Tema nr. 6

Date $(n+1)$ puncte distincte, x_0, x_1, …, x_n ($x_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$) şi cele $(n+1)$ valori ale unei funcţii necunoscute f în aceste puncte, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

să se aproximeze funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, pentru un $\bar{x}$ dat, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$:

- utilizând formula Newton progresivă pe noduri echidistante şi schema lui Aitken adaptată pentru calculul diferenţelor finite; să se afişeze $L_n(\bar{x})$ şi $|L_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|$; ;

- folosind aproximarea polinomială calculată cu metoda celor mai mici pătrate. Pentru calculul valorii polinomului obţinut în punctul $\bar{x}$ să se folosească *schema lui Horner*. Să se afişeze $P_m(\bar{x})$, $|P_m(\bar{x}) - f(\bar{x})|$ şi $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |P_m(x_i) - y_i|$. Se vor folosi valori ale lui m mai mici decât 6.

Pentru rezolvarea sistemului liniar care apare în rezolvarea interpolării în sensul celor mai mici pătrate se poate folosi biblioteca utilizată la *Tema 2*.

Nodurile de interpolare echidistante $\{x_i, i = 0, ..., n\}$ se vor genera astfel: n, x_0 şi x_n se citesc de la tastatură sau dintr-un fişier astfel ca $x_0 < x_n$. Se calculează $h = (x_n - x_0)/n$ iar $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, ..., n-1$; valorile $\{y_i, i = 0, ..., n\}$ se construiesc folosind o funcţie f declarată în program (exemple de alegere a nodurilor x_0, x_n şi a funcţiei $f(x)$ se găsesc la sfârşitul acestui document), $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$;

Bonus (15 pt): Să se facă graficul funcţiei f şi al funcţiilor aproximative calculate L_n şi P_m.

Interpolare numerică

Se cunosc valorile unei funcţii într-un număr finit de puncte, $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array} \quad , \ x_i \neq x_j \ \ \forall\ i \neq j \ , \quad y_i = f(x_i) \ \ i = \overline{0, n}$$

Pentru a aproxima funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, $\bar{x} \neq x_i$ se construieşte o funcţie elementară $S(x)$ care satisface:

$$S(x_i) = y_i \ , \quad i = \overline{0, n}.$$

Valoarea aproximativă pentru $f(\bar{x})$ este $S(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) \approx S(\bar{x})$$

Un mod de a construi funcţia S este folosind un polinom de grad n şi anume, polinomul de interpolare Lagrange.

Polinomul de interpolare Lagrange

Unicul polinom de grad n, $L^{(n)}$, ce satisface relaţia de interpolare:

$$L^{(n)}(x_i) = y_i \quad , \quad i = \overline{0, n}$$

poate fi scris în mai multe feluri. O primă formă este următoarea:

$$L^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

În cazul când nodurile de interpolare sunt echidistante:

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0, \ldots, n$$

(de obicei se precizează numărul de noduri de interpolare, x_0 şi x_n iar h se calculează cu formula $h = \dfrac{(x_n - x_0)}{n}$), polinomul de mai sus se poate scrie şi altfel:

$$\begin{aligned} L_n(x = x_0 + th) = \ & y_0 + \Delta f(x_0) t + \Delta^2 f(x_0) \frac{t(t-1)}{2!} + \cdots + \\ & + \Delta^k f(x_0) \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} + \cdots \\ & + \Delta^n f(x_0) \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \quad , \quad t = \frac{x - x_0}{h}. \end{aligned} \tag{1}$$

Această formă de scriere a polinomului de interpolare Lagrange se numeşte formula lui Newton progresivă pe noduri echidistante. În formula de mai sus $\Delta^k f(x)$ se numesc diferenţe finite de ordin k ale funcţiei f şi se definesc recursiv astfel:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad , \quad \Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)\ , k > 1$$

Pentru diferenţele finite de ordin k avem şi o definiţie nerecursivă:

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{(k-i)} C_k^i f(x+ih)$$

Pentru calculul diferenţelor finite $\Delta^k f(x_0)$ care apar în formula (1), se foloseşte definiţia recursivă şi schema lui Aitken.

Schema lui Aitken de calcul a diferenţelor finite

Schema lui Aitken este un procedeu rapid, în n paşi, de calcul a diferenţelor finite necesare construirii polinomului Lagrange cu formula Newton progresivă. Modul de calcul este ilustrat în tabelul de mai jos:

	Pas 1	Pas 2		Pas n
y_0				
y_1	$\Delta f(x_0) = y_1 - y_0$			
y_2	$\Delta f(x_1) = y_2 - y_1$	$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$		
y_3	$\Delta f(x_2) = y_3 - y_2$	$\Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)$		
$\vdots$				
y_{n-1}	$\Delta f(x_{n-2}) = y_{n-1} - y_{n-2}$	$\Delta^2 f(x_{n-3}) = \Delta f(x_{n-2}) - \Delta f(x_{n-1})$		
y_n	$\Delta f(x_{n-1}) = y_n - y_{n-1}$	$\Delta^2 f(x_{n-2}) = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2})$	$\cdots$	$\Delta^n f(x_0)$

La pasul k se calculează diferenţele finite de ordin k:

$$\Delta^k f(x_0)\ ,\ \Delta^k f(x_1)\ ,\ \ldots, \Delta^k f(x_{n-k})$$

folosind doar diferenţele finite de la pasul anterior. La fiecare pas, calculele se pot face în acelaşi vector y. După calcularea diferenţelor finite de ordin k (pasul k) vectorul y are următoarea structură:

$$y = (y_0, \Delta f(x_0), \Delta^2 f(x_0), \ldots, \Delta^k f(x_0), \Delta^k f(x_1), \ldots, \Delta^k f(x_{n-k}))$$

După pasul n vectorul y va conţine toate diferenţele finite de care avem nevoie pentru a calcula L_n cu formula (1):

$$y = (y_0, \Delta f(x_0), \Delta^2 f(x_0), \ldots, \Delta^{n-1} f(x_0), \Delta^n f(x_0)).$$

Factorul:

$$s_k = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

poate fi calculat recursiv astfel:

$$s_1 = t \quad , \quad s_k = s_{k-1}\frac{t-k+1}{k} \quad , \quad k = 2, \ldots, n$$

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se va aproxima prin $L_n(\bar{x})$.

$$L_n(\bar{x} = x_0 + th) = y_0 + \Delta f(x_0) s_1 + \Delta^2 f(x_0) s_2 + \cdots + \Delta^k f(x_0) s_k + \cdots + \Delta^n f(x_0) s_n$$

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se va aproxima prin $L_n(\bar{x})$.

Interpolare prin metoda celor mai mici pătrate

Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dat $\bar{x} \in [a, b]$ să se aproximeze $f(\bar{x})$ cunoscând cele $n+1$ valori y_i ale funcţiei f în nodurile de interpolare.

Se caută un polinom de grad m:

$$P_m(x) = P_m(x; a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$$

Coeficienţii $\{a_i; i = \overline{0, m}\}$ sunt soluţia problemei de minimizare:

$$\min \left\{ \sum_{r=0}^{n} \left| P_m(x_r; a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_r \right|^2 \ ; \ a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

şi de asemenea, sunt soluţia sistemului liniar:

$$Ba = f$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \quad f = (f_i)_{i=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \Big) a_j \ = \ \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^i \quad , \quad i = 0, \ldots, m$$

Acest sistem liniar se poate rezolva cu biblioteca numerică folosită la *Tema 2*.

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se aproximează prin valoarea polinomului P_m în punctul $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) \approx P_m(\bar{x}; a_0, a_1, \ldots, a_m)$$

Valoarea polinomului $P_m(\bar{x})$ se va calcula folosind schema lui Horner.

Schema lui Horner de calcul a valorii $P(x_0)$

Fie P un polinom de grad p:

$$P(x) = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \cdots + c_{p-1}x + c_p \ , \quad (c_0 \neq 0)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((c_0 x + c_1)x + c_2)x + c_3)x + \cdots)x + c_{p-1})x + c_p$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{array}{rcl} d_0 & = & c_0 \, , \\ d_i & = & c_i + d_{i-1}x_0 \ , \quad i = \overline{1,p} \end{array} \tag{2}$$

În şirul de mai sus:

$$P(x_0) = d_p$$

iar ceilalţi termeni calculaţi ($d_i, i = 0, \ldots, p-1$) , sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - x_0)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & d_0 x^{p-1} + d_1 x^{p-2} \cdots + d_{p-2}x + d_{p-1} \ , \\ r & = & d_p = P(x_0). \end{array}$$

Pentru a calcula $P(x_0)$ (d_p) cu formulele (2) se poate folosi o singură valoare reală $d \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $d \in \mathbb{R}^p$.

Date de intrare - exemple

1. Pentru tabelul:

x	0	1	2	3	4	5
f	50	47	-2	-121	-310	-545

   pentru $\bar{x} = 1.5$ avem $f(1.5) = 30.3125$. Prima metodă ar trebui sa aproximeze exact această valoare.

2. $x_0 = a = 1 \quad , \quad x_n = b = 5 \quad , \quad f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 12$