

## Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv  $u > 0$ , de forma  $u = 10^{-m}$ , unde  $m \in \mathbb{N}$ , care satisface proprietatea:

$$1 +_c u \neq 1$$

unde prin  $+_c$  am notat operația de adunare efectuată de calculator. Numărul  $u$  se numește *precizia mașină*.

2. Operația  $+_c$  este *neasociativă*: fie numerele  $x=1.0$ ,  $y = u/10$ ,  $z = u/10$ , unde  $u$  este precizia mașină calculată anterior (acea valoare pentru care  $1 +_c u \neq 1$  și  $1 +_c u/10 = 1$ ). Să se verifice că operația de adunare efectuată de calculator este neasociativă:

$$(x +_c y) +_c z \neq x +_c (y +_c z).$$

Să se găsească un exemplu pentru care operația de înmulțire  $\times_c$  este neasociativă.

3. **Aproximări cu funcții raționale ale funcției  $\tan^1$**

Considerăm funcțiile raționale din Figura 1. Toate funcțiile din această figură sunt

aproximări ale funcției *tangentă* pentru  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\tan(a) \approx T(i, a) \quad , \quad \forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]..$$

Să se implementeze funcțiile  $T(i, a)$ ,  $i=4, 5, 6, 7, 8, 9$ .

Să se genereze 10.000 de numere aleatoare din intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  și să se

calculeze valorile celor 6 funcții precizate mai sus în aceste puncte. Se consideră că valoarea funcției *tan* calculată de biblioteca matematică a programului cu care lucrați (`math.tan`, de obicei) este valoarea exactă a funcției *tan*.

$$v_{exact} = \tan(a) = \text{math.tan}(a).$$

Pentru fiecare din cele 10.000 de numere generate să se precizeze care sunt cele trei funcții care au furnizat cele mai bune aproximări (acele aproximări care furnizează cele mai mici erori).

$$eroare_i(a) = |T(i, a) - v_{exact}|.$$

În funcție de aceste rezultate, să se facă o ierarhie a celor 6 funcții.

---

<sup>1</sup> <https://mae.ufl.edu/~uhk/IEEETrigpaper8.pdf>

$$T(1, a) = a$$

$$T(2, a) = \frac{3a}{3 - a^2}$$

$$T(3, a) = \frac{15a - a^3}{15 - 6a^2}$$

$$T(4, a) = \frac{105a - 10a^3}{105 - 45a^2 + a^4}$$

$$T(5, a) = \frac{945a - 105a^3 + a^5}{945 - 420a^2 + 15a^4}$$

$$T(6, a) = \frac{10395a - 1260a^3 + 21a^5}{10395 - 4725a^2 + 210a^4 - a^6}$$

$$T(7, a) = \frac{135135a - 17325a^3 + 378a^5 - a^7}{135135 - 62370a^2 + 3150a^4 - 28a^6}$$

$$T(8, a) = \frac{2027025a - 270270a^3 + 6930a^5 - 36a^7}{2027025 - 945945a^2 + 51975a^4 - 630a^6 + a^8}$$

$$T(9, a) = \frac{34459425a - 4729725a^3 + 135135a^5 - 990a^7 + a^9}{34459425 - 16216200a^2 + 945945a^4 - 13860a^6 + 45a^8}$$

**Figura 1** – Aproximări raționale ale funcției tan

Erată:

$$T(6, a) = \frac{10395a - 1260a^3 + 21a^5}{10395 - 4725a^2 + 210a^4 - a^6}$$

**Bonus 10pt:** Să se aproximeze valorile funcțiilor *sin* și *cos* folosind formulele (6) și (7) din referința citată.