Sažetak

Abstract

Sadržaj

1 EPR paradoks

1.1 Originalna formulacija

U svom radu nazvanim *Može li se kvantnomehanički opis fizičke stvarnosti smatrati potpunim?* iz 1935. godine Ajnštajn, Podolski i Rozen razmatraju pitanje kompletnosti kvantne mehanike kao teorije.

U tom radu oni polaze od stava da se neka teorija može smatrati kompletnom ukoliko svaki relevantan element stvarnosti koji posmatramo ima svoj reprezent u fizičkoj teoriji. Elementi fizičke stvarnosti ne mogu se odrediti a priori filozofskim razmatranjima, već se moraju pronaći pozivanjem na rezultate eksperimenata i mjerenja. U tom cilju oni uvode sljedeći kriterijum: Ako, bez narušavanja sistema, možemo sa sigurnošću (tj. sa vjerovatnoćom jednakom jedinici) da predvidimo vrijednost fizičke veličine, onda postoji element fizičke stvarnosti koji odgovara ovoj fizičkoj veličini.

U nastavku ćemo opisati misaoni eksperiment koji su autori razmatrali u svom radu da bi pokazali da pretpostavka o kompletnosti kvantne mehanike dovodi do paradoksa. Neka su dati sistemi I i II, čije pojedinačne talasne funkcije prije uključenja interakcije su nam poznate. Dozvolimo li interakciju ovih sistema u nekom ograničenom vremenskom intervalu Δt ukupni sistem $(I + II)$ će se naći u stanju Ψ koje se, zahvaljujući poznavanju početnih stanja pojedinačnih sistema, može izračunati rešavanjem (vremenski zavisne) Šredingerove jednačine. Činjenica je, međutim, da više ne možemo znati u kojim stanjima se nalaze pojedinačni sistemi I i II, čak i nakon prestanka interakcije, sve dok ne izvršimo mjerenje.

Neka su $u_n(x_1)$ svojstvene funkcije prvog sistema koje odgovaraju nekoj opservabli A, sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima a_n.

Tada se talasna funkcija Ψ ukupnog sistema po prestanku interakcije može predstaviti u obliku razvoja:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{1.1}$$

gdje su x_1, x_2 varijable kojima opisujemo prvi i drugi sistem, respektivno (svi njihovi stepeni slobode, ne nužno samo položaj). Funkcije $\psi_n(x_2)$ u ovom razvoju treba shvatiti kao koeficijente koji stoje uz funkcije $u_n(x_1)$.

Pretpostavimo da smo izvršili mjerenje opservable A na prvom sistemu i kao rezultat dobili svojstvenu vrijednost a_k. Prema tumačenju standardne kvantne mehanike (Kopenhagenska škola) to znači da je došlo do redukcije talasnog paketa (1.1), nakon čega se prvi sistem nalazi u stanju opisanim svojstvenom funkcijom $u_k(x_1)$, a da je drugi sistem u stanju opisanim sa $\psi_k(x_2)$.

Da smo umjesto opservable A odlučili posmatrati opservablu B, razvoj talasne funkcije ukupnog sistema u bazisu svojstvenih funkcija v_n pridruženih opservabli B izgledalo bi ovako:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) v_n(x_1). \tag{1.2}$$

Ako ponovo pretpostavimo da smo izvršili mjerenje na prvom sistemu, samo je ovaj put opservable B i dobili rezultat b_r, prvi sistem će se naći u stanju opisanom sa $v_r(x_1)$, što bi značilo da je drugi sistem u stanju opisanom sa $\phi_r(x_2)$.

Ono što vidimo iz prethodnog je da drugi sistem u ovom slučaju nema jedinstvenu talasnu funkciju koja ga opisuje. Štaviše, opservable A i B ne moraju nužno komutirati, što nas ostavlja u situaciji da je sistem nejednoznačno opisan i još funkcijama koje su svojstvene fizičkim veličinama čije poznavanje ne može biti istovremeno.

Ajnštajn, Podolski i Rozen konačno zaključuju da ili opis realnosti dat talasnom funkcijom u kvantnoj mehanici nije kompletan ili dvije fizičke veličine opisane nekomutirajućim operatorima ne mogu imati simultanu realnost.

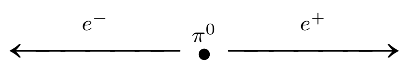
1.2 Bomova verzija EPR eksperimenta

Kako bismo bolje opisali smisao EPR paradoksa, razmotrimo Bomovu verziju EPR misaonog eksperimenta, tzv. EPRB eksperiment.

Bom posmatra neutralni pion u stanju mirovanja koji se zatim raspada na elektron i pozitron

$$\pi^0 \to e^- + e^+. \tag{1.3}$$

S obzirom na to da je pion mirovao, nakon njegovog raspada, elektron i pozitron će se, zbog održanja impulsa, kretati duž istog pravca, ali u suprotnim smjerovima (slika: 1.1).



Slika 1.1: Bomova verzija EPR misaonog eksperimenta - pion u mirovanju se raspada na elektron i pozitron.

Kako neutralni pion ima spin jednak nuli, zbog održanja momenta impulsa, ukupni spin elektrona i pozitrona mora takođe biti jednak nuli, tako da će elektron i pozitron okupirati singletno spinsko stanje:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \tag{1.4}$$

Ako potom odlučimo izmjeriti spin elektrona, recimo u pravcu normalnom na pravac kretanja, znamo sa sigurnošću da će spin pozitrona u tom istom pravcu biti suprotan. Ono što ne možemo znati je koju kombinaciju ćemo dobiti, tj. da li će elektron biti sa spinom gore, a pozitron sa spinom dole, ili obrnuto.

Moguća su različita tumačenja rezultata opisanog misaonog eksperimenta. Slijedeći stanovište koje su zastupali Ajnštajn, Podolski i Rozen (često nazivano "realističnim"), čestice su odmah u trenutku njihovog nastajanja imale određenu vrijednost spina, samo što kvantna mehanika, kao nekompletna teorija, to nije u mogućnosti da opiše. Po njima, talasna funkcija nije dovoljna za opis stanja – pored talasne funkcije potrebna je još neka veličina λ (ili više njih) da bi se stanje sistema u potpunosti okarakterisalo. Veličina λ se obično naziva "skrivena varijabla".

Standardna kvantna mehanika (tzv. Kopenhagenska škola ili "ortodoksno" stanovište), međutim, podrazumijeva da nijedna čestica nije imala određen spin sve do trenutka mjerenja koje je dovelo do kolapsa talasne funkcije (tj. stanja (1.4)) i trenutno "proizvelo" spin pozitrona, bez obzira koliko on u tom trenutku bio udaljen od elektrona. Ajnštajn, Podolski i Rozen smatrali su takvo "sablasno dejstvo na daljinu" (Ajnštajnove riječi) apsurdnim. Zaključili su da je ortodoksni stav neodrživ - elektron i pozitron su morali od početka imati dobro definisane spinove, bez obzira da li kvantna mehanika to može da izračuna ili ne.

1.3 Princip lokalnosti

Osnovna pretpostavka na kojoj počiva stanovište Ajnštajna, Podolskog i Rozena je da se nijedan uticaj ne može prostirati brže od svjetlosti. Ovo nazivamo principom lokalnosti. U pokušaju očuvanja ovog principa u okviru standardne kvantne mehanike možemo pretpostaviti da kolaps talasne funkcije nije trenutan već da "putuje" nekom konačnom brzinom. To bi, međutim, dovelo do kršenja zakona o održanju ugaonog momenta. Naime, ako bismo izmjerili spin pozitrona prije nego što je stigla informacija o kolapsu, vjerovatnoća da pronađemo čestice sa suprotno ili jednako usmjerenim spinovima bila bi ista. Eksperimenti su u tom pogledu nedvosmisleni - takvo kršenje se ne dešava, tj. korelacija spinova je savršena.

Prema tome, princip lokalnosti i kolaps talasne funkcije se međusobno isključuju, a očuvanje ovog prvog je bio glavni argument u traganju za adekvatnom teorijom skrivenih varijabli.

2 Belove nejednakosti

2.1 Postavka problema i izvođenje nejednakosti

Bel je u nadi da će iskristalisati nejasnu sliku EPR paradoksa osmislio eksperiment u kojem bi osa mjerenja spina čestice bila proizvoljna i nezavisna od druge (anti)čestice, za razliku od postavke eksperimenta EPRB (slika 2.1).

Recimo da su u pitanju elektron i pozitron dobijeni raspadom π^0 mezona. Za tako arbitraran pravac mjerenja možemo detektovati spin "gore" ili "dole", 1 ili -1 (u jedinicama $\hbar/2$) respektivno. Umjesto posmatranja pojedinačnog rezultata mjerenja za elektron i pozitron, posmatramo proizvod ta dva rezultata, koji može uzimati vrijednosti ± 1. Neka je srednja vrijednost ovih proizvoda $P(\vec{a}, \vec{b})$. Ako dozvolimo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni, proizvod je uvijek -1 jer su spinovi u 100% slučajeva opozitni, dakle

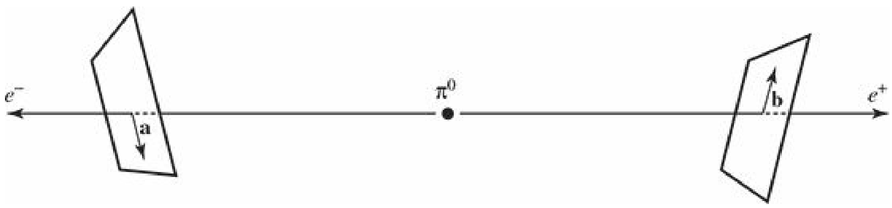
$$\vec{a} = \vec{b} \implies P(\vec{a}, \vec{a}) = -1. \tag{2.1}$$

Istom logikom, ako su ti pravci antiparalelni, svaki proizvod će biti $+1$, dakle

$$\vec{a} = -\vec{b} \implies P(\vec{a}, -\vec{a}) = 1. \tag{2.2}$$

Za proizvoljne pravce $\vec{a}$ i $\vec{b}$ standardna kvantna mehanika predviđa (vidjeti Dodatak):

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{2.3}$$



Slika 2.1: Belova postavka misaonog eksperimenta sa osama mjerenja koje mogu biti u proizvoljnim pravcima.

Pođimo sada od pretpostavke da zaista postoji neka skrivena varijabla λ koja omogućuje kompletniji opis stanja. Pošto se mjerenje može vršiti u bilo kojem pravcu, pretpostavimo da odabir pravca ne utiče na ishod mjerenja, već postoji neka funkcija koja je zavisna od skrivene varijable koja određuje ishod mjerenja. Nazovimo funkciju koja određuje ishod mjerenja spina elektrona u pravcu $\vec{a}$, $A(\vec{a},\lambda)$ i pozitorna u pravcu $\vec{b}$, $B(\vec{b},\lambda)$. Pošto ove funkcije utiču na ishod mjerenja, zaključujemo da su moguće njihove vrijednosti ± 1.

Srednja vrijednost proizvoda pojedinačnih mjerenja je data sa

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) d\lambda \tag{2.4}$$

gdje smo sa $\rho(\lambda)$ označili gustinu vjerovatnoće skrivene varijable. Ako posmatramo slučaj u kojem su detektori postavljeni u pravcima koji su međusobno paralelni, izmjerićemo uvijek suprotne spinove pa važi

$$A(\vec{m},\lambda) = -B(\vec{m},\lambda). \tag{2.5}$$

Srednja vrijednost proizvoda sada može da se napiše kao

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda) d\lambda. \tag{2.6}$$

Za bilo koji drugi jedinični vektor $\vec{c}$ važi takođe

$$P(\vec{a},\vec{c}) = -\int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)d\lambda. \tag{2.7}$$

Ako oduzmemo ove dvije jednačine dobijamo

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int \rho(\lambda)[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]d\lambda. \tag{2.8}$$

Zbog toga što je

$$[A(\vec{b},\lambda)]^2 = 1 \tag{2.9}$$

za proizvoljan vektor $\vec{b}$, drugi član u integrandu možemo pomnožiti sa takvom "jedinicom", pa dobijemo

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int \rho(\lambda)\left\{A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)[A(\vec{b},\lambda)]^2\right\}d\lambda. \tag{2.10}$$

Jednostavnim izvlačenjem ispred zagrade dobijemo

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)[1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)]d\lambda. \tag{2.11}$$

Uzmimo sada apsolutnu vrijednost ovog izraza:

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| = \int \left|\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)[1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)]\right|d\lambda. \tag{2.12}$$

Pošto funkcije A i B uzimaju vrijednosti ± 1 lako je vidjeti da je

$$\left|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\right| = 1. \tag{2.13}$$

Analizirajmo sada član koji je preostao:

$$\rho(\lambda)[1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)]. \tag{2.14}$$

S obzirom da je $\rho(\lambda)$ gustina vjerovatnoće, kao takva funkcija mora biti ne-negativna tako da za taj član važi

$$\rho(\lambda) \geqslant 0, \quad \forall\lambda. \tag{2.15}$$

Proizvod $A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ može imati vrijednosti ± 1 tako da je

$$1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda) \geqslant 0, \quad \forall\lambda. \tag{2.16}$$

Dakle,

$$\rho(\lambda)[1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)] \geqslant 0, \quad \forall\lambda. \tag{2.17}$$

Slijedi:

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leqslant \int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{c},\lambda)A(\vec{b},\lambda)]d\lambda = \underbrace{\int \rho(\lambda)d\lambda}_{1} + P(\vec{c},\vec{b}). \tag{2.18}$$

Konačno dobijemo Belovu nejednakost

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \leqslant 1 + P(\vec{c},\vec{b}). \tag{2.19}$$

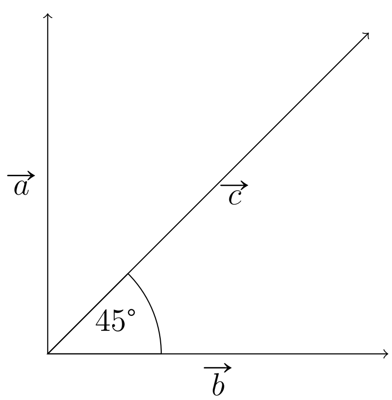
Rezultat važi za bilo koju teoriju skrivenih varijabli, jer je $\rho(\lambda)$ proizvoljna funkcija raspodjele.

2.2 Narušenje Belovih nejednakosti i implikacije

Konstruišimo sada jednostavan primjer kojim možemo pokazati da dolazi do narušavanja Belovih nejednakosti. Na slici su prikazana tri pravca u kojima možemo izvršiti mjerenje.

Želimo izračunati proizvod izmjerenih spinova po jednačini (2.3). Ako sa θ označimo ugao među pravcima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, onda se ova jednačina može napisati u obliku

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -cos\theta. \tag{2.20}$$



Slika 2.2: Detektori postavljeni sa relativnim uglovima od 45° i 90°.

Ako izaberemo da ugao između pravaca $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bude 90°, a uglovi imeđu pravaca $\vec{a}$ i $\vec{c}$, odnosno $\vec{b}$ i $\vec{c}$, po 45° (slika: 2.2), Belova nejednakost glasi:

$$|cos(90^\circ) - cos(45^\circ)| \leqslant 1 + cos(45^\circ).$$

Vidimo da ova nejednakost nije istinita, te zaključujemo da su Belove nejednakosti narušene.

3 Eksperimentalno testiranje Belovih nejednakosti

Dobitnici Nobelove nagrade 2022. za fiziku Alen Aspekt (*Alain Aspect*), Džon Klauzer (*John Clauser*) i Anton Cajlinger (*Anton Zeilinger*) su osmislili tri verzije eksperimenta u kojem se koriste polarizovani fotoni kako bi se testirale Belove nejednakosti. Pokazalo se da su one u ovim eksperimentima narušene.

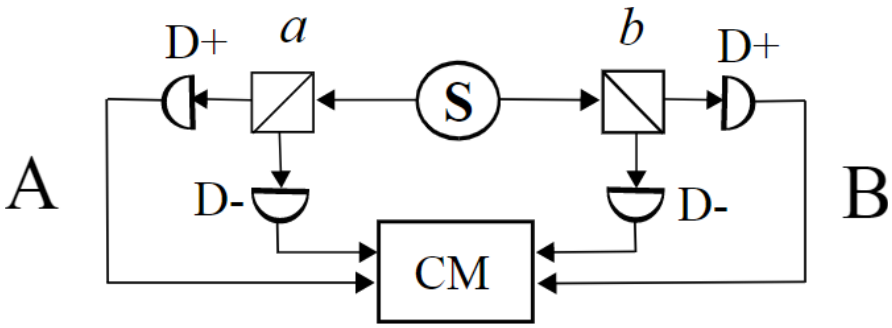
Hronološki, Klauzer je osmislio prvu verziju eksperimenta čija je suština u slanju dva polarizovana spregnuta fotona, dobijena koristeći atome Ca, u opozitnim smjerovima prema filterima kroz koje će foton ili proći ili neće, što zavisi od ugla pod kojim je filter postavljen i kako je foton polarizovan.

U momentu kreiranja para fotona ne možemo znati kakva im je polarizacija, već samo to da su im polarizacije paralelne. To znači da ako su filteri postavljeni paralelno, u slučaju da jedan foton prođe, vjerovatnoća da će proći i drugi je 1. Ako je ugao između filtera $\frac{\pi}{2}$ uvijek će jedan foton proći, a drugi ne.

Zanimljivi efekti se vide ako se posmatraju uglovi filtera baš između 0 i $\frac{\pi}{2}$. Tada rezultati variraju, pa ponekad prođu oba fotona, ponekad samo jedan, a u nekim slučajevima nijedan.

Kada se uradi dosta mjerenja i zabilježe se rezultati, može se uočiti korelacija koja je mnogo veća nego kada bi proces bio vođen pod uticajem neke skrivene varijable pri čemu bi polarizacije fotona već bile predeterminisane u momentu njihove kreacije, a ne u trenutku mjerenja.

Ovaj eksperiment je unaprijeđena verzija misaonog Belovog eksperimenta, jer se koriste i detektori koji detektuju fotone koji nisu uspjeli proći kroz filter, pa je samim tim eksperiment potpuniji i rezultat precizniji (slika 3.1). U svojoj srži ovaj eksperiment nosi korelacionu funkciju koja ima zadatak da modeluje odgovor na pitanje: "Koliko često će oba fotona proći kroz filtere, a koliko često samo jedan?", koja je ograničena



Slika 3.1: Izvor S emituje spregnute fotone koji potom odlaze u suprotnim smjerovima. U zavisnosti od njihove polarizacije i orijentacije filtera stići će do detektora D_+ ili D_-. Korelacija između pojedinačnih mjerenja se može izračunati tako što nađemo broj koji predstavlja odnos sume mjerenja pri kojima smo dobili rezultat da su oba fotona prošla ili oba nisu prošla kroz filter od koje smo oduzeli sumu mjerenja pri kojima je samo jedan od fotona prošao kroz filter i ukupnog broja mjerenja, tj. $E(a, b) = N_{++} + N_{--} - (N_{+-} + N_{-+})/N$

odozgo i predstavlja analognu formu Belovih nejednakosti, zvanu CHSH nejednakost.

Osim narušenja Belovih nejednakosti, novi potencijal za skladištenje, prenošenje i procesuiranje informacija je uviđen sa novom verzijom eksperimenta, koju je osmislio Aspekt.

Konfiugracija eksperimenta je bila drugačija u odnosu na Klauzerov u novom načinu pobuđivanja atoma tako da je frekvencija emitovanja spregnutih fotona bila veća. Takođe je korišten kristal kvarca koji je služio za preusmjerenje fotona ka različito orijentisanim filterima.

Zanimljiv efekat se mogao vidjeti u slučaju kada se spregnuti par čestica (čestice 1 i 2) kreće u suprotnim smjerovima i jedna od tih čestica naiđe na treću, slobodnu česticu (čestica 3). U tom slučaju čestice 2 i 3 postaju spregnute, pri tome čestica 3 gubi sve informacije o prethodnom stanju, ali se istovremeno to stanje "prepisuje" na česticu 1 koja nikada nije ni došla u kontakt sa česticom 3. Ovaj proces je poznat pod imenom *kvatna teleportacija.*

Kvantna teleportacija je za sada jedini mehanizam kojim se nepoznato kvantno stanje (*kvantna informacija*) može u potpunosti prenijeti iz jednog u drugi sistem, bez ikakvih gubitaka informacija. Nemoguće je izmjeriti sve karakteristike sistema i poslati te informacije na drugu lokaciju, kako bi se prvobitni sistem rekonstruisao, primarno zbog kolapsa talasne funkcije pri vršenju bilo kakvog mjerenja.

Nakon što je kvantna teleportacija eksperimentalno pokazana, Cajlingerov eksperiment je dodao novu "dimenziju" eksperimentu i pokazao mogućnost sprezanja čestica koje su udaljene i nikada nisu došle u kontakt. Dva para (par A i par B) spregnutih čestica se emituju iz izvora. Nakon nekog vremena po jedna od čestica iz svakog para konvergiraju ka uređaju koji će nekom transformacijom da učini te dvije čestice spregnutima. Zbog kvantne teleportacije kvantne informacije preostalih čestica će se "prepisati" jedna na drugu i one će postati spregnute iako nikada nisu došle u kontakt.

Zaključak

4 Dodatak

4.1 Srednja vrijednost proizvoda komponenti spinova dvaju čestica u proizvoljnim pravcima

Posmatrajmo dvije čestice spina-1/2 u singletnom stanju opisanom vektorom:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \tag{4.1}$$

Neka je $S_k^{(n)}$ operator komponente spina čestice n ($n = 1, 2$) u pravcu k. Da bismo izračunali srednju vrijednost proizvoda komponentni spinova dvaju čestica u proizvoljnim pravcima zadatim ortovima $\vec{a}$ (za prvu česticu) i $\vec{b}$ (za drugu česticu), odredićemo prvo djelovanje proizvoda operatora tih komponenti na stanje (4.1). Pošto govorimo o proizvoljnim pravcima izaberimo ih tako da se pravac $\vec{a}$ poklapa sa z osom, a pravac $\vec{b}$ neka leži u xz ravni:

$$S_a^{(1)} = S_z^{(1)} \quad S_b^{(2)} = cos\theta S_z^{(2)} + sin\theta S_x^{(2)}.$$

Da bismo odredili djelovanje proizvoda operatora $\hat{S}_a^{(1)}$ i $\hat{S}_b^{(2)}$ na stanje (4.1), potrebno je da znamo kako operatori $\hat{S}_x^{(n)}$ i $\hat{S}_z^{(n)}$ djeluju na spinska stanja $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ n-te čestice. Pošto su ova stanja svojstvena stanja operatora $\hat{S}_z^{(n)}$, imamo

$$\hat{S}_z^{(n)}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_z^{(n)}|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle. \tag{4.2}$$

S druge strane, djelovanje operatora $\hat{S}_x^{(n)}$ na spinska stanja dobijamo polazeći od djelovanja operatora podizanja i spuštanja $\hat{S}_\pm^{(n)} = \hat{S}_x^{(n)} \pm i\hat{S}_y^{(n)}$ na njih, koje glasi

$$\hat{S}_+^{(n)}|\uparrow\rangle = 0, \quad \hat{S}_-^{(n)}|\uparrow\rangle = \hbar\,|\downarrow\rangle, \tag{4.3}$$

$$\hat{S}_{+}^{(n)}|\downarrow\rangle = \hbar\,|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_{-}^{(n)}|\downarrow\rangle = 0, \tag{4.4}$$

odnosno

$$(\hat{S}_x^{(n)} + i\hat{S}_y^{(n)})|\uparrow\rangle = 0, \quad (\hat{S}_x^{(n)} - i\hat{S}_y^{(n)})|\uparrow\rangle = \hbar\,|\downarrow\rangle, \tag{4.5}$$

$$(\hat{S}_x^{(n)} + i\hat{S}_y^{(n)})|\downarrow\rangle = \hbar\,|\uparrow\rangle, \quad (\hat{S}_x^{(n)} - i\hat{S}_y^{(n)})|\downarrow\rangle = 0. \tag{4.6}$$

Sabiranjem odvojeno prve dvije i druge dvije jednačine neposredno slijedi

$$\hat{S}_x^{(n)}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle, \quad \hat{S}_x^{(n)}|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle. \tag{4.7}$$

Koristeći rezultate (4.2) i (4.7) dalje imamo:

$$\begin{aligned}
S_a^{(1)}S_b^{(2)}|00\rangle &= S_z^{(1)}\left(cos\theta S_z^{(2)} + sin\theta S_x^{(2)}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[S_z^{(1)}|\uparrow\rangle\left(cos\theta S_z^{(2)}|\downarrow\rangle + sin\theta S_x^{(2)}|\downarrow\rangle\right) - S_z^{(1)}|\downarrow\rangle\left(cos\theta S_z^{(2)}|\uparrow\rangle + sin\theta S_x^{(2)}|\uparrow\rangle\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\left(-cos\theta\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle + sin\theta\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\right) + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\left(cos\theta\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle + sin\theta\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\right)\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}}\left[-cos\theta|\uparrow\downarrow\rangle + sin\theta|\uparrow\uparrow\rangle + cos\theta|\downarrow\uparrow\rangle + sin\theta|\downarrow\downarrow\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[-cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) + sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[-cos\theta|00\rangle + sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1{-}1\rangle)\right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Prema tome očekivana vrijednost proizvoda spin komponenti je:

$$\langle S_a^{(1)}S_b^{(2)}\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\langle 00|\left[-cos\theta|00\rangle + sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1{-}1\rangle)\right] \tag{4.9}$$

što se zbog ortonormiranosti stanja $|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |1{-}1\rangle$ svodi na:

$$\langle S_a^{(1)}S_b^{(2)}\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}cos\theta, \tag{4.10}$$

odnosno

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{4.11}$$

U svrhu našeg misaonog eksperimenta mjerenje ćemo vršiti u jedinicama $\frac{\hbar}{2}$, pa ćemo uzeti da je srednja vrijednost proizvoda komponenti spinova u proizvoljnim pravcima:

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{4.12}$$

5 Literatura