ISTx1002 Usikkerhet og støy i målinger

Grunnlager om usikkerhet og støy i målinger

Stefanie Muff, Institutt for matematiske fag, NTNU Trondheim

Oktober 23 og 24, 2023

Hva dreier seg denne modulen om?

- Kan vi stole på resultatet av en måling?
- Hvar stor er usikkerheten eller feilen i en måling?
- Kan statistikk hjelpe oss til å handtere det?

Tema 1: Grunnlager om usikkerhet og støy i målinger

Tema 2: Feilforplantning i målesysemer, kalibrering

Tema 3: Usikkerhet og feil i variabler i lineær regresjon

Læringsmål (av modulen)

Etter du har gjennomført denne modulen skal du:

- ha forståelse for usikkerhet og feil i målinger av enkle variabler av interesse, og hvordan man kvantifiserer og rapporterer denne usikkerheten på en meningsfull måte.
- kjenne til de mest grunnleggende feilfordelingene og hvordan man beregner deres varianser.
- vite hvordan man håndterer og beregner usikkerhet for transformerte variabler.
- kjenne til hvordan man håndterer og beregner usikkerhet ved lineære og ikke-lineære kombinasjoner av feilmålte variabler (feilpropagering).
- være i stand til å utføre de nødvendige beregningene.
- forstå grunnlager om kalibrering og kunne gjennomføre en enkel kalibrering selv.
- forstå effekten av usikkerhet/målefeil i kovariater i lineære regresjonsmodeller.
- være i stand til å korrigere parameterestimatene i lineær regresjon når kovariater med målefeil brukes.

Organisasjon

- Forelesninger på zoom mandag 15.15-16.00 og tirsdag 14.15-16.00 (første to uker)
- Temavideoer
- Øvingstimer – se på kurssiden
- Gruppearbeid (4-6)
- Innleveringsfrist prosjektoppgave: **mandag 20. november 2023 kl 12.00**

Den eksterne kurssiden:

https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start

Prosjektoppgaven

- Vi ser hvor informasjonen ligger på Blackboard og på den eksterne nettsiden:

https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start

- Vi ser på prosjektoppgaven på https://github.com/imfdrift/istx100y2023.

- Karakteren teller 30% til den endelige karakteren.

- Vi bruker prosentvurderingsmetoden: Konverterer poengene i en % (heltall, avrundet) og så bruker vi følgende skala:

Karakterskala for prosentvurderingsmetoden

A: 89–100 poeng

B: 77–88 poeng

C: 65–76 poeng

D: 53–64 poeng

E: 41–52 poeng

F: 0–40 poeng

Hvem er vi?

- **Studentene**: 8 studieprogram, omtrent 600 studenter totalt.
- **Faglig ansvarlig** for innholdet i modulen er Stefanie Muff (stefanie.muff@ntnu.no).
- I **veilederteamet** (for prosjektet) inngår i tillegg
  - Trondheim: øvingslærer Kenneth Aase og studentassistent Oscar Ovanger
  - Gjøvik: Stine Marie Berge
  - Ålesund: Siebe B. van Albada

Pensum og læringsressurser

Pensum og læringsressurser del 1:

- **Korte videoer**: (by Charles H. A. Curry)
  - Standardusikkerhet (4:35 min)
  - Fordelinger (3:28 min)
  - Relative usikkerheter (3:42 min)
- Denne forelesningen
- **Disse slides** med alle notatene og beregningene som er vist fram

Alt ligger på den eksterne kurssiden:

https://wiki.math.ntnu.no/istx1002/2023h/start

I tillegg vil jeg bruke litt materialier fra denne boken:

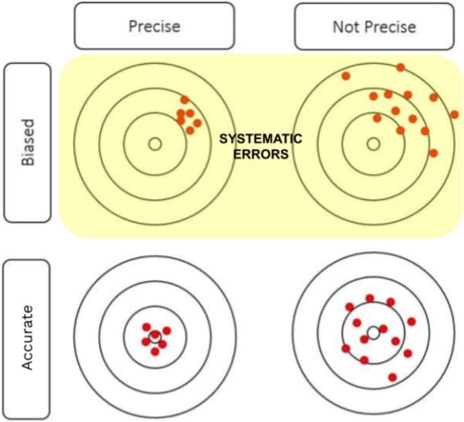
- Dere trenger ikke å kjøpe boken.
- Alt dere trenger blir diskutert i forelesningen.

Kilder til måleusikkerhet / målefeil

- **Upresise målinger** i feltarbeid eller labor (lengde, vekt, blodtrykk...)
- Upresisjon i apparater/instrumenter.
- Feil grunnet **ufullstendige eller skjeve observasjoner** (for eksempel selvrapporterte kostvaner, helsehistorie).
- Skjeve observasjoner grunnet **preferansebasert utvalg** eller gjentatte observasjoner.
- Avrundingsfeil, sifferpreferanse.
- ...

Hvilke av de er *systematiske* feil, og hva er *tilfeldig variasjon*?

Systematisk vs tilfeldig variasjon



https://www.biologyforlife.com/error-analysis.html

Målinger

Hvis vi har eliminert alle systematiske påvirkninger, står vi igjen med *tilfeldig variasjon*.

En eller flere målinger

Vi kan måle

- **én gang**, eller
- **flere ganger**.

Hva er fordelen med de to strategiene?

Gjentatte målinger former et punktsverm rundt sentrum (se forrige folie).

- Det vi måler er alltid en *tilfeldig variabel*, vanligvis betegnet som X.
- Det betyr at X har en sannsynlighetsfordeling som ikke alltid er kjent (men vi ser på noen av de vanligste her).
- Hvis vi har n uavhengige målinger $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kan vi bruke gjennomsnittet som estimator for μ og den empiriske variansen som estimator for σ^2:

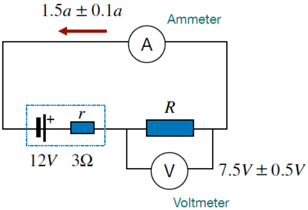
  $$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

  $$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})$$

Husk! Det er alltid lurt å lagre verdiene til gjentatte målinger!! (Hvorfor?)

Direkte og indirekte målinger

- **Direkte målinger:** Vi måler størrelsen vi ønsker direkte, for eksempel en vekt, temperatur, elektrisk motstand osv.
- **Indirekte målinger:** Vi måler flere størrelser og kombinerer de til en størrelse vi egentlig vil måle (vi an målefunksion). Eksempel:



$$R = \frac{U}{I}$$

Andre eksempler?

Med indirekte målinger snakker vi om **målesystemer** (ikke i dag).

Måleusikkerhet

Litt terminologi...

- **Standard usikkerhet:** Et annet ord for “standardavvik”, nemlig i fordelingen til en *målestørrelse* M. Vi skriver

$$u(M) ,$$

men det er også greit (og jeg foretrekker egentlig) å bruke $\sigma(M)$.

- **Dekningsfaktor** k: Ofte gir vi et intervall omkring måleresultatet som et multiplum k av standardusikkerhet. Usikkerhet gis da som $k \cdot u(M)$.

- **Relativ standard usikkerhet**:

$$\frac{u(M)}{M}$$

Vi går til **www.menti.com** (todo)

- Vi har målt en spenning på $U = 100V$ og det angis et intervall mellom 90V og 110V med en deknigsfaktor $k = 2$. Hva er da standard usikkerheten u i målingen?
- Vi måler lengten til et objekt med $l = 1m$ og vet at $u(l) = 2cm$. Hva er den *relative usikkerheten* i denne målingen?

Hvordan (be)skriver vi usikkerheten?

- En typisk måte å skrive usikkerheten er jo som sagt ved bruk av $u(M) = \sigma(M)$, eller som et intervall $M \pm k \cdot u(M)$ med dekningsfaktor k.

- Men en annen måte som vi kanskje bruker mer i statistikk er å skrive en observasjon W som en summe av den egentlige størrelsen (X) plus støy/feil (U):

$$W = X + U \ ,$$

hvor vi kan anta en egnet fordeling til U (se tema fordelinger senere).

To typer usikkerheter

I noen situasjoner er usikkerheten til et måleinstrument kjent, men i andre situasjoner må vi selv vurdere og kvantifisere usikkerhet i målingene vi gjør.

Type A: Usikkerheten finnes ved gjentatte målinger og det ukjente standardavviket kan da estimeres som

$$\hat{u}(x) = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})} \ ,$$

som kalles for *standard usikkerhet* i måleteknikk.

Type B: Vi kjenner usikkerheten $u(x)$ presist, enten via

- antakelser
- kunnskap om variasjon (for exsempel når det gjelder avlesningsusikkerhet)
- informasjon i bruksanvisning

$\rightarrow$ Ingen gjentatte målinger nødvendig.

Når vi har en type A usikkerhet, så må vi ikke bare måle verdien, men også usikkerheten selv.

Hvordan kan vi gjøre det?

Når vi har en type A usikkerhet, så må vi ikke bare måle verdien, men også usikkerheten selv.

Hvordan kan vi gjøre det?

Idé: Standard usikkerheten finnes ved å ta gjentatte målinger og å bruke det empiriske standardavviket som estimator.

Eksempel: Vi måler var reaksjonstid!

- For en legeattest vil vi måle din typiske reaksjonstid, men det er jo mye støy i en sånn måling. Her får du litt tid for å gjennomføre fem målinger av din reaksjonstid. Test det én eller flere runder før du noterer de fem målte tidene i google sheetsen under.
- Til slutt ønsker vi at du noterer et anslag for hvor mange timer so sov i natt.

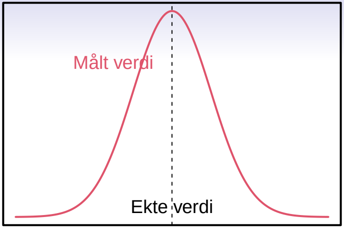
https://www.mathsisfun.com/games/reaction-time.html

Og så må de rapportere resultatene her:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jswtNl8zmIdWwjuuRKSn
KzaN-M5DLFISrnCIXl17w10/edit#gid=0

Tenk over det:

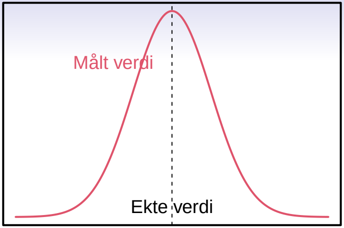
- Hva er et godt estimat for din typiske reaksjonstid?
- Har du en intuitiv forståelse av hvordan de målte verdiene sprer seg rundt den “ekte” verdien (μ)?



Alle må beregne

- gjennomsnitt
- standardavvik

til sine egne estimater.



Alle må beregne

- gjennomsnitt
- standardavvik

til sine egne estimater.

Her kan vi jobbe med mine tider: 256, 287, 257, 302, 299 ms.

$$\overline{x} = \frac{256 + 287 + 257 + 302 + 299}{5} = 280.2$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}\left((256 - 300.2)^2 + (287 - 300.2)^2 + \ldots\right)} = 22.35$$

Har vi blitt enige om at normalfordelingen er vel en realististisk approximasjon til feilfordelingen i måling av reaksjonstiden?

Oppgave: Finn flere situasjoner hvor en lik feilfordeling er realistisk.

Usikkerhet i én vs flere målinger

Tenk over hvordan standard usikkerheten hadde forandret seg om vi hadde tatt

- Bare én måling
- Ti målinger

Forskjellen mellom

- Usikkerheten i en eneste måling
- Usikkerheten i gjennomsnittet til flere målinger

Noen beregninger...

Usikkerheten i en enkel måling vs gjennomsnitt

Oppgave – mentimeter

En målevariabel $M \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$. Hvor mange uavhengig målinger må tas for at gjennomsnittet av målingene blir normalfordelt med standardavvik $\sigma/2$?

www.menti.com

Standardavvik vs standardfeil

Hva er forskjellen?

- **Standardavvik** (σ^2): et mål til *spredning i en populasjon.*

- **Standardfeil (SE)** = Standardavvik i en estimator = Standard usikkerhet. Høres det for teoretisk ut?

Eksempel: Vår estimator er $\hat{\mu} = \overline{x}$, det vil si at vi tar gjennomsnittet av flere målinger for a estimere μ.

- Estimer standardavviket (spredningen) ved å bruke alle målingene.
- Estimer standardfeilen i gjennomsnittet av de fem målingene.

Spredningsintervaller

- Vi ønsker ofte å angi et intervall slik at det for eksempel dekker den ekte verdien i 95% av tilfellene.
- I den første delen av kurset var det gjennomsnittet i en populasjon dere var interessert i.
- Her bytter vi “populasjon” med en størrelse som har en “riktig verdi”, men som er vanskelig å måle. Vi tar gjentatte målinger for å få informasjon om spredningen og hvordan målingene fordeler seg rundt den ekte verdien.

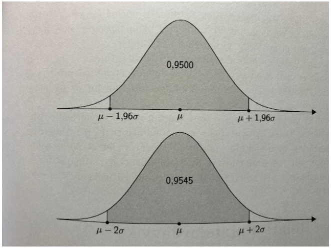
For en normalfordelt størrelse $X \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ kan vi beregne en $1 - \alpha$ konfidensintervall som:

$$[\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma]\ .$$

Ofte bruker vi $\alpha = 0.05$ og får en 95% konfidensintervall med

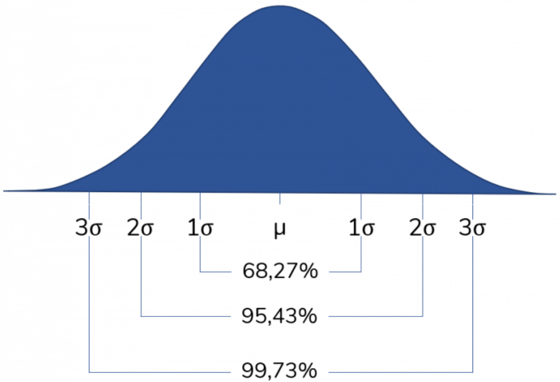
$$[\mu - 1.96 \cdot \sigma,\ \mu - 1.96 \cdot \sigma]\ ,$$

men vi bruker egentlig heller $1.96 \approx 2$.



Dekningsfaktor k

- k er tallet vi ganger standard usikkerheten med for å få forskjellige konfidensintervaller.
- Typisk $k = 1, 2, 3$:



https://eichhorn-coaching.de/optionstheorie-standardabweichung-normalverteilung-historische-volatilitaet/

Beregn 95% konfidensintervallet til din estimerte reaksjonstiden

- Husk at $\overline{X} \sim \mathsf{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- Derfor er et 95% konfidensintervall gitt som

$$[\mu - \underbrace{z_{0.975}}_{=1.96} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \mu - z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

- Men: vi vet jo ikke μ og σ!
- Vi har derfor estimert de to: $\hat{\mu}$ og $\hat{\sigma}$, og derfor er 95% konfidensitervallet gitt som

$$[\overline{x} - t_{0.975,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad \overline{x} + t_{0.975,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}] \ ,$$

hvor s er standardavviket it vårt utvalg av n gjentatte målinger.

Merk at z-verdien har blitt byttet med t-verdien.

Beregn 95% konfidensintervallet til din estimerte reaksjonstiden

Eksempel

En standard motstand viser måleverdien på $R_s = 10\Omega$ (ohm). Produsenten angir at verdien da ligger i et 99% konfidensintervall $\pm 135\mu\Omega$.

- Hvis vi antar at måleusikkerheten sprer seg normalfordelt, hva er standard usikkerheten i målingen da?
- Hva er den relative standardusikkerheten?

Fordelinger

Nå har vi sett eksempler for tilfeldig støy hvor den tilfeldige målevariablen X kan bli antatt normalfordelt:

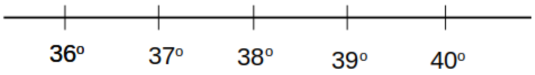
$$X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \ ,$$

med en sann, ukjent verdi for μ og σ^2.

Men hva med avlesningsusikkerhet?

Avlesningsusikkerhet

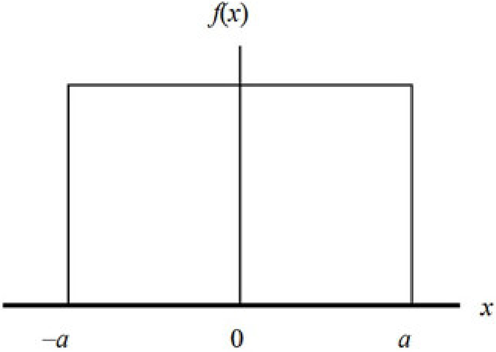
Eksempel: Vi måler temperatur med en måler som gir temperatur i hele grader.



- Hva vet du når du, for eksempel, måler 37 grad?
- Hva er oppløsningen?
- Hva er standard usikkerhet (standardavvik)?

Firkantfordeling

For å forstå hvordan man får standard usikkerheten, må vi se på firkantfordelingen:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Firkantfordeling

Forvendingsverdi og varianse/standardavvik:

Temperatureksempelet:

$$f(t) = \begin{cases} 1\ , & -37.5 \leq t \leq 38.5\ , \\ 0\ , & \text{ellers.} \end{cases}$$