

# Klyngeanalyse

ISTx1003 Statistisk læring og Data Science

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag

Oktober 28, 2025

# Anerkjennelse

Disse slides bygger på slides fra Mette Langaas, 2020.

Takk til Mette for at jeg fikk bruke noen av materialene.

# Plan for i dag (tema “Klyngeanalyse”)

- Hva er klyngeanalyse?
- Læringsmål, pensum og læringsressurser
- Avstandsmål
- K-gjennomsnitt (“K-means”) klyngeanalyse
- Bruk av klyngeanalyse på et bilde (prosjektet fra i fjor)
- Hierarkisk klyngeanalyse
- Informasjon om prosjektet

## Eksempel 1: Genaktivitet

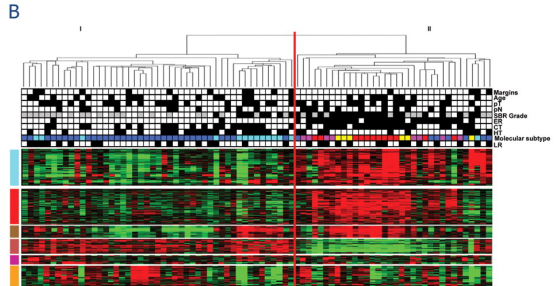
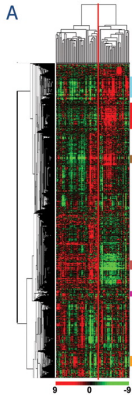
- $n = 81$  celleprøver fra kreftsvulster til ulike pasienter
- Genaktivitet for  $p = 12957$  gener

### Spørsmål:

Hvilke celleprøver fra brystkreftpasienter ligner hverandre mest?

Kan vi finne ukjente klynger (av celleprøver) i dataene?

Dette kan hjelpe for å forutsi sannsynligheten for en tilbakefall.



$$X = p \times n = \text{gener} \times \text{prøver} .$$

Finn ut mer: <https://cgp.iiajournals.org/content/8/4/199>

## Eksempel 2: Proteininteraksjonsnettverk

Kan vi finne klynger med relatert funksjon?

MUFF, RAO, AND CAFLISCH

PHYSICAL REVIEW E 72, 056107 (2005)

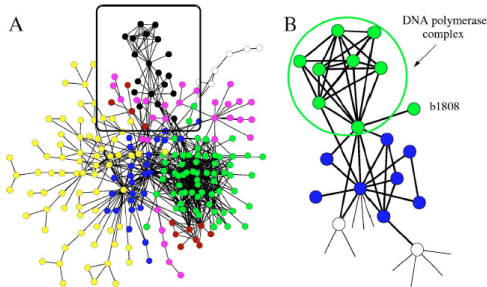


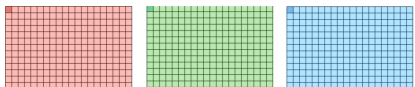
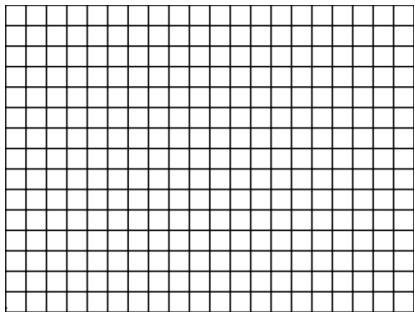
FIG. 4. (Color online) (a) Largest connected component of the PPI of *E. coli*. The colors represent the clusterization found by optimizing modularity. (b)  $LQ$  clusterization of the black  $Q$  cluster. The green circle contains proteins belonging to the DNA polymerase complex. The unknown protein b1808 is assigned to this complex according to  $LQ$  while the complete  $Q$  cluster is heterogeneous.

## Eksempel 3: Bildanalyse

### **Mål:**

Å bruke klyngeanalyse til å fjerne detaljer og støy - ved å dele pikslene inn i to eller flere klynger.

Hver piksel har en farge som er definert som en blandig av rød, grønn og blå  $(x, y, z)$ :



Klyngeanalyse: Finn  $k$  “typiske farger” som representerer klynger (sentroider) og erstatt hver piksel med sentroidfargen.



Jeg var litt nysgjerrig...

Opprinnelig bilde



Jeg var litt nysgjerrig...

Opprinnelig bilde



Bilde i svart/hvitt



Jeg var litt nysgjerrig...

Opprinnelig bilde



Bilde i svart/hvitt



bilde med 8 klynger



# Læringsmål

- Forstå hvorfor det er interessant å gjøre klyngeanalyse
- Kjenne igjen situasjoner der klyngeanalyse vil være en aktuell metode å bruke
- Kjenne begrepene avstandsmål, koblingstype, dendrogram
- Forstå algoritmen for å utføre K-gjennomsnitt-klyngeanalyse og hierarkisk klyngeanalyse
- Forstå hvordan klyngeanalyse utføres i Python
- Kunne besvare problem 3 av prosjektoppgaven på en god måte!

# Læringsressurser

Tema Klyngeanalyse:

- **Korte videoer:** (by Mette Langaas)
  - Klyngeanalyse (8:43 min)
  - Hierarkisk klyngeanalyse (11:26 min)
  - K-gjennomsnitt-klyngeanalyse (8:38 min)
- Denne forelesningen
- **Disse slides** med notater

Som alltid se her:

<https://wiki.math.ntnu.no/istx100y/2025h/1003>

# Klyngeanalyse – hva er det?

Vi har data

$$X : n \times p$$

men *ikke* noen respons  $Y$ . *Ikke-veiledet = unsupervised*

**Mål:**

- Finn ukjente klynger i dataene.
- Observasjoner innen hver klynge er mer lik hverandre enn observasjoner fra ulike klynger.

**Hva skal vi bruke resultatene fra klyngeanalysen til?**

- Bildet: Fjerne støy eller, spare lagringsplass
- Medisin: Finne subgrupper av en sykdom → relevant for behandling?

# Klyngeanalyse – hva er det?

**Generelt:** Finne *struktur* i dataene.

Kan vi stole på resultatene? Hvor robuste er de?

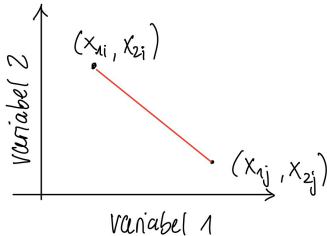
→ Fortsatt et forskningsområde!

# Avstandsmål

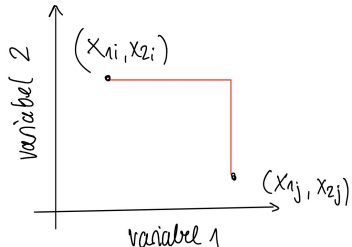
Før vi kan gjøre en klyngeanalyse, må vi først definere en *avstand* mellom to datapunkter.

To populære avstandsmål:

**Euklidsk**



**City-block (=Manhattan)**





**Euklidsk**

$$D_E(i, i') = \sqrt{\sum_{j=1}^p (x_{ji} - x_{ji'})^2}$$

**City-block (=Manhattan)**

$$D_M(i, i') = \sum_{j=1}^p |x_{ji} - x_{ji'}|$$

Avstandsmål i mer enn 2 dimensioner: Enkelt å regne, men litt vanskelig å forestille seg.

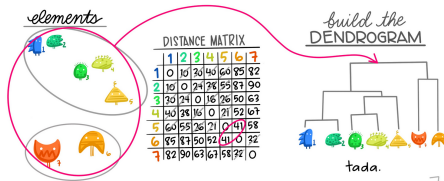
# Metoder for klyngeanalyse

Det finnes ganske mange metoder, men vi ser på to som er (mest?) populære:

## K-gjennomsnitt klyngeanalyse

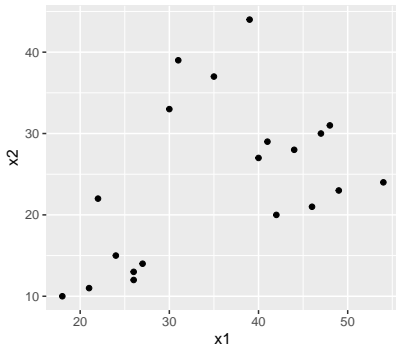


## Hierarkisk klyngeanalyse



## K-gjennomsnitt klyngeanalyse

- Finn  $K$  ukjente klynger i dataene.



- Alle observasjoner skal være medlem i akkurat *én* klynge.
- Variasjonen innen hver klynge skal være så liten som mulig.

## Variasjon innen en klynge $k$

- $K$  klynger  $C_1, \dots, C_k, \dots, C_K$ .
- Antall observasjoner i klynge  $k$ :  $|C_k|$ .
- Variasjon i klynge  $k$ :

$$\frac{1}{|C_k|} \sum_{i, i' \in C_k} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i'j})^2$$

## Optimeringsproblem

Vi vil *minimere* variasjon over *alle klynger*:

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{|C_k|} \sum_{i, i' \in C_k} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i'j})^2$$

Nyttig sammenhang som er grunnlaget for  $k$ -gjennomsnittsalgoritme

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \frac{1}{|C_k|} \sum_{i,i' \in C_k} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i'j})^2 \\ &= \sum_{k=1}^K 2 \sum_{i \in C_k} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - \bar{x}_{kj})^2, \end{aligned}$$

med *klyngecentroide* i klynge  $k$ :  $\bar{x}_k = (\bar{x}_{k1}, \dots, \bar{x}_{kp})$ .

## K-gjennomsnitt algoritme

- Start med å velge antall klynker  $K$ .
- Tilordne hver observasjon til en klynge
  - Mange muligheter
    - å tilfeldig velge ut  $K$  observasjoner og sette disse som klyngesentroider, og deretter tilordne de resterende observasjonene til klyngen med nærmeste klyngesentroide.
    - tilfeldig klynger
- **Repeter** (iterativt) *til ingen observasjoner endrer klyngemedlemskap:*
  1. For hver klynge regn ut klyngesentroiden
  2. Tilordne hver observasjon til klyngen til nærmeste klyngesentroide

## Illustrasjon av $K$ -gjennomsnitt algoritme ( $K = 3$ )

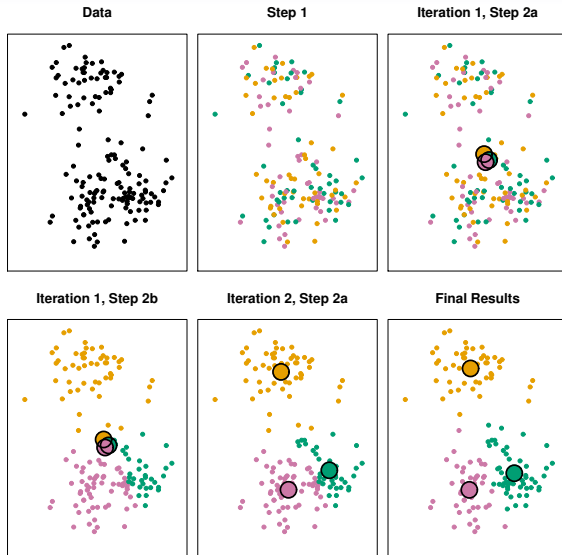


Fig. 10.6 fra “An Introduction to Statistical Learning with Applications in R”, James et al 2013.

## Python kodechunk kmeans ( $K$ -gjennomsnitt-algoritmen)

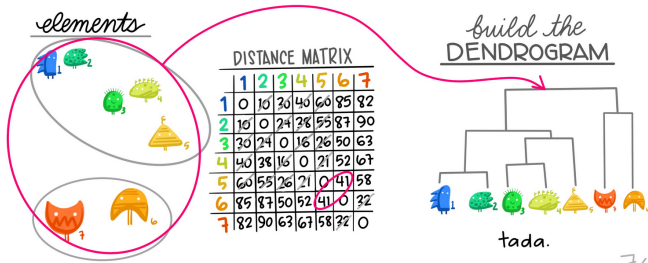
- Package:  
`from sklearn.cluster import KMeans`
- Steg 1: Antall klynger  
`antall_klynger = 10`
- Steg 2: Initialiser k-means algoritmen  
`kmeans = KMeans(n_clusters = antall_klynger,  
random_state = 1)`
- Steg 3: Tilpass modellen  
`kmeans.fit(images)`
- Sentroidene  
`sentroider = kmeans.cluster_centers_`



## Prosjektoppgaven

Vi kan se sammen på prosjektoppgaven.

# Hierarkisk klyngeanalyse

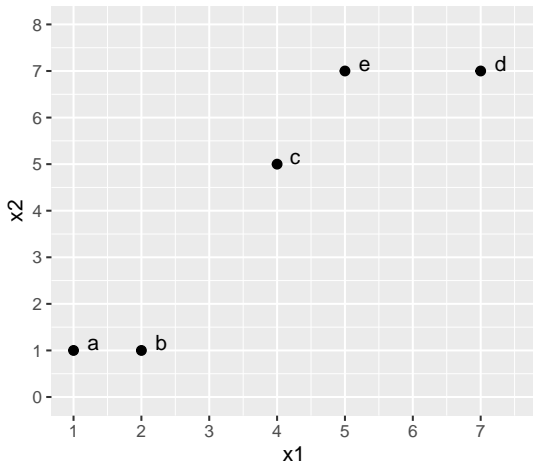


Artwork by @allison\_horst

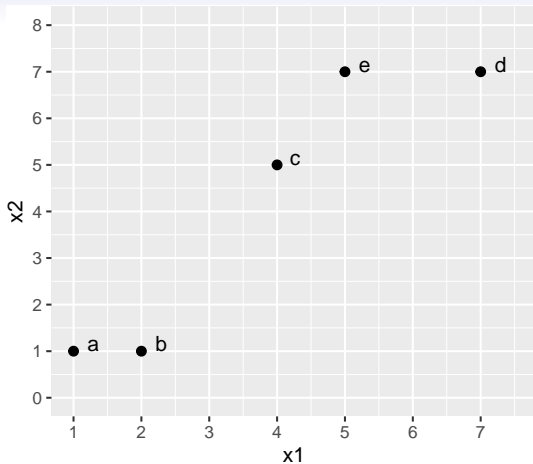
## Eksempel

$$n = 5, p = 2$$

x1	x2	name
1	1	a
2	1	b
4	5	c
7	7	d
5	7	e

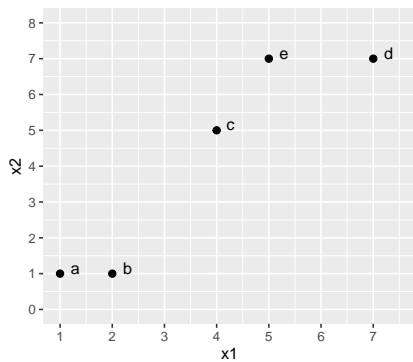


x1	x2	name
1	1	a
2	1	b
4	5	c
7	7	d
5	7	e



- 1) Velg avstandsmål.
- 2) Regn ut avstanden mellom alle par av observasjoner.
- 3) Plasser avstandene inn i en  $n \times n$  matrise.

## Avstandsmatrise (Euklidsk avstand)

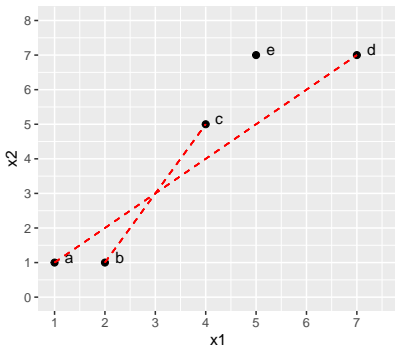


name	a	b	c	d	e
a	0.0	1.0	5.0	8.5	7.2
b	1.0	0.0	4.5	7.8	6.7
c	5.0	4.5	0.0	3.6	2.2
d	8.5	7.8	3.6	0.0	2.0
e	7.2	6.7	2.2	2.0	0.0

## Avstand mellom klynger?

Tre populære typer avstandsmål:

- **Singel kobling:** minimal avstand
- **Komplett kobling:** maksimal avstand
- **Gjennomsnittskobling:** gjennomsnittlig avstand



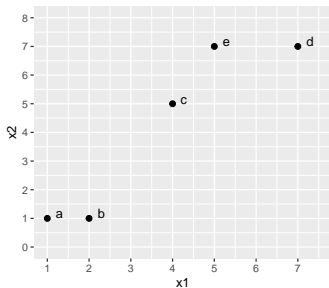
## Algoritme for hierarkisk klyngeanalyse - I

Før algoritmen starter man bestemme seg for

- hvilket avstandsmål skal brukes (f.eks: euklidsk, city block, korrelasjon,...)
- hvilken koblingstype skal brukes (f.eks: singel, komplett, gjennomsnitt, sentroide,...)

og regne ut avstandsmatrisen mellom alle observasjoner.

name	a	b	c	d	e
a	0.0	1.0	5.0	8.5	7.2
b	1.0	0.0	4.5	7.8	6.7
c	5.0	4.5	0.0	3.6	2.2
d	8.5	7.8	3.6	0.0	2.0
e	7.2	6.7	2.2	2.0	0.0



## Algoritme for hierarkisk klyngeanalyse – II

Behandle hver observasjon som om den var sin egen klynge (det er da  $n$  klynger).

### 1. Slå sammen

Finn de to klyngene som er nærmest hverandre og slå dem sammen til en klynge.

### 2. Beregn avstander

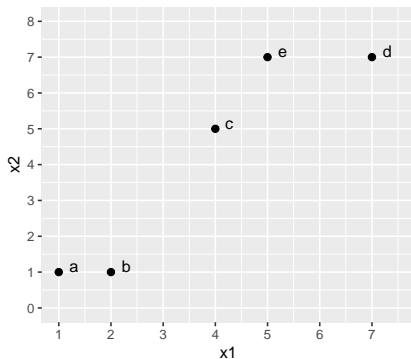
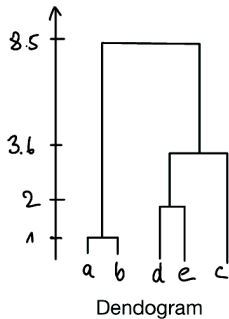
Beregn nye parvise avstander mellom alle klynger ved bruk av valgt avstandsmål og koblingstype.

Repeterer til alle observasjonene er i samme klynge.



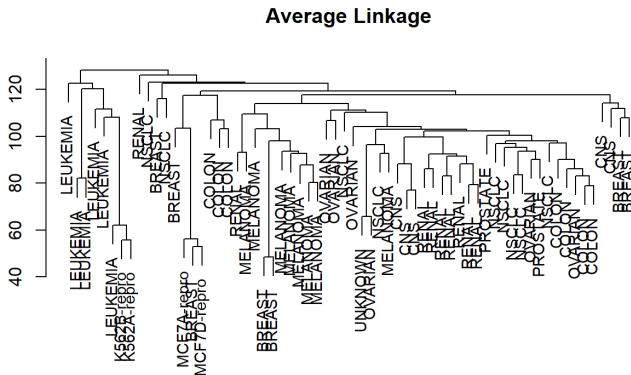
## Resultat fra vår eksempel (dendrogram)

Ved bruk av komplett kobling (maksimal avstand):



## Eksempel: Genaktivitet

- $n=64$  celleprøver fra kreftsvulster til ulike pasienter.
- genaktivitet for  $p = 6830$  gener.



## Prosjektoppgaven 3

- Hva er hovedforskjellene mellom K-gjennomsnitt-klyngeanalyse og hierarkisk klyngeanalyse?
- Hva er parameteren/parametrene på K-gjennomsnitt? På hierarkisk klyngeanalyse?
- Hvorfor har vi ikke brukt trenings-, validerings- og testsett her?

## Videre de neste to ukene

- Hvis dere ikke har gjort det: Se på de korte videoene for hvert tema.
- Jobb med prosjektoppgaven. Husk at frist for innlevering av prosjektet til Inspira er **mandag 17.november kl 12.00**.
- Vi har digital veiledning via Whereby (www.whereby.com) begge uker for Ålesund og Gjøvik. Se her:  
<https://wiki.math.ntnu.no/istx100y/2025h/1003>
- Husk også mattelab forumet – det fungerer best for korte spørsmål.