Tema nr. 7

Fie P un polinom de grad n cu coeficienţi reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_0 \neq 0 \, , \ a_i \in \mathbb{R}$$

şi ϵ precizia calculelor.

Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P. Să se implementeze metoda lui Muller de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Muller pornind de la puncte de start x_0, x_1, x_2 diferite. Rezultatele se vor afişa pe ecran şi se vor memora într-un fişier. În fişierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 şi v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

Bonus 20 pt.: Implementaţi una din metodele (N4) sau (N5) din articolul postat aici, pentru aproximarea rădăcinilor reale ale unei funcţii f oarecare. Derivata funcţiei f va fi declarată la fel ca funcţia f.

Metoda Muller de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ , \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Se numeşte rădăcină a unui polinom, un număr real sau complex, $r \in \mathbb{R}$ sau $r \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Orice polinom cu coeficienţi reali are n rădăcini, reale sau complexe. Dacă $r = c + id$ este rădăcină complexă a polinomului P atunci şi $\bar{r} = c - id$ este rădăcină a polinomului P. Dacă $r \in \mathbb{R}$ este rădăcină reală a polinomului P atunci:

$$P(x) = (x - r)Q(x) \ , \ Q \text{ este polinom de grad } n - 1.$$

Dacă numerele complexe $a \pm ib$ sunt rădăcini ale polinomului P atunci:

$$P(x) = (x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2)Q(x) \ , \ Q \text{ este polinom de grad } n - 2.$$

(polinomul de gradul al 2-lea $x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2$ are rădăcinile $c \pm id$)

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R, R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|} \quad , \quad A = \max\{|a_i| \; ; \; i = \overline{1, n}\} \tag{2}$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul [-R, R]) a polinomului P definit de (1), se construieşte un şir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R,\ R]$ căutată ($x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$) .

Dându-se primele trei elemente x_0, x_1, x_2, şirul $\{x_k\}$ se construieşte astfel (x_{k+1} se calculează din x_k, x_{k-1}, x_{k-2}):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{2c}{b + \operatorname{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}. \\ x_{k+1} &= x_k - \Delta\, x_k \\ \Delta\, x_k &= \frac{2c}{b + \operatorname{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\operatorname{sign}(b) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } b \le 0 \\ \;\;1 & \text{dacă } b > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Elementele a, b şi c se calculează astfel:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \;, \quad b = a h_1 + \delta_1 \;, \quad c = P(x_k), \\ h_0 &= x_{k-1} - x_{k-2} \;, \quad h_1 = x_k - x_{k-1} \;, \\ \delta_0 &= \frac{P(x_{k-1}) - P(x_{k-2})}{h_0} \;, \quad \delta_1 = \frac{P(x_k) - P(x_{k-1})}{h_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Metoda lui Muller se poate folosi şi pentru aproximarea rădăcinilor complexe ale polinomului P (atunci când $b^2 - 4ac < 0$). Metoda descrisă mai sus se poate aplica nu numai pentru aproximarea rădăcinilor polinoamelor ci pentru rădăcinile oricărei funcţii neliniare continue.

Observaţie importantă: Alegerea primelor 3 elemente ale şirului, x_0, x_1, x_2, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a iteraţiilor iniţiale x_0, x_1, x_2 în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este nevoie de memorat întregul şir $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* cu metoda lui Muller este următoarea:

Metoda lui Muller

x_0, x_1, x_2 se aleg aleator ; $k = 3$;
(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este de preferat alegerea valorilor x_0, x_1, x_2 în vecinătatea soluţiei căutate)

do
{
$\star$ calculează a, b , c folosind relaţiile (5) ;
$\star$ if ($b^2 - 4ac < 0$) STOP;
// sau se continuă aproxim. răd. complexe
//(se poate încerca schimbarea lui x_0, x_1, x_2)
$\star$ if ($|b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\,| < \epsilon$) STOP;
//(se poate încerca schimbarea elementelor x_0, x_1, x_2)
$\star$ se calculează $\Delta\, x$ folosind formula (3) ;
$\star$ $x_3 = x_2 - \Delta\, x$;
$\star$ $k = k + 1$;
$\star$ $x_0 = x_1$; $x_1 = x_2$; $x_2 = x_3$;
}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta\, x| < \epsilon$) $x_k \approx x^*$;
else *divergenţă* ; //(de încercat alte valori pentru x_0, x_1, x_2)

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \ , \ \ a_0 \neq 0 \tag{6}$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \cdots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor, obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \ , \\ b_i &= a_i + b_{i-1}v \ , \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \tag{7}$$

Folosind şirul de mai sus, valoarea polinomului P în punctul v este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalţi termeni b_i calculaţi, sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - v)Q(x) + r \ , \\ Q(x) &= b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \ , \\ r &= b_n = P(v). \end{aligned} \tag{8}$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (7) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $b \in \mathbb{R}^n$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\ , \\
&\quad a_0 = 1.0\,,\quad a_1 = -6.0\,,\quad a_2 = 11.0\,,\quad a_3 = -6. \\
P(x) &= (x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{7})(x+1)(x-\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6) \\
&\quad a_0 = 42.0\,,\quad a_1 = -55.0\,,\quad a_2 = -42.0\,,\quad a_3 = 49.0\,,\quad a_4 = -6.0. \\
P(x) &= (x-1)(x-\frac{1}{2})(x-3)(x-\frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3) \\
&\quad a_0 = 8.0\,,\quad a_1 = -38.0\,,\quad a_2 = 49.0\,,\quad a_3 = -22.0\,,\quad a_4 = 3.0. \\
P(x) &= (x-1)^2(x-2)^2 \\
&= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\
&\quad a_0 = 1.0\,,\quad a_1 = -6.0\,,\quad a_2 = 13.0\,,\quad a_3 = -12.0\,,\quad a_4 = 4.0. \\
f(x) &= e^x - \sin(x) \quad , \quad f'(x) = e^x - \cos(x) \quad , \quad x^* = -3.18306301193336
\end{aligned}$$