blatt03_nitschke_grisard

November 8, 2018

1 Blatt 3

1.1 Aufgabe 8: Importance Sampling

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        import timeit
```

a) Die Planck-Verteilung:

```
In [2]: def Planck(x, N = 15 / np.pi**4):
            return N * x**3 / (np.exp(x) - 1)
```

Bestimme zunächst numerisch das Maximum:

```
In [3]: from scipy.optimize import brentq

        N = 15 / np.pi**4

        def diff_Planck(x):
            return N * (3 * x**2 * (np.exp(x) - 1) - x**3 * np.exp(x)) / (np.exp(x) - 1)**2

        xmax = brentq(diff_Planck, 1, 4) #root of derivation
        ymax = Planck(xmax) # max. value of planck distribution
```

Funktion für *Rejection Sampling*, um eine vordefinierte Länge des Samples zu erreichen, wird die gewünschte Anzahl aus der erzeugten Verteilung gezogen:

```
In [4]: def Rejection_sampling(u1, u2, function, length = 100000):
            sample = u1[u2 <= function(u1)]
            assert len(sample) >= length
            return sample[np.random.randint(0, len(sample), length)], len(sample)
```

Verwende Funktion um normales Rejection Sampling durchzuführen:

```
In [5]: start_time = timeit.default_timer()

        xcut = 20 # cutoff
```

```
        totnumber = 500000
        uniformx = np.random.uniform(0, xcut, totnumber)
        uniformy = np.random.uniform(0, ymax, totnumber)

        planck_sample_a, sample_len_a = Rejection_sampling(uniformx, uniformy, Planck)

        elapsed_a = timeit.default_timer() - start_time
```

b) Bestimme zunächst den Schnittpunkt der Majoranten *x_s*:

```
In [6]: def diff(x, N = 15 / np.pi**4, xmax = xmax):
            return ymax - 200 * N * x**(-0.1) * np.exp(-x**(0.9))
            #difference of functions has to be zero

        x_s = brentq(diff, 1, 6)
        print(f'Schnittpunkt x_s = {x_s}')
```

```
Schnittpunkt x_s = 5.678208598337659
```

Implementiere die Majorante *g(x)*:

```
In [7]: def func_g(x, x_s = x_s, N = 15 / np.pi**4):
            y = np.zeros(len(x))
            y[x <= x_s] = ymax
            y[x > x_s] = 200 * N * x[x >= x_s]**(-0.1) * np.exp(-x[x >= x_s]**(0.9))
            return y
```

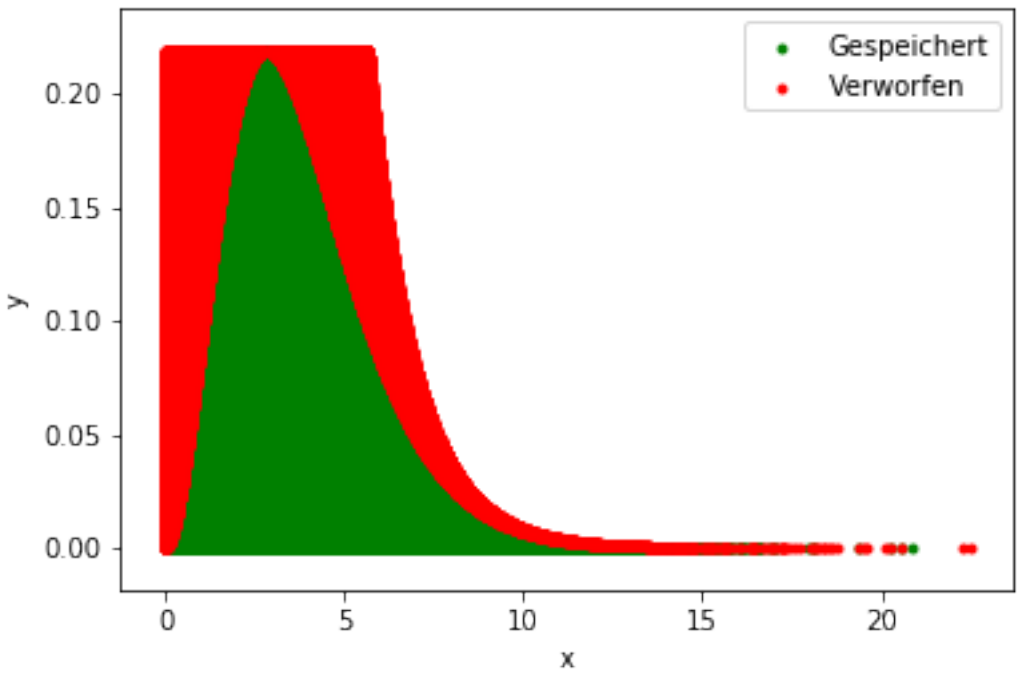
Nun soll zunächst ein Sample erzeugt werden, dass gemäSS $g(x)$ verteilt ist. Dies wird einzeln für $x \leq x_s$ und $x > x_s$ gemacht. Die richtige Anzahl an Zufallszahlen rechts und links von x_s ist aus dem Verhältnis der Flächen unter $g(x)$ berechenbar.

```
In [8]: def inv_G(y, x_s = x_s): #inverse CDF for x > x_s
            return (- np.log(np.exp(-x_s**(0.9))
                             + y * (- np.exp(-x_s**(0.9))) ))**(10 / 9)
```

```
In [9]: start_time = timeit.default_timer()


        norm = x_s * ymax + 2000 / 9 * N * (np.exp(-x_s**(9/10)))
        #total norm of g(x)


        part_uniform = int(x_s * ymax / norm * totnumber)

        uniformx_greater_x_s = np.random.uniform(0, 1, totnumber - part_uniform)
        sample_greater_x_s = inv_G(uniformx_greater_x_s)

        sample_less_x_s = np.random.uniform(0, x_s, part_uniform)
```

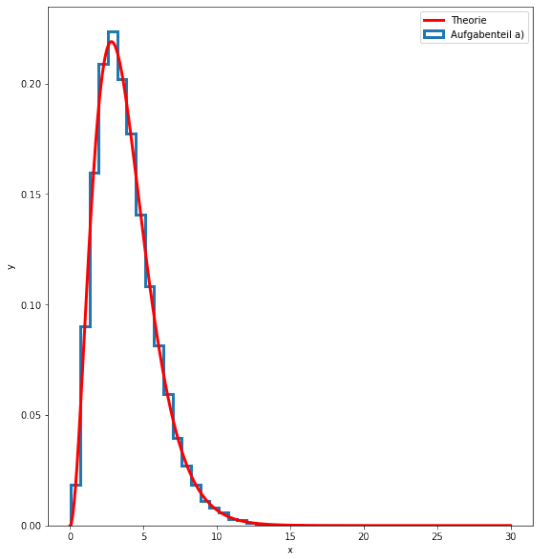
```
uniformy = np.random.uniform(0, 1, totnumber)
sample_g = np.concatenate([sample_less_x_s, sample_greater_x_s])


planck_sample_b, sample_len_b = Rejection_sampling(sample_g,
                                    func_g(sample_g) * uniformy,
                                    Planck)


elapsed_b = timeit.default_timer() - start_time
```

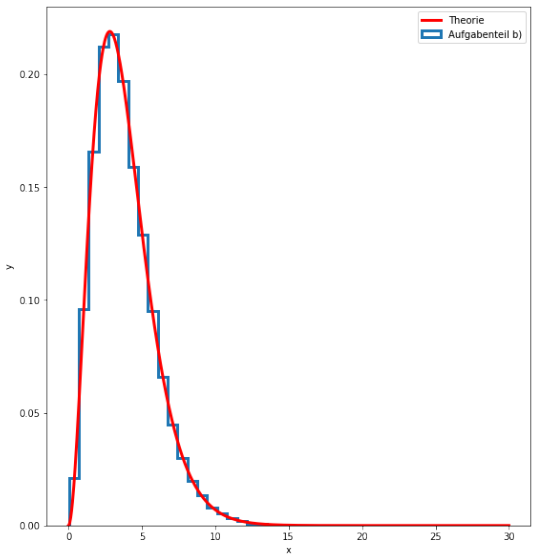
In [10]:
```
plt.clf()
xplot = np.linspace(0.01, 30, 1000)


mask = func_g(sample_g) * uniformy <= Planck(sample_g)
plt.scatter(sample_g[mask], func_g(sample_g[mask]) * uniformy[mask],
            marker = '.', color = 'g', label = 'Gespeichert')

plt.scatter(sample_g[mask == False],
            func_g(sample_g[mask == False]) * uniformy[mask == False],
            marker = '.', color = 'r', label = 'Verworfen')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```



c) Stelle die Datensätze aus a) und b), sowie die Theoriekurve dar:

```
In [11]: fig = plt.figure(figsize = (20, 10))

         fig.add_subplot(121)
         plt.hist(planck_sample_a, bins = 30, histtype = 'step',
                  density = True,
                  label = 'Aufgabenteil a)',
                  linewidth = 3)
         plt.plot(xplot, Planck(xplot),
                  color = 'r', linewidth = 3, label = 'Theorie')
         plt.legend()
         plt.xlabel('x')
         plt.ylabel('y')

         fig.add_subplot(122)
         plt.hist(planck_sample_b, bins = 30, histtype = 'step',
                  density = True,
                  label = 'Aufgabenteil b)',
                  linewidth = 3)
         plt.plot(xplot, Planck(xplot),
                  color = 'r', linewidth = 3, label = 'Theorie')
         plt.legend()
         plt.xlabel('x')
         plt.ylabel('y')

         plt.show()
```





c) Vergleiche Laufzeiten und Effizienzen:

```
In [12]: print(f'Laufzeit a): {elapsed_a}s')
         print(f'Effizienz a): {sample_len_a / totnumber * 100}%')

         print(f'Laufzeit b): {elapsed_b}s')
         print(f'Effizienz b): {sample_len_b / totnumber * 100}%')
```

```
Laufzeit a): 0.07996194999998352s
Effizienz a): 23.0402%
Laufzeit b): 0.10444585200002621s
Effizienz b): 65.3304%
```

Kommentar: Die Laufzeit ist bei Methode a) etwas besser. Das liegt daran, dass für Methode b) zunächst noch Rechnungen durchgeführt werden müssen, um die Daten gemäSS der Majorante zu verteilen. Die Effizienz ist dadurch in b) jedoch wesentlich besser.

1.2 Aufgabe 9: Metropolis-Hastings-Algorithmus

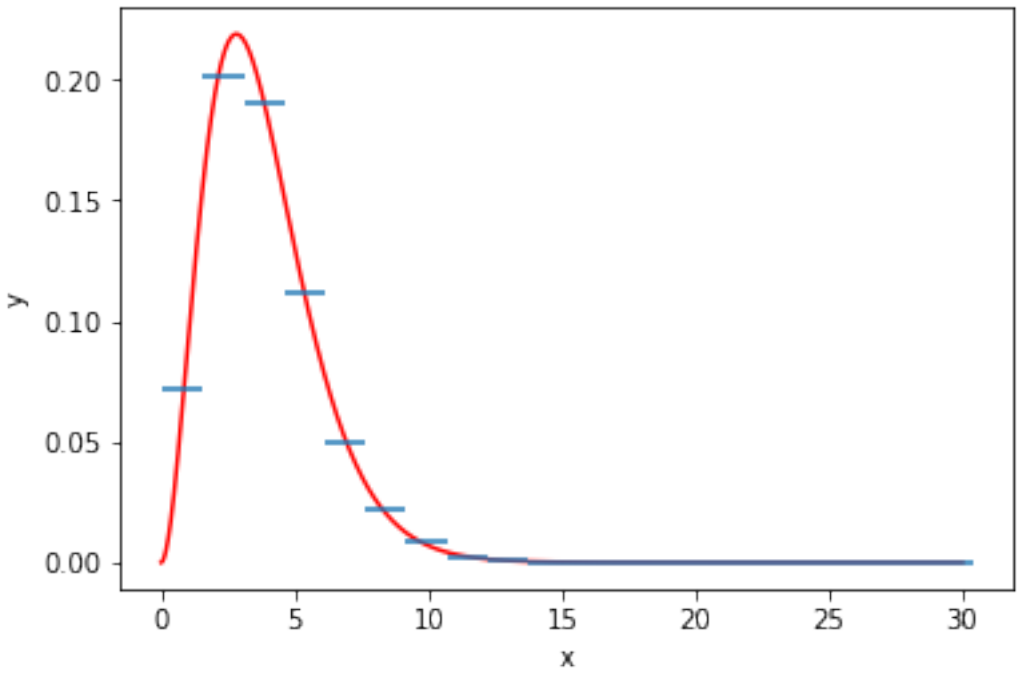
a) Ofenbar gilt für symmetrische Schrittvorschlagsverteilungen $g(x_i|x_j) = g(x_j|x_i)$. Daher geht z.B. für eine GauSSverteilung der Metropolis-Hastings-Algorithmus in den Metropolis-Algorithmus über.

b) Implementiere den Metropolis Hastings Algorithmus mit einer Gleichverteilung als Schrittvorschlagsfunktion:

```
In [13]: def metropolis(distribution, x0, stepsize = 2, length = 100000):
             x = [x0]
             for i in range(length):
                 next_x = np.random.uniform(x[i] - stepsize, x[i] + stepsize)
                 prob = min(1, distribution(next_x) / distribution(x[i]))
                 xi = np.random.uniform(0, 1)
                 if prob >= xi and next_x >= 0:
                     x.append(next_x)
                 else:
                     x.append(x[i])

             return np.array(x)
```

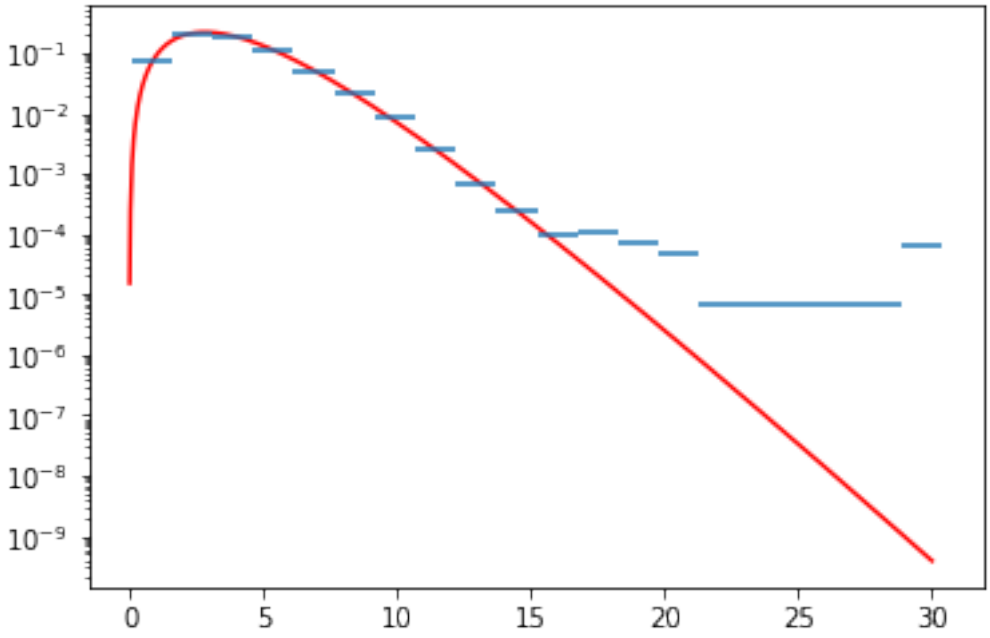
```
In [14]: x = metropolis(distribution = Planck, x0 = 30)
```

```
In [15]: counts, binedges = np.histogram(x, bins = 20)
         normed_counts = counts / sum(counts * np.diff(binedges))

         xplot = np.linspace(0.01, 30, 1000)
         plt.errorbar(x = (binedges[:-1] + binedges[1:]) * 0.5,
                      y = normed_counts, xerr = np.diff(binedges) * 0.5, linestyle = '',
                     label = 'Daten')
         plt.plot(xplot, Planck(xplot), zorder = 1, color = 'r')
         plt.xlabel('x')
         plt.ylabel('y')
         plt.show()
```



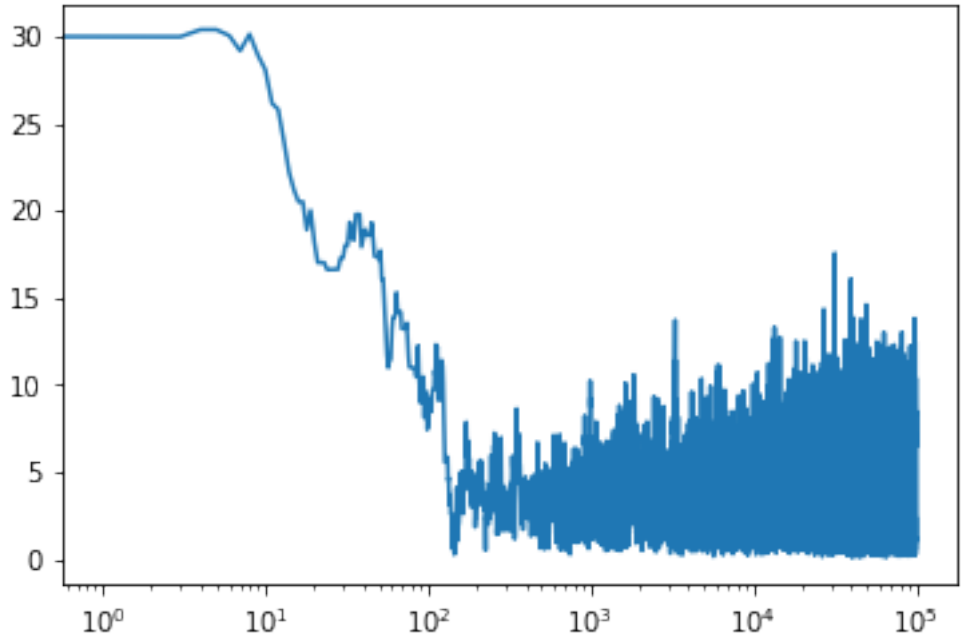
Logarithmische Darstellung zeigt, dass die erzeugte Verteilung nicht so gut an die Theoriekurve passt für Werte, ab ca. $x = 20$. Dies könnte an dem schlecht gewählten Startpunkt liegen.

```
In [16]: xplot = np.linspace(0.01, 30, 1000)
         plt.errorbar(x = (binedges[:-1] + binedges[1:]) * 0.5,
                      y = normed_counts, xerr = np.diff(binedges) * 0.5, linestyle = '',
                     label = 'Daten')
         plt.plot(xplot, Planck(xplot), zorder = 1, color = 'r')
         plt.yscale('log')
```



d) Traceplot

```
In [17]: plt.clf()
         plt.plot(range(len(x)), x)
         plt.xscale('log')
         plt.show()
```



Kommentar: Man erkennt deutlich die Burn-In-Phase. Für weitere Iterationen schwanken die Werte um das Maximum der Verteilung bei etwa 3. Man erkennt einen Trend hin zu einer grösSeren Streuug der Daten um die Maximalstelle.