ISTx1002 Usikkerhet og støy i målinger

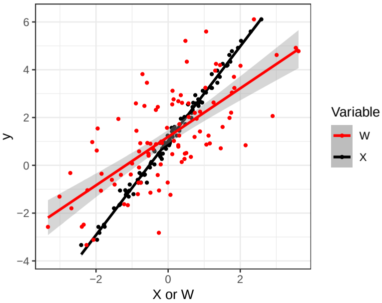
Usikkerhet og feil i variabler i regresjon

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag, NTNU Trondheim

Oktober 31 2023

Plan for i dag

- Lineær regresjon
- Klassisk målefeil i en forklaringsvariabel
- To strategier for å handtere målefeil:
  - Med en analytisk formel → Attenueringsfaktor
  - Med en heuristisk idé → SIMEX



Pensum og læringsressurser

Husk lenken til den eksterne modulsiden:

https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start

Pensum del 3:

- Denne forelesningen
- **Disse slides** med alle notater og beregninger som er vist fram
- Shiny app: https://stefaniemuff.shinyapps.io/MEC_ChooseL/

Oversikt

- Usikkerhet og målefeil i en variabel (x) i en enkel lineær regresjon.
- Effekt av usikkerhet og målefeil i regresjon.
- Når bør man være bekymret?
- Enkle metoder for å korrigere for usikkerhet og feil i en regresjonsvariabel.
- Vi skal finne ut på hvordan målefeil i våre reaksjonstider påvirker en regresjon hvor vi vil forstå sammenheng mellom reaksjonstid og timer søvn:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jswtNl8zmIdWwjuuRKSnKzaN-M5DLFISrnCIXl17w10/edit#gid=0

Kilder til usikkerheit og målefeil i regresjonsvariabler.

- **Upresise målinger** i feltarbeid eller labor (lengde, vekt, blodtrykk...)
- Feil grunnet **ufullstendige eller skjeve observasjoner** (for eksempel selvrapporterte kostvaner, helsehistorie).
- Skjeve observasjoner grunnet **preferansebasert utvalg** eller gjentatte observasjoner.
- Avrundingsfeil, sifferpreferanse.
- **Feilklassifisering** (for eksempel feil i eksponerings- eller sykdomsklassifisering).

Merk: "Feil" og "usikkerhet" er ofte brukt synonymt.

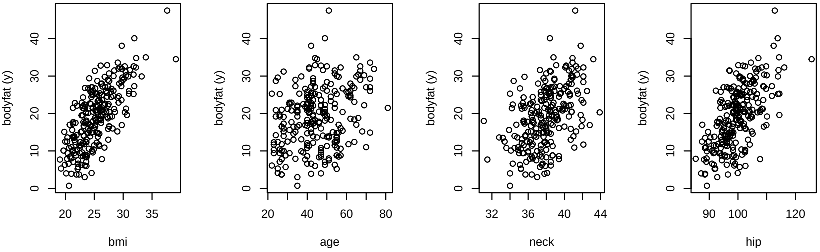
Lineær regresjon - hva var det igjen for noe?

Motiverende eksempel

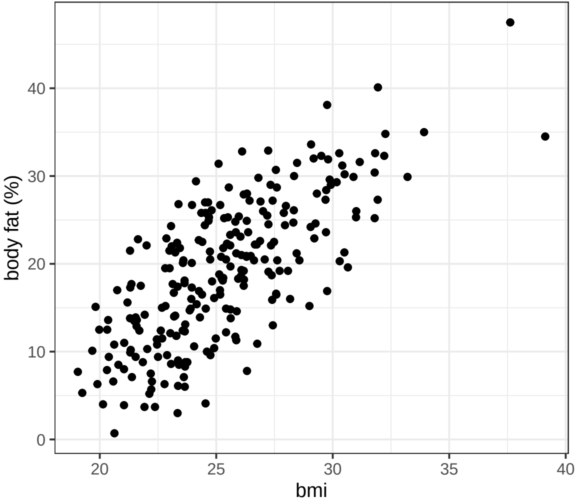
- Kropssfett er en viktig indikator for overvekt, men vanskelig å måle.

Spørsmål: Hvilke faktorer tillater præsis estimering av kroppsfettet?

Vi undersøker 243 mannlige deltakere. Kroppsfett (%), BMI og andre forklaringsvariabler ble målet. Kryssplott:



Vi begynner med *enkel lineær regresjon* (regresjon med bare en forklaringsvariabel):



Enkel lineær regresjon

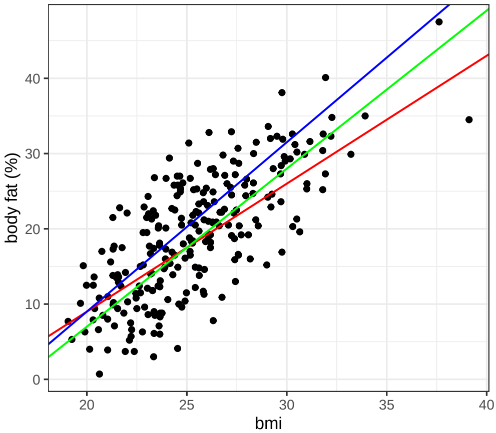
- En kontinuerlig responsvariabel Y
- Bare *en forklaringsvariabel* x
- Relasjon mellom Y og x er antatt å være *lineær*.

Hvis den lineære relasjonen mellom Y og x er perfekt, så gjelder

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

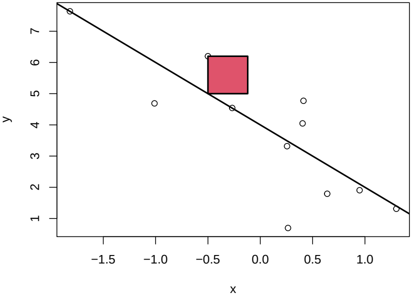
for alle i. Men..

Hvilken linje er best?



Enkel lineær regresjon

a) Kan vi tilpasse den “rette” eller “beste” linjen til dataene?



- $\widehat{y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$.
- $\widehat{e}_i = \widehat{y}_i - y$
- $\widehat{\beta}_0$ og $\widehat{\beta}_1$ velges slik at

$$SSE = \sum_i \widehat{e}_i^2$$

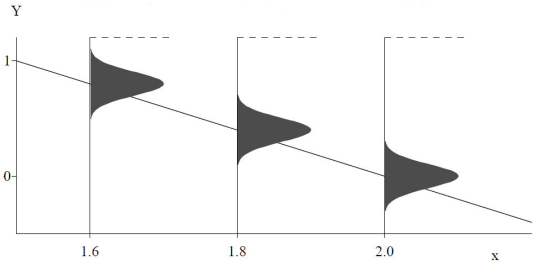
minimeres.

Lineær regresjon – fundamentale antakelser

$$Y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i}_{\hat{y}_i} + \varepsilon_i$$

med

$$\varepsilon_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2) \ .$$



Gjør vi andre antagelser for en lineær regresjonsmodell?

Ja! Men hvilke?

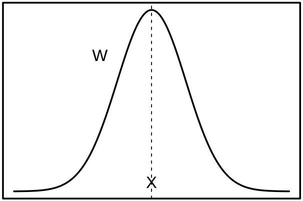
www.menti.com

“Klassisk” målefeil

Kanskje det mest vanlige tilfelle av feil og usikkerhet er så-kalt *klassisk målefeil*.

Vi vil måle størrelsen X, men vi kan bare måle W med feil U:

$$\begin{aligned} W &= X + U \\ U &\sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \quad . \end{aligned}$$



Eksempel: Måling av vår reaksjonstid, upresise målinger av en konsentrajon, en vekt etc.

Men hva skjer hvis variabel x har målefeil/usikkerhet, og inngår som forklaringsvariabel i en regresjon?

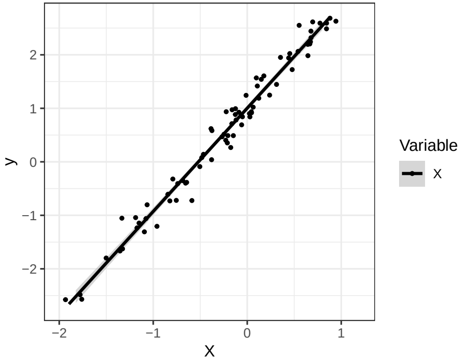
Du kan se selv:

https://stefaniemuff.shinyapps.io/MEC_ChooseL/

Illustrasjon

Vi genererer data som samsvarer med modellen nedenfor, og så vil vi estimere β_0 og β_x. Vi vet at $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_x^2)$ med $\sigma_x^2 = 1$, og

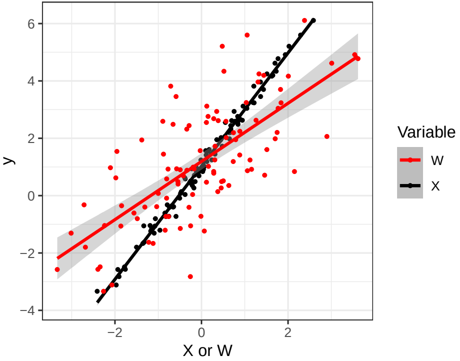
$$Y = \underbrace{1}_{\beta_0} + \underbrace{2}_{\beta_x} \cdot X + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \quad \text{med} \quad \sigma^2 = 1 \ .$$



Illustrasjon, del II

Det dumme er at vi ikke kjenner X, men bare en upresis versjon W som vi kan bruke som forklaringsvariabel:

$$W = X + U \ , \qquad U \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \quad \text{med } \sigma_u^2 = 0.8 \ .$$

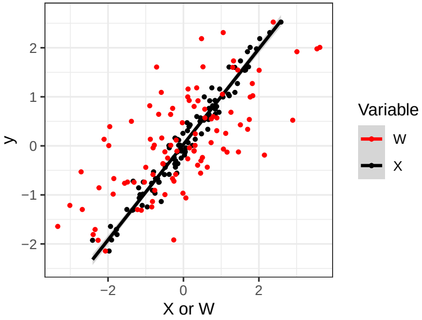


Den “tredoble utfordringen med målefeil’ ’
(Carroll et al., 2006}

1. Skjevhet (bias): Inkludering av feilaktige variabler i etterfølgende analyser kan føre til skjeve estimater av parameter.

2. ME fører til en tap av styrke (power) for å oppdage signaler.

3. ME skjuler viktige egenskaper ved dataene, noe som gjør det vanskelig å inspisere grafiske modeller.



Hvordan kan vi handtere målefeil i en regressjonsvariabel?

- Generelt sett hjelper det når man har en idé hvordan feil og usikkerhet oppstår.
- Konkret trenger vi en **feilmodell** og kunnskap om **parametrene** i feilmodellen.

Eksempel: For klassisk målefeil $W = X + U$ med $U \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$ trenger vi kunnskap om variansen σ_u^2.

Mulige Strategier:

1) Ta gjentatte målinger (som for reaksjonstiden), så kan du estimere variansen (i.e., usikkerheten).
2) Bruk kunnskap om modellen og usikkerheten i X for å korrigere feilen i regresjonsparametrene (særlig i β_x).

En formel for å handtere et enkelt tilfelle

Vi fortsetter med klassisk målefeil i lineær regresjon $y = \beta_0 + \beta_x x + \varepsilon_i$ hvor vi dessverre bare måler en feilaktig versjon $w = x + u$.

Siden vi ikke kjenner x, har vi i første omgang ikke noe annet valg enn å bruke w og tilpasse en modell gitt som

$$y = \beta_0^\star + \beta_x^\star w + \varepsilon_i \ .$$

Er det en god idé?

Vi har jo sett at parameteren $\beta_x^\star < \beta_x$, og det viser seg at den forventete verdien reduseres med en faktor $\lambda < 1$

$$\mathrm{E}[\beta_x^\star] = \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}}_{\lambda} \beta_x \ , \tag{1}$$

hvor λ heter attenueringsfaktor.

Oppgave:

- Se igjen på eksempelet vi brukte for illustrasjon. Hvor mye reduksjon forventer vi i estimaten til stigningstallet β_x?
- I praksis har vi jo *ikke* tilgang til de ekte verdiene x, men kjenner bare de med usikkerhet w. Hvordan kan du bruke kunnskapet om formel (1) for å finne en korrigert versjon for estimaten av β_x?

Utregning:

Desssverre finnes det ikke mange tilfeller hvor vi har noe som formel (1).

En heuristisk idé: Simulation Extrapolation (SIMEX)

Foreslatt av Cook og Stefanski (1994).

SIMEX består av to faser:

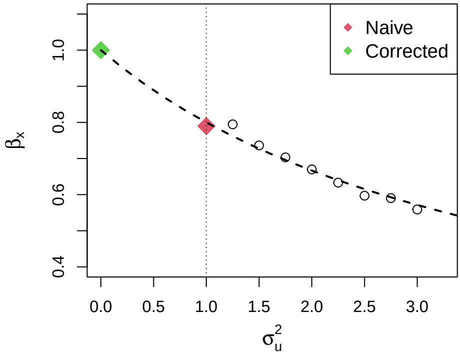
- **Fase 1: Simulasjon.** Usikkerheten i dataene (x variable) blir gradvis økt for å forstå hvordan størrelsen av interesse (vanligvis en regresjonsparameter/stigningstall β_x) påvirkes av feilen/usikkerheten.
- **Fase 2: Ekstrapolasjon.** Den observerte trenden ekstrapoleres deretter *tilbake* til en hypotetisk feilfri verdi.

Illustrasjon av SIMEX ideen

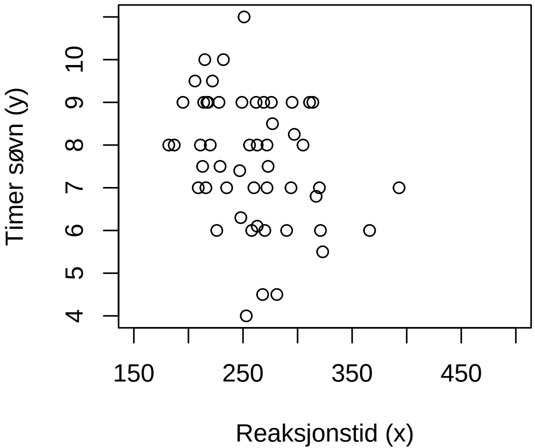
Størrelsen av interesse: β_x (stigningstall i en regresjon).

Problem: Forklaringsvariablen x er målt med usikkerhet:

$$w = x + u \ , \quad u \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \ .$$



Exsempel 1: Våre reaksjonstider



Modell:

$$y_i = \beta_0 + \beta_x x_i + \varepsilon_i \ , \quad \varepsilon_i = \mathrm{N}(0, \sigma^2) \ ,$$

med x_i=timer søvn, og x_i=reaksjonstid til person i, målt i 3. omgang.

Problemet: Vi vet jo at reaksjonstiden er ganske unøyaktig og har mye målefeil i seg. Vi kan estimere feilvariansen (det har jeg gjort for dere ved bruk av deres data), or resultatet blir

$$\sigma_u^2 = 565 \; .$$

For å bruke SIMEX proseduren, antar vi jo

$$w_i = x_i + u_i \; , \quad u_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \; .$$

Det er en ganske plausibel antakelse, og så bruker vi SIMEX proseduren!

Vi sammenligner

- en regresjon hvor vi bruker reaksjonstiden ved 3. måling som forklaringsvariable, med
- en korrigert versjon som vi får etter vi anvender SIMEX proseduren.

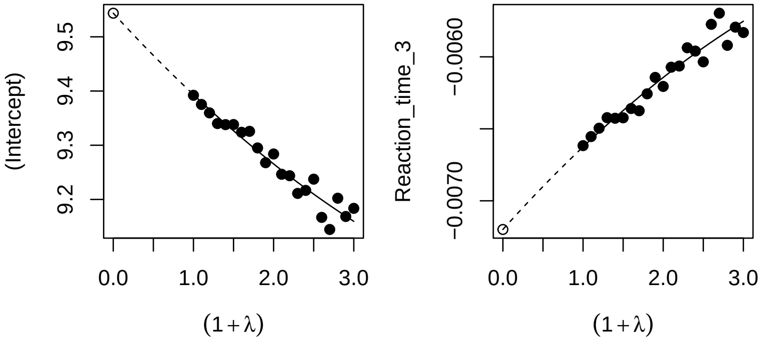
Naiv resultat med med feilaktig BMI:

```
##                    Estimate  Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)      9.392168756 0.669439617 14.029897 3.852253e-19
## Reaction_time_3 -0.006616798 0.002374351 -2.786782 7.458553e-03
```

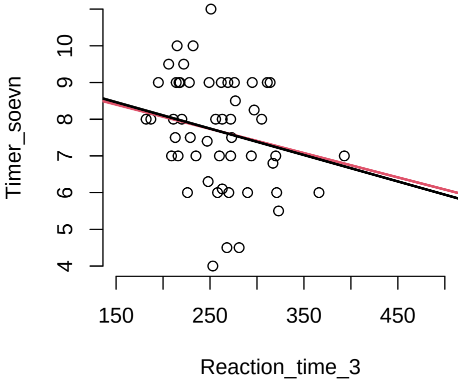
Estimater etter SIMEX-korrekturen ble anvendt:

```
##                    Estimate  Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)      9.543600821 0.559054066 17.070980 9.805241e-23
## Reaction_time_3 -0.007199182 0.001912446 -3.764384 4.328353e-04
```

Se på grafiske resultater med en kvadratisk ekstrapolasjonsfunksjon:



Uten (rødt) og med korrektur (svart):



Interpretasjon av resultatet?

Eksempel 2: Sammenheng av BMI og kroppsfett

Vi ser igjen på en regresjonsmodell med kroppsfett som respons (y) og BMI som forklaringsvariabel x:

$$y_i = \beta_0 + \beta_x x_i + \varepsilon_i \ , \quad \varepsilon_i = \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

med
$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{100})^\top$: variabel med % kroppsfet målt ved 100 personer.

Problemet: BMI-en ble selvrapportert og har derfor målefeil! Ikke x_i blir observert, men heller

$$w_i = x_i + u_i \ , \quad u_i \sim \mathrm{N}(0, 4) \ .$$

$\rightarrow$ Bruk SIMEX proseduren!

Vi sammenligner

- en regresjon hvor vi bruker den feilaktige BMI-en som forklaringsvariabel, med
- en korrigert versjon som vi får etter vi anvender SIMEX proseduren.

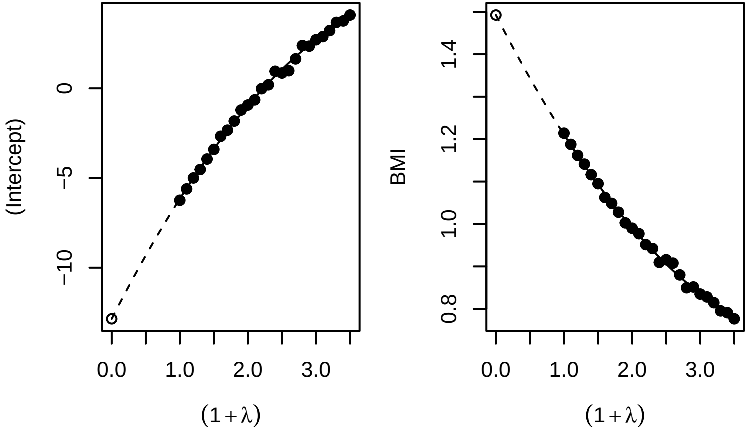
Naiv resultat med med feilaktig BMI:

```
##              Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -6.240988 2.12868299 -2.931854 4.194014e-03
## BMI          1.214017 0.08860899 13.700829 1.673886e-24
```

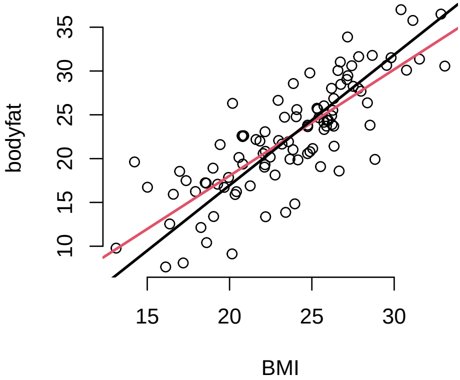
Estimater etter SIMEX-korrekturen ble anvendt:

```
##               Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -12.851018  3.1273875 -4.109186 8.247864e-05
## BMI           1.492441  0.1275759 11.698449 2.632916e-20
```

Se på grafiske resultater med en kvadratisk ekstrapolasjonsfunksjon:



Uten (rødt) og med korrektur (svart):



Multippel lineær regresjon

Nesten det samme some enkel lineær regresjon, vi bare summerer flere forklaringsvariabler:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_p x_p + \varepsilon_i \ , \quad \varepsilon_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2) \ .$$

For eksempel:

$$\text{bodyfat}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{bmi}_i + \beta_2 \text{age}_i + \varepsilon_i \ .$$

Hva skjer hvis en variabel i en *multippel regresjon* har usikkerhet?

Exsempel: Vi ser igjen på en regresjonsmodell med kroppsfett som respons (y) og BMI (x) som forklaringsvariabel, men nå har vi i tillegg også kjønn (z) som forklaringsvariabel:

$$y_i = \beta_0 + \beta_x x_i + \beta_z z_i + \epsilon_i \ , \quad \epsilon_i = \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

med $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x}$ som før, med

$$w_i = x_i + u_i \ , \quad u_i \sim \mathrm{N}(0, 4) \ ,$$

og den binære variabeln $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{100})^\top$ som indikerer om person i er en mann ($z_i = 1$) eller en kvinne ($z_i = 0$).

Vi sammenligner igjen

- en regresjon hvor vi bruker den feilaktige BMI-en som forklaringsvariabel, med
- en korrigert versjon fra SIMEX.

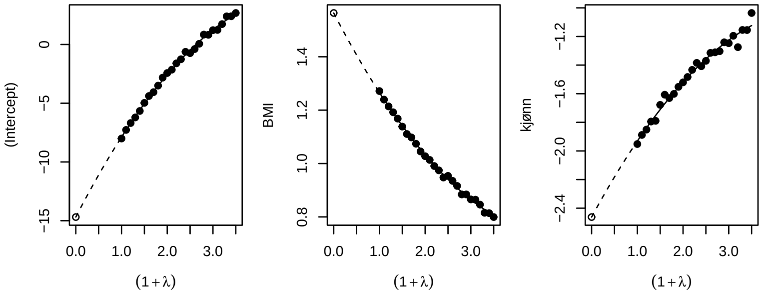
Naiv resultat med feilaktig BMI::

```
##              Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -8.003714 2.07060335 -3.865402 2.005407e-04
## BMI          1.271558 0.08821382 14.414504 7.478782e-26
## kjønn       -1.951735 0.73625960 -2.650879 9.376840e-03
```

Estimater etter SIMEX-korrekturen ble anvendt:

```
##               Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -14.689940  2.6954519 -5.449899 3.825138e-07
## BMI           1.564059  0.1159075 13.494022 5.467540e-24
## kjønn        -2.462127  0.7906688 -3.113980 2.426632e-03
```

Grafiske resultater med kvadratisk ekstrapolasjonsfunksjon:



Merk: Variabelen `kjønn` har ikke blitt feilmålt, likevel er stigningstallet påvirket av feilen i BMI!

Grunn: `kjønn` og BMI er korrelert.