Numerik Übungszettel Nr. 8

Pape
Grisard
Becker

$\Sigma: 8+8 = 16 / 16$

Nr. 8.1

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 25 & 5 & 10 \\ -1 & 5 & 41 & -18 \\ 2 & 10 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 25 & 5 & 10 \\ -1 & 5 & 41 & -18 \\ 2 & 10 & -18 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_{41}=2]{l_{21}=3,\ l_{31}=-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 40 & -16 \\ 0 & 4 & -16 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_{42}=\frac{1}{4}]{l_{32}=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & -18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & -18 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_{43}=-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ 4/4

b) $\det A = \underbrace{\det L}_{=1} \det R = 2304$ 1/1

c) $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} = L D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 25 & 5 & 10 \\ -1 & 5 & 41 & -18 \\ 2 & 10 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$ 3/3

Voraussetzung für Zerlegung:

A muss positiv definit sein (Hurwitz-Krit.) $\Sigma: 8/8$

(Sonst ist die Zerlegung komplexwertig → ungewollt)

A 8.2.)

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$, $g(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

$f'(x) = 4x^3 - 8x$, $g'(x) = 4x^3 - 10x$

a.)

$x_0 = 1$, $x_2 = \frac{5}{4} + \frac{\frac{49}{256}}{35/16} = \frac{107}{80}$

$x_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{107}{80} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1{,}376957$

$x_4 \approx 1{,}395837186$, $x_5 \approx 1{,}405086$

$x_6 \approx 1{,}409664533$

2/2

b.) $f(z) = z^2 - 4z + 4$, $z = x^2$

$f(z) = 0 \iff z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$

$\Rightarrow x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{2}$

2/2

c.)

$x_1 = 1 - \frac{2}{-6} = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{73}{52}$, $x_3 \approx 1{,}413965$

$x_4 \approx 1{,}414213409$, $x_5 \approx 1{,}414213562$

$x_6 \approx 1{,}414213562$ mehr Stellen angeben, danke

exakt: $z = x^2$, $g(z) = z^2 - 5z + 6 = 0 \iff z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$, $x_{3/4} = \pm\sqrt{2}$

2/2

d.)

Das Newton-Verfahren konvergiert für g schneller als für f!

Begründung: f' und f haben bei $x = \sqrt{2}$ eine Nullstelle.

Deshalb kann die Konvergenzformel nicht angewendet werden. ?

Die Nullstelle von g' ist größer als x_0 und die Nst von g.

Deshalb kann die Konvergenzformel angewendet werden. ?

$f'(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}^3 - 8\sqrt{2} = 0$, $g'(\sqrt{2}) = 4 \cdot \sqrt{2}^3 - 10\sqrt{2} < 0$

2/2

Σ: 8/8

Das Newton Verfahren besitzt für f keine quadratische Konvergenz, da f(x) und f'(x) die selbe Nullstelle $\pm\sqrt{2}$ besitzt. (Doppelte Nullstelle). $\rightarrow$ nur lineare Konvergenz