8. Übung zur SMD 13.12.18

22

a) $y = a_0 + a_1 x$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a_0}\sigma_{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\sigma_{a_1}\right)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a_0}\frac{\partial y}{\partial a_1}\operatorname{cov}(a_0, a_1)$$

ohne Korrelation:

$$\sigma_y^2 = (\sigma_{a_0})^2 + (\sigma_{a_1} x)^2$$

$$\rightarrow \sigma_y = \left((0{,}2)^2 + (0{,}2)^2 x^2\right)^{1/2}$$

$$= 0{,}2\,(1 + x^2)^{1/2}$$

mit Korrelation

$$\sigma_y = \left\{(\sigma_{a_0})^2 + (\sigma_{a_1} x)^2 + 2x \operatorname{cov}(a_0, a_1)\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{(\sigma_{a_0})^2 + (\sigma_{a_1} x)^2 + 2x\,\rho\,\sigma_{a_0}\sigma_{a_1}\right\}^{1/2}$$

$$= 0{,}2\,\left\{x^2 + 2\rho x + 1\right\}^{1/2}$$

b) im Notebook

c) analytisch:

$y(-3) \approx -2{,}000 \pm 0{,}769$

$y(0) \approx 1{,}0\cancel{00} \pm 0{,}2$

$y(3) \approx 4{,}000 \pm 0{,}456$

numerisch + Vergleich im Notebook

---

23 a) Designmatrix

$$A = \begin{pmatrix} f_1(\varphi_1) & f_2(\varphi_1) \\ f_1(\varphi_2) & f_2(\varphi_2) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(\varphi_N) & f_2(\varphi_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

→ expl. Berechnung im Notebook

~~b)~~ im Notebook
~~c)~~

d) Drücke A_0 und δ durch a_1 und a_2 aus:

$$A_0 \cos(\varphi + \delta) = \underbrace{A_0 \cos(\delta)}_{a_1} \cos\varphi \underbrace{- A_0 \sin\delta}_{a_2} \sin\varphi$$

$$\rightarrow \quad A_0 = \frac{a_1}{\cos\left(\arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\right)}$$

$$\delta = \arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)$$

Kovarianzmatrix von A_0, δ mit

$$\mathrm{Cov}(A_0, \delta) = J\, V\, J^T \quad \text{mit}$$

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \mathrm{cov}(a_1, a_2) \\ \mathrm{cov}(a_1, a_2) & \sigma_{a_2}^2 \end{pmatrix}$$

und Jacobimatrix J:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_0}{\partial a_1} & \frac{\partial A_0}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \delta}{\partial a_1} & \frac{\partial \delta}{\partial a_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} & \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \\ \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} & -\frac{1}{a_1 + \frac{a_2^2}{a_1}} \end{pmatrix}$$

Berechnung im Notebook