

ISTx1002 Usikkerhet og støy i målinger

Tipps til oppgave 4 i prosjektet

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag, NTNU Trondheim

Oktober 30, 2023

I denne oppgaven skal gruppa bruke sine egne steg som måleinstrumenter for avstand (i meter), og deretter beregne en avstand.

4a) Ettersom de færreste har en steglengde på nøyaktig 1m må hver gruppedeltakers steglengde kalibreres mot en meterstokk eller en annen gjenstand med kjent lengde. Mål opp steglengde 10 ganger for hvert gruppemedlem og regn ut gjennomsnitt og standardavvik for hver person. Beregn også standard usikkerheten i gjennomsnittet for hver person.

4b) Nå skal dere måle en avstand. Velg en rute mellom to punkter, helst et godt stykke. Hvert gruppemedlem går så ruten én etter én, og teller antall skritt (med en stegteller eller manuell telling). Finn et felles estimat på lengden til ruta dere valgte i meter, basert på de kalibrerte steglengdene deres og antall steg. Oppgi selve estimatet og usikkerheten i estimatet. Vis utregninger.

Oppgave 4a

For hver eneste person i gruppa, mål 10 ganger. Et steg kan sees som tilfeldig variabel X med

$$\underbrace{X \sim N(\mu, \sigma^2)}_{\text{hvert steg er annerledes}} .$$

varianse rundt den forventete steg lengden

- Standard usikkerhet i gjennomsnitt $\bar{x} = \hat{\mu}$ tilsvarer *standard feil i estimatet* for forventningsverdien μ .
- Eksempel: Vi måler (i cm) 67, 72, 80, 69, 71, 78, 72, 69, 70, 71

$$\begin{aligned}\hat{\mu} = \bar{x} &= 71.9 \text{ cm} \\ s^2 = \hat{\sigma}^2 &= 16.54 \text{ cm}^2 \\ s &= 4.07 \text{ cm}\end{aligned}$$

- Standard usikkerhet i \bar{x} er standard feil $\text{SD}(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{10}} = 1.29 \text{ cm}$
 $\text{SD}(\hat{\mu})$

- Oppgave 4a gir deg $\hat{\mu}$ og $SD(\hat{\mu})$.
- Det er et kalibrert estimat av din steglengde, som du kan bruke for å måle distanser du skritter av - men vær obs på at du har nå en målestokk som er litt ustødig.
- I tillegg til målestokken med usikkerhet, har du også standardavviket du må ta i betraktning for hver skritt.

2



Vi har to kilder av usikkerhet!

Oppgave 4b

- Nå må alle medlemmer i gruppa skritte av en vist rute dere har bestet dere for.
- Hvert medlem ganger antal skritt med skrittlengden som hver har fått i oppgave 4a.
- **Viktig:** For hvert medlem må dere beregne standard usikkerheten (standardavviket) i den estimerte lengden (dette er cruxen!).
- Til slutt må dere ta gjennomsnittet av *alle* målte distansene i gruppen, og angi usikkerheten i dette estimatet.

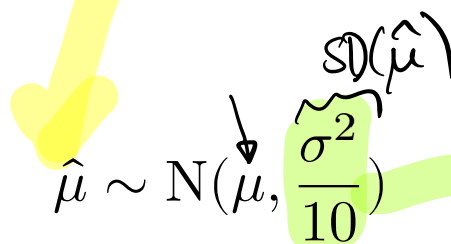
$$\left. \begin{array}{l} Y_1, u(Y_1) \\ Y_2, u(Y_2) \\ Y_3, u(Y_3) \\ Y_4, u(Y_4) \end{array} \right\} \text{ for } \underline{\text{hver!}} \text{ medlem} \xrightarrow{\text{til slutt}} \text{ta gjennomsnitt}$$

Eksempel: En skritt

Hvis vi måler en skritt, så er målestørrelsen

$$\underline{M} \sim N(\hat{\mu}, \sigma^2),$$


men

$$\hat{\mu} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{10})$$


$SD(\hat{\mu})$

Derfor er standard usikkerheten i én skritt gitt som $\sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{10}}$.

Merk: Vi bruker $\hat{\sigma}^2 = s^2$ som vi har beregnet i a), fordi vi ikke kjenner σ^2 .

Eksempel: To skritt

Regel:

$$\text{var}(M_1 + M_2) = \text{var}(M_1) + \text{var}(M_2) = \sigma^2 + \sigma^2$$

$$M_1 + M_2 \sim N(2\hat{\mu}, 2\sigma^2),$$

med

$$2\hat{\mu} \sim N(2\mu, 2^2 \cdot \frac{\sigma^2}{10})$$

$4 \cdot \frac{\sigma^2}{10}$

(hva er variansen til $2\hat{\mu}$?)

Regel: $\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X)$

Derfor er standard usikkerheten i ~~to~~ skritt gitt som

$$u(M_1 + M_2) = \sqrt{2\sigma^2 + 2^2 \cdot \frac{\sigma^2}{10}}$$

For m skritt?

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \sim \mathcal{N}(m \cdot \hat{\mu}, \text{pink box})$$

$$m \cdot \hat{\mu} \sim \mathcal{N}(m \cdot \mu, \text{green box})$$

$$v\left(\sum_{i=1}^m \mu_i\right) = \sqrt{\text{pink box} + \text{green box}}$$

Siste steg

der estimerte
lengder til rutene

- Alle medlemmer har nå estimert lengden fra sine egne steg. Hvis det er for eksempel 4 medlem, får vi 4 estimerte lengder Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , og 4 standard usikkerheter tilknyttet til de: $u(Y_1), u(Y_2), u(Y_3), u(Y_4)$.
- Til slutt må dere ta gjennomsnittet mellom alle estimatene og angi usikkerheten i dette sluttestimateret.
- Merk at usikkerheten i estimatet av hver person er annerledes, og det må tas i betraktning.

standard usikkerhet

$$f(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \frac{1}{4} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \Rightarrow u(f(\dots)) = ?$$

↑ bruk de kjente reglene!