Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 1: Kurzfragen **(20 Punkte)**

Antworten Sie kurz auf die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antworten!

a) Ein elektrischer Dipol befinde sich in einem externen Feld. Was geschieht mit dem elektrischen Dipol, wenn das Feld

(1) ein homogenes magnetisches Feld ist?

(2) ein homogenes elektrisches Feld ist?

(3) ein inhomogenes magnetisches Feld ist?

(4) ein inhomogenes elektrisches Feld ist?

(2 Punkte)

b) Zwischen die Platten eines geladenen Plattenkondensators werde

(1) ein Vakuum

(2) ein Metall, das die Kondensatorplatten nicht berührt

(3) ein Isolator

gebracht. Skizzieren Sie die Beträge der elektrischen Spannung und das elektrische Feldes als Funktion des Ortes zwischen den beiden Platten. Erklären Sie kurz, weshalb sich die Fälle (2) und (3) unterscheiden. (2 Punkte)

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

c) Was sind Quellen des elektrischen Feldes und welche Eigenschaften hat das elektrische Feld? (2 Punkte)

d) Wie funktioniert ein Drehspulinstrument zur Messung eines elektrischen Stromes? Wie verhindert man lange Einschwingzeiten bei der Anzeige? (2 Punkte)

e) Wie funktioniert eine Hall-Sonde? Ergänzen Sie Ihre Erklärung um eine Skizze. (2 Punkte)

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ______________________

f) Welches ist der erste nichtverschwindende Beitrag in der Multipolentwicklung in der Elektrostatik? Welches ist der erste Beitrag in der Magnetostatik? Warum? (2 Punkte)

g) Was ist eine Greensche Funktion? Inwiefern hilft sie bei der Lösung inhomogener Differentialgleichungen? (2 Punkte)

h) In welchen Fällen ergibt sich für das Integral über eine Divergenz null? Warum? (2 Punkte)

Name: ______________________________________ Matrikelnummer: __________________________

i) Was besagt die Kontinuitätsgleichung? Welcher Erhaltungssatz folgt aus ihr? (2 Punkte)

j) Worin besteht die Eichfreiheit in der Elektrostatik? Worin in der Magnetostatik? (2 Punkte)

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2: Der elektrische Dipol **(10 Punkte)**

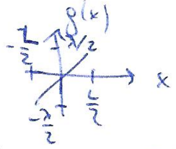
Gegeben sei eine Ladungsdichte der Form

$$\rho(\vec{r}) = \rho_x(x)\delta(y)\delta(z)\,,$$

mit

$$\rho_x(x) = \lambda \frac{x}{L} \Theta\left(L/2 - x\right) \Theta\left(L/2 + x\right)\,,$$

wobei $\Theta(x - x_0)$ die Heavisidesche Funktion und $\delta(x - x_0)$ die Diracsche δ-Distribution bezeichnet. Die Länge wird mit L notiert.



a) Zeichnen Sie die Funktion $\rho_x(x)$ in Abhängigkeit von x. (2 Punkte)

b) Welche Einheit besitzt der Faktor λ? (1 Punkt) $\frac{C}{m} = [\lambda]$

c) Berechnen Sie die Gesamtladung und das Dipolmoment des Stabs. (3 Punkte)
Kontrollergebnis: $\vec{p} = const \cdot \vec{e}_x$ $\vec{p} = \frac{\lambda L^2}{12} \vec{e}_x$

d) Welches Potential erzeugt die Ladungsverteilung bis zur Dipolordnung? (2 Punkte) $\phi(\vec{r}) \approx \frac{\lambda L^2}{48\pi\varepsilon_0} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

e) Nun wird ein externes elektrisches Feld $\vec{E} = \gamma\left(x\vec{e}_x + z\vec{e}_y + y\vec{e}_z\right)$ angeschaltet. Welches Drehmoment wirkt auf die Ladungsverteilung? (2 Punkte)

$$\vec{M} = \frac{\lambda L^2}{12} \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe 3: Elektrisches Feld **(10 Punkte)**

Betrachten Sie eine homogen geladene Kugelschale mit Gesamtladung Q. Der innere Radius der Kugelschale ist R_i, der äußere Radius ist $R_a > R_i$.

a) In welche Richtung zeigt das elektrische Feld $\vec{E}$? Begründen Sie. (1 Punkt) $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ für den Bereich $R_i < r < R_a$. Verwenden Sie dabei Ihr Ergebnis aus a). (3 Punkte) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right) / \left(R_a^3 - R_i^3\right)\vec{e}_r$

c) Für $r \geq R_a$ lautet das Ergebnis einer analogen Rechnung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\vec{e}_r\,.$$

Begründen Sie, warum das elektrische Feld so aussehen muss. Berechnen Sie dann das elektrostatische Potential in diesem Bereich ($r \geq R_a$). (2 Punkte) $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

d) Nun wird eine zweite, identische Kugelschale hinzugefügt. Wie viel Energie W muss aufgebracht werden, um sie aus großer Entfernung in die Nähe der ersten Kugelschale zu bringen, so dass der Abstand der Mittelpunkte der Kugelschalen d beträgt ($d > 2R_a$)? (1 Punkte) $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d}$

e) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im Raum zwischen den beiden Kugelschalen auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte an. (3 Punkte)

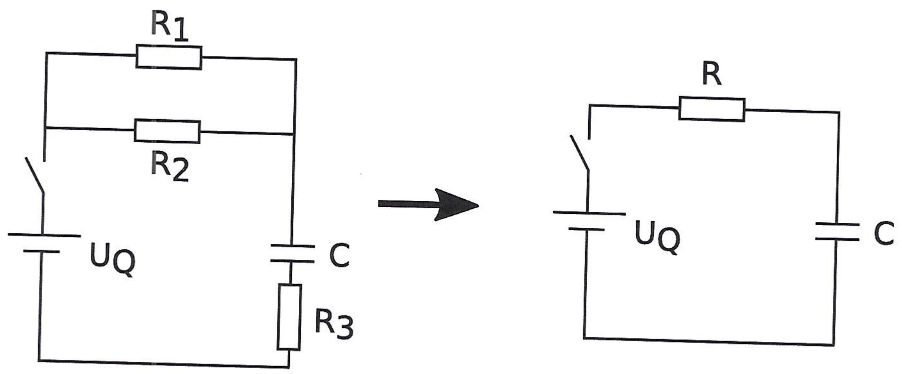
$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(z-\frac{d}{2})^2} + \frac{1}{(z+\frac{d}{2})^2}\right)\vec{e}_z$$

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe 4: Kondensator

(10 Punkte)

Gegeben sei folgende Schaltung:



Die rechte Schaltung zeigt ein Ersatz-Schaltbild der linken Schaltung.

a) Geben Sie den Widerstand R des Ersatz-Schaltbildes in Abhängigkeit von R_1, R_2 und R_3 an. (2 Punkte)

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Berechnen Sie die Spannung $U_C(t)$, die am Kondensator abfällt, in Abhängigkeit von R, U_Q, und C. Nehmen Sie dafür an, der Kondensator sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen. (5 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie für die partikuläre Lösung der DGL den Grenzwert $U_C(t \to \infty)$.

c) Sobald der Kondensator mit der Ladung Q_0 geladen ist, wird die Spannungsquelle aus der Schaltung entfernt. Stattdessen wird ein ungeladener Kondensator mit Kapazität $C_2 = \frac{1}{2}C$ eingefügt. Stellen Sie die daraus resultierende Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$ auf dem geladenen Kondensator auf. (3 Punkte)

a) $R = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

b) $U_C(t) = U_Q \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

c) $\dot{Q}_1(t) + \frac{3}{RC} Q_1(t) = - \frac{2Q_0}{RC}$