

UNIVERZITET U BANJOJ LUCI  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
STUDIJSKI PROGRAM: FIZIKA  
SMJER: OPŠTI

STEFANI TOVILOVIĆ

BELOVE NEJEDNAKOSTI

DIPLOMSKI RAD

BANJA LUKA, 2024.

# Sažetak

Belova nejednakost je koncept koji proizilazi iz EPR (*Einstein-Podolsky-Rosen*) paradoksa, koji je postavljen kako bi ispitao fundamentalna pitanja o interpretaciji kvantne mehanike. Kao potencijalno razrješenje paradoksa ispitalo se postojanje skrivenih varijabli koje bi održavale lokalnost u opisu fizičkih procesa i kao rezultat su dobijene Belove nejednakosti. Međutim, eksperimentalno je pokazano da su Belove nejednakosti narušene i da je kvantnomehančki opis spregnutosti čestica kompletniji, iako podrazumijeva na neki način napuštanje realizma i intuicije koju nam klasična teorija i svakodnevno iskustvo donose.

*Princip lokalnosti*, koji je ključan u postavljanju EPR paradoksa, postavlja ograničenja na brzinu prenosa informacija između udaljenih dijelova sistema (dvije spregnute čestice, razdvojene nakon interakcije). Belove nejednakosti ukazuju na to da kvantna mehanika nudi nešto što prevazilazi ova ograničenja, što ukazuje na fenomen *nelokalnosti*. Ovaj aspekt kvantne mehanike postaje sve relevantniji u kontekstu aktuelnih istraživanja i tehnoloških aplikacija poput kvantne teleportacije i kvantne kriptografije.

Nobelova nagrada za fiziku u 2022. godini je bila posvećena upravo istraživanju nelokalnosti u kvantnoj mehanici. Ova nagrada priznaje značajne doprinose naučnika u razumijevanju ovog fenomena, uključujući i eksperimentalna testiranja Belovih nejednakosti. Ova priznanja ne samo da naglašavaju značaj Belovih nejednakosti i njihovu ulogu u oblikovanju našeg razumijevanja kvantne mehanike, već i podstiču dalja istraživanja u ovoj uzbudljivoj oblasti fizike.

**Ključne riječi:** Belove nejednakosti, EPR paradoks, EPRB kvantna spregnutost, kvantna zapletenost, sablasno dejstvo na daljinu, kvanta teleportacija, kvantna kriptografija, lokalnost

# Abstract

Bell's inequality is a concept that stems from the EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) paradox, which was formulated to probe fundamental questions regarding the interpretation of quantum mechanics. As a potential resolution to the paradox, the existence of hidden variables maintaining locality in the description of physical processes was explored, resulting in Bell's inequalities. However, experimental evidence has shown that Bell's inequalities are violated, indicating that the quantum mechanical description of particle entanglement is more complete, albeit implying a departure from realism and intuition provided by classical theory and everyday experience.

The principle of locality, crucial in the formulation of the EPR paradox, imposes constraints on the speed of information transfer between distant parts of a system (two entangled particles separated after interaction). Bell's inequalities suggest that quantum mechanics offers something beyond these constraints, pointing to the phenomenon of non-locality. This aspect of quantum mechanics becomes increasingly relevant in the context of current research and technological applications such as quantum teleportation and quantum cryptography.

The Nobel Prize in Physics in 2022. was dedicated to the study of non-locality in quantum mechanics. This recognition acknowledges significant contributions of scientists in understanding this phenomenon, including experimental tests of Bell's inequalities. These results not only underscore the importance of Bell's inequalities and their role in shaping our understanding of quantum mechanics but also stimulate further research in this exciting field of physics.

**Keywords:** Bell's inequalities, EPR paradox, EPRB experiment, quantum entanglement, spooky action at a distance, quantum teleportation, quantum cryptography, locality

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>EPR paradoks</b>	<b>7</b>
2.1	Originalna formulacija . . . . .	7
2.2	Bomova verzija EPR eksperimenta . . . . .	9
2.3	Princip lokalnosti . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Belove nejednakosti</b>	<b>12</b>
3.1	Postavka problema i izvođenje nejednakosti . . . . .	12
3.2	Narušenje Belovih nejednakosti i implikacije . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Eksperimentalno testiranje Belovih nejednakosti</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>21</b>
	<b>Literatura</b>	<b>26</b>

# 1 Uvod

Među fizičkim teorijama kvantna mehanika je svakako jedna od najuspješnijih. Ovo je potvrđeno i ilustrovano u mnogim njenim aplikacijama. U stvari, nikada se nije pokazalo da kvantna mehanika griješi, iako neke specifične primjene mogu biti van domašaja naših računskih sposobnosti. Ipak, kvantna teorija ima osobine koje djeluju čudno u poređenju sa klasičnom Njutnovom mehanikom i koje je nekim fizičarima bilo teško da prihvate.

Jedna od najosnovnijih karakteristika kvantne teorije je njen nedostatak determinizma. Kada se izvrši jedno mjerenje opservable  $A$ , rezultat je jedna od svojstvenih vrijednosti  $a$  od  $A$ . Međutim, sem kada je sistem u svojstvenom stanju od  $A$ , nemoguće je predvidjeti bilo kojim određenim mjerenjem koja od svojstvenih vrijednosti  $a$  će biti dobijena. Sve što se može predvidjeti je vjerovatnoća dobijanja svojstvene vrijednosti  $a_n$  kada se mjerenje ponovi mnogo puta na skupu identično pripremljenih sistema. Ovaj nedostatak determinizma je sasvim drugačiji od bilo čega u klasičnoj fizici. Istina je, naravno, da se u klasičnoj fizici javljaju mnoge situacije koje se mogu opisati samo statistički, na primjer kretanje molekula u gasu. Ovaj klasični indeterminizam proizilazi samo iz našeg nedostatka detaljnog znanja o položajima i brzinama svakog molekula. Vjeruje se da iako neuočljivo u praksi, u stvari svaki "klasični" molekul u datom trenutku ima dobro definisan položaj i brzinu, a rezultati budućih mjerenja položaja i brzine svakog molekula bi se, u principu, mogli odrediti. Takva razmatranja klasičnih sistema dovela su do pretpostavke da je kvantna mehanika nekompletna teorija u smislu da postoje druge varijable, nazvane "skrivenne varijable", kojih nismo direktno svjesni, ali koje su potrebne da bi se sistem u potpunosti odredio. Pretpostavlja se da se ove skrivene varijable ponašaju na klasičan deterministički način - prividni indeterminizam koji pokazuje eksperiment proizilazi iz našeg nedostatka znanja o skrivenoj podstrukturi sistema koji se proučava. Tako su naizgled identični sistemi možda okarakterisani različitim vrijednostima jedne ili više skrivenih promjenljivih, koje na neki način

određuju koje se određene svojstvene vrijednosti dobijaju u određenom mjerenju.

Od istorijskog značaja je činjenica da de Broljevo (*Louis de Broglie*) originalno tumačenje talasne funkcije spada u klasu teorija skrivenih promjenljivih. On je pretpostavio da je talasna funkcija fizički realno polje koje se prostire u prostoru i spregnuto je sa pridruženom česticom koja ima dobro definisan i položaj i impuls. Sprega između čestice i "pilot talasa" dovodi do uočenih difrakcionih fenomena. Determinističku teoriju ovog tipa razradio je 1952. godine Dejvid Bom (*David Bohm*) koji je bio u stanju da svojom teorijom objasni difrakciju i interferenciju koje se javljaju pri rasijanju čestica, dobivši potpuno iste rezultate kao i one koje daje kvantna mehanika. Međutim, ovaj model koji sadrži i talase i čestice kao odvojene, ali povezane entitete, izuzetno je složen. Za umove većine ljudi on ima još čudnije karakteristike od onih iz kvantne mehanike, a većina fizičara bi ga odbacila na osnovu "Okamove oštrice". Možda je najmanje prihvatljiva karakteristika Bomovog modela, za one koji traže klasični mehanizam u osnovi kvantne teorije, njegova nelokalnost. Na primjer, u analizi eksperimenta sa dva proreza korišćenjem Bomovog modela postoji sila koja deluje na česticu koja prolazi kroz jedan prorez i koja se trenutno mijenja ako se drugi prorez otvori ili zatvori. Takve teorije, u kojima se dejstvo na jednom mestu prenosi trenutno (ili bar brže od brzine svetlosti) da bi se promijenila situacija na drugom, nazivaju se nelokalnim. Kao što ćemo vidjeti, kvantna mehanika je nelokalna teorija, a nelokalnost se generalno ne smatra prihvatljivom karakteristikom klasične teorije. Moglo bi se pomisliti da bi se mogla izgraditi dovoljno genijalna teorija skrivenih promjenljivih, koja je i deterministička i lokalna. Međutim, Džon S. Bel (*John Stewart Bell*) je 1965. godine uspeo da postavi uslove koje moraju da zadovolje sve determinističke lokalne teorije. Kao što ćemo vidjeti u naredna dva odeljka, pokazalo se da su ovi uslovi narušeni eksperimentom.

Najpoznatiji fizičar koji je dovodio u pitanje potpunost kvantne teorije bio je Albert Ajnštajn (*Albert Einstein*). Godine 1935, u saradnji sa Nejtanom Rozenom (*Natan Rosen*) i Borisom Podolskim (*Boris Podolsky*), predložio je sljedeće kriterijume kao osnovu svake prihvatljive teorije:

- (1) Veličine o kojima se govori u teoriji treba da budu "fizički stvarne",
- (2) Teorija treba da bude lokalna, odnosno da u prirodi nema dejstva na daljinu.

Ajnštajn, Podolski i Rozen su uspjeli da daju primjer kvantnomehaničkog sistema koji nije zadovoljavao ove uslove i zaključili da je kvantni opis prirode nepotpun. Slijedeći Boma, istražićemo jednostavniju situaciju od one koju su predložili Ajnštajn i njegovi saradnici, ali koja pokazuje slične karakteristike. Razmotrićemo sistem sa ukupnim spinom  $S = 0$  koji se razdvaja na dvije identične čestice, 1 i 2, svaka sa spinom  $1/2$ . Kada su čestice dovoljno razdvojene, izmjerimo komponentu spina čestice 1 paralelnu sa nekim pravcem, koji ćemo definisati kao  $z$ -osu. Pošto čestica ima spin  $1/2$ , dobija se ili rezultat  $+\hbar/2$  ili rezultat  $-\hbar/2$ .

Vidjećemo da je čin mjerenja komponente spina čestice 1 mijenja rezultat dobijen mjerenjem komponente spina druge čestice. Ova promjena se dešava trenutno bez obzira koliko su čestice 1 i 2 udaljene jedna od druge. Stoga kvantni opis ne ispunjava uslove (1) i (2). Ova činjenica je često poznata kao Ajnštajn-Podolski-Rozenov (EPR) paradoks. Međutim, Nils Bor (*Niels Bohr*) je odbacio ideju da je rezultat paradoksalan, smatrajući da se u uslovu (1) fizička realnost može odnositi samo na situacije u kojima je eksperimentalni raspored u potpunosti preciziran i sugerišući da to nije slučaj jer je sistem poremećen od samog početka.

Može se postaviti pitanje šta bi se vidjelo da je spin klasična varijabla. Ostalo bi tačno to da bi se dobijale komponente spina čestica 1 i 2 koje su jednake i suprotne, jer je ukupan spin nula. Međutim, ovde bi to bilo tako jer bi vektori spina imali određene vrijednosti i pravce od samog početka kada je stanje stvoreno, a čin mjerenja na čestici 1 ni na koji način ne bi promijenio stanje čestice 2. Tada bi se moglo očekivati da se kvantni rezultati mogu objasniti nekom teorijom skrivenih varijabli. Na primjer, može postojati klasična skrivena promjenljiva (ili promjenljive), čija je vrijednost određena kada je kreiran spin-nula sistem i koja je naknadno odredila eksperimentalne rezultate. Međutim, eksperimentalno kršenje Belove teoreme, o kojoj ćemo sada raspravljati, pokazuje da je ovo objašnjenje u stvari netačno.

## 2 EPR paradoks

### 2.1 Originalna formulacija

U svom radu pod nazivom *"Može li se kvantnomehanički opis fizičke stvarnosti smatrati potpunim?"* iz 1935. godine Ajnštajn, Podolski i Rozen razmatraju pitanje potpunosti kvantne mehanike kao teorije. Oni polaze od stava da se neka teorija može smatrati potpunom ukoliko svaki relevantan element stvarnosti koji posmatramo ima svoj reprezent u fizičkoj teoriji. Elementi fizičke stvarnosti ne mogu se odrediti a priori filozofskim razmatranjima, već se moraju pronaći pozivanjem na rezultate eksperimenata i mjerenja. U tom cilju oni uvode sljedeći kriterijum: *"Ako, bez narušavanja sistema, možemo sa sigurnošću (tj. sa vjerovatnoćom jednakom jedinici) da predvidimo vrijednost fizičke veličine, onda postoji element fizičke stvarnosti koji odgovara ovoj fizičkoj veličini."*

U nastavku ćemo opisati misaoni eksperiment koji su autori razmatrali u svom radu da bi pokazali da pretpostavka o potpunosti kvantne mehanike dovodi do paradoksa. Neka su dati sistemi  $I$  i  $II$ , čije pojedinačne talasne funkcije su nam poznate prije uključenja interakcije. Dozvolimo li interakciju ovih sistema u nekom ograničenom vremenskom intervalu  $\Delta t$ , ukupni sistem ( $I + II$ ) će se nakon toga naći u stanju  $\Psi$  koje se, zahvaljujući poznavanju početnih stanja pojedinačnih sistema, može izračunati rješavanjem (vremenski zavisne) Šredingerove jednačine. Činjenica je, međutim, da nakon toga ne možemo znati u kojim stanjima se nalaze pojedinačni sistemi  $I$  i  $II$ , čak i po prestanku interakcije, sve dok ne izvršimo mjerenje.

Neka su  $u_n(x_1)$  svojstvene funkcije prvog sistema koje odgovaraju nekoj opservabli  $A$ , sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima  $a_n$ . Tada se talasna funkcija  $\Psi$  ukupnog sistema po prestanku interakcije može predstaviti u obliku razvoja:



$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (2.1)$$

gdje su  $x_1, x_2$  varijable kojima opisujemo prvi i drugi sistem, respektivno (svi njihovi stepeni slobode, ne nužno samo položaj). Funkcije  $\psi_n(x_2)$  u ovom razvoju treba shvatiti kao koeficijente koji stoje uz funkcije  $u_n(x_1)$ .

Pretpostavimo da smo izvršili mjerenje opservable  $A$  na prvom sistemu i kao rezultat dobili svojstvenu vrijednost  $a_k$ . Prema tumačenju standardne kvantne mehanike (Kopenhagenska škola) to znači da je došlo do redukcije talasnog paketa (2.1), nakon čega se prvi sistem nalazi u stanju opisanim svojstvenom funkcijom  $u_k(x_1)$ , a drugi sistem u stanju opisanim sa  $\psi_k(x_2)$ .

Da smo umjesto opservable  $A$  odlučili posmatrati opservablu  $B$ , razvoj talasne funkcije ukupnog sistema u bazu svojstvenih funkcija  $v_n$  pridruženih opservabli  $B$  izgledao bi ovako:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) v_n(x_1). \quad (2.2)$$

Ako ponovo pretpostavimo da smo izvršili mjerenje na prvom sistemu, samo ovaj put opservable  $B$  i dobili rezultat  $b_r$ , prvi sistem će se naći u stanju opisanom sa  $v_r(x_1)$ , što bi značilo da je drugi sistem u stanju opisanom sa  $\phi_r(x_2)$ .

Iz gornje analize proizilazi da, kao posljedica dva različita mjerenja izvršena na prvom sistemu, drugi sistem može ostati u stanjima sa dvije različite talasne funkcije. Međutim, pošto u trenutku mjerenja ova dva sistema više ne interaguju, Ajnštajn, Podolski i Rozen smatraju da u drugom sistemu ne može doći do stvarne promjene kao posljedice bilo čega što se može učiniti sa prvim sistemom. Dakle, po njima, paradoks se sastoji u tome da je moguće dodijeliti dvije različite talasne funkcije (u našem primjeru  $\psi_k$  i  $\phi_r$ ) istoj stvarnosti (tj. drugom sistemu nakon interakcije sa prvim). Štaviše, opservable  $A$  i  $B$  ne moraju nužno komutirati, što nas ostavlja u situaciji da je sistem nejednoznačno opisan i još funkcijama koje su svojstvene fizičkim veličinama čije poznavanje ne može biti istovremeno.

Ajnštajn, Podolski i Rozen konačno zaključuju da ili opis realnosti dat talasnom funkcijom u kvantnoj mehanici nije kompletan ili dvije fizičke veličine opisane nekomutirajućim operatorima ne mogu imati simultanu realnost.

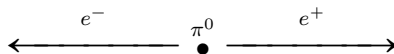
## 2.2 Bomova verzija EPR eksperimenta

Kako bismo bolje opisali smisao EPR paradoksa, razmotrimo Bomovu verziju EPR misaonog eksperimenta, tzv. EPRB eksperiment.

Bom posmatra neutralni pion u stanju mirovanja koji se zatim raspada na elektron i pozitron

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+. \quad (2.3)$$

S obzirom na to da je pion mirovao, nakon njegovog raspada, elektron i pozitron će se, zbog održanja impulsa, kretati duž istog pravca, ali u suprotnim smjerovima (slika: 2.1).



Slika 2.1: Bomova verzija EPR misaonog eksperimenta - pion u mirovanju se raspada na elektron i pozitron.

Kako neutralni pion ima spin jednak nuli, zbog održanja momenta impulsa, ukupni spin elektrona i pozitrona mora takođe biti jednak nuli, tako da će elektron i pozitron okupirati singletno spinsko stanje:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.4)$$

Ako potom odlučimo izmjeriti spin elektrona, recimo u pravcu normalnom na pravac

kretanja, znamo sa sigurnošću da će spin pozitrona u tom istom pravcu biti suprotan. Ono što ne možemo znati je koju kombinaciju ćemo dobiti, tj. da li će elektron biti sa spinom gore, a pozitron sa spinom dole, ili obrnuto.

Moguća su različita tumačenja rezultata opisanog misaonog eksperimenta. Slijedeći stanovište koje su zastupali Ajnštajn, Podolski i Rozen (često nazivano "realističnim"), čestice su odmah u trenutku njihovog nastajanja imale određenu vrijednost spina, samo što kvantna mehanika, kao nekompletna teorija, to nije u mogućnosti da opiše. Po njima, talasna funkcija nije dovoljna za opis stanja – pored talasne funkcije potrebna je još neka veličina  $\lambda$  (ili više njih) da bi se stanje sistema u potpunosti okarakterisalo. Veličina  $\lambda$  se obično naziva "skrivena varijabla".

Standardna kvantna mehanika (tzv. "ortodoksno" stanovište), međutim, podrazumijeva da nijedna čestica nije imala određen spin sve do trenutka mjerenja koje je dovelo do kolapsa talasne funkcije (tj. stanja (2.4)) i trenutno "proizvelo" spin pozitrona, bez obzira koliko on u tom trenutku bio udaljen od elektrona. Ajnštajn, Podolski i Rozen smatrali su takvo "sablasno dejstvo na daljinu" (Ajnštajnove riječi) apsurdnim. Zaključili su da je ortodoksni stav neodrživ - elektron i pozitron su morali od početka imati dobro definisane spinove, bez obzira da li kvantna mehanika to može da izračuna ili ne.

## 2.3 Princip lokalnosti

Osnovna pretpostavka na kojoj počiva stanovište Ajnštajna, Podolskog i Rozena je da se nijedan uticaj ne može prostirati brže od svjetlosti. Ovo nazivamo principom lokalnosti. U pokušaju očuvanja ovog principa u okviru standardne kvantne mehanike možemo pretpostaviti da kolaps talasne funkcije nije trenutni već da "putuje" nekom konačnom brzinom. To bi, međutim, dovelo do kršenja zakona o održanju ugaonog momenta. Naime, ako bismo izmjerili spin pozitrona prije nego što je stigla informacija o kolapsu, vjerovatnoća da pronađemo čestice sa suprotno ili jednako usmjerenim spinovima bila bi ista. Eksperimenti su u tom pogledu nedvosmisleni - takvo kršenje se ne dešava, tj.

korelacija spinova je savršena.

Prema tome, princip lokalnosti i kolaps talasne funkcije se međusobno isključuju, a očuvanje ovog prvog je bio glavni argument u traganju za adekvatnom teorijom skrivenih varijabli.

# 3 Belove nejednakosti

## 3.1 Postavka problema i izvođenje nejednakosti

Bel je u nadi da će iskristalisati nejasnu sliku EPR paradoksa osmislio eksperiment u kojem bi osa mjerenja spina čestice bila proizvoljna i nezavisna od druge (anti)čestice, za razliku od postavke eksperimenta EPRB (slika 3.1).

Recimo da su u pitanju elektron i pozitron dobijeni raspadom  $\pi^0$  mezona. Za tako arbitraran pravac mjerenja možemo detektovati spin "gore" ili "dole", 1 ili  $-1$  (u jedinicama  $\hbar/2$ ) respektivno. Umjesto posmatranja pojedinačnog rezultata mjerenja za elektron i pozitron, posmatramo proizvod ta dva rezultata, koji može uzimati vrijednosti  $\pm 1$ . Neka je srednja vrijednost ovih proizvoda  $P(\vec{a}, \vec{b})$ . Ako dozvolimo da su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  paralelni, proizvod je uvijek  $-1$  jer su spinovi u 100% slučajeva opozitni, dakle

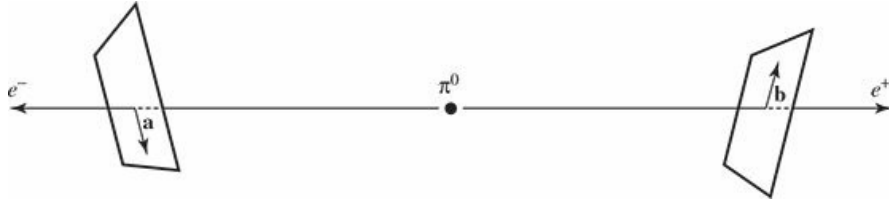
$$\vec{a} = \vec{b} \implies P(\vec{a}, \vec{a}) = -1. \quad (3.1)$$

Istom logikom, ako su ti pravci antiparalelni, svaki proizvod će biti  $+1$ , dakle

$$\vec{a} = -\vec{b} \implies P(\vec{a}, -\vec{a}) = 1. \quad (3.2)$$

Za proizvoljne pravce  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  standardna kvantna mehanika predviđa (vidjeti Dodatak):

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (3.3)$$



Slika 3.1: Belova postavka misaonog eksperimenta sa osama mjerenja koje mogu biti u proizvoljnim pravcima.

Podimo sada od pretpostavke da zaista postoji neka skrivena varijabla  $\lambda$  koja omogućuje kompletniji opis stanja. Pretpostavimo dalje da je ishod mjerenja elektrona nezavisan od orijentacije detektora pozitrona  $\vec{b}$ . Naime, tu orijentaciju bi eksperimentator koji se nalazi kod detektora pozitrona mogao izabrati neposredno prije nego što je izvršeno mjerenje elektrona, dakle prekasno da bi se bilo koja informacija koja se prenosi brzinom manjom od brzine svjetlosti vratila do detektora elektrona. Ova pretpostavka u Belovoj verziji EPRB eksperimenta je u suštini *pretpostavka o lokalnosti*. Tada postoje neke funkcije  $A(\vec{a}, \lambda)$  i  $B(\vec{b}, \lambda)$ , koje zavise od skrivene varijable  $\lambda$  i određuju rezultate mjerenja elektrona, odnosno pozitrona. Ove funkcije mogu da imaju samo vrijednosti  $+1$  i  $-1$ , dakle

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (3.4)$$

Kada su detektori poravnati, rezultati su za sve vrijednosti  $\lambda$  savršeno antikorelisani, tj.

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda). \quad (3.5)$$

Srednja vrijednost proizvoda pojedinačnih mjerenja je data sa

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (3.6)$$

gdje smo sa  $\rho(\lambda)$  označili gustinu vjerovatnoće skrivene varijable. Ako posmatramo

slučaj u kojem su detektori postavljeni u pravcima koji su međusobno paralelni, izmjerićemo uvijek suprotne spinove pa važi

$$A(\vec{m}, \lambda) = -B(\vec{m}, \lambda). \quad (3.7)$$

Srednja vrijednost proizvoda sada može da se napiše kao

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.8)$$

Za bilo koji drugi jedinični vektor  $\vec{c}$  važi takođe

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) d\lambda. \quad (3.9)$$

Ako oduzmemo ove dvije jednačine dobijamo

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda. \quad (3.10)$$

Zbog toga što je

$$[A(\vec{b}, \lambda)]^2 = 1 \quad (3.11)$$

za proizvoljan vektor  $\vec{b}$ , drugi član u integrandu možemo pomnožiti sa takvom "jedinicom", pa dobijemo

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) \left\{ A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda)]^2 \right\} d\lambda. \quad (3.12)$$

Jednostavnim izvlačenjem ispred zagrade dobijemo

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)] d\lambda. \quad (3.13)$$

Uzmimo sada apsolutnu vrijednost ovog izraza:

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| = \left| \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)] d\lambda \right|. \quad (3.14)$$

Pošto funkcije  $A$  i  $B$  uzimaju vrijednosti  $\pm 1$  lako je vidjeti da je

$$\left| A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \right| = 1. \quad (3.15)$$

Analizirajmo sada član koji je preostao:

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)]. \quad (3.16)$$

S obzirom da je  $\rho(\lambda)$  gustina vjerovatnoće, kao takva funkcija mora biti ne-negativna tako da za taj član važi

$$\rho(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda. \quad (3.17)$$

Proizvod  $A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$  može imati vrijednosti  $\pm 1$  tako da je

$$1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda. \quad (3.18)$$

Dakle,

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)] \geq 0, \quad \forall \lambda. \quad (3.19)$$

Slijedi:

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{c}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)] d\lambda = \underbrace{\int \rho(\lambda) d\lambda}_1 + P(\vec{c}, \vec{b}). \quad (3.20)$$

Konačno dobijemo Belovu nejednakost



$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + P(\vec{c}, \vec{b}). \quad (3.21)$$

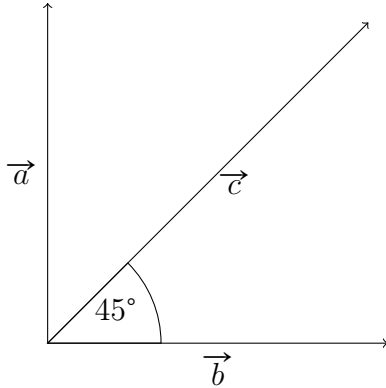
Rezultat važi za bilo koju teoriju skrivenih varijabli, jer je  $\rho(\lambda)$  proizvoljna funkcija raspodjele.

## 3.2 Narušenje Belovih nejednakosti i implikacije

Konstruišimo sada jednostavan primjer kojim možemo pokazati da, ako standardna kvantna mehanika važi, dolazi do narušavanja Belovih nejednakosti. Na slici su prikazana tri pravca u kojima možemo izvršiti mjerenje.

Želimo izračunati srednju vrijednost proizvoda izmjerenih spinova po formuli (3.3), koju smo dobili u okviru standardne kvantne mehanike (Dodatak). Ako sa  $\theta$  označimo ugao među pravcima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , onda se ova formula može napisati u obliku

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos\theta. \quad (3.22)$$



Slika 3.2: Detektori postavljeni sa relativnim uglovima od  $45^\circ$  i  $90^\circ$ .

Ako izaberemo da ugao između pravaca  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  bude  $90^\circ$ , a uglovi između pravaca  $\vec{a}$  i

$\vec{c}$ , odnosno  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , po  $45^\circ$  (slika: 3.2), Belova nejednakost glasi:

$$|\cos(90^\circ) - \cos(45^\circ)| \leq 1 + \cos(45^\circ).$$

Vidimo da ova nejednakost nije istinita, te zaključujemo da, ako se srednje vrijednosti  $P(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $P(\vec{b}, \vec{c})$ ,  $P(\vec{a}, \vec{c})$  računaju prema kvantnoj mehanici (tj. po formuli (3.3)), Belove nejednakosti su narušene.

Sa Belovom modifikacijom EPR paradoks dokazuje nešto mnogo radikalnije nego što su njegovi autori zamislili: Ako su u pravu, onda ne samo da je kvantna mehanika nepotpuna, već je i pogrešna. S druge strane, ako je kvantna mehanika u pravu, onda nas nijedna teorija skrivenih varijabli neće spasiti od nelokalnosti koju je Ajnštajn smatrao apsurdnom. Odavde proizilazi da bi realan eksperiment, kojim bi se utvrdilo da li su Belove nejednakosti narušene ili važe, razriješio dilemu - standardna kvantna mehanika ili neka lokalna teorija skrivenih varijabli.

# 4 Eksperimentalno testiranje Belovih nejednakosti

Eksperimenti za testiranje Belovih nejednakosti su izvedeni već 1960-ih i 1970-ih godina, a 2022. godine Nobelovu nagradu su dobili Alen Aspekt (*Alain Aspect*), Džon Klauzer (*John Clauser*) i Anton Čajlinger (*Anton Zeilinger*).

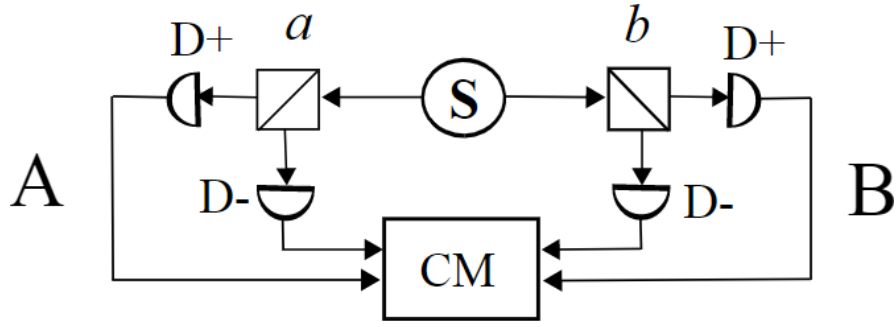
Oni su osmislili tri verzije eksperimenta u kojem se koriste polarizovani fotoni, umjesto raspada piona, kako bi se testirale Belove nejednakosti. Da bi se isključilo "favorizovanje" određenih pravaca u eksperimentu, obje orijentacije su postavljene kvazi-slučajno nakon što su fotoni već bili u letu. Pokazalo se da su Belove nejednakosti u ovim eksperimentima narušene, što je značilo eksperimentalnu potvrdu ispravnosti kvantne mehanike i propast "realizma" zbog nelokalnosti koju su eksperimenti potvrdili.

Hronološki, Klauzer je osmislio prvu verziju eksperimenta čija je suština u slanju dva polarizovana spregnuta fotona, dobijena koristeći atome Ca, u opozitnim smjerovima prema filterima kroz koje će foton ili proći ili neće, što zavisi od ugla pod kojim je filter postavljen i kako je foton polarizovan.

U momentu kreiranja para fotona ne možemo znati kakva im je polarizacija, već samo to da su im polarizacije paralelne. To znači da ako su filteri postavljeni paralelno, u slučaju da jedan foton prođe, vjerovatnoća da će proći i drugi je 1. Ako je ugao između filtera  $\frac{\pi}{2}$  uvijek će jedan foton proći, a drugi ne.

Zanimljivi efekti se vide ako se posmatraju uglovi filtera baš između 0 i  $\frac{\pi}{2}$ . Tada rezultati variraju, pa ponekad prođu oba fotona, ponekad samo jedan, a u nekim slučajevima nijedan.

Kada se uradi dosta mjerenja i zabilježe se rezultati, može se uočiti korelacija koja je mnogo veća nego kada bi proces bio vođen pod uticajem neke skrivene varijable pri čemu bi polarizacije fotona već bile predeterminisane u momentu njihove kreacije, a ne u trenutku mjerenja.



Slika 4.1: Izvor  $S$  emituje spregnute fotone koji potom odlaze u suprotnim smjerovima. U zavisnosti od njihove polarizacije i orijentacije filtera stići će do detektora  $D_+$  ili  $D_-$ . Korelacija između pojedinačnih mjerenja se može izračunati tako što nađemo broj koji predstavlja odnos sume mjerenja pri kojima smo dobili rezultat da su oba fotona prošla ili oba nisu prošla kroz filter od koje smo oduzeli sumu mjerenja pri kojima je samo jedan od fotona prošao kroz filter i ukupnog broja mjerenja, tj.  $E(a, b) = N_{++} + N_{--} - (N_{+-} + N_{-+})/N$

Ovaj eksperiment je unaprijeđena verzija misaonog Belovog eksperimenta, jer se koriste i detektori koji detektuju fotone koji nisu uspjeli proći kroz filter, pa je samim tim eksperiment potpuniji i rezultat precizniji (slika 4.1). U svojoj srži ovaj eksperiment nosi korelacionu funkciju koja ima zadatak da modeluje odgovor na pitanje: "Koliko često će oba fotona proći kroz filtere, a koliko često samo jedan?", koja je ograničena odozgo i predstavlja analognu formu Belovih nejednakosti, zvanu CHSH nejednakost.

Osim narušenja Belovih nejednakosti, novi potencijal za skladištenje, prenošenje i procesuiranje informacija je uviđen sa novom verzijom eksperimenta, koju je osmislio Aspect. Konfiguracija eksperimenta je bila drugačija u odnosu na Klauzerov u novom načinu pobuđivanja atoma tako da je frekvencija emitovanja spregnutih fotona bila veća. Takođe je korišten kristal kvarca koji je služio za preusmjerenje fotona ka različito orijentisanim filterima.

Zanimljiv efekat se mogao vidjeti u slučaju kada se spregnuti par čestica (čestice 1 i 2) kreće u suprotnim smjerovima i jedna od tih čestica naiđe na treću, slobodnu česticu (čestica 3). U tom slučaju čestice 2 i 3 postaju spregnute, pri tome čestica 3 gubi sve informacije o prethodnom stanju, ali se istovremeno to stanje "prepisuje" na česticu 1 koja nikada nije ni došla u kontakt sa česticom 3. Ovaj proces je poznat pod imenom

*kvantna teleportacija.*

Kvantna teleportacija je za sada jedini mehanizam kojim se nepoznato kvantno stanje (*kvantna informacija*) može u potpunosti prenijeti iz jednog u drugi sistem, bez ikakvih gubitaka informacija. Nemoguće je izmjeriti sve karakteristike sistema i poslati te informacije na drugu lokaciju, kako bi se prvobitni sistem rekonstruisao, primarno zbog kolapsa talasne funkcije pri vršenju bilo kakvog mjerenja.

Nakon što je kvantna teleportacija eksperimentalno pokazana, Čajlingerov eksperiment je dodao novu "dimenziju" eksperimentu i pokazao mogućnost sprežanja čestica koje su udaljene i nikada nisu došle u kontakt. Dva para (par  $A$  i par  $B$ ) spregnutih čestica se emituju iz izvora. Nakon nekog vremena po jedna od čestica iz svakog para konvergiraju ka uređaju koji će nekom transformacijom da učini te dvije čestice spregnutima. Zbog kvantne teleportacije kvantne informacije preostalih čestica će se "prepisati" jedna na drugu i one će postati spregnute iako nikada nisu došle u kontakt.

## 5 Zaključak

Svi dosadašnji eksperimenti kojima su testirane Belove nejednakosti su pokazali da su one narušene, što predstavlja eksperimentalnu potvrdu ispravnosti kvantne mehanike i propast "realizma" zbog njegove pretpostavke o lokalnosti.

S druge strane ideja o nelokalnosti (u kontekstu superluminalnog uticaja) je svakako uznemirujuća jer je toliko drugačija od onoga što nam intuicija govori i ima neprihvatljive implikacije. Prema specijalnoj teoriji relativnosti, postoje inercijalni sistemi u kojima se takav signal širi unazad u vremenu, pa bi efekti prethodili sopstvenim uzrocima - što dovodi do različitih logičkih anomalija. Pitanje je da li su efekti posmatrani u ovim eksperimentima kauzalni, ili su dovoljno eterični da se izbjegne filozofski odgovor i da superluminalni uticaji u tom slučaju dobiju novi interpretaciju.

Jedan od takvih primjera eteričnih efekata bila bi sjenka bube koja preleti preko svjetlosnog snopa filmskog projektora (slika 5.1). Udaljenost do ekrana može biti proizvoljna, pa samim tim i brzina sjenke može biti proizvoljno velika, tako da možemo zamisliti scenario u kojem se sjenka bube kreće brzinom većom od brzine svjetlosti. Ono što ovdje moramo primjetiti je da sjenka ne nosi nikakvu energiju, niti prenosi bilo kakvu informaciju s jedne tačke na drugu, tako da mi ne možemo iz tačke  $X$  prouzrokovati bilo šta u tački  $Y$  manipulacijom prolazne sjenke.



Slika 5.1: Buba se kreće brzinom  $v$  preko svjetlosnog snopa filmskog projektora. U zavisnosti od udaljenosti platna, brzina  $v'$  može biti proizvoljno velika.

Očigledno je da u Belovom eksperimentu postoji korelacija u podacima, s tim što tu korelaciju možemo da vidimo samo nakon što uporedimo dva seta podataka (nakon što su oba mjerenja završena). U skladu sa tim, odgovor na pitanje: "Da li mjerenje elektrona utiče na sa njim spregnuti pozitron", je *da*, ali ne u običnom smislu te riječi. Da je odgovor negativan, ne bismo mogli objasniti korelacije u podacima.

Osoba koja vrši eksperiment, može jedino da kontroliše da li će izvršiti mjerenje ili ne, ali ne može uticati na njegov ishod i ti rezultati su praktično nasumični (ako se posmatraju odvojeno od rezultata eksperimenata sa spregnutom česticom) i ona ne može koristiti svoje mjerenje da pošalje signal osobi na detektoru spregnute čestice (ne može natjerati datu česticu da promijeni spin, kao što ni osoba u  $X$  ne može da utiče na sjenku bube).

Ovo nas navodi da razlikujemo dvije vrste uticaja: "uzročne" vrste i "eterične" vrste. Uzročne možemo detektovati vršeći mjerenje na samom podsistemu, dok je za eterične, koje ne prenose informacije ili energiju, jedini dokaz korelacija u podacima dobijenim eksperimentima na dva različita podsistema.

Uzročni uticaji se ne mogu širiti superluminalnim brzinama, tj. princip lokalnosti za njih i dalje važi, ali zasad ne postoji razlog zašto bi to moralo da važi za eterične.

# Dodatak: Srednja vrijednost proizvoda komponenti spinova dviju čestica u proizvoljnim pravcima

Posmatrajmo dvije čestice spina  $1/2$  u singletnom stanju opisanom vektorom:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (\text{D.1})$$

Neka je  $\hat{S}_k^{(n)}$  operator komponente spina čestice  $n$  ( $n = 1, 2$ ) u pravcu  $\mathbf{k}$ . Da bismo izračunali srednju vrijednost proizvoda komponentni spinova dviju čestica u proizvoljnim pravcima zadatim ortovima  $\vec{a}$  (za prvu česticu) i  $\vec{b}$  (za drugu česticu), odredićemo prvo djelovanje proizvoda operatora tih komponenti na stanje (D.1). Pošto govorimo o proizvoljnim pravcima izaberimo ih tako da se pravac  $\vec{a}$  poklapa sa  $z$  osom, a pravac  $\vec{b}$  neka leži u  $xz$  ravni:

$$\hat{S}_a^{(1)} = \hat{S}_z^{(1)} \quad \hat{S}_b^{(2)} = \cos\theta \hat{S}_z^{(2)} + \sin\theta \hat{S}_x^{(2)}.$$

Da bismo odredili djelovanje proizvoda operatora  $\hat{S}_a^{(1)}$  i  $\hat{S}_b^{(2)}$  na stanje (D.1), potrebno je da znamo kako operatori  $\hat{S}_x^{(n)}$  i  $\hat{S}_z^{(n)}$  djeluju na spinska stanja  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$   $n$ -te čestice. Pošto su ova stanja svojstvena stanja operatora  $\hat{S}_z^{(n)}$ , imamo

$$\hat{S}_z^{(n)}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_z^{(n)}|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle. \quad (\text{D.2})$$

S druge strane, djelovanje operatora  $\hat{S}_x^{(n)}$  na spinska stanja dobijamo polazeći od djelovanja operatora podizanja i spuštanja  $\hat{S}_\pm^{(n)} = \hat{S}_x^{(n)} \pm i\hat{S}_y^{(n)}$  na njih, koje glasi

$$\hat{S}_+^{(n)}|\uparrow\rangle = 0, \quad \hat{S}_-^{(n)}|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle, \quad (\text{D.3})$$



$$\hat{S}_+^{(n)}|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_-^{(n)}|\downarrow\rangle = 0, \quad (\text{D.4})$$

odnosno

$$(\hat{S}_x^{(n)} + i\hat{S}_y^{(n)})|\uparrow\rangle = 0, \quad (\hat{S}_x^{(n)} - i\hat{S}_y^{(n)})|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle, \quad (\text{D.5})$$

$$(\hat{S}_x^{(n)} + i\hat{S}_y^{(n)})|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle, \quad (\hat{S}_x^{(n)} - i\hat{S}_y^{(n)})|\downarrow\rangle = 0. \quad (\text{D.6})$$

Sabiranjem odvojeno prve dvije i druge dvije jednačine neposredno slijedi

$$\hat{S}_x^{(n)}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \quad \hat{S}_x^{(n)}|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Koristeći rezultate (D.2) i (D.7) dalje imamo:

$$\begin{aligned} \hat{S}_a^{(1)}\hat{S}_b^{(2)}|00\rangle &= \hat{S}_z^{(1)}\left(\cos\theta\hat{S}_z^{(2)} + \sin\theta\hat{S}_x^{(2)}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{S}_z^{(1)}|\uparrow\rangle\left(\cos\theta\hat{S}_z^{(2)}|\downarrow\rangle + \sin\theta\hat{S}_x^{(2)}|\downarrow\rangle\right) - \hat{S}_z^{(1)}|\downarrow\rangle\left(\cos\theta\hat{S}_z^{(2)}|\uparrow\rangle + \sin\theta\hat{S}_x^{(2)}|\uparrow\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\left(-\cos\theta\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle + \sin\theta\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\right) + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\left(\cos\theta\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle + \sin\theta\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\right)\right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}}[-\cos\theta|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\theta|\uparrow\uparrow\rangle + \cos\theta|\downarrow\uparrow\rangle + \sin\theta|\downarrow\downarrow\rangle] \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left[-\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)\right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left[-\cos\theta|00\rangle + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1, -1\rangle)\right]. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Prema tome očekivana vrijednost proizvoda spin komponenti je:

$$\langle\hat{S}_a^{(1)}\hat{S}_b^{(2)}\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\langle 00|\left[-\cos\theta|00\rangle + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1, -1\rangle)\right] \quad (\text{D.9})$$

što se zbog ortonormiranosti stanja  $|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |1, -1\rangle$  svodi na:

$$\langle\hat{S}_a^{(1)}\hat{S}_b^{(2)}\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta, \quad (\text{D.10})$$

odnosno

$$\langle \hat{S}_a^{(1)} \hat{S}_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{D.11})$$

U svrhu našeg misaonog eksperimenta mjerenje ćemo vršiti u jedinicama  $\frac{\hbar}{2}$ , pa ćemo uzeti da je srednja vrijednost proizvoda komponenti spinova u proizvoljnim pravcima:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{D.12})$$

# Literatura

1. A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)
2. N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **48**, 696 (1935)
3. D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957)
4. J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics **1**, 195 (1964)
5. D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, Upper Sadle River, New Jersey, 1995)
6. B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Quantum Mechanics*, 2nd edition (Pearson, Prentice Hall, Harlow, England, 2000)
7. The Nobel Prize in Physics 2022, Popular science background: How entanglement has become a powerful tool (The Royal Swedish Academy of Sciences, 4 October 2022), <https://www.nobelprize.org/uploads/2022/10/popular-physicsprize2022-3.pdf>
8. Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2022 "for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science" (The Royal Swedish Academy of Sciences, 4 October 2022), <https://www.nobelprize.org/uploads/2023/10/advanced-physicsprize2022-4.pdf>