ISTx1002 Usikkerhet og støy i målinger

Grunnlager om usikkerhet og støy i målinger

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag, NTNU Trondheim

Oktober xyz 2023

Plan for i dag og tirsdag 14:15-16:00 (tema "Grunnlager")

Hvem er vi?

- **Studentene**: 8 studieprogram, omtrent 600 studenter totalt.
- **Faglig ansvarlig** for innholdet i modulen er Stefanie Muff (stefanie.muff@ntnu.no).
- I **veilederteamet** (for prosjektet) inngår i tillegg
  - Trondheim: studentassistentene xx og yy, og øvingslærer Kenneth Aase
  - Gjøvik: Charles Curry
  - Ålesund: Siebe B. van Albada

Pensum og læringsressurser

Pensum er definert som "svarene på det du blir spurt om på prosjektoppgaven" og de kan du finne ved å bruke læringsressursene.

Alle ressurser er tilgjengelig her:

https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start

Pensum del 1:

- **Korte videoer**: (by Charles H. A. Curry)
  - Standardusikkerhet (4:35 min)
  - Fordelinger (3:28 min)
  - Relative usikkerheter (3:42 min)
- Denne forelesningen
- **Disse slides** med alle notater og beregninger som er vist fram

Kilder til måleusikkerhet / målefeil

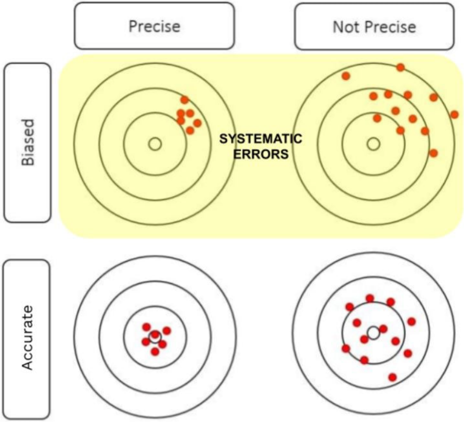
- **Upresise målinger** i feltarbeid eller labor (lengde, vekt, blodtrykk...)
- Upresisjon i apparater/instrumenter.
- Feil grunnet **ufullstendige eller skjeve observasjoner** (for eksempel selvrapporterte kostvaner, helsehistorie).
- Skjeve observasjoner grunnet **preferansebasert utvalg** eller gjentatte observasjoner.

\vspace{2mm}

- Avrundingsfeil, sifferpreferanse.
- ...

Hvilke av de er *systematiske* feil, og hva er *tilfeldig variasjon*?

Systematisk vs tilfeldig variasjon



https://www.biologyforlife.com/error-analysis.html
(todo: check the Noise book and refer to it!!)

Målinger

Hvis vi har eliminert alle systematiske påvirkninger, står vi igjen med *tilfeldig variasjon.*

En eller flere målinger

Vi kan måle

- **én gang**, eller
- **flere ganger**.

Hva er fordelen med de to strategiene?

Gjentatte målinger former et punktsverm rundt sentrum (se forrige folie).

- Det vi måler er alltid en *tilfeldig variabel*, vanligvis betegnet som X.

- Det betyr at X har en sannsynlighetsfordeling som ikke alltid er kjent (men vi ser på noen av de vanligste her).

- Hvis vi har n uavhengige målinger $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kan vi bruke gjennomsnittet som estimator for μ og den empiriske variansen som estimator for σ^2:

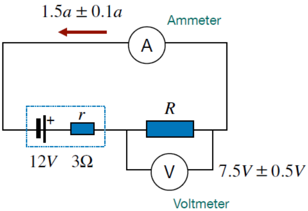
  $\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

  $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})$

Husk! Det er alltid lurt å lagre verdiene til gjentatte målinger!! (Hvorfor?)

Direkte og indirekte målinger

- **Direkte målinger:** Vi måler størrelsen vi ønsker direkte, for eksempel en vekt, temperatur, elektrisk motstand osv.
- **Indirekte målinger:** Vi måler flere størrelser og kombinerer de til en størrelse vi egentlig vil måle. Eksempel:



$$R = \frac{U}{I}$$

Andre eksempler?

Med indirekte målinger snakker vi om **målesystemer** (ikke i dag).

Måleusikkerhet

Litt terminologi...

(Her kommen en kort mentimeter session.)

- **Standard usikkerhet:** Et annet ord for "standardavvik", nemlig i fordelingen til en målestørrelse M. Vi skriver $u(M)$, men det er også greit (og jeg foretrekker egentlig) å bruke $\sigma(M)$.
- **Dekningsfaktor** k:
- **Relativ standard usikkerhet**:

$$\frac{u(M)}{M}$$

- **Standardavvik** vs **Standardfeil**:

Hvordan (be)skriver vi usikkerheten?

- En typisk måte å skrive ... her kommer skrivematen fra boken.
- Men en annen måte som vi kanskje bruker mer i statistikk er å skrive en observasjon W som en summe av den egentlige størrelsen (X) plus støy/feil (U):

$$W = X + U \ ,$$

hvor vi kan anta en egnet fordeling til U (se tema fordelinger senere).

To typer usikkerheter

I noen situasjoner er usikkerheten til et måleinstrument kjent, men i andre situasjoner må vi selv vurdere og kvantifisere usikkerhet i målingene vi gjør.

Type A: Usikkerheten finnes ved gjentatte målinger og det ukjente standardavviket kan da estimeres som $\sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})}$, som kalles for *standard usikkerhet* i måleteknikk.

Type B: Vi vet noe om usikkerheten, enten via

- antakelser
- kunnskap om variasjon (for exsempel når det gjelder avlesningsusikkerhet)
- informasjon i bruksanvisning

$\rightarrow$ Ingen gjentatte målinger nødvendig.

Når vi har en type A usikkerhet, så må vi ikke bare måle verdien, men også usikkerheten selv.

Hvordan kan vi gjøre det?

(Will write: usikkerheten (f.eks ± 3 finnes ved å ta gjentatte målinger og å bruke det empiriske standardavviket som estimator))

Eksempel: Vi måler var reaksjonstid!

For en legeattest vil vi måle din typiske reaksjonstid, men det er jo mye støy i en sånn måling. Her får du litt tid for å gjennomføre fem målinger av din reaksjonstid. Test det én eller flere runder før du noterer de fem målte tidene i google sheetsen under.

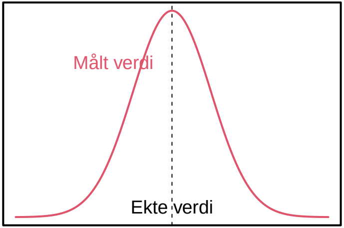
https://www.mathsisfun.com/games/reaction-time.html

Og så må de rapportere resultatene her:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jswtNl8zmIdWwjuuRKSnKzaN-M5DLFISrnCIXl17w10/edit#gid=0

Tenk over det:

- Hva er et godt estimat for din typiske reaksjonstid?
- Har du en intuitiv forståelse av hvordan de målte verdiene sprer seg rundt den "ekte" verdien? (μ)?



Og alle må beregne

- gjennomsnitt
- standardavvik

til sine egne estimater.

Så vil vi bli enige om at normalfordeingen er vel en realististisk approximasjon til feilfordelingen i måling av reaksjonstiden.

Oppgave: Finn flere situasjoner hvor en lik feilfordeling er realistisk.

Usikkerhet i en vs flere målinger

La studentene tenke over hvordan standard usikkerheten hadde forandret seg om de hadde tatt

- Bare én måling
- Ti målinger

Noen beregninger...

Fri folie for beregninger (teoretisk) og derivasjon av usikkerheten i en vs ti målinger!

- Standardavvik én måling: $\mathsf{SD}(X) = \sigma$
- Standardavviket i gjennomsnitt til 10 uavhengige målinger $X_1, \ldots, X_{10}$ – for det må vi regne med variansen!

$$\mathsf{Var}(\overline{X}) = \mathsf{Var}\left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \frac{1}{10^2}\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \frac{1}{10^2} \cdot 10 \cdot \mathsf{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{10} \ .$$

Derfor er

$$\mathsf{SD}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \ .$$

Oppgave – mentimeter

En målevariabel $M \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$. Hvor mange uavhengig målinger må tas for at gjenomsnittet av målingene blir normalfordelt med standardavvik $\sigma/2$?

www.menti.com

Standardavvik vs standardfeil

Hva er forskjellen?

- **Standardavvik** (σ^2): et mål til *spredning i en populasjon*.
- **Standardfeil (SE)** = Standardavvik i en estimator = Standard usikkerhet. Høres det for teoretisk ut?

Eksempel: Vår estimator er $\hat{\mu} = \overline{x}$, det vil si at vi tar gjennomsnittet av flere målinger for a estimere μ.

- Estimer standardavviket (spredningen) ved å bruke alle målingene.
- Estimer standardfeilen i gjennomsnittet av de fem målingene.

Spredningsintervaller

(Her kan vi tilknytte til konfidensintervall for, f.eks., gjennomsnitt i en populasjon og forklare at vi bare bytter "populasjon" med målinger av en størrelse som er konstant, men kan bare bli målt med støy/usikkerhet.) Trenger å tegne spredninger, litt som på folie 6, og så forklare at vi også antok en typisk populasjonsverdi som kan interpreteres som gjennomsnitt - her bytter vi det bare med den egentlig riktige verdien av størrelsen vi vil måle, og så er toerien den samm som før.

Og så får vi nå et 95% konfidensintervall – husk t-fordelingen (som hadde vært en normalfordeing hvis vi hadde visst standardavviket)

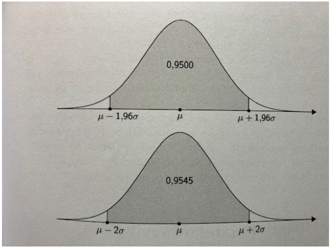
For en normalfordelt størrelse $X \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ kan vi beregne en $1-\alpha$ konfidensintervall som:

$$[\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma]\ .$$

Ofte bruker vi $\alpha = 0.05$ og får en 95% konfidensintervall med

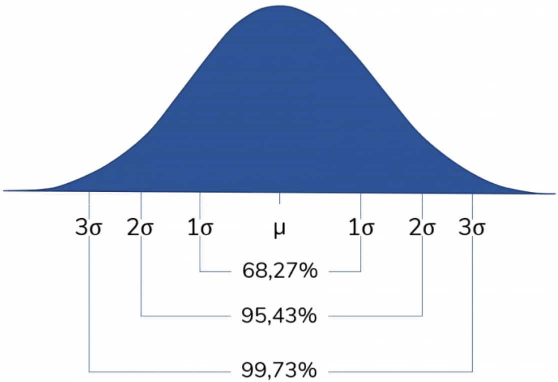
$$[\mu - 1.96 \cdot \sigma,\ \mu - 1.96 \cdot \sigma]\ ,$$

men vi bruker egentlig heller $1.96 \approx 2$.



Dekningsfaktor k

- k er tallet vi ganger usikkerheten med for å få forskjellige konfidensintervaller.
- Typisk $k = 1, 2, 3$:



https://eichhorn-coaching.de/optionstheorie-standardabweichung-normalverteilung-historische-volatilitaet/

Beregn 95% konfidensintervallet til din estimerte reaksjonstiden

- Husk at $\overline{X} \sim \mathsf{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$
- Men: vi vet jo ikke μ og σ!
- Vi må derfor estimere de to: $\hat{\mu}$ og $\hat{\sigma}$

(Vis beregning her)

Her kan vi løse eskempel 7.2 fra boken

Fordelinger

Nå har vi sett eksempler for tilfeldig støy hvor den tilfeldige målevariablen X kan bli antatt normalfordelt:

$$X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \ ,$$

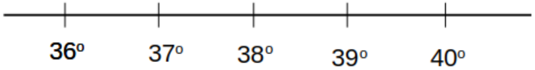
med en sann, ukjent verdi for μ og σ^2.

Men hva med avlesningsusikkerhet?

(ideen her er at studentene skjønner at avlesningsusikkerhet ikke er normalfordelt, men at vi egentlig da vet ganske my om feilfordelingen.)

Avlesningsusikkerhet

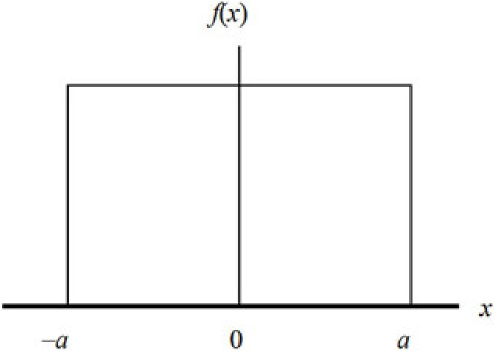
Eksempel: Vi måler temperatur med en måler som gir temperatur i hele grader.



- Hva vet du når du, for eksempel, måler 37 grad?
- Hva er oppløsningen?
- Hva er standard usikkerhet (standardavvik)?

Firkantfordeling

For å forstå hvordan man får standard usikkerheten, må vi se på firkantfordelingen:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Temperature eksempelet:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , & -37.5 \leq t \leq 38.5 \ , \\ 0 \ , & \text{ellers.} \end{cases}$$

Noen beregninger (se forelesning fra i fjor)