_y\left(-\frac{2}{y}\right) + \left(-\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y} - \frac{2}{y}\right)$$

$$- \left(-\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y}\right) - \left(-\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y}\right) = -\partial_y\left(-\frac{2}{y}\right)$$

$$= -\frac{2}{y^2}$$

$$\cancel{R_{xy}} = R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}$$

$$R_{xx} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{xx} - \partial_x \Gamma^\lambda_{x\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{xx} - \Gamma^\lambda_{x\alpha}\Gamma^\alpha_{x\lambda} = 0$$

$$= \cancel{\partial_y \Gamma^1} \; \partial_y\left(\frac{2}{y}\right) - \left(\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y}\right) - \left(-\frac{2}{y}\right)\left(\frac{2}{y}\right) = -\frac{2}{y^2}$$

$$R_{yy} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{yy} - \partial_y \Gamma^\lambda_{y\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{yy} - \Gamma^\lambda_{y\alpha}\Gamma^\alpha_{y\lambda}$$

$$= \partial_y\cancel{\left(-\frac{2}{y}\right)} - \partial_y\left(\cancel{-\frac{2}{y}} - \frac{2}{y}\right) + \cancel{\left(-\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y} - \frac{2}{y}\right)}$$

$$\cancel{-\left(-\frac{2}{y}\right)\left(-\frac{2}{y} - \frac{2}{y}\right)} = -\partial_y\left(-\frac{2}{y}\right) = -\frac{2}{y^2}$$

$$R_{xy} = \underbrace{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{xy}}_{0} - \underbrace{\partial_x \Gamma^\lambda_{x\lambda}}_{0} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{xy}}_{0} - \underbrace{\Gamma^\lambda_{y\alpha}\Gamma^\alpha_{x\lambda}}_{0}$$

$$= 0 \qquad (\checkmark)$$

$$R_{yx} = \underbrace{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{yx}}_{0} - \underbrace{\partial_x \Gamma^\lambda_{y\lambda}}_{0} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{yx}}_{0} - \underbrace{\Gamma^\lambda_{x\alpha}\Gamma^\alpha_{x\lambda}}_{0}$$

$$= 0$$

$$(R_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad 1,25\,P$$

$$= g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \left(\frac{y^2}{a^2}\right)\left(-\frac{2}{y^2}\right) = \cancel{-\frac{2}{a^2}} = -\frac{4}{a^2}$$

Das Ricci-Skalar ~~muss nicht verschwinden~~ zeigt an, dass kein flacher Raum vorliegt. Dies war zu erwarten, da auch der Ricci-Tensor nicht verschwindet und die Metrik ~~eine Vorzug~~ sich bei Bewegung in y ändert.

$$(*) \quad \Gamma^y_{xx} = \frac{1}{2} g^{yy} \left( \underbrace{\partial_x g_{xy}}_{0} + \underbrace{\partial_x g_{yx}}_{0} - \partial_y g_{xx} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} \left( -\partial_y \frac{a^2}{y^2} \right) = + \frac{2}{y}$$

$$\Gamma^x_{yy} = \frac{1}{2} g^{xy} \left( \partial_y g_{yx} + \partial_y g_{xy} - \partial_x g_{yy} \right) = 0$$

$(**)$ a) $x = \text{const} \Leftrightarrow \quad ds^2 = \frac{a^2}{y^2} dy^2 \Leftrightarrow \quad ds = \frac{a}{y} dy$

$$\Rightarrow \Delta s = \int_{y_a}^{y_b} \frac{a}{y} dy = \left[ a \ln(y) \right]_{y_a}^{y_b} \qquad (\text{da } y > 0)$$

$$= a \ln(y_b) - a \ln(y_a) \qquad 2\,P$$

$$= a \ln\left(\frac{y_b}{y_a}\right)$$

$\rightarrow$ Für $y_a \to 0$ geht der Abstand zwischen den Ereignissen gegen unendlich

## Aufgabe 3 — Das FRW Universum — (10 Punkte)

Die Robertson–Walker Metrik mit einem Skalenfaktor $a(t)$ ist gegeben als

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right], \tag{2}$$

wobei $k$ Informationen über die Krümmung der Raumzeit liefert.
Für alle weiteren Überlegungen nehme man eine *flache* ($k = 0$) Raumzeit an.
Die Friedmann–Gleichungen sind gegeben durch

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t), \qquad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho(t) + 3p(t)\right] \tag{3}$$

unter Annahme des Energie–Impuls–Tensors einer idealen, isotropen Flüssigkeit.
Dabei kann eine dieser Gleichungen durch die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t)\left[\rho(t) + p(t)\right] = 0 \tag{4}$$

ersetzt werden.
Hier ist $\rho$ die gesamte Energiedichte, $p$ der Druck und

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{5}$$

der Hubble Parameter. Weiterhin definieren wir den *comoving Hubble horizon* $d_{\mathrm{H}}$ über

$$d_{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{a(t)H(t)}. \tag{6}$$

**a)** Berechnen Sie $w$ in der Zustandsgleichung $p = w\rho$ für konstante Energiedichte! Was bedeutet eine solche für den Hubble Parameter? (2 P)

**b)** Bestimmen Sie für ein nicht statisches Universum mit konstanter Energiedichte die Zeitabhängigkeit $a(t)$ des Skalenfaktors! (2 P)

**c)** Zeigen Sie, dass in einem expandierenden Universum mit konstanter Energiedichte der *comoving Hubble horizon* $d_{\mathrm{H}}$ mit der Zeit $t$ abnimmt! (3 P)

**d)** Zeigen Sie, dass die Größe

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{a(t')} \tag{7}$$

der größtmöglichen Distanz $r_{\max}(t)$ entspricht, die ein radial propagierendes Photon zum Zeitpunkt $t$ zurückgelegt haben kann!
Wie interpretieren Sie diese Distanz physikalisch? (3 P)

a) $p = \omega \rho$ $\Leftrightarrow$ $\dot{\rho} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\rho = \text{const.}$

$\Rightarrow$ $3H(t)\underbrace{(\rho + \omega\rho)}_{=0} = 0$ Muss für alle Zeiten gelten

$\Leftrightarrow$ $\rho + \omega\rho = 0$ $\Leftrightarrow$ $1 + \omega = 0$ $\Leftrightarrow$ $\omega = -1$ ✓ 2P

Der Hubble Parameter erhöht eine ~~bet~~ wachsende Beschleunigung
→ Universum breitet sich aus

~~$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3\rho) \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho$~~

~~$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow$ Quotient muss zeitlich unabhängig sein~~ DGL zweiter Ordnung $\Rightarrow$ ~~$\ddot{a}(t) = a(t) \neq 0$~~

~~$\ddot{a}(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho\, a(t) \Leftrightarrow a(t)$ schwingt $\Rightarrow$ Hubble schwingt auch~~

b) ~~$\ddot{a}(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho\, a(t)$~~

~~Ansatz: $a(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$~~

~~$\ddot{a}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\sin(\omega t)$~~

~~$3H(t)($~~

b) $\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho - 3\omega\rho) = \frac{8\pi G}{3}\rho$

$\ddot{a}(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho$

Ansatz: $a(t) = e^{\lambda t}$. $\dot{a}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{a}(t) = \lambda^2 a(t)$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 a(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho\, a(t)$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}$ ✓ 1,75 P

$\Rightarrow a(t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\,t}$ A aus A. Bed.

$\Rightarrow$ a(t) wächst mit der Zeit

c) $$d_{H(t)} = \frac{1}{a(t)\ H(t)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{a(t)}\ \frac{\dot a(t)}{\cancel{a(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\dot a(t)}$$

$$a(t) = A e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t}$$

$$\dot a(t) = A \cdot \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho} \cdot e^{\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}\, t}$$

$$\Rightarrow \quad d_{H(t)} = \frac{1}{\underbrace{A \cdot \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{e^{\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}\, t}}_{\to\infty \text{ für } t\to\infty}}$$

3P

$$\lim_{t\to\infty} d_{H(t)} = 0$$

but $\dot d_H < 0$ is more direct

$\Rightarrow$ ~~Faktor~~ $d_H$ nimmt mit der Zeit ab

d) Metrik: $(k=0)$

$$\underbrace{ds^2}_{\substack{\text{lichtartige} \\ \text{Teilchen} \\ =0}} = -dt^2 + a^2(t)\left(dr^2 + \underbrace{r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta\, d\varphi^2}_{\substack{\text{radial propagierend} \\ =0}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -dt^2 + a^2(t)\,dr^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$\Rightarrow$ Größtmögliche Strecke:

$$\cancel{s_{max}} \quad r_{max}(t) = \int_0^{r_{max}} dr \qquad \text{Sub: } dr = \frac{dt}{a(t)}$$

$$r_{max} = t_{max}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{t_{max}} \frac{dt}{a(t)} \quad \text{q.e.d.}$$

Das Photon bewegt sich mit konstanter Lichtgeschwindigkeit. Daher wäre zu erwarten, dass sich die Strecke direkt aus der Zeit durch $s = ct$ ergibt. Da das Universum aber expandiert, und damit die zurückgelegte Strecke pro Zeit gemessen an der „ursprünglichen" Ausdehnung kleiner wird, muss das Integral angewandt werden. Insgesamt ergibt sich dadurch eine Rotverschiebung. X

2.25 P