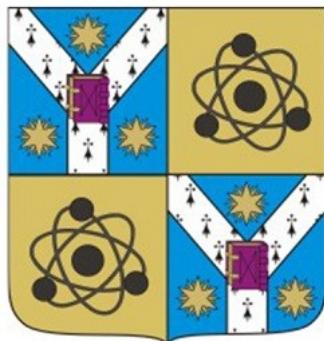


UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAŞI

FACULTATEA DE FIZICĂ



LUCRARE DE LICENȚĂ

Coordonator științific:

Lect. univ. dr. Leontin Pădurariu

Absolvent: Işfan Stefan

Specializarea: Fizică Informatică

IAŞI
2024

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAŞI

FACULTATEA DE FIZICĂ

**DETERMINAREA PRIN METODE
NUMERICE A PERMITIVITĂȚII
STRATURILOR SUBȚIRI ÎN
CONDENSATORI CU DIFERITE
CONFIGURAȚII GEOMETRICE**

Coordonator științific:

Lect. univ. dr. Leontin Pădurariu

Absolvent: Işfan Stefan
Specializarea: Fizică Informatică

IAŞI
2024

CUPRINS

Capitolul 1. Introducere – Electricitate.....	4
1.1. Elemente introductive din electricitate.....	6
1.2. Teorema lui Gauss și aplicațiile sale în calculul câmpurilor electrice pentru diferite distribuții de sarcini.....	7
1.3. Capacitatea electrică și tipuri de condensatoare.....	19
1.4. Condensatorul planar.....	24
1.5. Condensatorul cu dielectric.....	26
Capitolul 2. Metode numerice.....	27
2.1. Metode de rezolvare a ecuațiilor liniare.....	27
2.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații triunghiulare superior sau inferior.....	28
2.3. Eliminarea Gauss.....	29
2.4. Factorizarea LU.....	30
2.5. Factorizarea QR.....	31
2.6. Metoda iterativă Jacobi.....	32
2.7. Aplicații pentru rezolvarea ecuației Laplace în condensatoare.....	33
Capitolul 3. Rezultate proprii - Modelarea capacității unor condensatori.....	36
3.1. Condensatorul plan cu dimensiuni finite - analiza rolului efectelor de margine.....	36
A. Influența materialului dielectric asupra distribuției câmpului electric în condensator.....	36
B. Evaluarea impactului distanței dintre electrozi asupra distribuției câmpului electric în condensator.....	42
3.2. Condensatorul plan.....	49
Capitolul 4. Concluzii.....	55
4.1. Concluzii.....	55
4.2. Bibliografie.....	55

Capitolul 1: Introducere – Electricitate

Electricitatea este un fenomen fundamental în fizică care implică mișcarea și interacțiunea sarcinilor electrice. De la lumină și căldură până la telecomunicații și tehnologie avansată, electricitatea joacă un rol important în funcționarea societății moderne.

Încă din antichitate, electricitatea a fost un subiect de studiu care a atras interesul. În secolele al XVII-lea și al XVIII-lea, datorită muncii remarcabile a lui William Gilbert și Benjamin Franklin, interesul pentru electricitate a crescut semnificativ. Secolul al XIX-lea a marcat o revoluție în domeniul electricității, odată cu realizările în electromagnetism și inventarea motorului electric de către Michael Faraday. Descoperirile lui Thomas Edison, Nikola Tesla și ale altora au transformat electricitatea într-o forță vitală pentru societatea modernă, deschizând calea pentru anumite aplicații precum iluminatul, comunicațiile și calculul, care definesc acum lumea noastră industrială și tehnologică în secolul XXI.

Electricitatea se bazează pe existența sarcinilor electrice, deoarece aceste sarcini (electronii și protonii) sunt particule subatomice care poartă sarcini electrice negative și pozitive. În conformitate cu principiile electrostatice, sarcinile electrice de același tip experimentează o respingere reciprocă, în timp ce cele de semn opus manifestă o atracție puternică între ele.

O linie de câmp a unui câmp vectorial este o reprezentare grafică care indică direcția și sensul câmpului electric. Ele arată traекторiile unei sarcini pozitive care sunt eliberate în câmp și puse în acțiune de forță electrică. Ele pornesc de la sarcinile electrice pozitive și se termină în sarcinile negative. Liniile de câmp sunt ilustrate în figura 1.1 care oferă o vizualizare clară a impactului câmpului electric asupra sarcinilor electrice din apropiere.

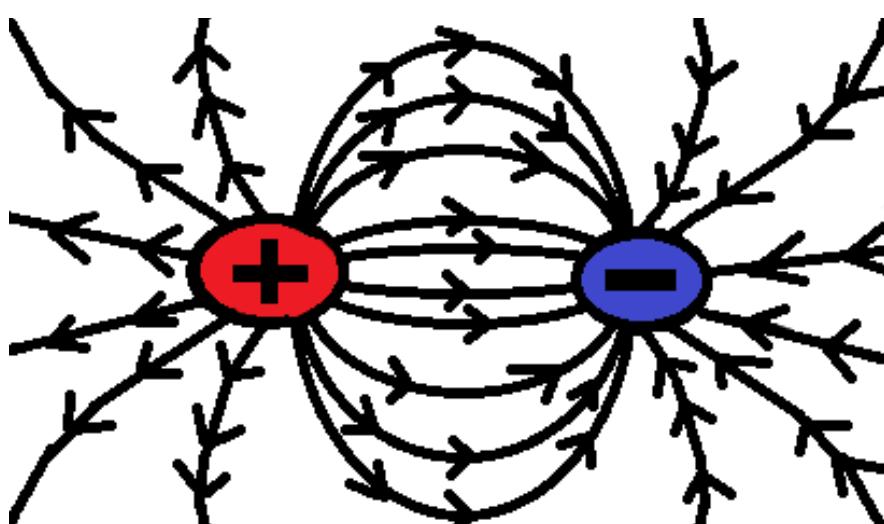


Figura 1.1. Diagramă a liniilor de câmp electric între o sarcină pozitivă și una negativă

Atunci când electronii sunt transferați între atomi sau molecule, rezultă o schimbare a distribuției sarcinilor în materie, ducând la formarea ionilor încărcați electric. Acești ioni pot juca un rol crucial în conducția electrică în diferite materiale.

Curentul electric reprezintă fluxul de sarcini electrice care circulă printr-un conductor sau un circuit. El este generat atunci când există o diferență de potențial electric, determinând mișcarea ordonată a electronilor sau ionilor. Curentul electric se măsoară în amperi și poate fi clasificat în două tipuri: curent continuu, unde fluxul de sarcini rămâne constant în timp, și curent alternativ, unde fluxul de sarcini își schimbă frecvent direcția.

Generarea unui curent electric este posibilă prin intermediul unei surse de tensiune, cum ar fi o baterie, un generator sau o priză de perete. Tensiunea, reprezentând diferența de potențial electric între două puncte, este factorul care determină câtă energie este transferată de curent. Mărimea curentului electric, exprimată în amperi, indică cantitatea de sarcină electrică care trece printr-o secțiune într-o secundă. Totodată, rezistența, o proprietate caracteristică a materialelor, se opune trecerii curentului electric și este măsurată în ohmi conform legii lui Ohm, care stabilește că tensiunea este egală cu produsul dintre curent și rezistență.

$$U=I \cdot R \quad (1.1)$$

Curentul electric, odată generat, poate alimenta o diversitate de dispozitive și aparațe, inclusiv becuri, motoare, televizoare sau calculatoare. Curentul continuu și curentul alternativ reprezintă două tipuri principale ale curentului electric. Curentul continuu, caracterizat prin direcție constantă, este produs de surse precum bateriile sau celulele solare. În schimb, curentul alternativ își schimbă periodic direcția și este generat de surse precum generatoarele sau prizele de perete. Datorită capacitatii sale de a fi mai ușor și transportat pe distanțe mari, curentul alternativ este preferat în multe aplicații industriale și de distribuție a energiei electrice.

Electricitatea constituie un element fundamental al vieții moderne, fiind implicată într-o gamă variată de aplicații esențiale în diverse domenii, precum transportul, încălzirea, iluminatul, comunicațiile și calculul. Este important de subliniat că electricitatea reprezintă o formă secundară de energie, fiind obținută prin conversia altor surse de energie, precum cărbunele, gazele naturale, petrolul, energia nucleară, energia hidroelectrică, energia eoliană sau energia solară. Totodată, procesul de conversie implică pierderi de energie, subliniind necesitatea unei utilizări eficiente și responsabile a electricității [1].

1.1. Elemente introductive din electricitate

În cadrul studiului electricității, există concepte și tehnici fundamentale necesare pentru înțelegerea și analiza fenomenelor electrice, precum teorema lui Gauss, calculul câmpurilor electrice pentru diferite distribuții de sarcini, capacitatea electrică, tipuri de condensatoare și condensatorul cu dielectric.

- Teorema lui Gauss și aplicațiile sale în calculul câmpurilor electrice pentru diferite distribuții de sarcini**

- Teorema lui Gauss reprezintă un element important al electrostaticii, deoarece leagă distribuțiile de sarcină electrică cu câmpurile electrice generate de acestea. Ea permite calculul fluxul câmpului electric prin suprafețe închise și ghidează înțelegerea distribuțiilor de sarcină. Prin aplicarea teoremei lui Gauss, putem determina câmpurile electrice generate de sarcini punctiforme, fire lungi și planuri infinite, facilitând analiza distribuțiilor complexe de sarcină.

- Capacitatea electrică și tipurile de condensatoare** - Capacitatea electrică măsoară capacitatea unui obiect de a stoca sarcină electrică, iar condensatoarele sunt dispozitive folosite pentru acest scop, incluzând tipuri de condensatoare precum condensatoarele plane, sferice și cilindrice.

Condensatoarele plane constau din două plăci paralele, iar cele sferice au formă de sferă cu un electrod intern și unul extern. Condensatoarele cilindrice sunt alcătuite din două cilindri concentrici. Fiecare tip de condensator are avantaje și utilizări specifice în diverse aplicații. Aceste tipuri de condensatoare sunt utilizate într-o gamă largă de aplicații, de la circuite integrate și dispozitive electronice de mare putere până la sisteme de stocare a energiei și filtrare a semnalului [3].

- Condensatorul cu dielectric** - Dielectricul este un material izolator folosit în condensatoare pentru a crește capacitațile acestora. Polarizarea dielectricului și permitivitatea relativă sunt aspecte cheie care influențează interacțiunea acestuia cu câmpul electric. Polarizarea dielectricului duce la o creștere a capacitații condensatorului, în timp ce permitivitatea relativă indică cât de eficient este dielectricul în stocarea sarcinii în comparație cu vidul. Astfel, introducerea unui dielectric între plăcile condensatorului poate mări semnificativ capacitatea acestuia, fără a crește dimensiunile fizice ale condensatorului [4].

- **Condensatorul planar** - Pe lângă tipurile de condensatoare pe care le cunoaștem, există și condensatorul planar, care este alcătuit din două plăci conductoare paralele separate de un material dielectric. Acesta este folosit pentru efectuarea măsurătorilor de permisivitate electrică și pentru dispozitive electronice datorită structurii sale ușoare și eficiente. Capacitățile condensatorilor planari depind de dimensiunea plăcilor, de distanța dintre plăci și de dielectricul folosit. Rezolvarea problemelor cu condensatoare planare este mai dificilă decât în cazul celorlalte tipuri de condensatori [5].

Scopul acestei lucrări este de a aprofunda înțelegerea mecanismelor electrice ale condensatoarelor planare prin utilizarea unei abordări numerice bazate pe metoda diferențelor finite. Această analiză trebuie folosită pentru a optimiza performanțele acestor părți și pentru a găsi noi utilizări în multe domenii, de la electronică avansată la sisteme energetice eficiente. Studiul ajută la dezvoltarea tehnologiilor viitoare prin oferirea de perspective pentru inovații în proiectarea condensatoarelor.

1.2. Teorema lui Gauss și aplicațiile sale în calculul câmpurilor electrice pentru diferite distribuții de sarcini

Teorema lui Gauss este un concept fundamental în electrostatică care leagă distribuția de sarcină electrică cu câmpurile electrice generate de aceasta. În acest subcapitol, vom explora în profunzime teorema lui Gauss și aplicațiile sale practice în determinarea câmpurilor electrice.

Înțelegerea și analiza distribuțiilor complexe de sarcină depind de teorema lui Gauss. Ea este esențială pentru rezolvarea problemelor electrostatice și permite simplificarea calculelor în cazuri de simetrie ridicată. Atunci când este folosită în o gamă largă de configurații geometrice, facilitează determinarea câmpurilor electrice în condiții reale, cum ar fi sistemele tridimensionale și distribuțiile neuniforme de sarcină.

Câmpul electric:

Câmpul electric este o reprezentare vectorială care arată forță unei sarcini electrice asupra unei sarcini electrice din apropiere.

Intensitatea câmpului electric se definește ca o forță excitată pe o sarcină plasată într-un punct al câmpului electric, iar aceasta poate fi exprimată prin formula:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.2)$$

Astfel, intensitatea câmpului electric E într-un punct r este suma câmpurilor create de fiecare sarcină într-o distribuție de sarcini q_1, q_2, \dots, q_n . Legea Coulomb dă forță F_0 unei sarcini de test q_0 situată la o distanță r_{0i} de o sarcină q_i .

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i \vec{r}_{0i}}{4 \pi \epsilon_0 r_{0i}^3} \quad (1.3)$$

Această relație arată că ϵ_0 este permisivitatea electrică a vidului și vectorul r_{0i} este direcționat de la sarcina q_i către sarcina q_0 . Prin eliminarea sarcinii de test q_0 , se definește câmpul electric E în punctul r produs de distribuția de sarcini:

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{4 \pi \epsilon_0 r_{0i}^3} \quad (1.4)$$

Această relație arată că intensitatea câmpului electric este direct proporțională cu magnitudinea sarcinilor sursă și invers proporțională cu pătratul distanței de la sarcini [2].

Fluxul electric:

Relația dintre câmpul electric și sursele sale poate fi exprimată extrem de simplu. Pentru aceasta se definește mărimea numită flux.

Considerăm o suprafață închisă care se află într-un câmp electric pentru a înțelege cum circulă electricitatea. Împărțim suprafața în părți mici, astfel încât fiecare element să fie plan și câmpul electric să rămână constant pe el. Suprafața elementară, care este exprimată în cm^2 , are o dimensiune specifică și este îndreptată spre exteriorul suprafeței închise. Acest lucru elimină orice ambiguitate, permitându-ne să distingem interiorul de exterior.

Un vector a_i reprezintă fiecare element de suprafață, care indică atât mărimea, cât și orientarea elementului de suprafață i . În figura corespunzătoare sunt prezentate aceste elemente (figura 1.2).

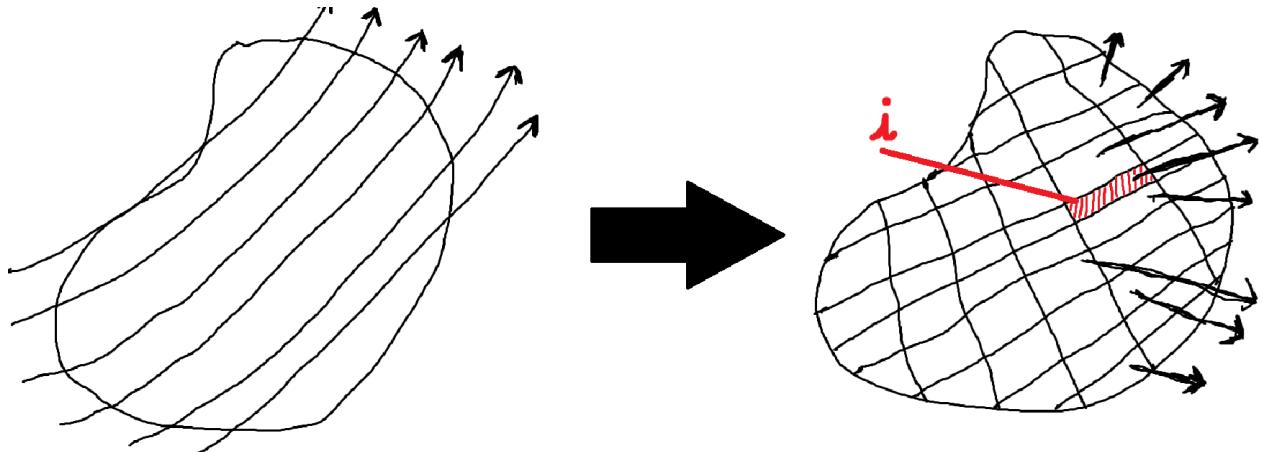


Figura 1.2: Suprafață închisă în câmp vectorial

Pentru suprafață elementară i , vectorul câmp electric E_i este un număr. Acest număr este cunoscut sub numele de fluxul prin elementul de suprafață. Să ne imaginăm că avem o funcție vectorială care arată viteza unui fluid. Un râu, de exemplu, are o viteză constantă în timp, indiferent de locație. Notăm viteza v , care este exprimată în m/s.

De asemenea, produsul scalar „ $v \cdot a$ ” reprezintă fluxul apei prin elementul de suprafață, exprimat în m^3/s , iar a este vectorul elementului de suprafață orientat din apă, exprimat în m^2 (figura 1.3). Definiția fluxului se aplică oricărei funcții vectoriale, indiferent de variabila fizică.

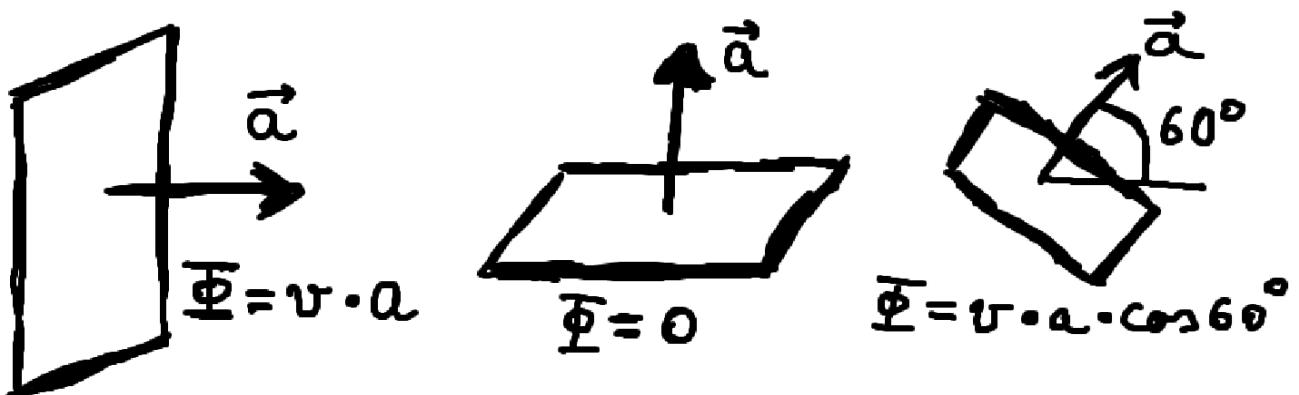


Figura 1.3: Dinamica fluxului fluidelor - studiu comparativ al unghiurilor de incidentă

Fluxul prin întreaga suprafață poate fi obținut adunând fluxurile prin toate suprafețele elementare, care este o mărime scalară și se poate scrie sub forma:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{} \vec{E}_i \cdot \vec{a}_i \quad (1.5)$$

Pentru a trece de la sumă la integrală de suprafață, trebuie să reducem elementele de suprafață și să mărim numărul lor la infinit:

$$\Phi = \int_{\text{Întreaga Suprafață}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (1.6)$$

Potențialul electric:

Potențialul electric, V , este o mărime scalară care descrie energia potențială electrică pe unitate de sarcină într-un anumit punct din spațiu. Este definit astfel încât să faciliteze calculul lucrului mecanic efectuat de câmpul electric asupra unei sarcini de probă. Gradientul câmpului electric leagă potențialul electric de câmpul electric în următorul mod:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (1.7)$$

Aceasta relație indică faptul că vectorul câmpului electric E se îndreaptă în direcția în care potențialul electric V scade cel mai rapid.

Teorema lui Gauss:

Pentru a înțelege fluxul electric printr-o suprafață sferică în jurul unei sarcini punctiforme pozitive izolate, este să luăm în considerare conceptele fundamentale ale electrostaticii. Să examinăm câmpul electric creat de această sarcină punctiformă: Formula care descrie câmpul electric generat de o sarcină punctiformă este dată de legea lui Coulomb:

$$\vec{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot \hat{r} \quad (1.8)$$

unde Q reprezintă valoarea sarcinii, ϵ_0 este permisivitatea electrică în vid, iar r este distanța de la sarcină până la punctul în care se măsoară câmpul electric.

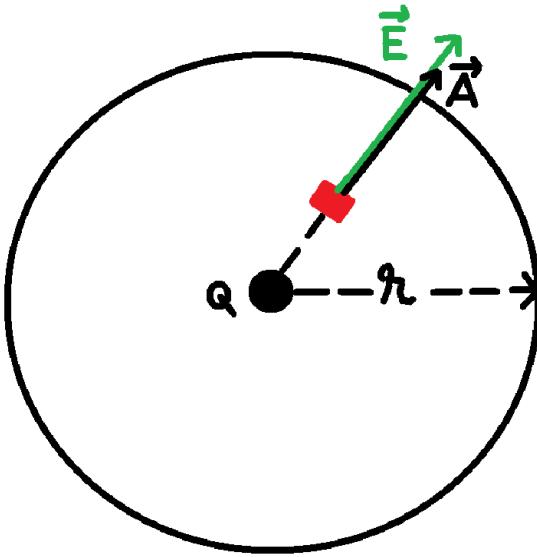


Figura 1.4: Fluxul electric exterior al sarcinii punctiforme Q

Acum, să considerăm o suprafață sferică cu centrul în punctul în care se găsește sarcina punctiformă Q (figura 1.4). Fluxul electric prin această suprafață este definit ca produsul scalar dintre câmpul electric și vectorul normal la suprafață, integrat pe toată suprafața. În acest caz, câmpul electric este radial și, prin urmare, în orice punct de pe suprafața sferică, câmpul electric și normala la suprafață sunt în aceeași direcție. Aceasta înseamnă că produsul scalar dintre aceste două vectori este $|E| \cdot |n|$, unde $|E|$ este valoarea absolută a câmpului electric și $|n|$ este valoarea absolută a normalului la suprafață, care este 1 pentru o sferă.

Astfel, fluxul electric prin suprafața sferică este:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

unde A este aria suprafeței sferice. Observația importantă este că fluxul este independent de raza sferei și de dimensiunile acesteia, ci depinde doar de valoarea sarcinii și de permitivitatea electrică în vid.

Teorema lui Gauss afirmă că fluxul electric care trece printr-o suprafață închisă este legat de sarcina totală închisă asupra suprafeței respective. Teorema este exprimată astfel:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

Această ecuație se referă la faptul că fluxul total al câmpului electric prin o suprafață închisă, S, este proporțional cu sarcina totală din interiorul acelei suprafețe, împărțită la permitivitatea electrică a vidului.

Pentru a înțelege mai bine teorema lui Gauss, să descompunem componentele și semnificația acestieia:

- **Integrală de suprafață** - Partea stângă a teoremei lui Gauss implică o integrală de suprafață. Această integrală însumează produsele scalare ale intensității câmpului electric cu elementele de arie ale unei suprafețe incluse. Măsoară în esență cât de mult pătrund liniile câmpului electric pe suprafață.
- **Sarcina totală inclusă** - Partea dreaptă a ecuației reprezintă sarcina totală din interiorul suprafeței închise Q. Aceasta este suma algebrică a tuturor sarcinilor conținute în volumul mărginit de suprafață.
- **Permitivitatea vidului** - constanta ϵ_0 este permitivitatea vidului, reprezentând gradul în care un material poate rezista la formarea unui câmp electric. Are o valoare de aproximativ $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$.

Forma integrală a teoremei lui Gauss:

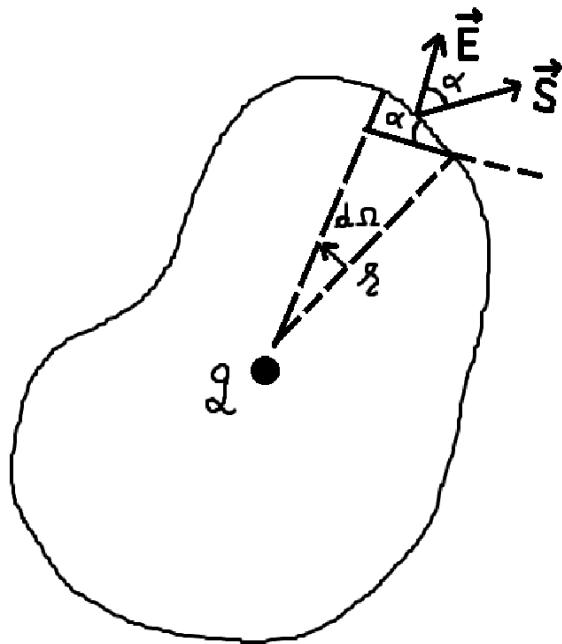


Figura 1.5: Ilustrarea teoremei lui Gauss pentru o suprafață închisă

- **Expresia fluxului electric printr-o suprafață de dimensiuni infinite:**

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (1.11)$$

Acesta reprezintă fluxul electric $d\Phi$ printr-un element infinitesimal de suprafață ds care este orientat cu un unghi α față de vectorul câmpului electric E .

- Proiecția fluxului în direcția suprafeței normale:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_\perp = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega \quad (1.12)$$

Aici, sarcina q , distanța r și elementul solid de unghi $d\Omega$ reprezintă proiecția fluxului pe direcția normală a suprafeței.

- Calcul fluxului total:

$$\Phi_t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

Aceasta este forma integrală a teoremei lui Gauss, care afirmă că fluxul electric total Φ_t printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina totală q închisă de suprafață, împărțită la permitivitatea electrică a vidului ϵ_0 .

Forma locală a teoremei lui Gauss (divergența câmpului electric):

Să considerăm un mic paralelipiped în interiorul unui câmp electric pentru a înțelege forma locală a teoremei lui Gauss (figura 1.6).

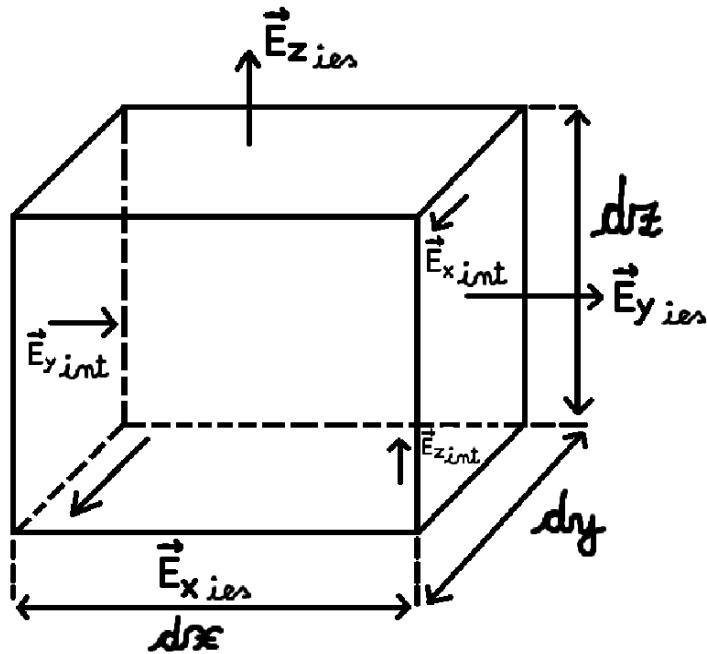


Figura 1.6: Paralelipiped dreptunghic

Fluxul total prin suprafața paralelipipedului poate fi scris astfel:

$$\Phi_t = (E_y)_{\text{iesire}} dx dz - (E_y)_{\text{intrare}} dx dz + (E_x)_{\text{iesire}} dy dz - (E_x)_{\text{intrare}} dy dz + (E_z)_{\text{iesire}} dx dy - (E_z)_{\text{intrare}} dx dy \quad (1.14)$$

Aceasta reprezintă suma fluxurilor de câmp electric prin fiecare pereche de fețe opuse ale paralelipipedului.

Pentru a simplifica această expresie, exprimăm diferențele dintre valorile câmpului electric la marginile paralelipipedului folosind seria Taylor. Prin urmare, fluxul total este:

$$\Phi_t = [(E_y)_{iesire} - (E_y)_{intrare}] dx dz + [(E_x)_{iesire} - (E_x)_{intrare}] dy dz + [(E_z)_{iesire} - (E_z)_{intrare}] dx dy \quad (1.15)$$

Pentru componentele câmpului electric, folosind expansiunea în serie Taylor, avem:

$$(E_y)_{iesire} = (E_y)_{intrare} + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \quad (1.16)$$

$$(E_x)_{iesire} = (E_x)_{intrare} + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \quad (1.17)$$

$$(E_z)_{iesire} = (E_z)_{intrare} + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_t = & \left[(E_y)_{intrare} + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy - (E_y)_{intrare} \right] dx dy + \left[(E_x)_{intrare} + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx - (E_x)_{intrare} \right] dx dz \\ & + \left[(E_z)_{intrare} + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz - (E_z)_{intrare} \right] dy dz \end{aligned} \quad (1.19)$$

Prin urmare, fluxul total este:

$$\Phi_t = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot dx dy dz \quad (1.20)$$

Conform teoremei lui Gauss, sarcina electrică închisă în volum este proporțională cu fluxul total prin suprafața închisă. Acest principiu poate fi scris astfel:

$$\Phi_t = \frac{\rho \cdot dx dy dz}{\epsilon_0} \quad (1.21)$$

unde ρ reprezintă densitatea volumică de sarcină electrică, iar ϵ_0 este permisivitatea electrică a vidului. Prin urmare, obținem relația:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.22)$$

Aceasta reprezintă forma locală a teoremei lui Gauss, cunoscută și sub denumirea de legea divergenței:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.23)$$

Relația dintre câmpul electric și potențialul electric:

Câmpul electric E este conectat la potențialul electric V prin următoarea relație:

$$\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow \nabla(\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.26)$$

Aceasta este cunoscută sub denumirea de ecuația lui Poisson. În absența sarcinilor (adică $\rho=0$), ecuația lui Poisson se simplifică și devine ecuația lui Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.27)$$

Contextul dielectricilor:

$$\nabla(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho = -\nabla \vec{P} \quad (1.28)$$

Această relație arată că divergența fluxului electric în dielectriți este egală cu densitatea volumică de sarcină liberă și sarcini legate de polarizare.

În ceea ce privește dielectricii, polarizarea dielectricului P este corelată cu densitatea de sarcină. Relația generală a fluxului electric în prezența unui dielectric este:

$$\nabla(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}) = 0 \quad (1.29)$$

Polarizarea vectorului \vec{P} pentru dielectrici liniari este dată de:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) \vec{E} \quad (1.30)$$

unde ϵ_r este permisivitatea relativă a materialului dielectric. Înlocuind această relație cu ecuația anterioară, obținem:

$$\nabla (\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E}) = 0 \quad (1.31)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon \quad (1.32)$$

Pentru situațiile în care permisivitatea dielectrică ϵ este constantă, ecuația se reduce la:

$$\nabla (\epsilon \cdot \vec{E}) = 0 \quad (1.33)$$

Datorită acestui fapt, substituim ecuația de mai sus cu relația următoare din ecuația 1.24:

$$\nabla (\epsilon \cdot \text{grad } V) = 0 \quad (1.34)$$

Cu ajutorul coordonatelor carteziene, ecuația lui Laplace pentru dielectrici poate fi prezentată în această formă [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.35)$$

Aplicații ale teoremei lui Gauss:

- **Câmpul electric generat de o sarcină punctiformă** - Folosind teorema lui Gauss, putem demonstra că câmpul electric generat de o sarcină punctiformă Q este dat de legea lui Coulomb în forma sa vectorială, care este:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r} \text{ sau } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.36)$$

Această formulă arată că câmpul electric E la o distanță r de la sarcină este invers proporțional cu pătratul distanței și are direcția radială, îndreptată de la sarcină către punctul de măsurare. Pentru a aplica teorema lui Gauss în acest caz, putem alege o suprafață sferică închisă cu centrul în jurul sarcinii. Datorită simetriei sferice, putem arăta că fluxul câmpului electric prin

suprafața sferică este proporțional cu sarcina Q din interiorul sferei și putem obține rapid expresia pentru câmpul electric în jurul unei sarcini punctiforme (figura 1.7).

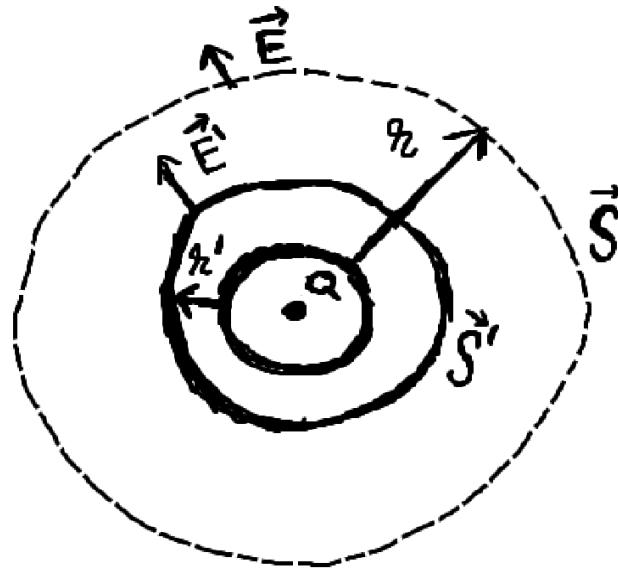


Figura 1.7: Distribuția câmpului electric al unei sfere încărcate

- **Câmpul electric generat de un fir lung cu densitatea liniară de sarcină λ** - Pentru a calcula câmpul electric generat de un fir lung, putem alege o suprafață cilindrică închisă cu axa aliniată cu firul. Utilizând simetria cilindrică, putem arăta că fluxul câmpului electric prin suprafața cilindrică este proporțional cu sarcina totală din interiorul cilindrului, iar astfel putem determina câmpul electric E în funcție de λ și distanța r de la fir (figura 1.8).

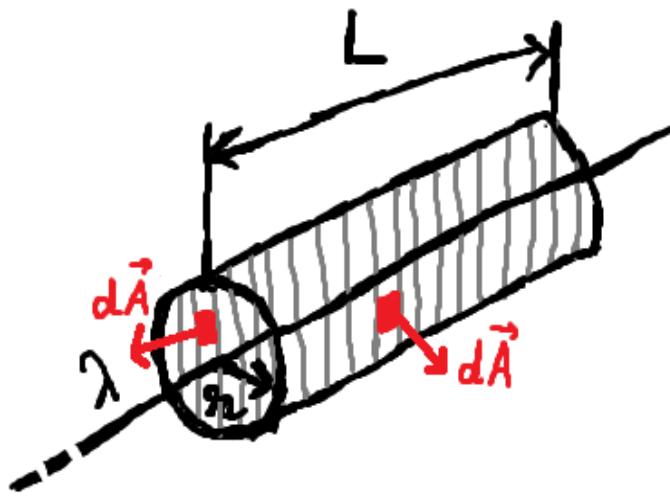


Figura 1.8: Câmpul electric al unui fir lung cu sarcină liniară

Formula pentru câmpul electric generat de un fir lung este de forma:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{intrare}}}{\epsilon_0} \quad (1.37)$$

$$\int_{\text{aria laterală}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad (1.38)$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad (1.39)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1.40)$$

Ecuația 1.40 ne permite să calculăm câmpul electric în orice punct din spațiu în jurul firului lung, ținând cont de distribuția liniară de sarcină. Este important să menționăm că câmpul electric este invers proporțional cu distanța r , ceea ce înseamnă că se slăbește pe măsură ce ne îndepărțăm de fir.

- **Câmpul electric generat de un plan infinit cu densitatea superficială de sarcină σ** - Folosind teorema lui Gauss, putem arăta că câmpul electric generat de un plan infinit este uniform și perpendicular pe plan (figura 1.9).

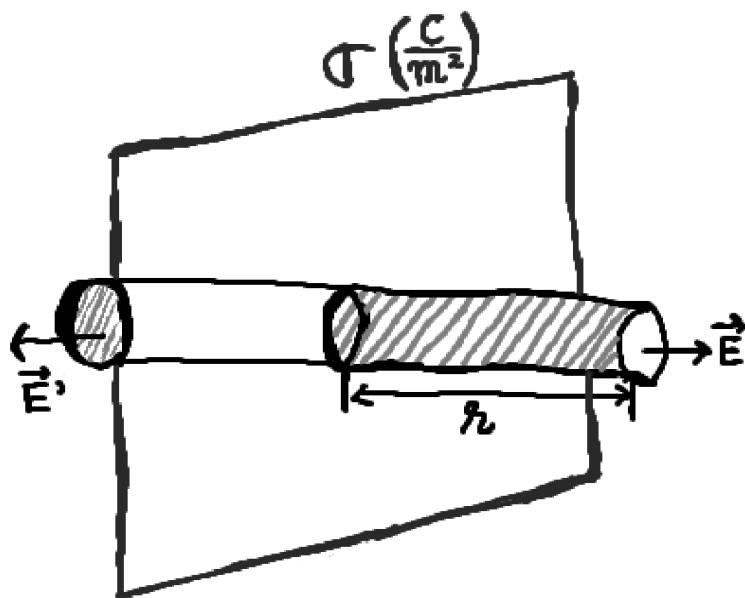


Figura 1.9: Câmp electric perpendicular pe un plan cu densitate de sarcină

Astfel, putem determina intensitatea câmpului electric E în funcție de densitatea superficială σ și se poate scrie sub forma:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \quad (1.41)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.42)$$

Teorema lui Gauss are numeroase aplicații practice, printre care se numără:

- **Determinarea câmpului electric în jurul unor distribuții de sarcină complexe** - Aceasta include calculul câmpului electric generat de distribuții de sarcină neuniforme sau tridimensionale.
- **Proiectarea și analiza condensatoarelor** - Teorema lui Gauss este esențială în determinarea capacitații și a câmpului electric între plăcile condensatorului, facilitând proiectarea și analiza acestor dispozitive.
- **Simulații numerice și utilizarea metodelor numerice** - Teorema lui Gauss poate fi integrată în simulațiile numerice și utilizarea metodelor numerice pentru a rezolva ecuațiile electrostatice și pentru a obține rezultate numerice precise [2].

1.3. Capacitatea electrică și tipurile de condensatoare

Capacitatea electrică și condensatoarele reprezintă concepte esențiale în studiul electricității și sunt fundamentale într-o varietate de aplicații tehnologice. În această secțiune, vom explora definiții, teorii și aplicații ale capacitații electrice și ale condensatoarelor, inclusiv o analiză a tipurilor de condensatoare și a factorilor care influențează capacitațile lor.

Definiții și concepte fundamentale:

- **Capacitatea electrică** - Este o mărime fizică ce caracterizează capacitatea unui obiect de a stoca sarcină electrică la un anumit potențial electric. Ea este definită ca raportul dintre sarcina electrică a unui obiect și potențialul electric al acelui obiect, care se poate scrie astfel:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.43)$$

Capacitatea electrică se măsoară în farazi, scris ca F, iar faradul este definit ca capacitatea unui condensator care, încărcat cu o sarcină de un coulomb, are un potențial electric de un volt.

- **Condensatorul electric** - Este un dispozitiv electric pasiv care este capabil să stocheze energie electrică sub formă de câmp electric între două suprafețe încărcate cu sarcini electrice de semn opus. Condensatoarele constau în general din două conductoare metalice sau armături, separate de un dielectric, care poate fi aerul, hârtia, ceramica sau alte materiale dielectrice [2] [3].

Tipuri de condensatoare:

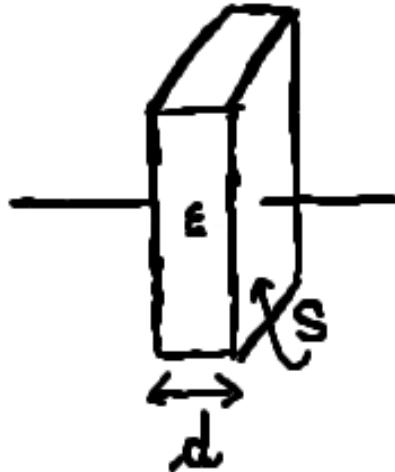


Figura 1.10: Condensator plan – primul tip de condensator

Condensatorul plan este un dispozitiv electric format din două armături plane și paralele, dispuse la o distanță (d) una față de celalaltă (figura 1.10). Pe fețele interioare ale acestor armături sunt distribuite uniform sarcini electrice de semn opus, $+Q$ și $-Q$, creând două straturi superficiale de sarcină cu densități egale și opuse:

$$\sigma = \pm \frac{Q}{S} \quad (1.44)$$

unde S reprezintă aria comună a celor două armături. Între aceste armături acționează forțe electrostatice de atracție.

Atunci când distanța d dintre armături este mică în comparație cu dimensiunile acestora, câmpul electric între plăci este considerat uniform și perpendicular pe armături. Fluxul electric prin condensator, Φ , poate fi definit ca produsul dintre intensitatea câmpului electric, aria plăcilor și cosinusul unghiului dintre câmp și normala la plăci, fiind simplificat la:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad (1.45)$$

Pentru o sarcină electrică punctiformă, câmpul electric este radial, iar fluxul electric printr-o sferă imaginată de rază, r , este proporțional cu sarcina, Q , împărțită la permitivitatea electrică a mediului, ϵ .

Această relație exprimă teorema lui Gauss sub forma:

$$E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon} \quad (1.46)$$

de unde putem obține intensitatea câmpului electric între plăci:

$$E = \frac{Q}{\epsilon \cdot S} \quad (1.47)$$

Tensiunea electrică între armături, U , este dată de produsul dintre intensitatea câmpului electric și distanța dintre armături, care este:

$$U = E \cdot d = \left(\frac{Q}{\epsilon \cdot S} \right) \cdot d = \frac{Q}{C} \quad (1.48)$$

Se poate defini capacitatea condensatorului plan, C , ca raportul dintre permitivitatea electrică relativă a mediului, aria suprafeței armăturilor și distanța dintre ele, astfel încât:

$$C = \frac{\epsilon \cdot S}{d} \quad (1.49)$$

Această formulă ne permite să calculăm capacitatea condensatorului plan în funcție de caracteristicile dielectrice ale mediului, geometria plăcilor și distanța dintre ele.

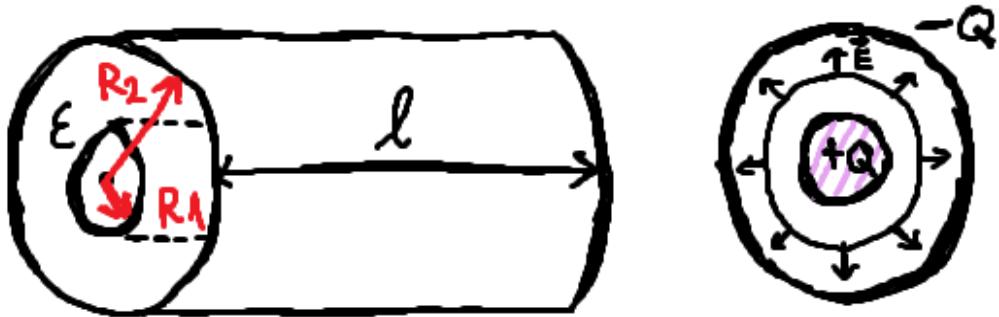


Figura 1.11 - Condensator cilindric – al doilea tip de condensator

Condensatorul cilindric este un dispozitiv electric cu armături cilindrice și coaxiale, adesea folosit în diverse aplicații. Să considerăm două cilindri concentrici cu lungimi comune, având razele R_1 și R_2 . Atunci când este stabilită o tensiune U între aceste armături, ele se încarcă cu sarcini de polaritate opusă, $+Q$ și $-Q$ (figura 1.11). În interiorul spațiului dintre cilindri, câmpul electric poate fi determinat folosind teorema lui Gauss, care arată că la o distanță R de axa de simetrie, intensitatea câmpului electric, notată E , este proporțională cu sarcina și invers proporțională cu distanța de la axă și lungimea comună a cilindrilor, și invers proporțională cu permitivitatea mediului. Astfel, ecuația devine:

$$E = \frac{Q}{2\pi RL\epsilon} \quad (1.50)$$

Pe de altă parte, diferența de potențial dintre armături, notată cu U , poate fi exprimată ca integrala câmpului electric în raport cu distanța, care, în cazul acestui condensator, se reduce la o expresie simplă:

$$U = \frac{Q}{2\pi L\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (1.51)$$

Capacitatea acestui condensator cilindric este dată de formula:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (1.52)$$

unde l reprezintă lungimea comună a armăturilor.

Astfel, aceste relații matematice descriu comportamentul și proprietățile esențiale ale unui condensator cilindric într-un circuit electric.



Figura 1.12: Condensator sferic – al treilea tip de condensator

Condensatorul sferic este constituit din două sfere concetrice, având razele R_1 și R_2 (figura 1.12). Deși mai rar întâlnit în practică, este folosit în aplicații unde este necesar un condensator de capacitate mare și cu o distribuție uniformă a câmpului electric, cum ar fi în acceleratoarele de particule și experimentele de fizică atomică. Dacă sarcina pe fiecare armătură este Q , atunci potențialele celor două armături sunt date de formulele:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (1.53)$$

și

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (1.54)$$

Tensiunea între aceste două sfere poate fi exprimată ca:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.55)$$

Capacitatea acestui condensator sferic este dată de relația:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} \right) - \left(\frac{1}{R_2} \right)} \quad (1.56)$$

Aceste formule descriu proprietățile esențiale ale condensatorului sferic și relațiile dintre sarcină, tensiune și capacitate în acest tip specific de condensator [3].

1.4. Condensatorul cu dielectric

Într-un condensator plan cu un dielectric plasat între plăci, interacțiunea între sarcinile $\pm Q_c$ de pe plăci și structura dielectricului conduce la modificări semnificative în câmpul electric (figura 1.13). Polarizarea dielectricului și permitivitatea electrică a vidului sunt factori esențiali care influențează această interacțiune.

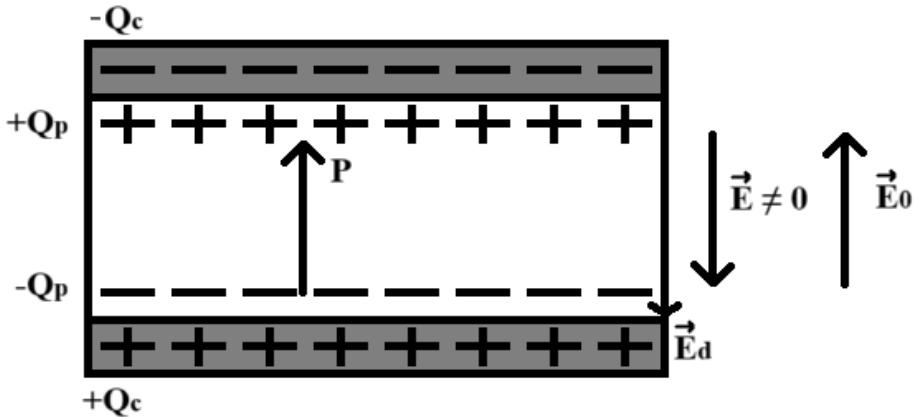


Figura 1.13: Condensator plan cu dielectric

Polarizarea dielectricului, exprimată prin P , reprezintă fenomenul în care dipolii sau sarcinile electrice în dielectric sunt aliniati sub influența câmpului electric extern. Astfel, câmpul electric E_d inițial este rezultatul acestei polarizări și poate fi calculat ca:

$$E_d = \left(\frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \right) \quad (1.57)$$

unde σ_{pol} reprezintă densitatea de polarizare și ϵ_0 este permitivitatea electrică a vidului.

În prezența dielectricului, câmpul electric total E între plăci este suma dintre câmpul inițial E_0 și câmpul induș E_d , adică:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \left(\frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \right) = \vec{E}_0 - \left(\frac{P}{\epsilon_0} \right) \quad (1.58)$$

Diferența de potențial între plăci devine:

$$V'_1 - V'_2 = E_0 - \left(\frac{P}{\epsilon_0} \right) \cdot d \quad (1.59)$$

unde d reprezintă distanța dintre plăci.

Capacitatea condensatorului poate fi exprimată ca:

$$C = C_0 \cdot 1 + \frac{P}{(\epsilon_0 \cdot E)} \quad (1.60)$$

unde C_0 reprezintă capacitatea în absența dielectricului.

Deoarece polarizarea dielectricului, P , este legată de intensitatea câmpului electric prin formula:

$$P = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot E \quad (1.61)$$

unde χ reprezintă susceptibilitatea electrică, putem deduce că capacitatea condensatorului devine:

$$C = C_0 \cdot (1 + \chi) = \epsilon_r \cdot C_0 \quad (1.62)$$

unde ϵ_r este permitivitatea relativă a dielectricului.

Această formulă indică o creștere a capacității condensatorului cu ϵ_r ori atunci când un dielectric este introdus între armături, simultan cu o reducere a câmpului electric. Astfel, dielectricul servește la îmbunătățirea capacității condensatorului, fără a crește dimensiunile sale fizice. De asemenea, permitivitatea relativă a dielectricului, ϵ_r , influențează capacitatea condensatorului, deoarece este o măsură a cât de mult mai eficient este dielectricul în stocarea sarcinii în comparație cu vidul. Astfel, atunci când permitivitatea relativă este mai mare decât 1, cum ar fi în majoritatea dielectricelor utilizate în practică, capacitățile condensatoarelor cu dielectric vor fi mai mari decât cele ale condensatoarelor fără dielectric. Aceasta se datorează faptului că dielectricul permite o polarizare mai mare și, prin urmare, o capacitate mai mare a condensatorului [4].

1.5. Condensatorul planar

Datorită capacității lor de a filtra semnale și de a stoca energie electrică, condensatorul planar joacă un rol important în diverse aplicații tehnologice. El este format din două plăci conductoare paralele, separate de un material dielectric, care poate varia de la aer la diferite tipuri de materiale ceramice sau polimetrice.

În cazul eșantioanelor de dimensiuni mari (figura 1.11), formula capacității C are această formulă:

$$\epsilon_{\text{măsurat}} = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \cdot S} \quad (1.63)$$

unde $\epsilon_{\text{măsurat}}$ este permitivitatea măsurată, d este distanța dintre plăci, ϵ_0 este permitivitatea în vid și S este aria plăcilor.

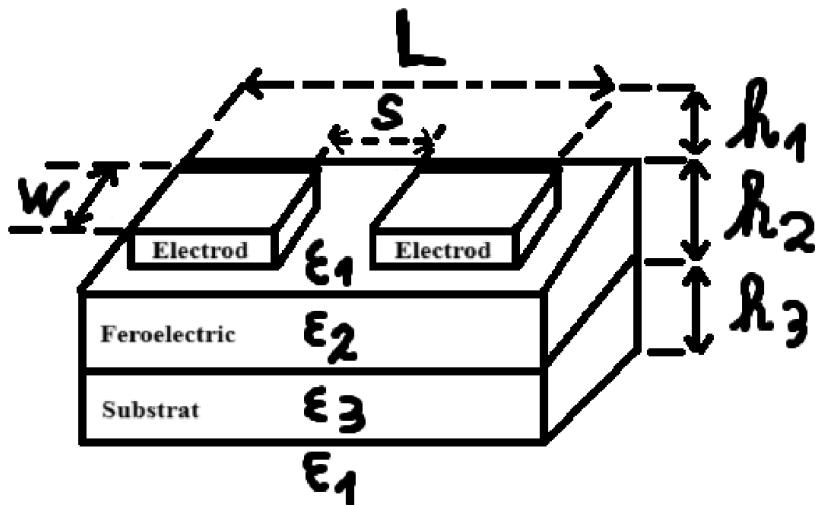


Figura 1.14: Straturi subțiri

Permitivitatea efectivă pentru straturi subțiri (figura 1.14) poate fi obținută folosind o formulă complexă care ia în considerare permitivitatea fiecărui strat și dimensiunile geometrice:

$$C_{\text{experimental}} = \epsilon_0 w \left[\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{41}{s} \right) + \frac{\epsilon_{\text{substrat}} - 1}{\pi} \ln \left(16 \frac{h_{\text{substrat}} - h_{\text{feroelectric}}}{\pi s} \right) + \frac{\epsilon_{\text{feroelectric}} - \epsilon_{\text{substrat}}}{(s/h_{\text{feroelectric}}) + ((4/\pi) \cdot \ln 2)} \right] \quad (1.64)$$

Straturile subțiri nu pot fi măsurate în configurațiile de condensatoare, deoarece se pun în accent complexitatea interacțiunii dintre straturile dielectrice și structura condensatorului planar. În măsurătorile de permitivitate electrică, utilizarea condensatorului planar permite caracteristica precisă a materialelor dielectrice. Acest lucru este important pentru dezvoltarea noilor materiale și dispozitive electronice de înaltă calitate [5].

Capitolul 2: Metode numerice

Acest capitol oferă o descriere detaliată a metodelor numerice utilizate pentru modelarea condensatorilor. Acest capitol discută o varietate de metode și algoritmi care sunt esențiale pentru analiza numerică a problemelor electrice, de la ecuațiile liniare fundamentale până la aplicațiile practice ale ecuației Laplace în condensatoare.

Pentru această problemă, există două categorii principale de metode numerice: metodele directe și metodele iterative. Deși metodele directe folosesc un număr finit de operații aritmetice pentru a obține o soluție, pot fi costisitoare din punct de vedere al timpului de calcul și al memoriei necesare. Metodele iterative produc o succesiune de aproximări ale soluției care ajung la soluția limită exactă; cu toate acestea, ele necesită o condiție de oprire și o estimare a erorii.

2.1. Metode de rezolvare a ecuațiilor liniare

O ecuație liniară în variabilele x_1, x_2, \dots, x_n este orice ecuație care poate fi scrisă sub forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.1)$$

unde a_1, a_2, \dots, a_n și b sunt constante reale sau complexe. Un sistem de ecuații de acest tip poate fi scris sub formă matriceală

$$Ax = b \quad (2.2)$$

unde A este matricea coeficienților (matricea sistemului), x este vectorul necunoscutelor și b este vectorul termenilor liberi.

Un sistem de ecuații poate fi exprimat astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Sistemele de ecuații liniare pot fi abordate prin metode directe sau iterative. Metodele directe, cum ar fi eliminarea Gauss, transformă sistemul inițial într-un sistem echivalent, dar mai simplu de rezolvat. Factorizarea LU și QR sunt alte exemple de metode directe, care fac matricea coeficienților mai simplă, facilitând rezolvarea sistemului.

Pe de altă parte, metodele iterative, cum ar fi metoda Jacobi, generează o succesiune de aproximări care duce la soluția exactă a sistemului. Aceste metode sunt deosebit de utile pentru sistemele mari și slab condiționate, unde metodele directe pot fi nepractic de costisitoare din punct de vedere computațional. Metoda Jacobi, de exemplu, actualizează valorile necunoscute folosind valorile din pasul anterior, iterând până când diferența dintre soluțiile consecutive devine neglijabilă.

Fiecare metodă are avantajele și dezavantajele sale, selecția fiind condiționată de dimensiunea sistemului, de precizia dorită și de resursele computaționale disponibile. În practică, adesea se folosesc metode combinate sau hibride pentru a exploata punctele forte ale fiecărei metode și pentru a obține soluții eficiente și precise [6].

2.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații triunghiulare superior sau inferior

Datorită formei speciale a matricei utilizate, metode simple pot rezolva cu succes un sistem de ecuații triunghiulare. Cele două categorii de matrice triunghiulare sunt superioare și inferioare.

O matrice triunghiulară superioară este o matrice în care toate intrările sunt zero sub diagonala principală. Acest lucru înseamnă că toate elementele nenule se găsesc pe diagonala principală sau deasupra acesteia. Matricile triunghiulare superioare au forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Pentru sistemul care are o formă matriceală (2.2), unde matricea A este triunghiulară superioară, folosim substituția inversă, începând cu ultima ecuație și mergând mai departe spre prima:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (2.5)$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \rightarrow i=n-1, n-2, \dots, 1 \quad (2.6)$$

Similar, o matrice triunghiulară inferioară este o matrice în care toate intrările sunt zero deasupra diagonalei principale. Acest lucru înseamnă că toate elementele nenule se găsesc pe diagonala principală sau sub aceasta. Matricile triunghiulare inferioare au forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Rezolvarea unui sistem de acest tip se realizează prin substituție directă, începând cu prima ecuație și continuând până la ultima:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2.8)$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \rightarrow i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.9)$$

Aceste metode sunt rapide și eficiente, deoarece multe dintre elementele matricei sunt zero, ceea ce reduce complexitatea calculului [6].

2.3. Eliminarea Gauss

Pentru a rezolva sisteme de ecuații liniare, eliminarea Gauss este o metodă algebrică care transformă matricea sistemului într-o formă triunghiulară superioară. Aceasta face ca rezolvarea ecuațiilor prin substituție inversă să fie mai simplă.

- **Formarea matricei extinse** - Sistemul de ecuații este reprezentat prin matricea extinsă a coeficienților și termenilor liberi:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

- **Transformarea în formă triunghiulară superioară** - Pentru a obține zerouri sub diagonala principală, se aplică operații elementare pe linii:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

- **Substituția inversă** - Odată ce forma triunghiulară superioară este obținută, soluțiile sistemului pot fi găsite prin substituție inversă:

$$x_n = b_n^{(n)} \quad (2.12)$$

$$x_k = b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki}^{(k)} x_i \rightarrow k = \overline{n-1, 1} \quad (2.13)$$

Pentru o matrice A de dimensiune 3×3 , produsul elementelor diagonalei principale este folosit pentru a determina determinantul unei matrice triunghiulare superioare:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \quad (2.14)$$

Dacă oricare dintre aceste elemente diagonale este zero, atunci determinantul matricei va fi zero, ceea ce indică faptul că matricea este singulară (nu are inversă).

Această metodă joacă un rol important în algebră liniară și analiza numerică, deoarece poate fi utilizată eficient pentru a rezolva sisteme de ecuații liniare complexe [6] [7].

2.4. Factorizarea LU

Factorizarea LU descompune o matrice pătratică A în două matrici, L (triunghiulară inferioară) și U (triunghiulară superioară), astfel încât:

$$A = LU \quad (2.15)$$

Acest lucru facilitează rezolvarea sistemului de ecuații liniare (2.2) în două etape:

- Prin substituție înainte (directă):

$$Ly = b \quad (2.16)$$

- Prin substituție înapoi (inversă):

$$Ux = y \quad (2.17)$$

Rezolvarea sistemelor triunghiulare se face prin metoda substituției, fie directă pentru matricea L, fie inversă pentru matricea U. De exemplu, pentru un sistem dat de ecuații cu matricea asociată A, descompunerea LU va arăta astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Determinantul lui A este produsul elementelor diagonale ale lui U:

$$\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} \quad (2.19)$$

Factorizarea LU este eficientă atât pentru calculul determinantului, cât și pentru rezolvarea sistemelor liniare [7].

2.5. Factorizarea QR

Factorizarea QR a unei matrice A este o metodă de descompunere a acesteia într-un produs de două matrici distințe Q și R, unde Q este o matrice ortogonală, ceea ce înseamnă că:

$$Q^T Q = I$$

unde Q^T reprezintă transpusa matricei Q și I este matricea identitate.

Matricea R este o matrice triunghiulară superioară. Această descompunere este utilă în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, în calculul valorilor proprii și al vectorilor proprii, precum și în diverse aplicații matematice și de calcul numeric.

Descompunerea QR a unei matrice A de dimensiuni $m \times n$ se obține astfel:

$$A = QR \rightarrow (q_1 q_2 \dots q_n) \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots R_{1n} \\ 0 & R_{22} & R_{23} & \dots R_{2n} \\ 0 & 0 & R_{33} & \dots R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots R_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

De asemenea, factorizarea QR este adesea definită ca:

$$(Q_1 Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

unde R_1 este o matrice triunghiulară superioară $n \times n$, 0 este o matrice zero $(m-n) \times n$, Q_1 este $m \times n$ și Q_2 este $m \times (m-n)$. Q_1 și Q_2 au ambele coloane ortogonale [8].

2.6. Metoda iterativă Jacobi

Metoda iterativă Jacobi este o tehnică utilizată pentru a aproxima soluțiile sistemelor de ecuații liniare. Aceasta implică începerea cu o aproximare inițială și îmbunătățirea succesivă a soluției printr-un proces iterativ.

Fie A matricea coeficienților, x vectorul necunoscutelor, și b vectorul termenilor liberi.

Metoda rescrie ecuația 2.2 în forma:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} [b - (L + U)x^{(k)}] \quad (2.22)$$

unde D, L, și U sunt, respectiv, componentele diagonale, sub-diagonale și supra-diagonale ale matricei A. Fiecare componentă a vectorului x este actualizată iterativ după formula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (2.23)$$

Exemplu aplicativ - Considerăm sistemul:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Inițializând $x^{(0)} = [0,0,0]^T$, aplicăm metoda Jacobi pentru a determina x la convergență.

Condiția suficientă (dar nu necesară) pentru convergență metodei Jacobi este ca matricea A să fie dominant diagonală. Practic, asta înseamnă că elementele pe diagonala principală a matricei A sunt mai mari în modul decât suma modulelor celorlalte elemente din fiecare rând.

Metoda Jacobi este deosebit de relevantă pentru calculul câmpurilor electrice și studiul permitivității în materialele condensatoarelor. Prin discretizarea ecuațiilor Laplace sau Poisson, metoda poate aproxima distribuția câmpului electric în straturile subțiri, influențând direct calculul permitivității [9].

2.7. Aplicații pentru rezolvarea ecuației Laplace în condensatoare

Ecuația Laplace este o formulare matematică care descrie un câmp electric într-un domeniu unde nu există surse de sarcină. Într-un condensator, aceasta este esențială pentru a determina distribuția potențialului electric între plăcile condensatorului. Metoda diferențelor finite discretizează spațiul într-o rețea de noduri și aproximează derivatele parțiale folosind diferențe finite.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.25)$$

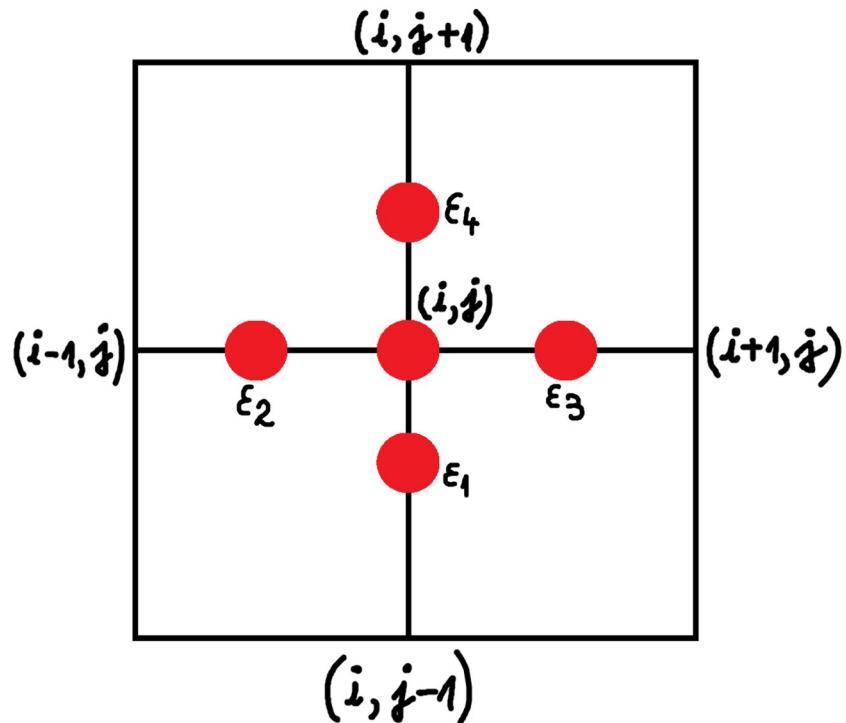


Figura 2.1: Reprezentarea metodei diferenței finite pentru ecuația Laplace

Pentru a aplica metoda diferențelor finite, domeniul de interes (de exemplu, spațiul dintre plăcile unui condensator) este împărțit într-o grilă de puncte (figura 2.1). Fiecare punct pe grilă este evaluat în funcție de potențialul electric, folosind relațiile de vecinătate pentru a aproxima derivatele.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.26)$$

și

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{y_{i+1} - y_j} \quad (2.27)$$

Pentru o grilă cu pas constant h , ecuația discretizată a lui Laplace pentru un nod (i,j) este:

$$\frac{\epsilon_1}{h_y^2} V_{i,j-1} + \frac{\epsilon_2}{h_x^2} V_{i-1,j} + \frac{\epsilon_3}{h_x^2} V_{i+1,j} + \frac{\epsilon_4}{h_y^2} V_{i,j+1} - \left(\frac{\epsilon_1}{h_y^2} + \frac{\epsilon_2}{h_x^2} + \frac{\epsilon_3}{h_x^2} + \frac{\epsilon_4}{h_y^2} \right) V_{i,j} = 0 \quad (2.28)$$

$$V_{i,j} = \frac{\frac{\epsilon_1}{h_y^2} V_{i,j-1} + \frac{\epsilon_2}{h_x^2} V_{i-1,j} + \frac{\epsilon_3}{h_x^2} V_{i+1,j} + \frac{\epsilon_4}{h_y^2} V_{i,j+1}}{\frac{\epsilon_1}{h_y^2} + \frac{\epsilon_2}{h_x^2} + \frac{\epsilon_3}{h_x^2} + \frac{\epsilon_4}{h_y^2}} \quad (2.29)$$

Aici, h_x și h_y reprezintă pașii de discretizare pe axele O_x și O_y , apoi $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ și ϵ_4 sunt valorile permitivității electrice în direcțiile specifice, iar $V_{i,j}$ reprezintă potențialul la nodul (i,j)

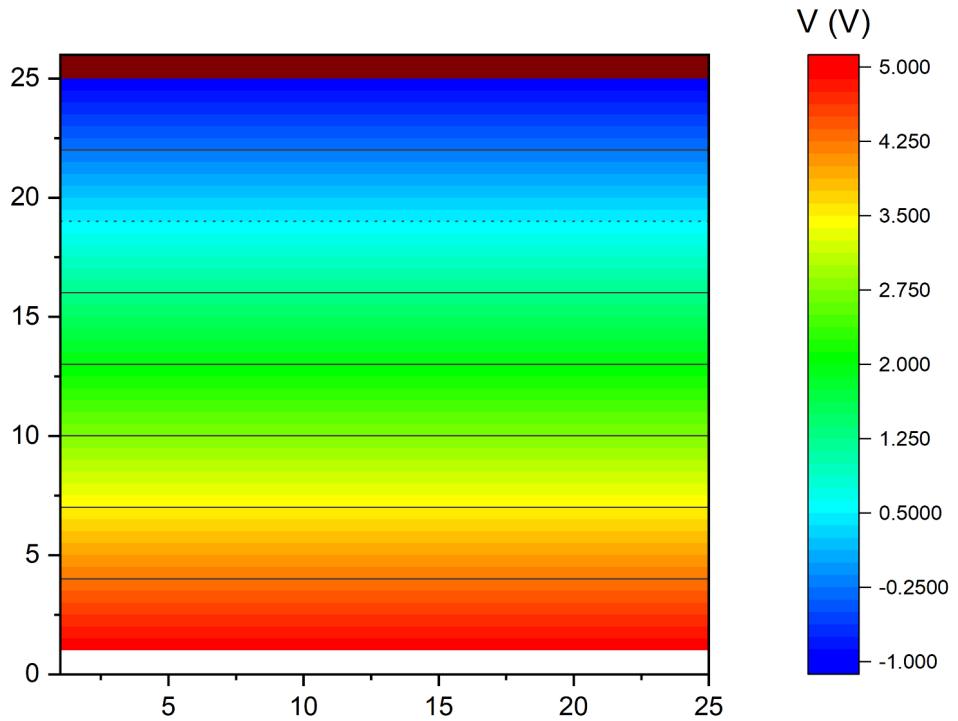


Figura 2.2: Rezultatul distribuției potențialului electric în interiorul unui condensator cu plăci plan paralele

Algoritmul pornește cu o valoare inițială presupusă pentru potențialele pe noduri, cu excepția celor de pe contur, unde condițiile de limită sunt cunoscute (de exemplu, potențialul pe plăci). La fiecare iterație, potențialele nodurilor interne sunt actualizate folosind relația de mai jos până când soluția converge.

Rezultatele numerice trebuie interpretate pentru a extrage informații despre capacitatele condensatorilor și distribuția câmpului electric. Variațiile geometrice ale condensatorului pot fi modelate prin ajustarea condițiilor de limită și a configurației grilei.

Aceste metode permit nu doar analiza capacitații condensatoarelor, dar și explorarea influenței diferitelor materiale dielectrice prin modificarea permisivității în modelul numeric.

Metoda diferențelor finite oferă un cadru robust pentru analiza comportamentului electric în condensatoare, contribuind semnificativ la înțelegerea și optimizarea performanței acestora în diverse aplicații tehnologice.

Capitolul 3: Rezultate proprii - Modelarea capacității unor condensatori

3.1. Condensatorul cu plăci plan paralele cu dimensiuni finite - analiza rolului efectelor de margine

A. Influența materialului dielectric asupra distribuției câmpului electric în condensator

Modelarea unui condensator cu plăci plan paralele necesită cunoașterea câmpului electric generat între plăci. În fizica clasică, condensatorul ideal este reprezentat prin plăci infinite fără efecte de margine, ceea ce simplifică calculele pentru câmpul electric și capacitatea. Dar dimensiunile finite ale fiecărui condensator provoacă efecte de margine care pot afecta distribuția câmpului electric și performanța dispozitivului. În acest capitol, metodele numerice avansate sunt utilizate pentru a examina aceste efecte și pentru a determina modul în care dimensiunile finite influențează comportamentul condensatorului.

Formularea integrală a legii lui Gauss pentru electricitate a fost utilizată în special în modelul numeric, care a fost dezvoltat pe baza ecuațiilor Maxwell. Această lege stabilește că sarcina electrică închisă a unei suprafețe închise este direct proporțională cu fluxul total al câmpului electric care trece prin această suprafață închisă. Acesta a fost principiul pe care l-am folosit pentru a simula condițiile în condensator. Acest lucru a fost realizat prin utilizarea ecuației Laplace pentru un mediu fără surse de sarcină interne, unde $\nabla^2\varphi = 0$, unde φ este potențialul electric.

Domeniul de interes a fost împărțit într-o matrice de puncte folosind o grilă fină. Potențialul asociat al fiecărui punct a fost calculat pe baza diferențelor finite ale vecinătăților sale. Modelul include condiții de frontieră specifice; laturile exterioare ale domeniului au potențial nul, iar cele două plăci ale condensatorului au potențial fix de +10 V și -10 V.

Simulațiile au fost efectuate pentru diferite valori ale permisivității relative, care au variat de la $\epsilon_r=1$ (vid) până la $\epsilon_r=1024$, ceea ce indică o gamă largă de valori care sugerează un dielectric extrem de eficient. Graficele rezultate arată că liniile echipotențiale sunt semnificativ distorsionate în apropierea marginilor la valori mici ale permisivității. Aceasta arată că efectele de margine afectează foarte mult câmpul electric. Acestea pot provoca inegalități în distribuția sarcinilor pe plăci, ceea ce afectează eficiența condensatorului.

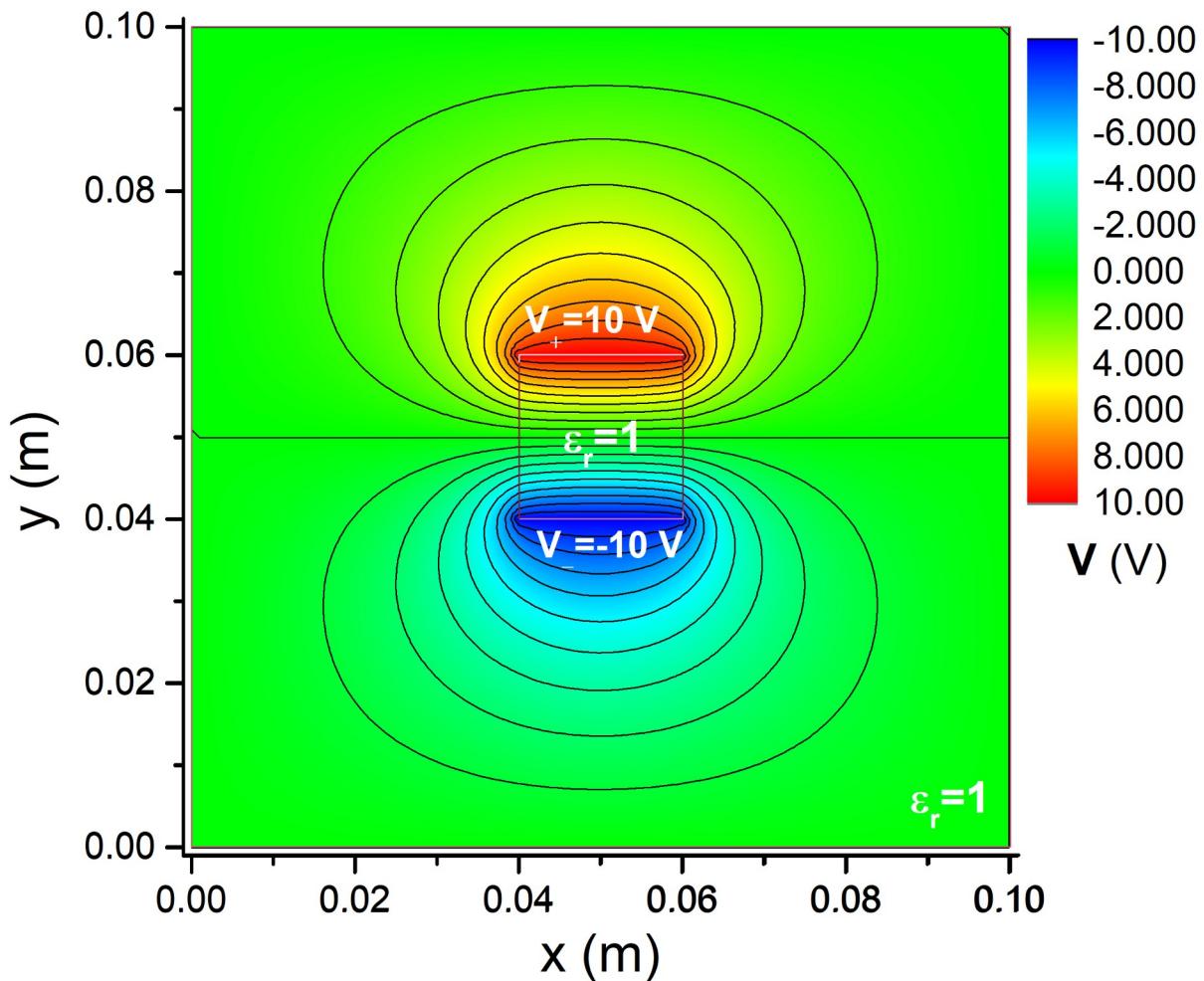


Figura 3.1: Distribuția liniilor de potențial pentru $\epsilon_r=1$, evidențiind efectele de margine

Prima figură (figura 3.1) prezintă distribuția câmpului electric într-un condensator cu plăci plan paralele la o permisivitate relativă $\epsilon_r=1$, echivalentă cu vidul, unde efectele de margine sunt vizibil pronunțate. Liniile de nivel ale potențialului, reprezentate de tranziția de la roșu (+10 V) la albastru (-10 V) și prin zonele verzi de potențial zero, ilustrează o concentrare scăzută a liniilor în centru și o curbură accentuată aproape de marginile plăcilor, indicând o distribuție neuniformă a câmpului electric. Această configurație sugerează zone unde intensitatea câmpului este redusă, afectând eficiența condensatorului în stocarea energiei electrice și oferind perspective (insight-uri) valoroase pentru optimizarea proiectării condensatoarelor în aplicații reale, unde minimizarea efectelor de margine este crucială pentru performanța optimă.

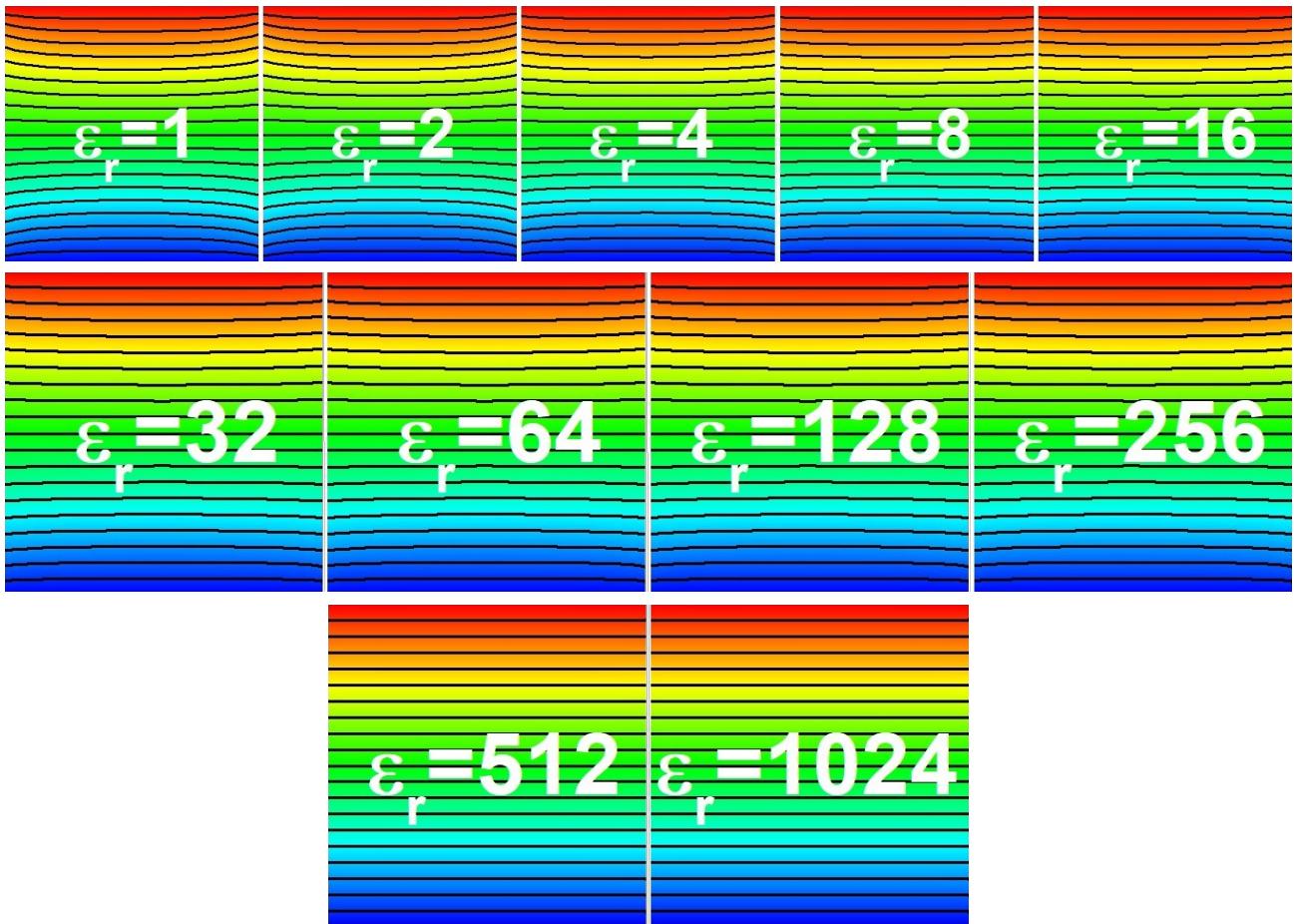


Figura 3.2: Modificarea liniilor de nivel ale potențialului pentru diferite valori ale ϵ_r

Am decupat aceste 11 imagini, deoarece ele ilustrează foarte bine schimbările și facilitează comparația între diferite scenarii de permitivitate. Această metodă de prezentare menține consistență vizuală și permite o observație ușoară a variațiilor în liniile de potențial la fiecare nivel de permitivitate. O reprezentare uniformă a acestor imagini oferă o posibilitate de-a permite concentrarea exclusivă asupra modificărilor câmpului electric și liniilor de potențial în funcție de permitivitate. Prin urmare, aceste imagini ajută la evidențierea eficientă și directă a efectelor variabilei studiate (figura 3.2).

Pentru o gamă largă de permitivități relative, de la $\epsilon_r=1$ până la $\epsilon_r=1024$, liniile de nivel ale potențialului electric într-un condensator cu plăci plan paralele sunt exemplificate în aceste imagini. Ele arată cum comportamentul câmpului electric se schimbă pe măsură ce materialul dintre plăci devine mai permisiv la formarea câmpului electric.

Liniile de potențial pentru permitivități mici, care încep cu $\epsilon_r=1$, se află în partea de sus a mozaicului. Pe măsură ce câmpul electric se îndepărtează de centrul condensatorului și se îndreaptă spre margini, câmpul prezintă o variație semnificativă atât în intensitate, cât și în direcție. Aceasta

provoacă o distorsiune semnificativă a liniilor de câmp electric, imitând comportamentul unui condensator în vid, unde efectele de margine sunt foarte vizibile. Aceste efecte sunt rezultatul lipsei de restrângere adecvată a câmpului electric între plăcile condensatorului. Acest fenomen permite liniilor de câmp să se extindă și să interacționeze cu mediul înconjurător.

Liniile de potențial devin mai ordonate și mai paralele pe măsură ce permitivitatea crește, aşa cum se poate vedea în rândurile inferioare și mijlocii ale imaginii. Liniile de potențial la permitivități medii ($\epsilon_r = 32, 64, 128$ și 256) încep să se alinieze mai uniform și să se îndepărteze mai puțin de margini, ceea ce indică o mai bună limitare a câmpului electric între plăci. Aceasta indică faptul că dielectricul scade efectele de margine și îmbunătățește uniformitatea distribuției câmpului, crescând astfel capacitatea sa de a controla câmpul electric.

Liniile de potențial devin practic paralele și echidistante în rândurile inferioare ale imaginii pentru permitivități foarte mari, cum ar fi $\epsilon_r = 512$ și 1024 . Acest procedeu este aproape identic cu modelul teoretic ideal al unui condensator cu plăci infinite. Aceasta arată o polarizare eficientă a dielectricului, deoarece atât câmpul electric între plăci, cât și potențialul este uniform pe întreaga suprafață a condensatorului. Acum, materialul dielectric este cel mai eficient, reducând pierderile de energie și maximizând capacitatea de stocare a energiei electrice.

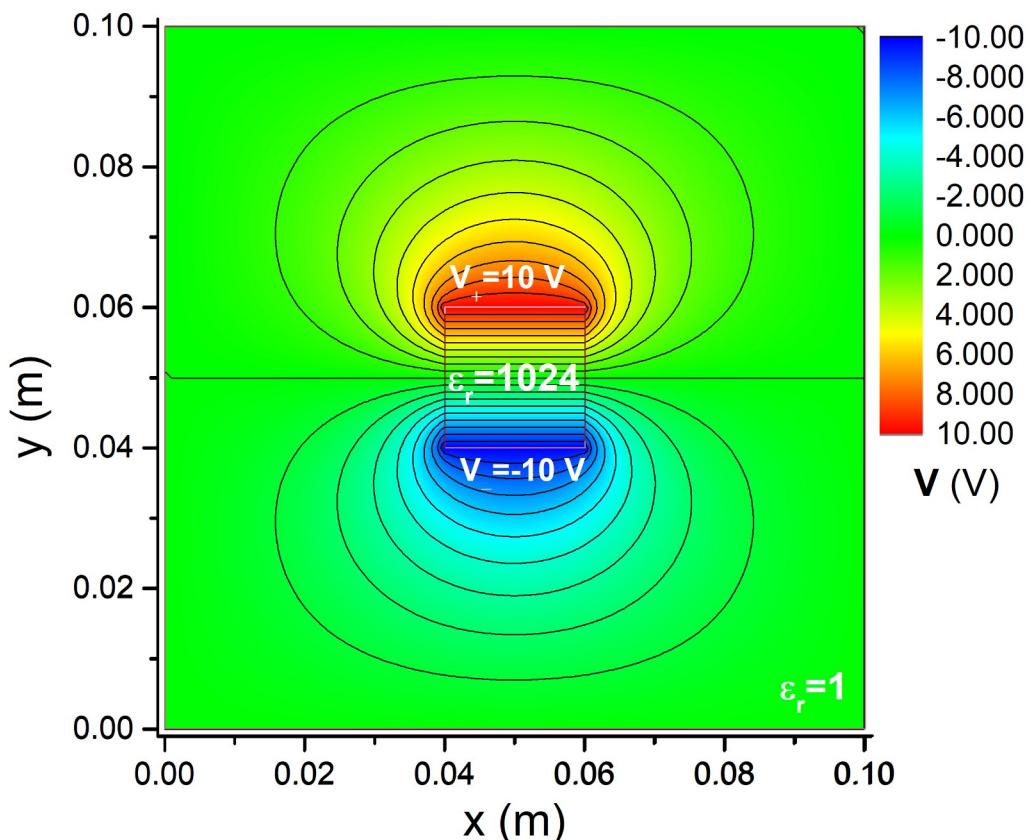


Figura 3.3: Comportamentul liniilor de potențial pentru o permitivitate foarte mare ($\epsilon_r = 1024$)

Acest grafic prezintă condițiile aproape ideale într-un condensator cu permisivitate foarte mare, $\epsilon_r = 1024$ (figura 3.3). Liniile de potențial sunt perfect paralele între plăcile condensatorului, ceea ce înseamnă că câmpul electric este uniform și eficient confinat. Starea aceasta este cea mai bună condiție în care condensatorul poate funcționa, reducând efectele de margine și maximizând capacitatea de stocare a energiei electrice.

În ceea ce privește modul în care permisivitatea afectează comportamentul câmpului electric în condensatoare cu plăci plan paralele, putem vedea cum variațiile în permisivitate au un impact semnificativ asupra distribuției câmpului electric și a eficienței energetice a dispozitivului. Efectul de margine este puternic la permisivitate scăzută, ceea ce duce la o distribuție neuniformă a liniilor de potențial și la o eficiență scăzută în stocarea energiei electrice. Acest aspect subliniază faptul că proiectarea condensatoarelor trebuie făcută cu atenție pentru a reduce aceste distorsiuni. Liniile de potențial se ordonează și devin mai paralele pe măsură ce permisivitatea crește, ceea ce indică o mai bună distribuție a câmpului electric. Această îmbunătățire face ca condensatorul să funcționeze mai bine. În condiții de permisivitate extrem de mare, se atinge o configurație aproape ideală, cu liniile de potențial perfect paralele și distribuite uniform. Acest lucru demonstrează că este foarte eficient în confinarea și uniformizarea câmpului electric și este ideal pentru utilizare în condensatoare de înaltă precizie și fidelitate. Aceste constatări oferă o imagine profundată a modului în care materialele dielectrice influențează comportamentul câmpului electric. De asemenea, subliniază cât de important este să alegeți materialele potrivite pentru a maximiza capacitatea de stocare a energiei și pentru a reduce pierderile în condensatoarele utilizate în tehnologii sofisticate.

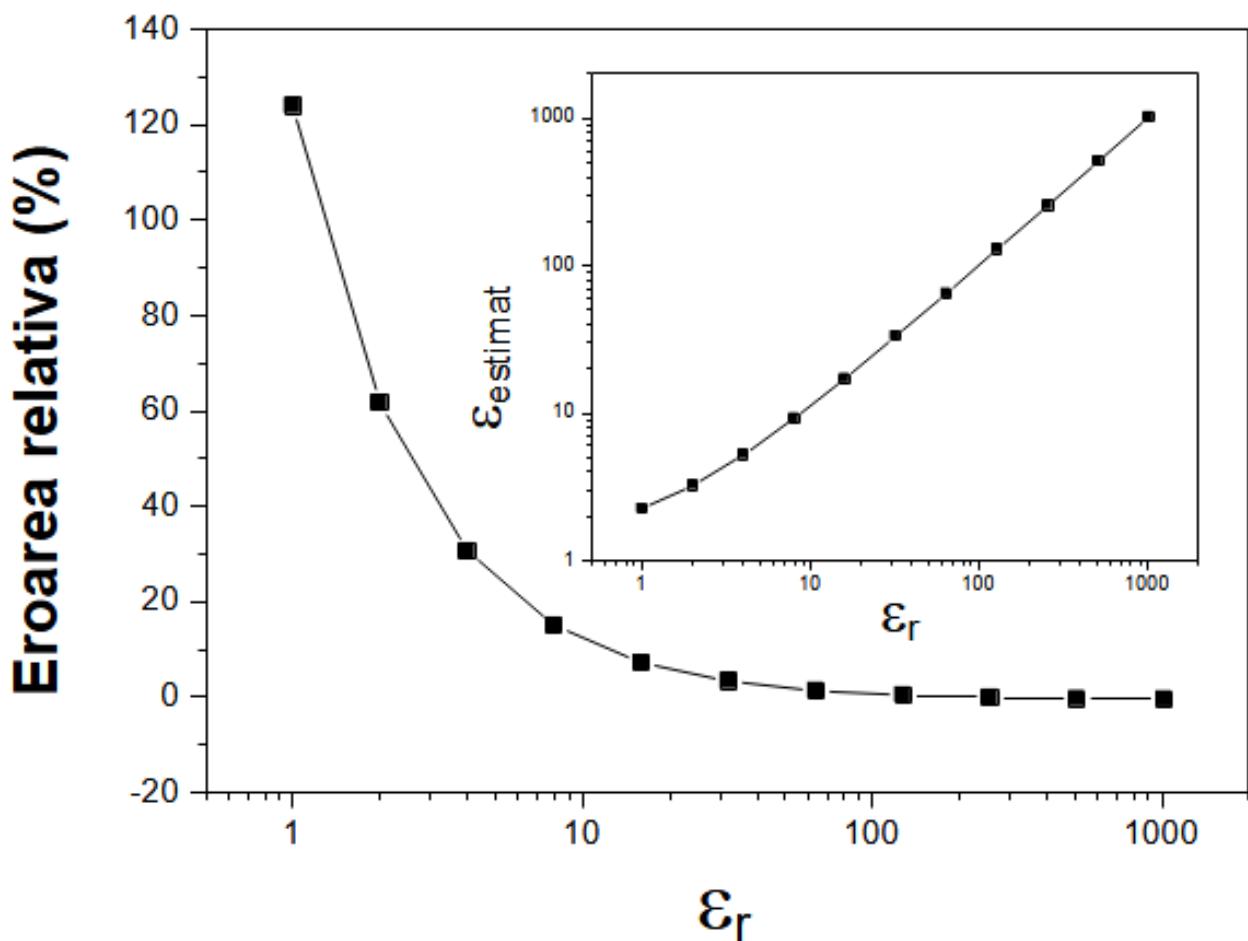


Figura 3.4: Analiza grafică a permitivității estimate și eroarea relativă a măsurătorilor

În figura următoare (figura 3.4) sunt prezentate două grafice pentru înțelegerea impactului permitivității relative asupra comportamentului câmpului electric în condensator. Dependența erorii relative (%) în funcție de permitivitatea relativă (ϵ_r) este reprezentată în prim plan în graficul principal. Aceasta arată că eroarea relativă scade semnificativ pe măsură ce ϵ_r crește. Eroarea relativă este ridicată, depășind 100% la valori scăzute ale permitivității ($\epsilon_r < 10$), sugerând o distribuție puternic distorsionată a câmpului electric din cauza efectelor de margine. Dar eroarea relativă scade rapid la valori mai mari de ϵ_r și se stabilizează la aproximativ 0%, ceea ce indică o distribuție mult mai uniformă a câmpului electric și o reducere a efectelor de margine.

Relația dintre permitivitatea estimată ($\epsilon_{\text{estimat}}$) și permitivitatea relativă (ϵ_r) este detaliată în graficul secundar care este încastrat în imaginea principală. Pe o scară logaritmică, observăm o dependență aproape liniară, ceea ce sugerează că estimarea permitivității devine mai precisă pe măsură ce ϵ_r crește. Acest fenomen se datorează faptului că câmpul electric este mult mai limitat între plăcile condensatorului la valori mai mari ale permitivității, ceea ce reduce efectele de margine și asigură o distribuție uniformă a potențialului.

În concluzia acestei prime părți a subcapitolului, permitivitatea materialelor dielectrice este vitală pentru modularea și optimizarea performanței condensatoarelor. Am demonstrat că materialele cu permitivitate mai înaltă asigură o distribuție mai uniformă și o confinare mai eficientă a câmpului electric prin analize ale comportamentului câmpului electric în diferite condiții de permitivitate. Aceasta reduce efectele de margine și îmbunătășește în general eficiența condensatorului. De asemenea, am demonstrat și studiul în care materialul dielectric trebuie ales cu atenție pentru a avea un impact semnificativ asupra capacitații de stocare a energiei și poate ajuta la crearea de sisteme de stocare a energiei mai eficiente și mai stabile.

B. Evaluarea efectului distanței dintre electrozi asupra distribuției câmpului electric în condensator

În secțiunea următoare, se examinează în detaliu modul în care distanța dintre electrozi afectează configurația câmpului electric într-un condensator cu plăci plan paralele. Se subliniază impactul direct pe care distanța dintre electrozi îl are asupra eficienței și capacitații de stocare a energiei ale dispozitivelor electrice. Variabilitatea distanței dintre plăci are un impact semnificativ atât asupra efectelor de margine, cât și asupra uniformității distribuției câmpului electric, ceea ce o face o componentă esențială a proiectării condensatoarelor. Cercetarea își propune să demonstreze cum modificările în distanța dintre electrozi pot afecta comportamentul câmpului electric, oferind o bază pentru optimizarea proiectării dispozitivelor electrice prin examinarea detaliată a fiecărei imagini.

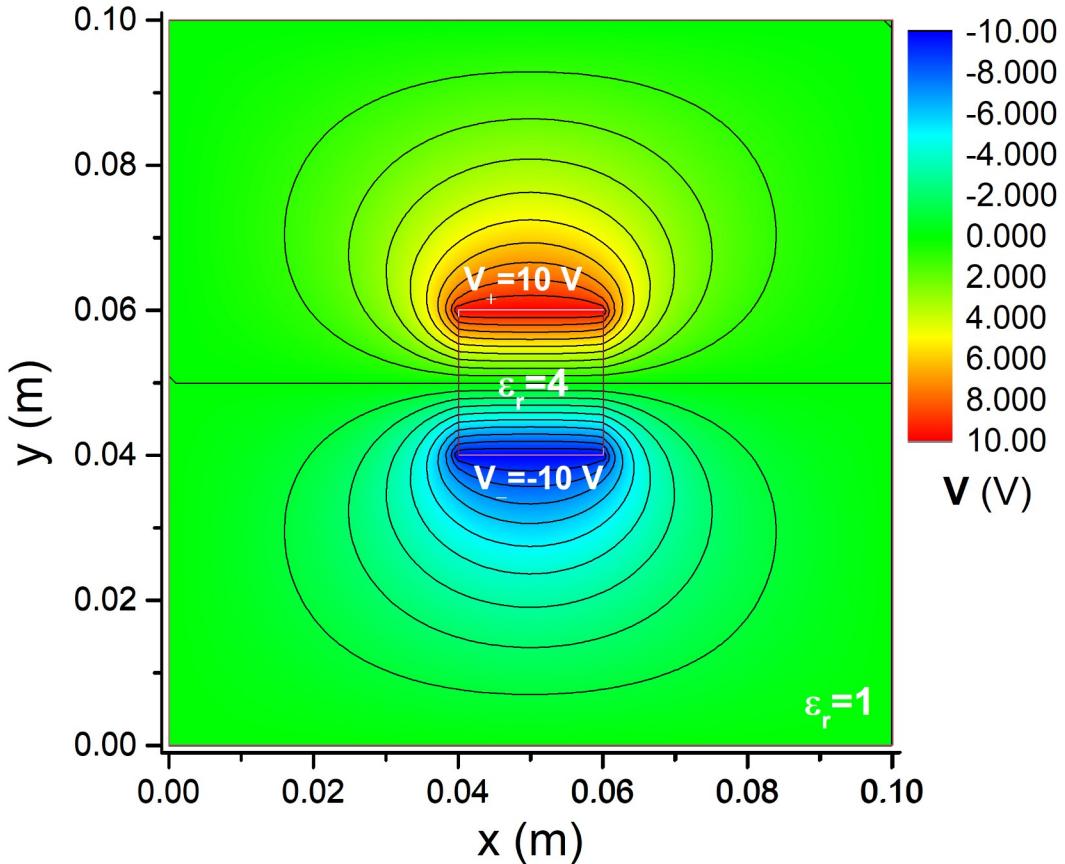


Figura 3.5: Distribuția câmpului electric la distanță minimă între electrozi

Într-un condensator cu o distanță minimă între electrozi și o permisivitate relativă de $\epsilon_r=4$, distribuția câmpului electric este reprezentată în figura 3.5. Liniile de potențial sunt foarte concentrate în apropierea plăcilor și au o densitate mare în centrul condensatorului. Această configurație arată atât o eficiență ridicată în stocarea energiei electrice, cât și un risc crescut de descărcare electrică, sau descompunere dielectrică, deoarece intensitatea câmpului electric poate depăși rezistența dielectrică a materialului dintre plăci. Chiar dacă efectele de margine sunt vizibile, concentrarea liniilor în centru arată că potențialul electric este împărțit în mare parte uniform în zona centrală. În acest caz, distanța mică dintre plăci crește riscul de avarie la supratensiune, dar maximizează capacitatea.

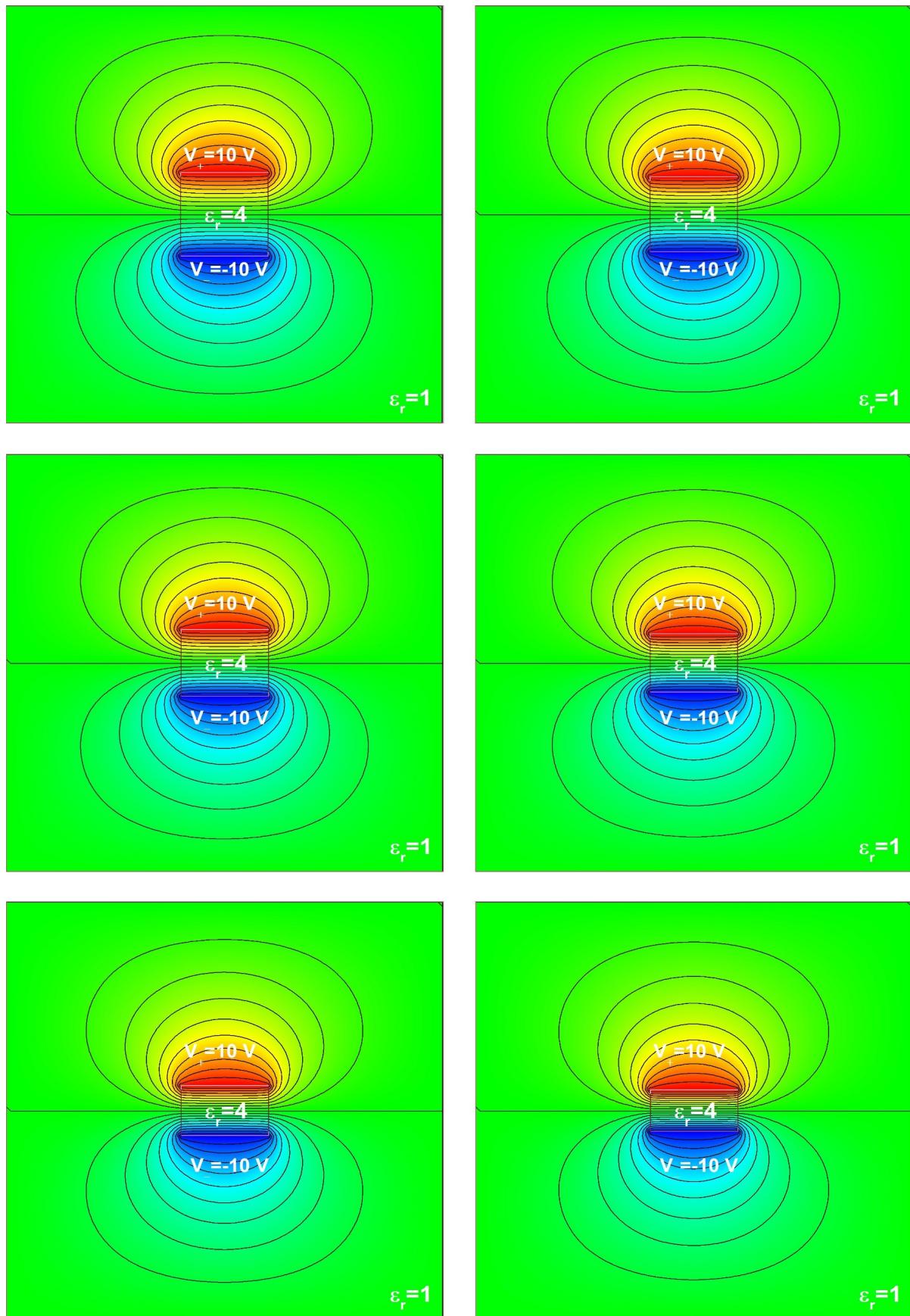


Figura 3.6: Efectele distanței reduse între electrozi asupra distribuției câmpului electric

Câmpul electric într-un condensator cu o distanță minimă între electrozi și o permisivitate relativă de $\epsilon_r=4$ este reprezentat în aceste 6 imagini (figura 3.6). Centrul prezintă o densitate mare a liniilor de potențial concentrate, ceea ce indică o capacitate ridicată de stocare a energiei electrice. Concentrarea puternică a liniilor în apropierea plăcilor sporește efectele de margine și asigură o distribuție predominant echilibrată a potențialului electric în zona centrală. Cu toate acestea, intensitatea mare a câmpului din acest scenariu poate depăși rezistența dielectrică a materialului dintre plăci, ceea ce crește riscul de descărcare electrică. În acest caz, deși distanța mică dintre plăci crește capacitatea de stocare, riscul de avarie la supratensiuni crește. Această condiție arată că riscurile asociate cu proiectarea condensatoarelor trebuie examinate cu atenție.

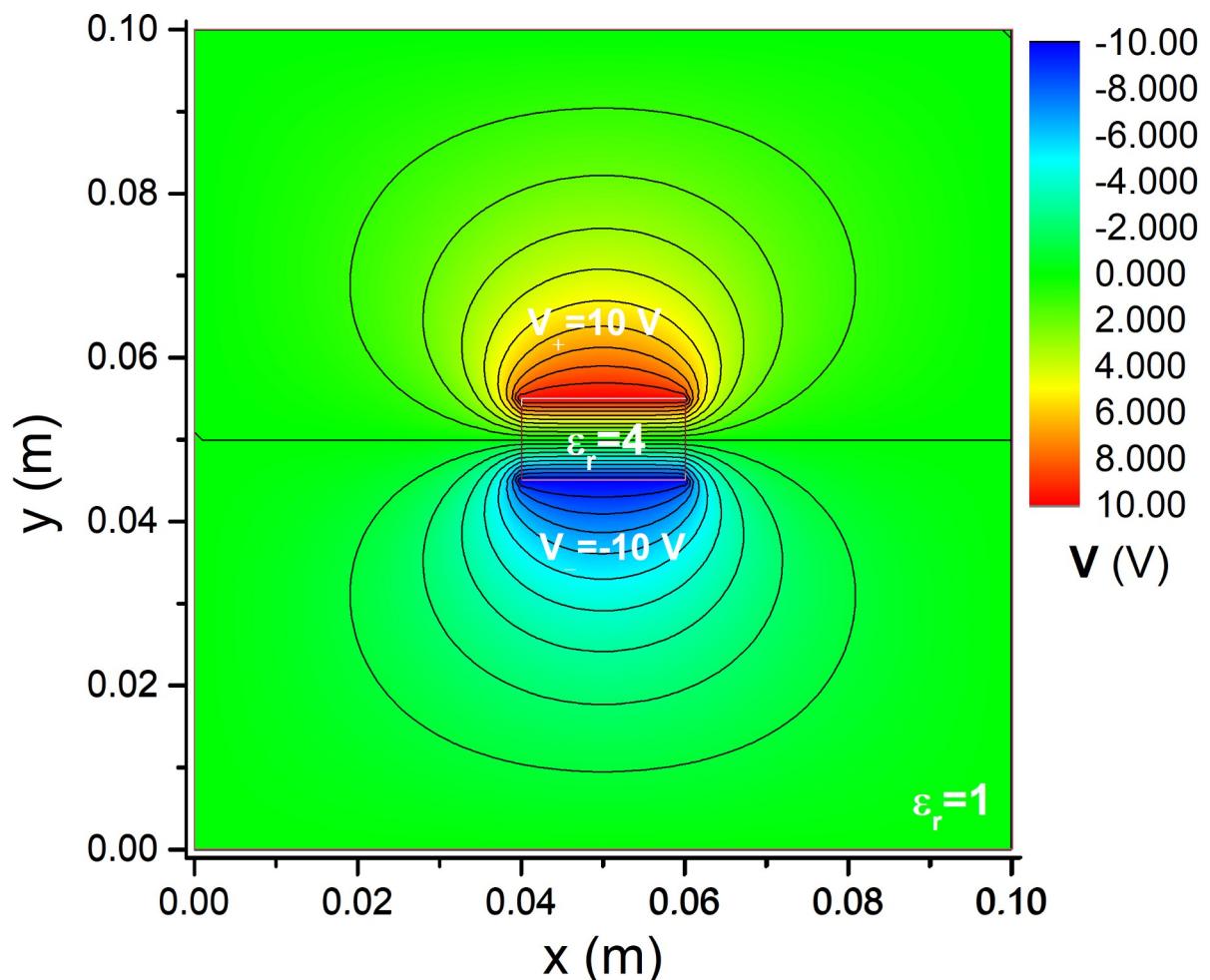


Figura 3.7: Configurație care plasează electrozii la cea mai mare distanță într-un câmp electric

Configurația câmpului electric într-un condensator cu o permisibilitate relativă de $\epsilon_r=4$ este reprezentată în figura 3.7. Aceasta se întâmplă la cea mai mare distanță posibilă între electrozi. Acest aranjament prezintă o distribuție a câmpului electric care este caracterizată prin liniile de potențial mult mai departe una de celalătă. Acest lucru arată o densitate redusă a câmpului și, prin urmare, o eficiență scăzută în stocarea energiei electrice per unitate de volum. Această configurație reduce riscurile de descărcare electrică și este ideală pentru aplicații care necesită stabilitatea câmpului electric, chiar dacă se sacrifică densitatea maximă de energie stocată. Această configurație este ideală pentru aplicațiile care sunt sensibile la fluctuațiile câmpului, deoarece uniformitatea distribuției liniilor de potențial ajută la stabilitatea operațiunilor și la minimizarea efectelor de margine, în ciuda reducerii eficienței energetice. Creșterea distanței dintre plăci face ca intensitatea câmpului electric în apropierea fiecărei plăci să fie mai mică, ceea ce îmbunătățește distribuția potențialului electric. Acest lucru este ideal pentru testarea și validarea materialelor dielectrice noi sau pentru utilizarea în echipamente de măsură de înaltă precizie unde controlul precis al câmpului electric este esențial.

Figurile arată cât de importantă este alegerea distanței dintre electrozi în proiectarea condensatoarelor. Observăm că distribuția liniilor de potențial devine mai dispersată și mai puțin concentrată în centru pe măsură ce distanța dintre electrozi crește. Capacitatea de stocare este maximă la distanțe mici, dar datorită intensității câmpului, riscul de avarie crește. Uniformitatea câmpului devine mai evidentă la distanțe mari, dar densitatea energetică scade.

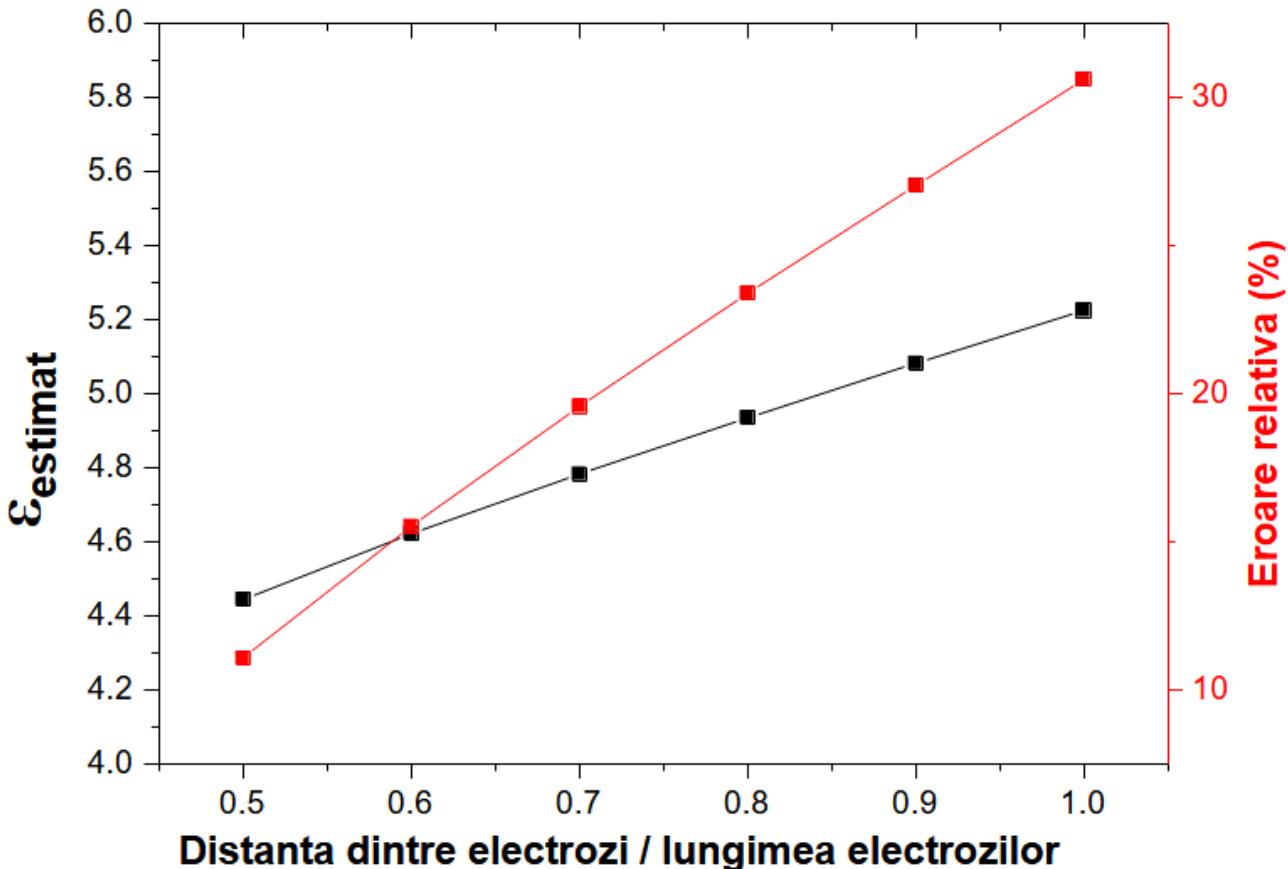


Figura 3.8: Dependența distanței dintre electrozi și estimarea permitivității dielectrice

Această figură prezintă o analiză amănunțită a relației dintre distanța dintre electrozi, care este reprezentată ca proporție din lungimea totală a electrozilor (figura 3.8). De asemenea, prezintă efecte asupra preciziei estimării permitivității dielectrice și a erorii relative în măsurători.

Graficul cu linia roșie arată că eroarea relativă, care este exprimată în procente, crește semnificativ pe măsură ce distanța dintre electrozi crește. Acest lucru arată că eroarea în estimarea capacității dielectrice a materialului dintre electrozi crește odată cu distanța dintre electrozi, ceea ce afectează acuratețea măsurătorilor. Este posibil ca acest fenomen să fie cauzat de efectele de margine care devin mai vizibile la distanțe mai mari, ceea ce duce la distorsiuni în distribuția câmpului electric care nu sunt uniform distribuite.

În schimb, linia neagră arată permitivitatea dielectrică estimată ($\epsilon_{\text{estimat}}$), care crește odată cu distanța dintre electrozi. Acest comportament indică faptul că, cu distanțe mai mari între electrozi, capacitatea condensatorului de a stoca sarcina electrică pe unitatea de volum scade. Acest lucru se reflectă într-o estimare mai mare a permitivității pentru a compensa scăderea capacității observate. Distribuția neuniformă a câmpului electric influențează acest efect, care este mai puțin concentrat și

mai dispersat la distanțe mari. Deoarece materialul dielectric este mai puțin eficient în concentrarea câmpului electric între electrozi, permitivitatea pare să crească.

Această dependență între distanța dintre electrozi și estimările permitivității demonstrează dificultățile proiectării și optimizării condensatoarelor, ceea ce subliniază importanța luării în considerare a acestor elemente în proiectarea sistemelor electrice. De exemplu, în aplicațiile care necesită precizie în estimarea permitivității, cum ar fi diagnosticarea calității dielectricilor sau proiectarea condensatoarelor pentru aplicații de precizie, distanța dintre electrozi trebuie ajustată corect pentru a maximiza performanța și a reduce eroarea. În plus, acest set de date indică posibilitatea ca o ajustare sau o reproiectare a condensatoarelor să fie necesară pentru a asigura o distribuție mai uniformă a câmpului electric în aplicații în care variațiile de capacitate sunt semnificative. Acest lucru ar putea include reducerea distanței dintre electrozi sau utilizarea materialelor cu proprietăți dielectrice îmbunătățite. Ambele metode ar putea duce la o reducere a variațiilor de capacitate și a eficienței energetice a dispozitivului. Prin urmare, graficul arată nu numai că există o corelație directă între dimensiuni și performanță, dar oferă și perspective tactice pentru îmbunătățirea tehnologiilor de stocare a energiei electrice și controlul câmpului electric care sunt deja în vigoare.

Acest subcapitol acoperă modul în care permitivitatea materialelor dielectrice și spațiul dintre electrozi afectează comportamentul câmpului electric în condensatoarele cu plăci plan paralele. Analiza a arătat că fenomenele marginale reduc eficacitatea energetică a condensatorului la permitivități reduse, provocând variații semnificative în distribuția liniilor de potențial. O permitivitate ridicată, pe de altă parte, ajută la o reținere mai bună și la o uniformizare mai bună a câmpului electric, optimizând astfel eficiența dispozitivului. Investigațiile privind efectele distanței dintre electrozi au arătat, de asemenea, că un interval mai mare între aceștia poate duce la o dispersie mai mare a câmpului electric și la o eficiență mai mică pe unitatea de volum. În plus, stabilizarea câmpului poate fi utilă pentru aplicațiile care necesită o reducere a riscurilor de descărcare electrică. Studiul evidențiază dificultățile ingineriei condensatoarelor, precum și importanța alegerii materialelor dielectrice și a configurației spațiale. Studiul subliniază că ajustarea adecvată a acestor parametri este vitală pentru îmbunătățirea performanței și eficienței în diferite domenii de aplicare. Descoperirile oferă o bază solidă pentru proiectarea inovațiilor viitoare în tehnologia condensatoarelor și contribuie semnificativ la baza de cunoștințe privind interacțiunile interne ale condensatoarelor.

3.2. Condensatorul cu electrozi coplanari

În acest subcapitol, analiza capacității condensatoarelor este îmbunătățită prin abordarea capacității condensatoarelor cu electrozi coplanari dispuși pe un strat subțire. Se discută despre modul în care geometria coplanară și proprietățile dielectrice ale stratului influențează permisivitatea și capacitatea electrică. Putem observa cum structura coplanară și comportamentul dielectricului stratului afectează eficiența condensatoarelor. Pentru a realiza asta, folosim tehnici numerice care au fost verificate în studiile anterioare implicate în condensatori cu plăci plan paralele. Scopul acestui capitol este de a furniza o analiză detaliată și o evaluare a componentelor cheie, precum și influența lor în acest context – parte a procesului de optimizare a capacității și eficienței condensatoarelor.

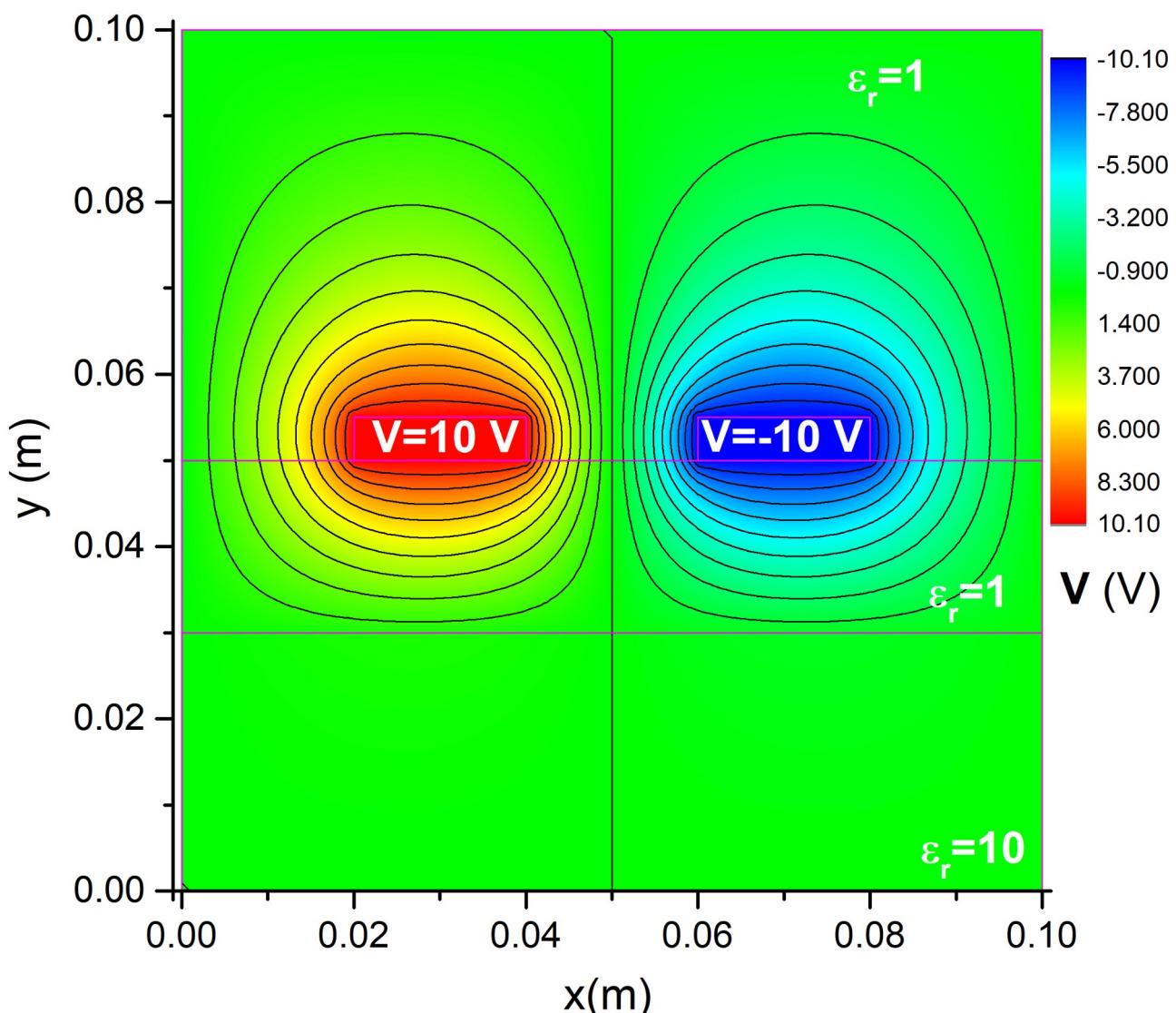
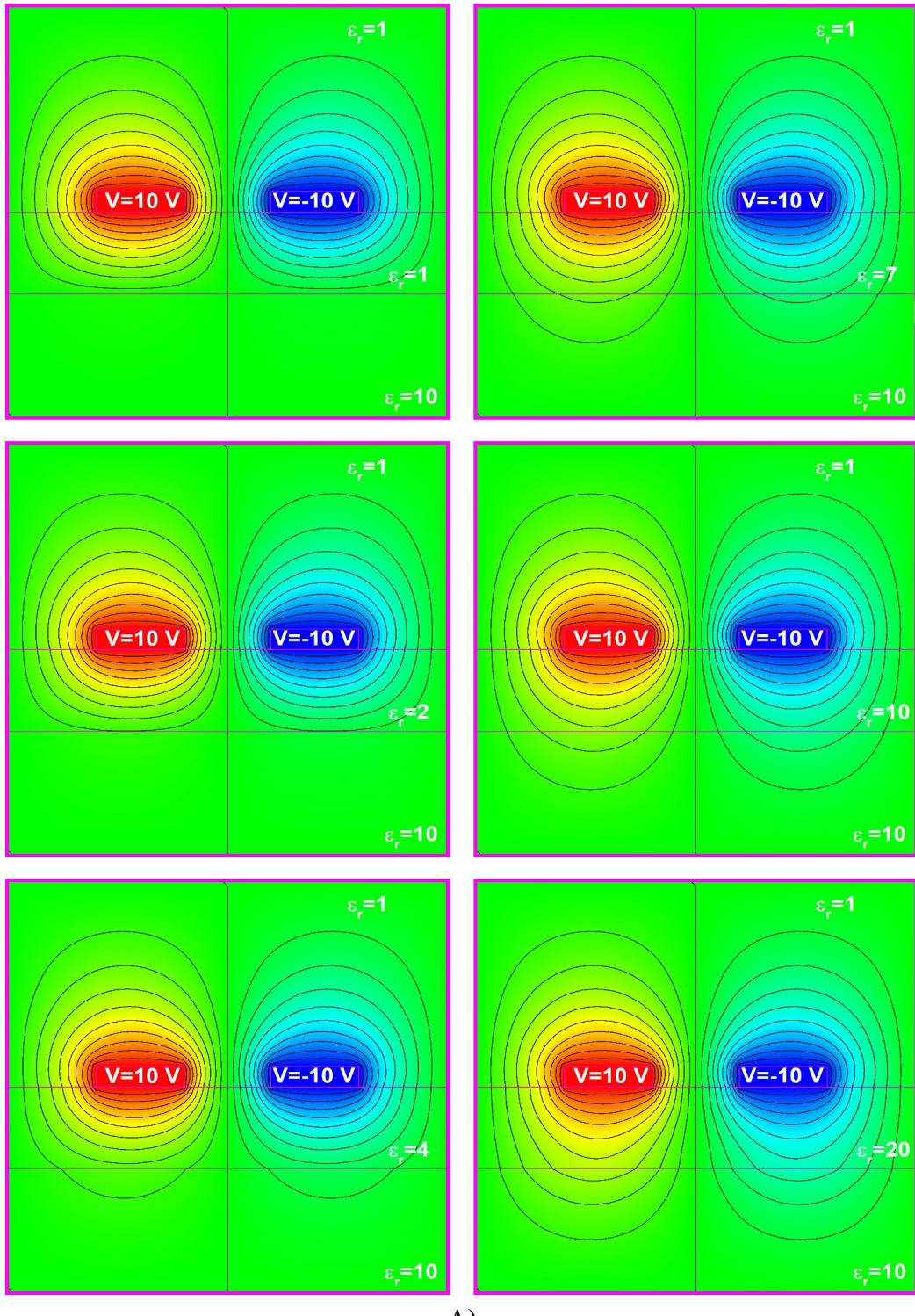
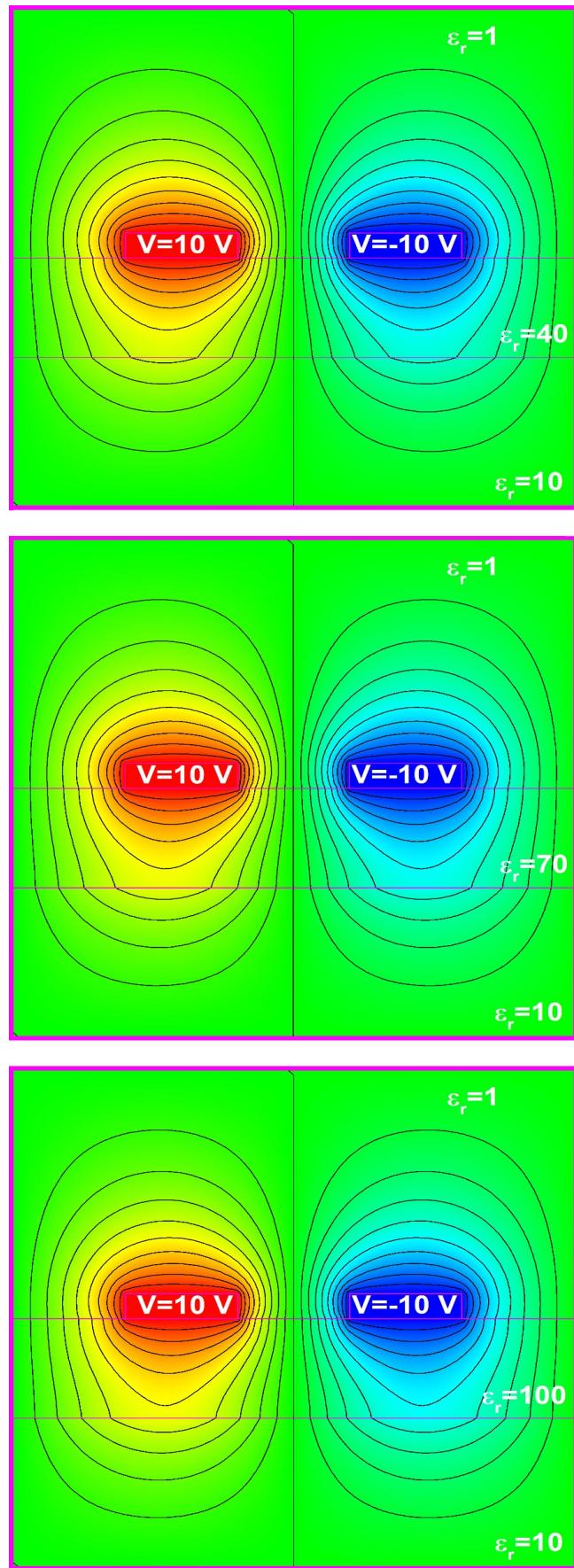


Figura 3.9: Distribuția potențialului electric într-un condensator cu strat subțire

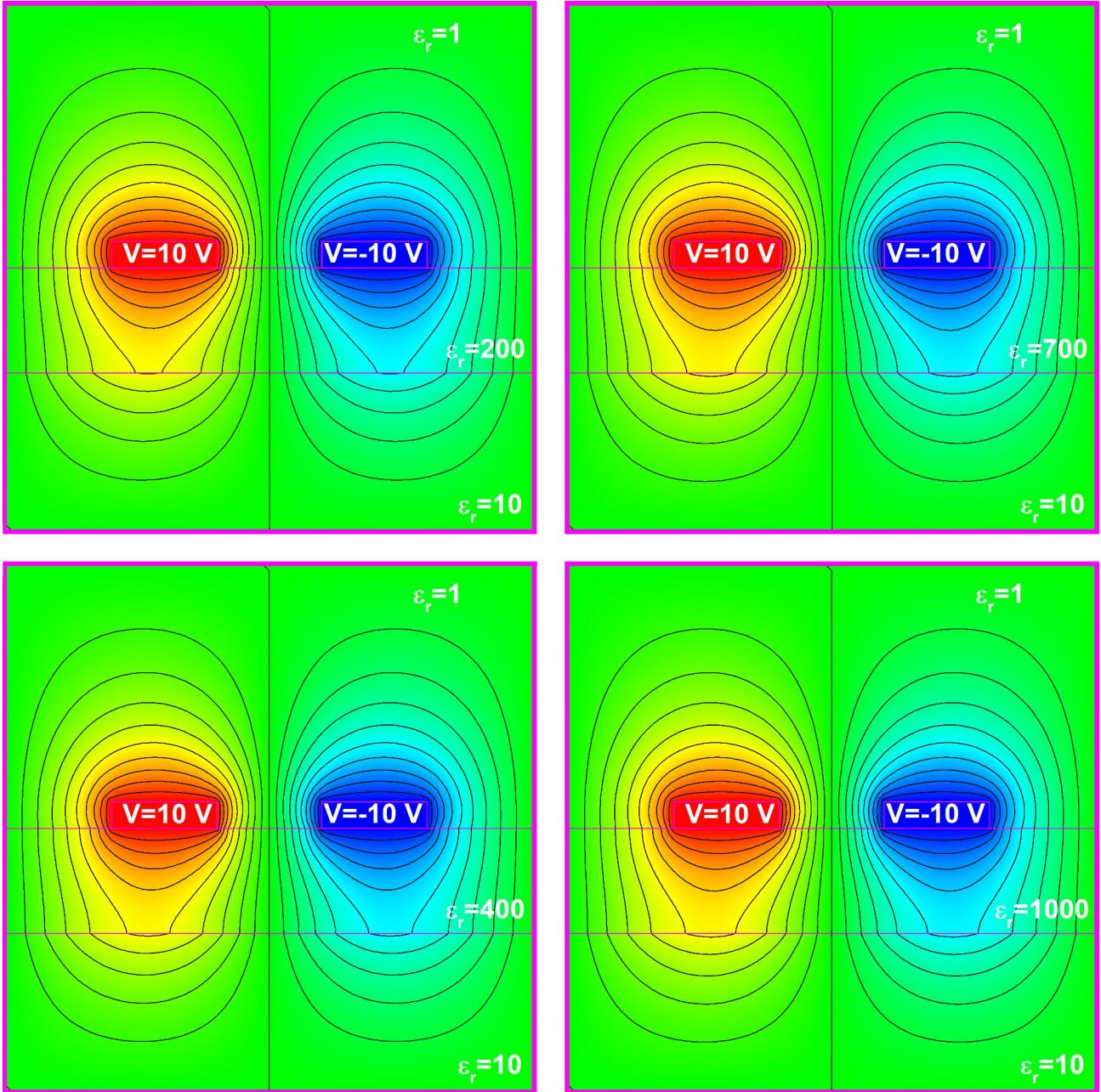
Figura 3.9 arată efectul unei permitivități relative scăzute într-un condensator cu electrozi coplanari. În acest caz, liniile de câmp electric se dispersează mult pe măsură ce se îndepărtează de electrozi. Fenomenul arată că interacțiunea dintre câmpurile electrozilor este limitată. Aceasta indică că există o capacitate redusă de stocare a energiei în cazul unei permitivități scăzute și subliniază importanța alegerii unui material dielectric potrivit pentru a maximiza eficiența.



A)



B)



C)

Figura 3.10: Efectul permitivității crescute asupra concentrației liniilor de câmp într-un condensator (A, B și C)

Am decupat acest set mare de imagini, deoarece permitivitatea crescută crește semnificativ concentrarea liniilor de câmp între electrozi (figura 3.10). Am indicat o interacțiune mai eficientă între câmpurile electrozilor, precum și o creștere adecvată a capacitații de stocare a energiei. Pentru aplicații care necesită densități mari de energie electrică sau măsurători de înaltă precizie, creșterea permitivității dielectrice îmbunătățește confinarea câmpului electric între electrozi. Acest lucru este esențial pentru performanța stabilă și predictibilă a condensatoarelor utilizate în circuite de înaltă

fidelitate, deoarece permitivitatea îmbunătățită garantează o distribuție mai uniformă a câmpului electric. Această configurare reduce dispersia câmpului în exterior și permite distanțe mai mici între electrozi, ceea ce poate duce la o reducere a dimensiunii dispozitivului fără a pierde eficiență. Am analizat în detaliu aceste efecte, subliniind rolul vital al proprietăților dielectrice în proiectarea și performanța condensatoarelor moderne, atunci când vine vorba de optimizarea capacitații de stocare a energiei și a preciziei funcționale în aplicațiile tehnologice avansate.

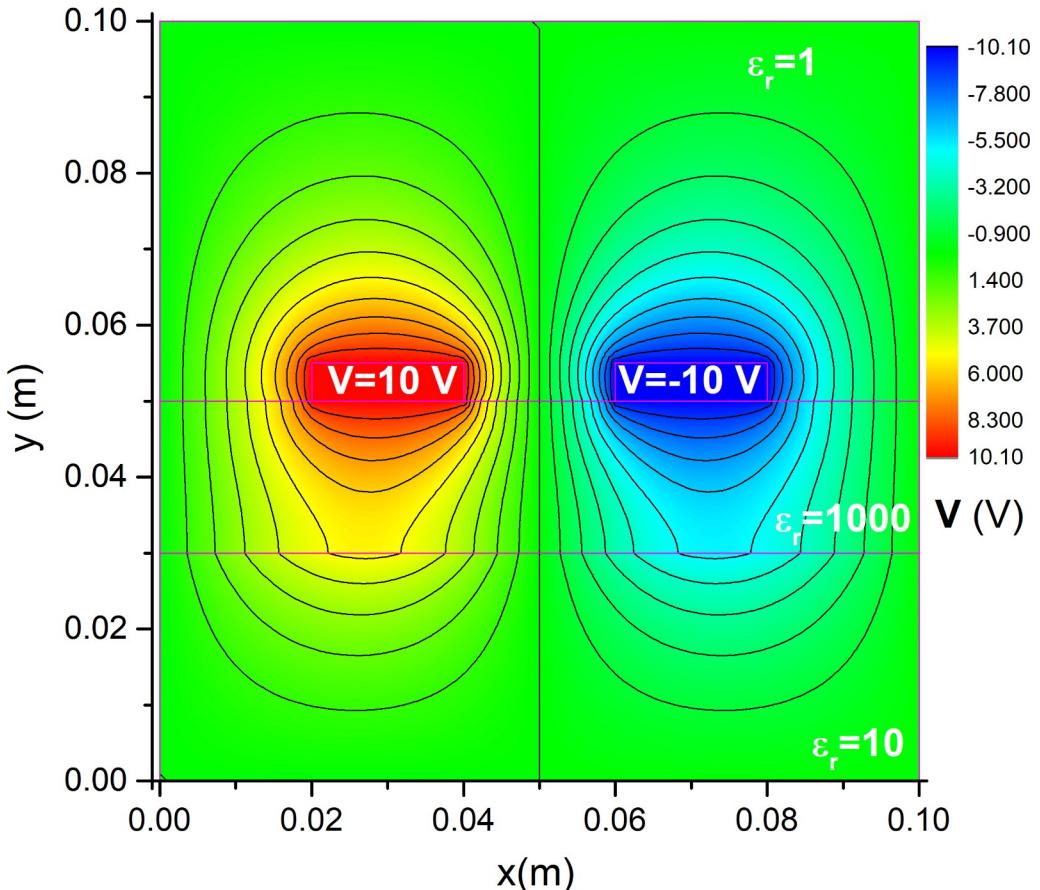


Figura 3.11. Concentrarea câmpului electric într-un sistem cu permitivitate mare

Figura 3.11 ilustrează comportamentul câmpului electric într-un sistem cu o permitivitate și mai mare. Liniile de câmp sunt foarte concentrate între electrozi, ceea ce demonstrează o eficiență maximă a limitării câmpului. Comportamentul indică faptul că stratul dielectric cu permitivitate foarte înaltă gestionează cel mai bine interacțiunea dintre electrozi. Acest lucru deschide calea către o proiectare de condensatoare de înaltă performanță.

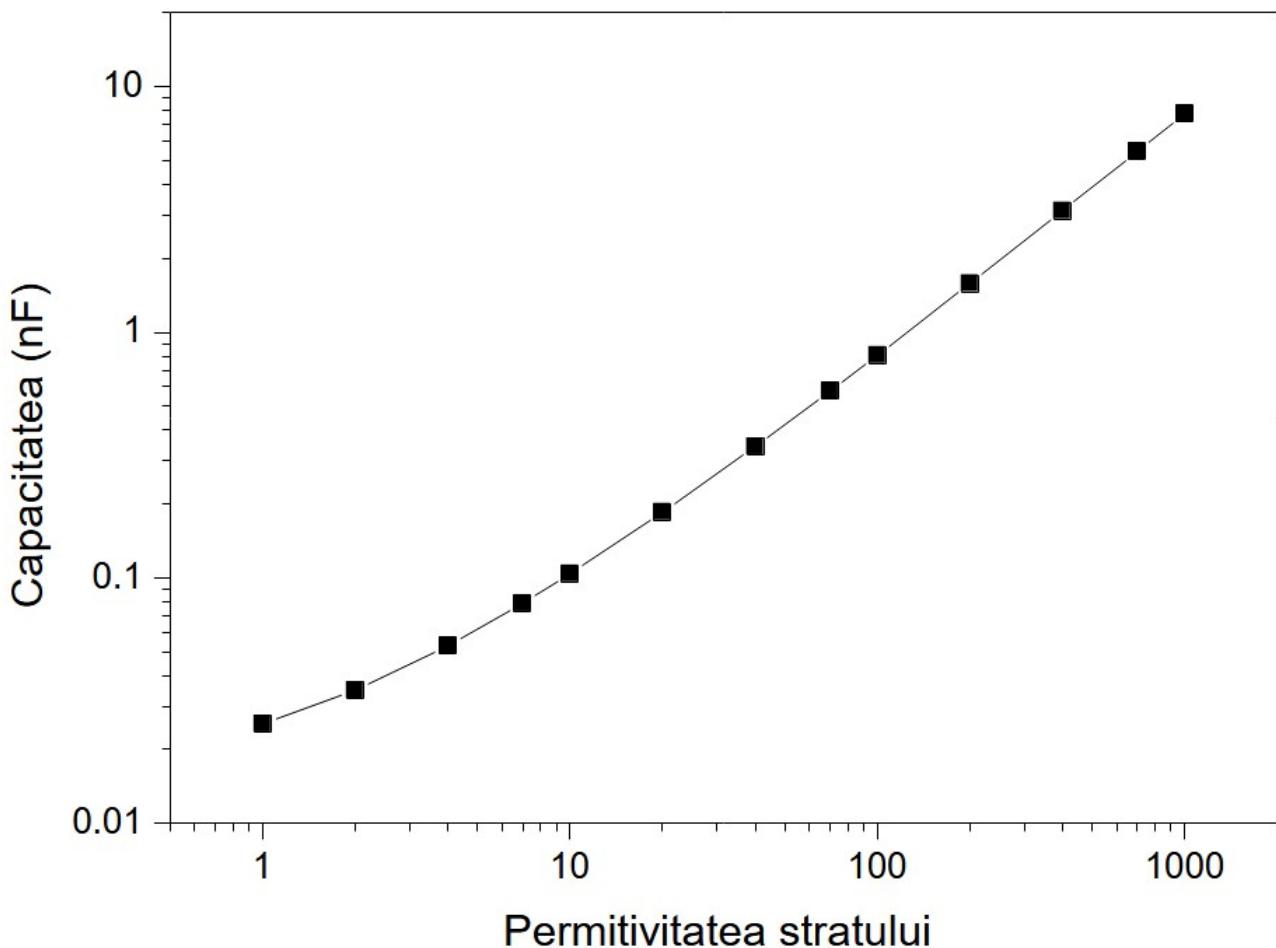


Figura 3.12. Variația capacității în funcție de permitivitatea stratului

Ultima figură prezintă modul în care permitivitatea stratului dielectric și capacitatea unui condensator cu electrozi coplanari sunt legate între ele. Capacitatea electrică (în nF), variază în funcție de permitivitatea stratului dielectric, care este reprezentată pe o scară orizontală logaritmică în grafic.

Capacitatea condensatorului crește semnificativ pe măsură ce permitivitatea stratului dielectric crește, observând o tendință aproape liniară pe scară logaritmică. Acest comportament arată cât de important este să selectăm materialul dielectric potrivit pentru a maximiza performanța condensatorului.

Capitolul 4: Concluzii

4.1. Concluzii

În această lucrare am acoperit evoluția electricității și rolul condensatoarelor în acumularea și utilizarea energiei electrice, subliniind teorema lui Gauss. Am discutat despre diferite metode numerice de analiză a problemelor cu condensatoarele, inclusiv metodele directe și iterative, subliniind avantajele fiecărei metode în funcție de dimensiunea și condiționarea sistemului. În plus, am studiat modelele numerice avansate pentru comportamentul câmpului electric în condensatoare cu plăci plan paralele. Am subliniat rolul permitivității dielectrice și al alegerii materialului dielectric corect și al distanței dintre electrozi pentru a maximiza performanța. În plus, metoda diferențelor finite a arătat o corelație substanțială între permitivitate și geometria specifică a condensatorului. În cele din urmă, această lucrare oferă o analiză detaliată a principiilor și aplicațiilor contemporane ale electricității, ilustrând modul în care teoria și practica se combină pentru a aborda domeniul capacității condensatoarelor în contextul gestionării sustenabile și responsabile a resurselor energetice.

4.2. Bibliografie

- [1] P. Benjamin, 1898 - A History of Electricity, John Wiley & Sons.
- [2] Edward M. Purcell, 1982 - Electricitate și magnetism. Cursul de fizică Berkeley, volumul al II-lea, Editura Didactică și Pedagogică – București.
- [3] www.circuite-electrice.accounting-business.eu - Capacitatea electrică
- [4] Liliana Mitoșeriu și Vasile Tura, 1999 - Fizica dielectricilor, Editura UAIC Iași.
- [5] B. Malic, I. Boerasu, M. Mandeljc, M. Kosec, V. Sherman, T. Yamada, N. Setter și M. Vukadinovic, 2007 - Processing and dielectric characterization of Ba_{0.3}Sr_{0.7}TiO₃ thin films on alumina substrates, Journal of the European Ceramic Society.
- [6] Gregory Hartman, 2011 - Fundamentals of Matrix Algebra, 3rd Edition.
- [7] Gilbert Strang, 2016 - Introduction to Linear Algebra, 5th Edition, Wellesley-Cambridge Press.
- [8] Golub, H. Gene, Charles F. Van Loan, 1996 - Matrix Computations, 3rd Edition, Johns Hopkins.
- [9] www.byjus.com - Jacoian Method, Formula, Properties and Solved Example.

Anexa II

Avizat,

Îndrumător Lucrare de Absolvire/Licență/Diplomă/Disertație
Titlul, Numele și prenumele lect. dr. Pădurariu Leontin
Data 5.07.2024 Semnătura [Signature]

**DECLARAȚIE privind autenticitatea conținutului lucrării de
absolvire/ licență/diplomă/disertație/**

Subsemnatul(a) ISTAN STEFAN.....
domiciliat(ă) în ROMÂN, JUDEȚUL NEAMȚ, STR. SMIRODAVA, BL. 23A, SC. B, AP. 18.....
născut(ă) la data de 24 NOIEMBRIE 2001, identificat(ă) prin CNP 5011124225621.....,
absolvent(ă) al(a) Universității „Alexandru Ioan Cuza” din Iași, Facultatea de FIZICĂ.....
specializarea FIZICĂ INFORMATICA....., promoția 2024.....
declar pe propria răspundere, cunoscând consecințele falsului în declarații în sensul art. 326 din Noul Cod Penal și dispozițiile Legii Învățământului Superior nr. 199/2023 art.259 al. 1 si 2 referitoare la plagiat, că lucrarea de absolvire/ licență/diplomă/disertație cu titlul:

DETERMINAREA PRIN METODE NUMERICE A PERMITIVITĂȚII STRATURILOR
SUBȚIRI ÎN CONDENSATORI CU DIFERITE CONFIGURAȚII GEOMETRICE
elaborată sub îndrumarea dlui/dnei LECT. UNIV. DR. LEONTIN PĂDURARIU.....,
este autentică, îmi aparține și îmi asum conținutul său în întregime.

De asemenea, declar că sunt de acord ca lucrarea mea de absolvire/licență/diplomă/disertație/să fie verificată prin orice modalitate legală pentru confirmarea autenticității, consimțind inclusiv la introducerea conținutului său într-o bază de date în acest scop.

Am luat la cunoștință despre faptul că este interzisă comercializarea de lucrări și înțințifice în vederea facilitării falsificării de către cumpărător a calității de autor al unei lucrări de licență, de diplomă sau de disertație și în acest sens declar pe proprie răspundere că lucrarea de față nu a fost copiată, ci reprezintă rodul cercetării pe care am întreprins-o.

Data 04.07.2024

Semnătură absolvent [Signature]