

# ISTx1002 Usikkerhet og støy i målinger

Grunnlag om usikkerhet og støy i målinger

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag, NTNU Trondheim

Oktober 23 og 24, 2023

# Hva dreier seg denne modulen om?

- Kan vi stole på resultatet av en måling?
- Hvor stor er usikkerheten eller feilen i en måling?
- Kan statistikk hjelpe oss til å handtere det?



**Tema 1:** Grunnlager om usikkerhet og støy i målinger

**Tema 2:** Feilforplantning i målesystemer, kalibrering

**Tema 3:** Usikkerhet og feil i variabler i lineær regresjon

## Læringsmål (av modulen)

Etter du har gjennomført denne modulen skal du:

- ha forståelse for usikkerhet og feil i målinger av enkle variabler av interesse, og hvordan man kvantifiserer og rapporterer denne usikkerheten på en meningsfull måte.
- kjenne til de mest grunnleggende feilfordelingene og hvordan man beregner deres varianser.
- vite hvordan man håndterer og beregner usikkerhet for transformerte variabler.
- kjenne til hvordan man håndterer og beregner usikkerhet ved lineære og ikke-lineære kombinasjoner av feilmålte variabler (feilpropagering).
- være i stand til å utføre de nødvendige beregningene.
- forstå grunnlager om kalibrering og kunne gjennomføre en enkel kalibrering selv.
- forstå effekten av usikkerhet/målefeil i kovariater i lineære regresjonsmodeller.
- være i stand til å korrigere parameterestimaterne i lineær regresjon når kovariater med målefeil brukes.

## Organisasjon

- Forelesninger på zoom mandag 15.15-16.00 og tirsdag 14.15-16.00 (første to uker)
- Temavideoer
- Øvingstimer – se på kurssiden
- Gruppearbeid (3-6)
- Innleveringsfrist prosjektoppgave: **mandag 20. november 2023 kl 12.00**

Den eksterne kurssiden:

<https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start>

# Prosjektoppgaven

- Vi ser hvor informasjonen ligger på Blackboard og på den eksterne nettsiden:

<https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start>

- Vi ser på prosjektoppgaven på <https://github.com/imfdrift/istx100y2023>.
- Karakteren teller 30% til den endelige karakteren.
- Vi bruker prosentvurderingsmetoden: Konverterer poengene i en % (heltall, avrundet) og så bruker vi følgende skala:

Karakterskala for prosentvurderingsmetoden :

A: 89-100 poeng

B: 77-88 poeng

C: 65-76 poeng

D: 53-64 poeng

E: 41-52 poeng

F: 0-40 poeng

# Hvem er vi?

- **Studentene:** 8 studieprogram, omtrent 600 studenter totalt.
- **Faglig ansvarlig** for innholdet i modulen er Stefanie Muff ([stefanie.muff@ntnu.no](mailto:stefanie.muff@ntnu.no)).
- I **veilederteamet** (for prosjektet) inngår i tillegg
  - Trondheim: øvingslærer Kenneth Aase og studentassistent Oscar Ovanger
  - Gjøvik: Stine Marie Berge
  - Ålesund: Siebe B. van Albada



# Pensum og læringsressurser

Pensum og læringsressurser del 1:

- **Korte videoer:** (by Charles H. A. Curry)
  - Standardusikkerhet (4:35 min)
  - Fordelinger (3:28 min)
  - Relative usikkerheter (3:42 min)
- Denne forelesningen
- **Disse slides** med alle notatene og beregningene som er vist fram

Alt ligger på den eksterne kurssiden:

<https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start>

I tillegg vil jeg bruke litt materialier fra denne boken:



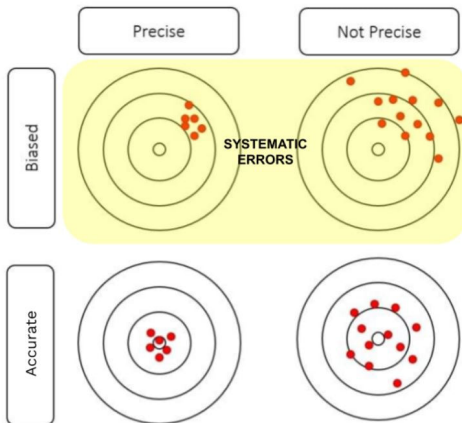
- Dere trenger ikke å kjøpe boken.
- Alt dere trenger blir diskutert i forelesningen.

## Kilder til måleusikkerhet / målefeil

- **Upresise målinger** i feltarbeid eller labor (lengde, vekt, blodtrykk...)
- Upresisjon i apparater/instrumenter.
- Feil grunnet **ufullstendige eller skjeve observasjoner** (for eksempel selvrapporterte kostvaner, helsehistorie).
- Skjeve observasjoner grunnet **preferansebasert utvalg** eller gjentatte observasjoner.
- Avrundingsfeil, sifferpreferanse.
- ...

Hvilke av de er *systematiske* feil, og hva er *tilfeldig variasjon*?

## Systematisk vs tilfeldig variasjon



<https://www.biologyforlife.com/error-analysis.html>

# Målinger

Hvis vi har eliminert alle systematiske påvirkninger, står vi igjen med *tilfeldig variasjon*.

## En eller flere målinger

Vi kan måle

- **én gang**, eller
- **flere ganger**.

Hva er fordelene med de to strategiene?

Gjentatte målinger former et punktsverm rundt sentrum (se forrige folie).

- Det vi måler er alltid en *tilfeldig variabel*, vanligvis betegnet som  $X$ .
- Det betyr at  $X$  har en sannsynlighetsfordeling som ikke alltid er kjent (men vi ser på noen av de vanligste her).
- Hvis vi har  $n$  uavhengige målinger  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kan vi bruke gjennomsnittet som estimator for  $\mu$  og den empiriske variansen som estimator for  $\sigma^2$ :

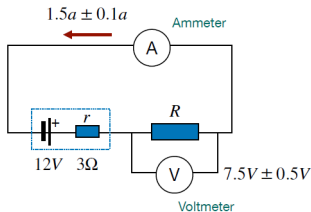
$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Husk! Det er alltid lurt å lagre verdiene til gjentatte målinger!!  
(Hvorfor?)

## Direkte og indirekte målinger

- **Direkte målinger:** Vi måler størrelsen vi ønsker direkte, for eksempel en vekt, temperatur, elektrisk motstand osv.
- **Indirekte målinger:** Vi måler flere størrelser og kombinerer de til en størrelse vi egentlig vil måle (vi an målefunktion).  
Eksempel:



$$R = \frac{U}{I}$$

Andre eksempler?

Med indirekte målinger snakker vi om **målesystemer** (ikke i dag).

## Måleusikkerhet

Litt terminologi...

- **Standard usikkerhet:** Et annet ord for “standardavvik”, nemlig i fordelingen til en *målestørrelse*  $M$ . Vi skriver

$$u(M) ,$$

men det er også greit (og jeg foretrekker egentlig) å bruke  $\sigma(M)$ .

- **Dekningsfaktor  $k$ :** Ofte gir vi et intervall omkring måleresultatet som et multiplum  $k$  av standardusikkerhet. Usikkerhet gis da som  $k \cdot u(M)$ .
- **Relativ standard usikkerhet:**

$$\frac{u(M)}{M}$$



Vi går til **www.menti.com**

- Vi har målt en spenning på  $U = 100V$  og det angis et intervall mellom 90V og 110V med en dekningsfaktor  $k = 2$ . Hva er da standard usikkerheten  $u$  i målingen?
- Vi måler lengden til et objekt med  $l = 1m$  og vet at  $u(l) = 2cm$ . Hva er den *relative usikkerheten* i denne målingen?

## Hvordan (be)skriver vi usikkerheten?

- En typisk måte å skrive usikkerheten er jo som sagt ved bruk av  $u(M) = \sigma(M)$ , eller som et intervall  $M \pm k \cdot u(M)$  med dekningsfaktor  $k$ .
- Men en annen måte som vi kanskje bruker mer i statistikk er å skrive en observasjon  $W$  som en summe av den egentlige størrelsen ( $X$ ) plus støy/feil ( $U$ ):

$$W = X + U ,$$

hvor vi kan anta en egnet fordeling til  $U$  (se tema “fordelinger” senere).

## To typer usikkerheter

I noen situasjoner er usikkerheten til et måleinstrument kjent, men i andre situasjoner må vi selv vurdere og kvantifisere usikkerheten i målingene vi gjør.

**Type A:** Usikkerheten finnes ved gjentatte målinger og det ukjente standardavviket kan da estimeres som

$$\hat{u}(x) = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

som kalles for *standard usikkerhet* i måleteknikk.

**Type B:** Vi kjenner usikkerheten  $u(x)$  presist, enten via

- antakelser
- kunnskap om variasjon (for eksempel når det gjelder avlesningsusikkerhet)
- informasjon i bruksanvisning

→ Ingen gjentatte målinger nødvendig.

Når vi har en type A usikkerhet, så må vi ikke bare måle verdien, men også usikkerheten selv.

Hvordan kan vi gjøre det?

Når vi har en type A usikkerhet, så må vi ikke bare måle verdien, men også usikkerheten selv.

Hvordan kan vi gjøre det?

Idé: Standard usikkerheten finnes ved å ta gjentatte målinger og å bruke det empiriske standardavviket som estimator.

## Eksempel: Vi måler vår reaksjonstid!

- For en legeattest vil vi måle din typiske reaksjonstid, men det er jo mye støy i en sånn måling. Her får du litt tid for å gjennomføre fem målinger av din reaksjonstid. Test det én eller flere runder før du noterer de fem målte tidene (i millisekunder) i google sheetsen under.
- Til slutt ønsker vi at du noterer et anslag for hvor mange timer so sov i natt.

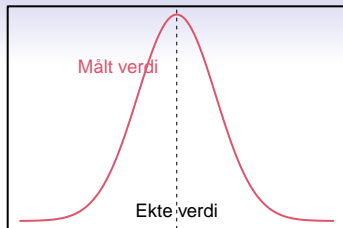
<https://www.mathsisfun.com/games/reaction-time.html>

Og så må de rapportere resultatene her:

[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jswtNl8zmIdWwjuuRKS\\_nKzaN-M5DLFISrnCIXl17w10/edit#gid=0](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jswtNl8zmIdWwjuuRKS_nKzaN-M5DLFISrnCIXl17w10/edit#gid=0)

## Tenk over det:

- Hva er et godt estimat for din typiske reaksjonstid?
- Har du en intuitiv forståelse av hvordan de målte verdiene sprer seg rundt den “ekte” verdien ( $\mu$ )?

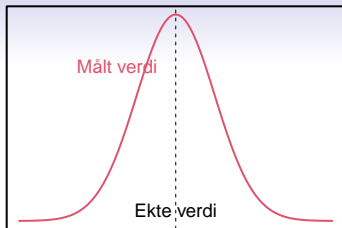


Alle må beregne

- gjennomsnitt
- standardavvik

til sine egne resultater.





Alle må beregne

- gjennomsnitt
- standardavvik

til sine egne resultater.

Her kan vi jobbe med mine tider: 256, 287, 257, 302, 299 ms.

$$\bar{x} = \frac{256 + 287 + 257 + 302 + 299}{5} = 280.2$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} ((256 - 300.2)^2 + (287 - 300.2)^2 + \dots)} = 22.35$$

Har vi blitt enige om at normalfordelingen er vel en realistisk approximasjon til feilfordelingen i måling av reaksjonstiden?

**Oppgave:** Finn flere situasjoner hvor en lik feilfordeling er realistisk.

# Usikkerhet i én vs flere målinger

Tenk over hvordan standard usikkerheten hadde forandret seg om vi hadde tatt

- Bare én måling
- Ti målinger

Forskjellen mellom

- Usikkerheten i en eneste måling
- Usikkerheten i gjennomsnittet av flere målinger

Noen beregninger...

## Usikkerheten i en enkel måling vs gjennomsnitt



## Oppgave – mentimeter

En målevariabel er antatt  $M \sim N(0, \sigma^2)$ . Hvor mange uavhengige målinger må tas for at gjennomsnittet av målingene blir normalfordelt med standardavvik  $\sigma/2$ ?

[www.menti.com](http://www.menti.com)

## Standardavvik vs standardfeil

Hva er forskjellen?

- **Standardavvik** ( $\sigma$ ): et mål til *spredning i en populasjon*.
- **Standardfeil (SE)** = Standardavvik i en estimator = Standard usikkerhet. Høres det for teoretisk ut?

**Eksempel:** Vår estimator er  $\hat{\mu} = \bar{x}$ , det vil si at vi tar gjennomsnittet av flere målinger for å estimere  $\mu$ .

- Estimer standardavviket (spredningen) ved å bruke alle målingene.
- Estimer standardfeilen i gjennomsnittet av de fem målingene.

# Spredningsintervaller

- Vi ønsker ofte å angi et intervall slik at det for eksempel dekker den ekte verdien i 95% av tilfellene.
- I den første delen av kurset var det gjennomsnittet i en populasjon dere var interessert i.
- Her bytter vi “populasjon” med en størrelse som har en “riktig verdi”, men som er vanskelig å måle. Vi tar gjentatte målinger for å få informasjon om spredningen og hvordan målingene fordeler seg rundt den ekte verdien.



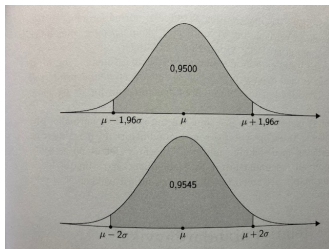
For en normalfordelt størrelse  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  kan vi beregne et  $1 - \alpha$  konfidensintervall som:

$$[\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma] .$$

Ofte bruker vi  $\alpha = 0.05$  og får et 95% konfidensintervall med

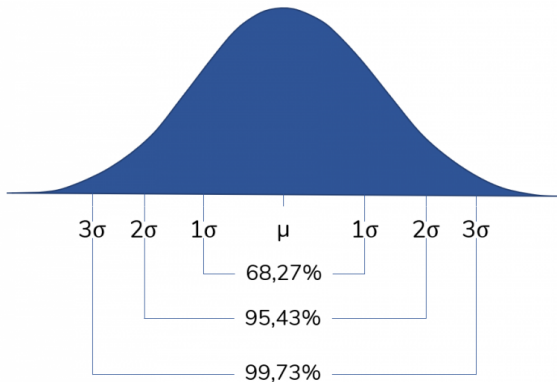
$$[\mu - 1.96 \cdot \sigma, \mu + 1.96 \cdot \sigma] ,$$

men vi bruker egentlig heller  $1.96 \approx 2$ .



## Dekningsfaktor $k$

- $k$  er tallet vi ganger standard usikkerheten med for å få forskjellige spredningsintervaller.
- Typisk  $k = 1, 2, 3$ :



<https://eichhorn-coaching.de/optionstheorie-standardabweichung-normalverteilung-historische-volatilitaet/>

## Beregn 95% konfidensintervallet til din estimerte reaksjonstiden

- Husk at  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- Derfor er et 95% konfidensintervall gitt som

$$\left[ \mu - \underbrace{z_{0.975}}_{=1.96} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \mu + z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- Men: vi vet jo ikke  $\mu$  og  $\sigma$ !
- Vi har derfor estimert de to:  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$ , og 95% konfidensintervallet er dermed gitt som

$$\left[ \bar{x} - t_{0.975, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + t_{0.975, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

hvor  $s$  er standardavviket i vårt utvalg av  $n$  gjentatte målinger.

*Merk at  $z$ -verdien har blitt byttet med  $t$ -verdien.*

Beregn 95% konfidensintervallet til din estimerte reaksjonstiden

## Eksempel

En standard motstand viser måleverdien på  $R_s = 10\Omega$  (ohm).  
Produsenten angir at verdien da ligger i et 99% konfidensintervall  $\pm 135\mu\Omega$ .

- Hvis vi antar at måleusikkerheten sprer seg normalfordelt, hva er standard usikkerheten i målingen da?
- Hva er den relative standardusikkerheten?

# Fordelinger

Nå har vi sett eksempler for tilfeldig støy hvor den tilfeldige målevariablen  $X$  kan bli antatt normalfordelt:

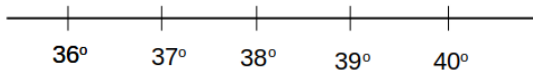
$$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) ,$$

med en sann, ukjent verdi for  $\mu$  og  $\sigma^2$ .

Men hva med avlesningsusikkerhet?

## Avlesningsusikkerhet

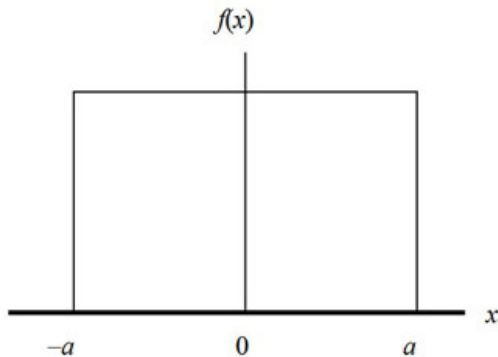
Eksempel: Vi måler temperatur med en måler som gir temperatur i hele grader.



- Hva vet du når du, for eksempel, måler 38 grad?
- Hva er oppløsningen?
- Hva er standard usikkerhet (standardavvik)?

## Firkantfordeling

For å forstå hvordan man får standard usikkerheten, må vi se på firkantfordelingen:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



## Firkantfordeling

Forventningsverdi og varians ( $\sigma^2$ ); standardavvik ( $\sigma$ ):

Temperatureksempel:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 37.5 \leq t \leq 38.5, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$