

La dinamica del Laser

Granchi Nicoletta e Martina Stefano

30 giugno 2015

1 Introduzione

In questo elaborato sono esposti tre modelli che descrivono la dinamica di un laser a stato solido; il modello di Haken, il modello Millonni Eberly e infine il modello con equazioni di Maxwell Bloch. Per ciascuno dei tre modelli è riportato il confronto tra soluzione analitica e soluzione numerica. Alla base dell'interesse per questo sistema fisico stanno i concetti, tipici del laser, di autoregolazione, che incorre ogni qualvolta si crei spontaneamente ordine, e di luce caotica: è infatti possibile, sotto precise condizioni, ottenere un'analogia tra il sistema di Lorenz per il moto convettivo di un fluido e il sistema laser. Il linguaggio usato per lo svolgimento delle simulazioni è *Python*. I motivi per cui è stato scelto tale linguaggio sono:

- la versatilità nello stile di programmazione, che permette di realizzare programmi di diverse dimensioni, funzionalità e stili (funzionale *OOP*, etc...);
- la folta community di sviluppatori mette a disposizione una ricca serie di pacchetti per il calcolo numerico, il disegno di grafici, e in generale tutte le funzioni necessarie per la realizzazione dei modelli.

2 Laser a stato solido

Il laser a stato solido è una tipologia di laser che ha come mezzo attivo un cristallo, e consiste in un insieme di atomi impiantati in una matrice di stato solido delimitata da specchi parzialmente riflettenti da entrambi i lati. Gli atomi nel reticolo periodico emettono se eccitati da una fonte esterna, dunque ognuno si comporta come un'antenna che emette luce. Quando il pompaggio esterno è relativamente debole gli atomi eccitati oscillano indipendentemente l'uno dall'altro ed emettono onde di luce di fase random, mentre aumentando la forza di pompaggio, una volta superata una certa soglia, gli atomi iniziano ad oscillare in fase e si ottiene l'emissione laser. I fotoni prodotti rimbalzano tra i due specchi alle estremità del mezzo attivo, causando ulteriore emissione stimolata, amplificando così il fascio in uscita. Al variare delle condizioni si può quindi passare da un sistema macroscopicamente disordinato ad uno ordinato e autoregolato, che emette in modo coerente.

2.1 Modello di Haken

In questo modello semplificato, in cui non si tiene conto della meccanica quantistica, la variabile dinamica è unica ed è il numero $n(t)$ di fotoni prodotti nel laser.

La variazione nel tempo di $n(t)$ è data dall'equazione

$$\dot{n} = GnN - kn \quad (1)$$

dove $G > 0$ è il parametro di guadagno derivante dal processo di emissione stimolata, $N(t)$ è il numero di atomi eccitati, e k è il rate di decadimento dei fotoni dovuto a fenomeni di trasmissione, scattering ecc...: più fotoni ci sono e più è probabile che riescano ad uscire dal mezzo attivo. L'idea chiave di questo modello è supporre che in assenza di fotoni il numero di atomi eccitati sia $N = N_0$ per effetto del pompaggio, e considerare che, all'aumentare del numero di fotoni, N diventa sempre più minore di N_0 , perché gli atomi emettono diseccitandosi, passando così ad un livello di energia inferiore. Questa diminuzione di N è espressa dall'equazione algebrica

$$N(t) = N_0 - \alpha n \quad (2)$$

dove $\alpha > 0$ è il rate con il quale gli atomi ricadono nel loro stato fondamentale. Ci si riconduce così ad un sistema del primo ordine in $n(t)$:

$$\dot{n} = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2 \quad (3)$$

I punti fissi del sistema, che si ottengono imponendo $\dot{n} = 0$, sono $n_1 = 0$ e $n_2 = \frac{(GN_0 - k)}{\alpha G}$. Si riconosce in (3) la forma normale di una cosiddetta *biforcazione transcritica*, nel cui ambito la stabilità dei punti fissi varia in funzione di un parametro. Nel nostro caso il parametro in questione è la forza della pompa $N_0 = \frac{k}{G}$. Per questo modello è stato realizzato lo script in *Python haken.py* con lo scopo di visualizzare la biforcazione. I risultati ottenuti sono coerenti con la soluzione analitica effettuata infatti in figura 1 è possibile vedere tre frames dell'animazione che mostra il verificarsi della biforcazione al variare del parametro N_0 . Nei plot di sinistra viene mostrata l'evoluzione di n nel tempo a partire da $n = 1$, ottenuta integrando l'equazione differenziale. Nei plot di destra viene invece mostrato il plot di \dot{n} in funzione di n . E' evidente che per questo modello $N_0 = \frac{k}{G}$ può essere interpretato come la soglia di attivazione del laser: il grafico di $n(t)$ in funzione di N_0 mostra infatti che per $N_0 > \frac{k}{G}$ l'origine perde stabilità e appare il punto fisso stabile $n_2 = \frac{(GN_0 - k)}{\alpha G}$ corrispondente ad un'azione laser spontanea.

In figura 2 è invece riportato il campo vettoriale del sistema per diversi valori di n ed N_0 . La curva blu è ottenuta plottando l'ultimo valore dell'integrazione del sistema partendo da $n = 1$ per valori di N_0 crescenti, tale curva mostra quindi la biforcazione e la variazione della stabilità dei punti fissi al crescere di N_0 .

Trattandosi di un sistema differenziale 1D, il campo vettoriale è distribuito su rette parallele all'asse n , e graficamente si riconosce la stabilità quando le frecce puntano verso la linea blu, mentre si riconosce l'instabilità quando le frecce si allontanano da essa.

2.2 Modello di Milonni Eberly

Si tratta di un modello in cui viene presa in considerazione la variazione temporale non solo del numero di fotoni nel laser, ma anche quella del numero di atomi eccitati N , e

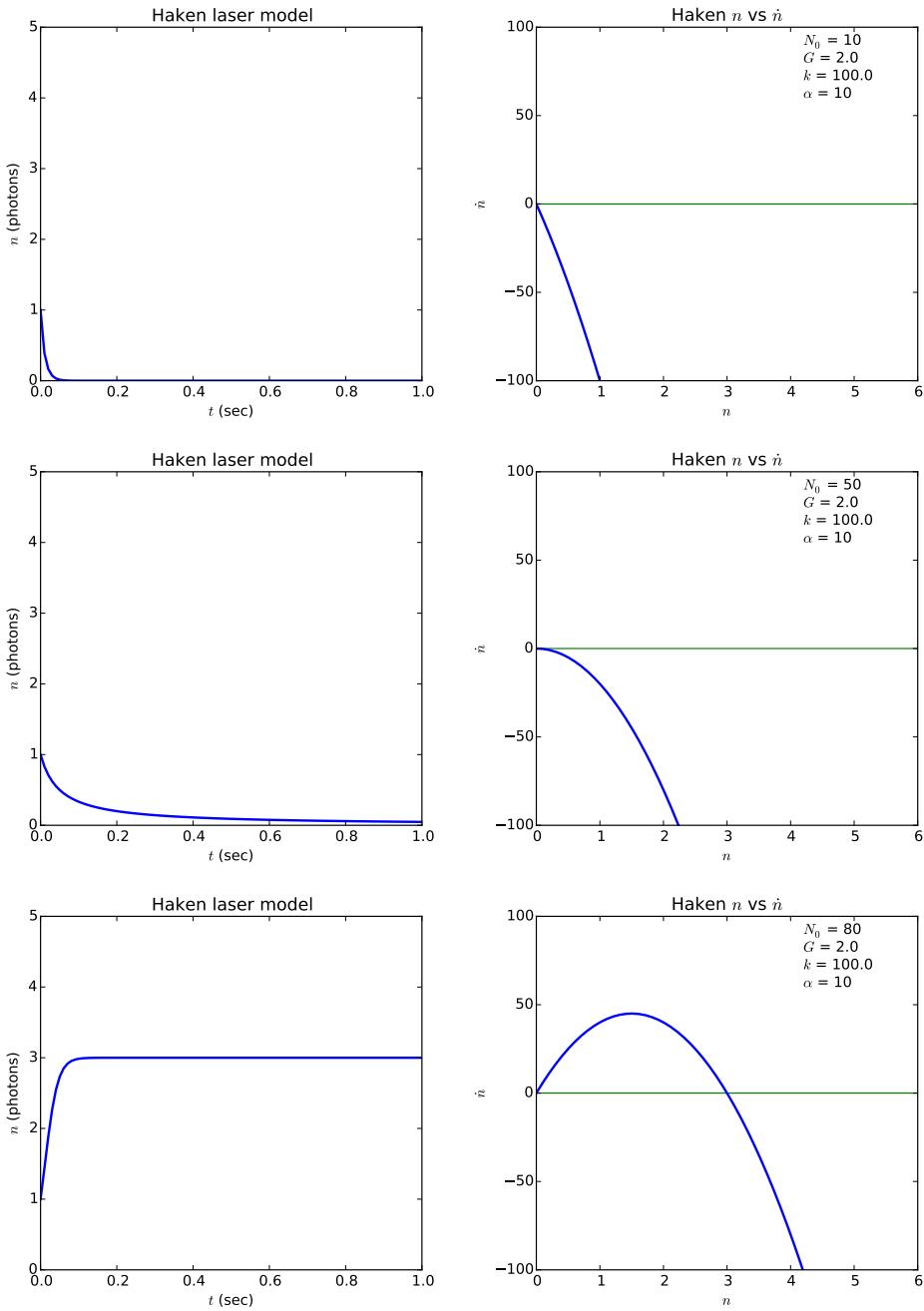


Figura 1: Dinamica del Modello di Haken: 3 frames dell'animazione dei plot rispettivamente n vs t e \dot{n} vs n . Dall'alto al basso per $N_0 = 10, 50, 80$.

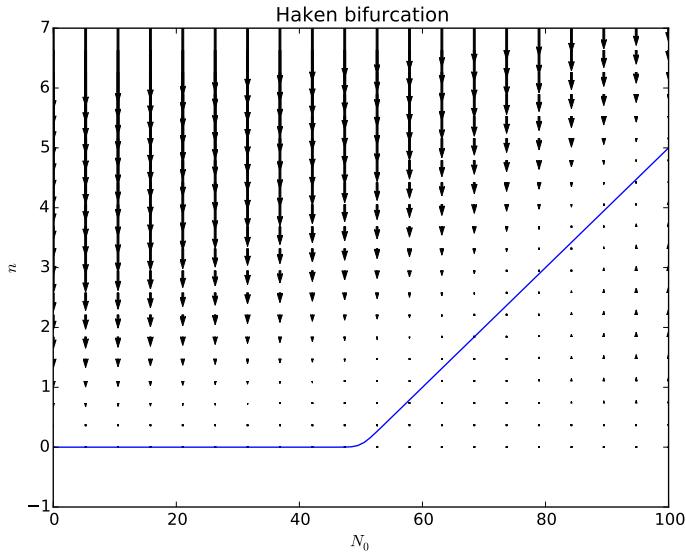


Figura 2: Dinamica del Modello di Haken: Campo vettoriale

quindi si introduce, rispetto al modello precedente, il fenomeno dell'*emissione spontanea*: il sistema relativo a questo modello è quindi

$$\dot{n} = GnN - kn \quad (4)$$

$$\dot{N} = -GnN - fN + p \quad (5)$$

dove f è il rate di decadimento per emissione spontanea e p è la forza di pompaggio. Più fotoni sono emessi dagli atomi, più gli atomi eccitati diminuiscono proporzionalmente al coefficiente di guadagno G ; mentre p fa aumentare N , il processo di emissione spontanea contribuisce a diminuirlo, ed è responsabile dell'accoppiamento delle due equazioni differenziali (4) e (5). Non ci sono metodi sistematici per risolvere esattamente equazioni differenziali non lineari, ci sono però dei casi limite ben noti, molti dei quali con soluzioni conosciute. Riportiamo una soluzione analitica del problema ricondotto ad uno di questi casi limite, e successivamente l'analisi numerica del sistema generale in assenza di approssimazioni.

2.2.1 Soluzione Analitica

Consideriamo il limite in cui il rate di produzione di atomi eccitati sia più "lento" della produzione dei fotoni laser, ovvero supponiamo che i fotoni rimangano nel sistema per un tempo maggiore di quello in cui gli atomi siano eccitati. Questa ipotesi è espressa dalla condizione $k/f \ll 1$, e permette di dire che $\dot{N} \approx 0$. Questa eliminazione, detta *adiabatica*, esprime il concetto fisico secondo cui gli atomi non restano eccitati sufficientemente a lungo per essere contati rispetto al numero di fotoni che producono. L'equazione (5) diventa così:

$$-NGn - f + p = 0 \quad (6)$$

da cui si ottiene

$$N = \frac{p}{Gn + f}.$$

Il sistema precedente è quindi ricondotto ad un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{n} = n \left(\frac{Gp}{Gn + f} - k \right) \\ N = \frac{p}{Gn + f} \end{cases} \quad (7)$$

per il quale è semplice calcolare i punti fissi imponendo

$$\begin{aligned} \dot{n} &= 0 \\ n \left(\frac{Gp}{Gn + f} - k \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

I punti fissi del sistema sono:

$$\begin{aligned} n_1 &= \left(0, \frac{p}{f} \right) \\ n_2 &= \left(\frac{p}{k} - \frac{f}{G}, \frac{k}{G} \right) \end{aligned}$$

Per lo studio della stabilità calcoliamo la derivata prima rispetto a n della funzione $F(n) = \dot{n}$ nei punti fissi trovato

$$F'(n) = \frac{Gpf}{(Gn + f)^2} - k$$

e si trova che n_1 è un punto fisso *stabile*, e quindi è un *attrattore* per

$$p < \frac{kf}{G}$$

e n_2 è un punto fisso *instabile* per

$$0 < p < \frac{fk}{G}.$$

2.2.2 Soluzione numerica

Per l'analisi del modello di Milonni Eberly è stato realizzato lo script *milonni.py* che mostra due finestre. Nella prima è visibile un'animazione dell'evoluzione del modello al crescere della potenza della pompa p , per una traccia nelle due variabili n ed N nel tempo e nel piano combinato di n ed N . Inoltre viene anche visualizzato il campo vettoriale indotto dal sistema. Nella figure 3, 4 e 5 si osservano tre fotogrammi dell'animazione, e ciascuna immortala le situazioni significative del modello previste nell'ambito della soluzione analitica (Par. 2.2.1). 6. Per la realizzazione dei plot della prima finestra viene integrato il sistema di equazioni differenziali, *senza effettuare l'eliminazione adiabatica*, per un certo tempo. Tale tempo di integrazione è sufficiente poiché sia n che N raggiungono lo stato stazionario, come si può notare nei due plot n vs t e N vs t . Per la realizzazione della seconda finestra vengono invece utilizzate le condizioni trovate analiticamente usando l'*eliminazione adiabatica*. In figura 6 è mostrato il diagramma di biforcazione del sistema. I

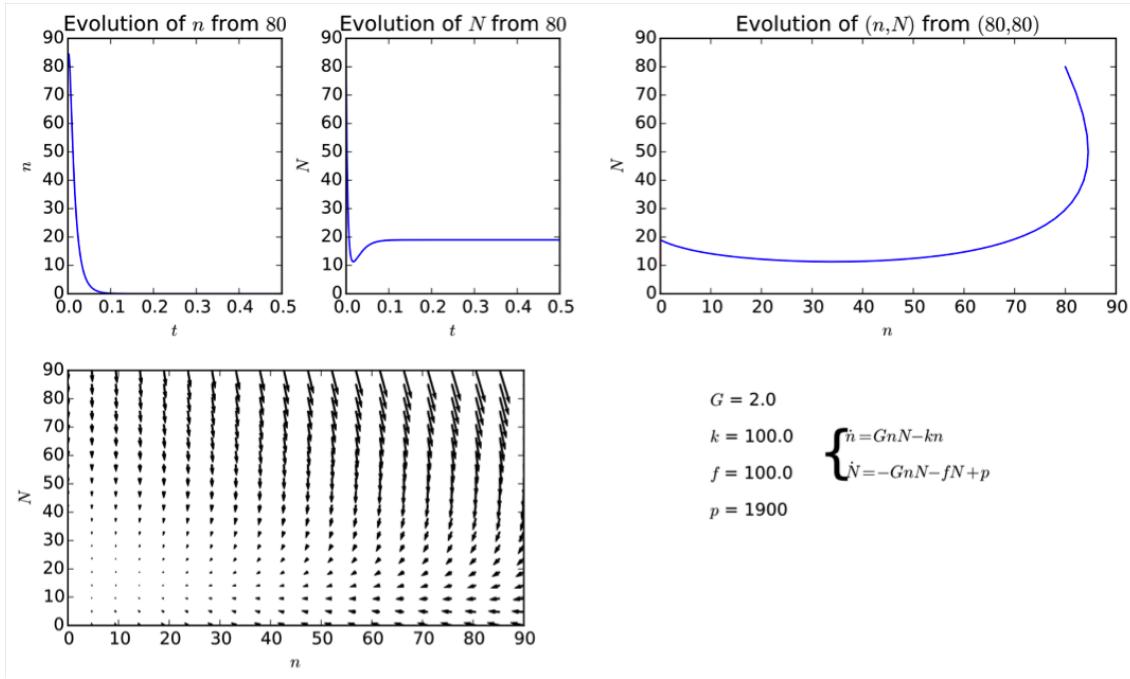


Figura 3: Primo fotogramma dell'animazione della dinamica del modello Milonni Eberly con potenza della pompa $p = 1900$.

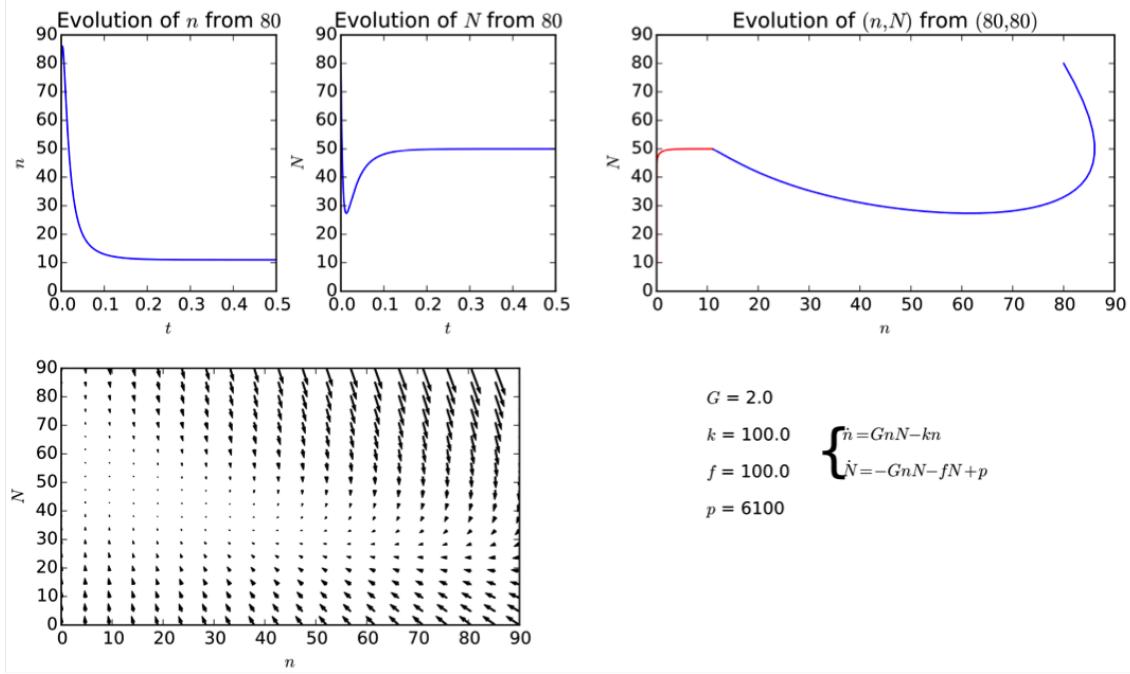


Figura 4: Secondo fotogramma dell'animazione della dinamica del modello Milonni Eberly con potenza della pompa $p = 6100$.

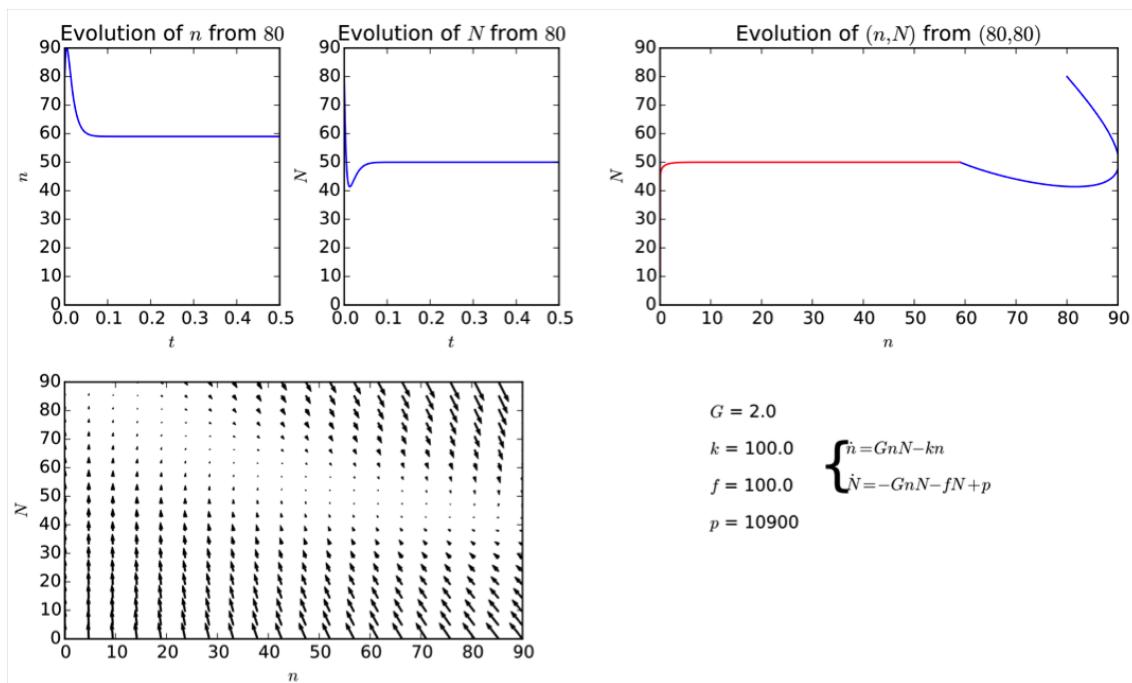


Figura 5: Terzo fotogramma dell’animazione della dinamica del modello Milonni Eberly con potenza della pompa $p = 10900$.

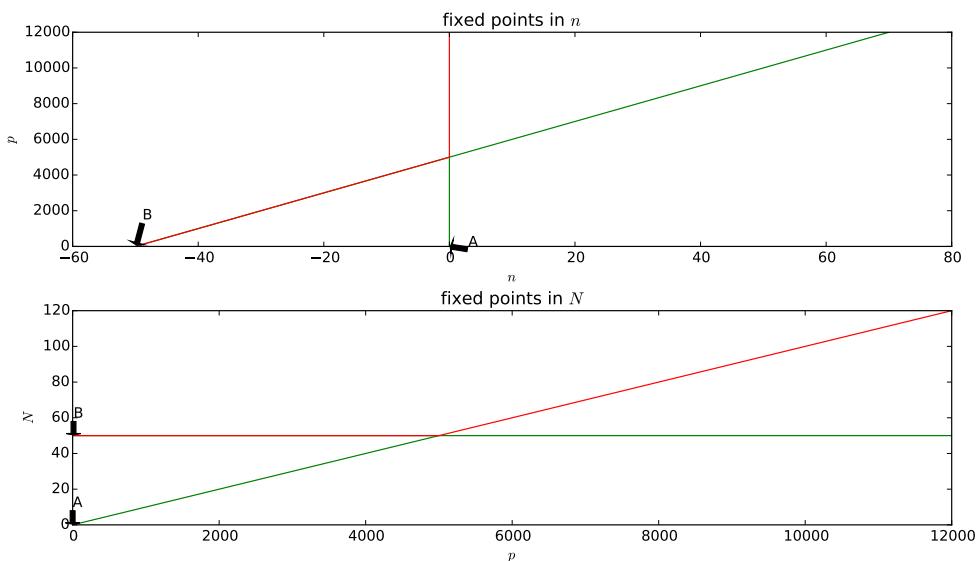


Figura 6: Diagramma di biforazione per il modello Milonni Eberly.

punti fissi, trovati anche tramite soluzione analitica, sono etichettati con A e B , e i due grafici mostrano, al variare della potenza della pompa p , la loro stabilità: verde stabile, rosso instabile. Notare che p è posto come ordinata nel grafico superiore e come ascissa nel grafico inferiore, per meglio visualizzare la relazione tra i due punti fissi. Nei limiti visualizzati (sono presi solo i valori che hanno senso fisicamente, ovvero non considerando i valori negativi di p ed n) il sistema ha un solo punto fisso stabile per ogni valore di p ; in figura 6 si può vedere che per $p < 5000$ è stabile solo A e per $p > 5000$ solo B . Ricordando quanto trovato nel paragrafo 2.2.1, è stato perciò possibile osservare un buon accordo tra risultati analitici e risultati numerici.

2.3 Modello con Equazioni di Maxwell Bloch

Le equazioni di Maxwell Bloch descrivono la dinamica di un sistema quantistico a due stati interagente con il modo elettromagnetico di un risonatore ottico; sono analoghe, ma non tutte equivalenti, alle equazioni di Bloch che descrivono il momento magnetico nucleare in un campo elettromagnetico. Si tratta di un sistema di tre equazioni al primo ordine per il campo elettrico in un modo di singola cavità longitudinale, ricavato a partire dalle equazioni di Maxwell usando approssimazioni semiclassiche per variabili quantistiche. La non linearità deriva dal fatto che il sistema oscilla tra almeno due stati discreti di energia. Le equazioni sono risolte per la *densità di inversione di popolazione* $D(t)$ e per la *densità media di polarizzazione* $P(t)$, indotta dal campo elettrico $E(t)$:

$$\begin{cases} \dot{E} = k(P - E) \\ \dot{P} = \gamma_1(ED - P) \\ \dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) \end{cases} \quad (9)$$

dove k è il rate di decadimento nella cavità laser per i fenomeni di trasmissione, scattering ecc..., γ_1 e γ_2 sono i rate di decadimento rispettivamente per la polarizzazione atomica e per l'inversione di popolazione, e λ è il parametro di pompaggio, che può essere positivo e negativo. L'interesse nello studio di questo sistema, per il quale sono stati infatti osservati sperimentalmente comportamenti caotici, è sia sperimentale che teorico: le equazioni di Maxwell Bloch sono analoghe alle equazioni di Lorenz e possono esibire attrattori strani. Il sistema di Lorenz infatti, che descrive i moti convettivi di un fluido, è

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = (XY - bZ) \end{cases} \quad (10)$$

dove σ , r e b sono tre parametri legati alle proprietà del sistema quali temperatura, densità ecc... Esso può essere ricondotto al sistema (9) tramite un'opportuna trasformazione:

$$\begin{cases} X = \xi \\ Y = \eta \\ Z = r - \zeta \end{cases}$$

e si ottiene così che le equazioni del sistema di Lorenz diventano identiche a quelle di Maxwell Bloch:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \sigma(\eta - \xi) \\ \dot{\eta} = \zeta\xi - \eta \\ \dot{\zeta} = b(r - \zeta) - \xi\eta \end{cases} \quad (11)$$

Queste equazioni descrivono almeno due instabilità che sono state trovate indipendentemente nella dinamica dei fluidi e in quella del laser. C'è una corrispondenza tra l'assenza di azione laser e il fluido a riposo, e tra l'attivazione laser e i moti convettivi del fluido. Oltre a questa instabilità se ne ha un'altra, per il laser, sotto le condizioni:

$$\begin{cases} k > \gamma_1 + \gamma_2 \\ \lambda > \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + k)(\gamma_1 + k)}{\gamma_1(k - \gamma_1 - \gamma_2)} \end{cases} \quad (12)$$

e per il fluido:

$$\begin{cases} \sigma > b + 1 \\ r > \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - 1 - b} \end{cases} \quad (13)$$

Analisi numeriche precedenti hanno mostrato che nei laser il pompaggio deve essere molto elevato per soddisfare la seconda condizione del sistema (12); quindi, dopo che è stata dimostrata teoricamente e sperimentalmente la possibilità di ottenere luce laser *caotica*, sono stati ricercati altri meccanismi per realizzarla con una potenza di pompa minore. Prima di presentare la nostra trattazione numerica, proponiamo dunque, a partire da tale esigenza, una soluzione analitica del sistema compatibile con la possibilità di produrre luce laser caotica.

2.3.1 Soluzione analitica

Assumendo che $\gamma_1, \gamma_2 \gg k$, si elimina adiabaticamente \dot{P} e \dot{D} il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{E} = k(P - E) \\ \gamma_1(ED - P) = 0 \\ \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Esprimendo P e D in funzione di E si ottiene:

$$\dot{E} = kE \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda E^2 + 1} - 1 \right) = k\lambda \left(\frac{E - E^3}{\lambda E^2 + 1} \right) \quad (15a)$$

$$P = E \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda E^2 + 1} \right) \quad (15b)$$

$$D = \frac{\lambda + 1}{\lambda E^2 + 1} \quad (15c)$$

La funzione 15a si annulla in $E_1 = 0$, $E_2 = 1$ e $E_3 = -1$, quindi il sistema ha punti fissi:

$$\begin{aligned} E_1^* &= (E_1, P_1, D_1) = (0, 0, 0) \\ E_2^* &= (E_2, P_2, D_2) = (1, 1, 1) \\ E_3^* &= (E_3, P_3, D_3) = (-1, 1, -1) \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che per $\lambda < 0$ la funzione non esiste per E uguale a:

$$\begin{aligned} E_1^a &= 1/\sqrt{-\lambda} \\ E_2^a &= -1/\sqrt{-\lambda} \end{aligned}$$

quindi in corrispondenza dei punti E_1^a e E_2^a per $\lambda < 0$ sono presenti due asintoti verticali. Studiando il segno della derivata prima rispetto ad E della funzione $F(E) = \dot{E}$:

$$\frac{d}{dE}(F(E)) = \frac{k(\lambda + 1)(\lambda E^2 + 1) - kE(\lambda + 1)(2\lambda E)}{(\lambda E^2 + 1)^2} - k \quad (16)$$

si hanno i seguenti risultati per i punti fissi:

- E_1^* è un punto fisso stabile per $\lambda < 0$, instabile per $\lambda > 0$;
- E_2^* è un punto fisso stabile per $\lambda < -1$, instabile per $-1 < \lambda < 0$, e di nuovo stabile per $\lambda > 0$;
- E_3^* è un punto fisso stabile per $\lambda < -1$, instabile per $-1 < \lambda < 0$, e di nuovo stabile per $\lambda > 0$.

Inoltre, anche se per $\lambda < 0$ sia la funzione (15a) che la sua derivata non sono definite in E_1^a e E_2^a , dallo studio effettuato intorno agli asintoti si può dedurre che

- E_1^a è repulsivo per $\lambda < -1$ e attrattivo per $-1 < \lambda < 0$ (e non esiste per $\lambda > 0$);
- E_2^a è repulsivo per $\lambda < -1$ e attrattivo per $-1 < \lambda < 0$ (e non esiste per $\lambda > 0$).

2.3.2 Soluzione Numerica

Per lo studio delle equazioni di Maxwell-Bloch (11) sono stati realizzati tre scripts:

- maxwellBifurcationAdiabatic.py
- maxwellVectField.py
- maxwell.py

Come nei casi precedenti, questi script sono stati realizzati in Python. L'analisi numerica effettuata ha rilevato la presenza degli stessi punti fissi che si ottengono per via analitica.

maxwellBifurcationAdiabatic.py è utile per l'analisi della stabilità delle equazioni di Maxwell Bloch nel caso venga usata l'eliminazione adiabatica. L'esecuzione fornisce un'animazione in due plot che è possibile mettere in pausa cliccando su qualsiasi punto della finestra. Il plot superiore è il grafico dell'andamento della funzione (15a) di \dot{E} rispetto ad E dopo l'eliminazione adiabatica, e gli zeri di questa funzione sono i punti fissi del sistema; in esso è presente anche la derivata (16) per lo studio della stabilità. Sono evidenziati i punti fissi, in verde se stabili e in rosso se instabili, e i punti attraversati dagli asintoti della funzione in blu. Il plot inferiore (di cui si riporta un esempio in figura 7) mostra l'andamento della stabilità dei punti fissi al variare del parametro λ , e come sempre

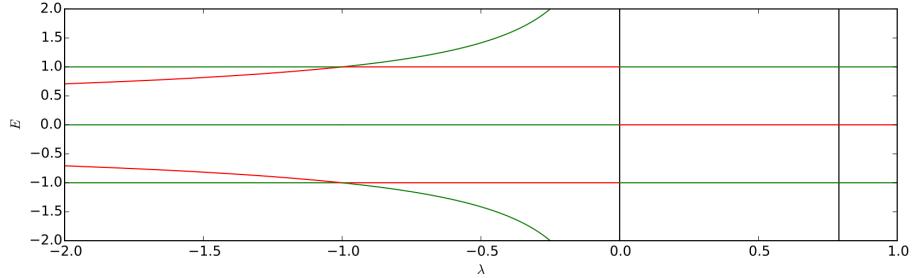


Figura 7: Andamento di E in funzione di λ : il rosso indica l'instabilità, il verde la stabilità.

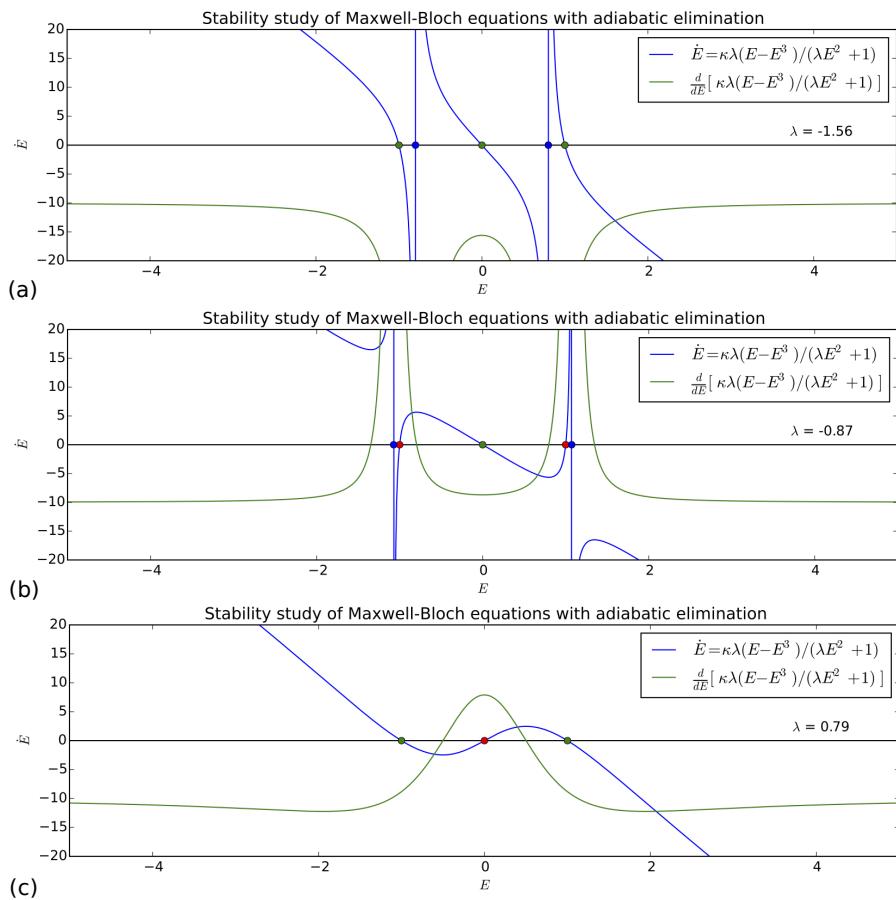


Figura 8: Screenshots dell'animazione effettuata: è presente l'andamento di \dot{E} in funzione di E per $\lambda < -1$, $-1 < \lambda < 0$ e $\lambda > 0$ rispettivamente in (a), (b) e (c).

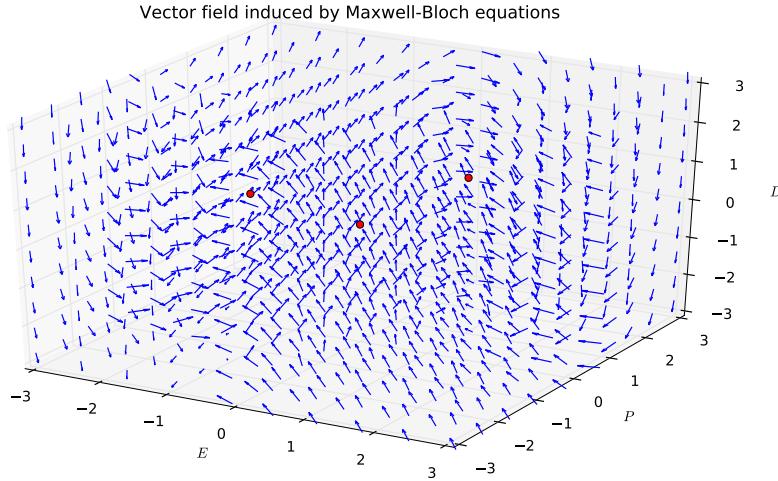


Figura 9: Esempio di plot tridimensionale del campo vettoriale relativo al sistema di Maxwell Bloch, del quale si vedono anche i tre punti fissi evidenziati in rosso, ottenibile dallo script maxwellVectField.py.

si utilizza il colore verde quando il punto fisso è stabile, e il rosso quando è instabile. Sono evidenziati i due asintoti e i punti fissi, con la stabilità dedotta dall’andamento della funzione. In figura (8a) è mostrato uno screenshot dell’animazione con $\lambda < -1$, in figura (8b) con $-1 < \lambda < 0$ e in figura (8c) con $\lambda > 0$. Si nota che l’andamento della funzione è compatibile con i risultati della soluzione analitica, anche se in realtà il plot più significativo è quello superiore, in quanto quello inferiore viene costruito ad hoc partendo dai risultati ottenuti.

maxwellVectField.py permette di visualizzare il campo vettoriale relativo alle equazioni (11); vengono evidenziati in rosso i tre punti fissi E_1^* , E_2^* e E_3^* . Questo script non fornisce grande interattività, ma è possibile ruotare lo spazio e variare i parametri del sistema. In figura 9 è visibile uno screenshot dello script in esecuzione.

maxwell.py è lo script più complesso e completo, in quanto permette di visualizzare le traiettorie nello spazio e confrontarle con le corrispondenti semplificate con l’eliminazione adiabatica. L’applicazione presenta un unico plot in tre dimensioni: gli assi sono rispettivamente E , P e D . Sulla destra sono presenti le tre equazioni che compongono il sistema (11) e i valori attuali dei parametri. E’ possibile interagire con il programma variando i parametri:

- κ con i tasti 1 e 2;
- γ_1 con i tasti 3 e 4;
- γ_2 con i tasti 5 e 6;

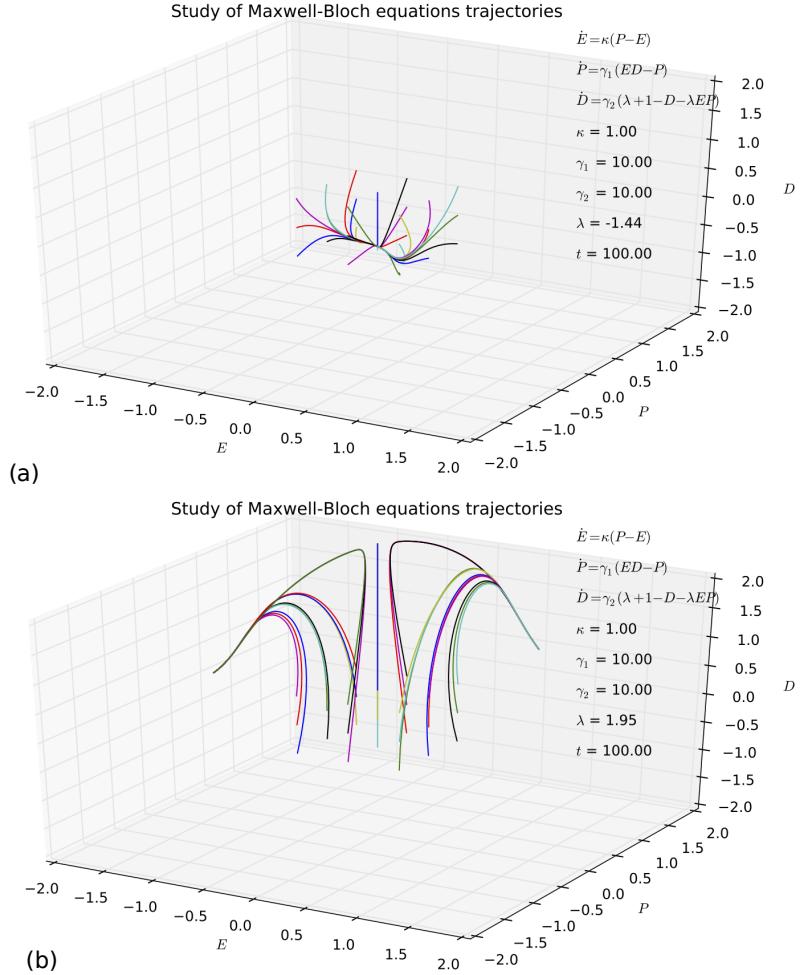


Figura 10: (a) Tracce del sistema nell'intorno del punto fisso instabile E^* per valori negativi di λ . (b) Tracce del sistema nell'intorno dei due attrattori per valori positivi di λ

- λ con i tasti 7 e 8;
- t con i tasti 9 e 0.

Inoltre è possibile attivare e disattivare altre funzioni:

- **spazio** l'animazione al variare di λ ;
- **a** la visualizzazione della corrispondente traccia con l'eliminazione adiabatica;
- **z** traccia singola o multitraccia.

Infine premendo **q** si termina lo script.

Questo programma permette di esplorare lo spazio degli stati e di vedere come evolvono le tracce a partire da punti di partenza determinabili a piacere, al variare dei parametri. Nelle figure (10a) e (10b) è possibile vedere come, al ricrearsi delle condizioni per l'eliminazione adiabatica $\gamma_1 >> \kappa$ e $\gamma_2 >> \kappa$ (vedi paragrafo 2.3), i comportamenti delle traiettorie

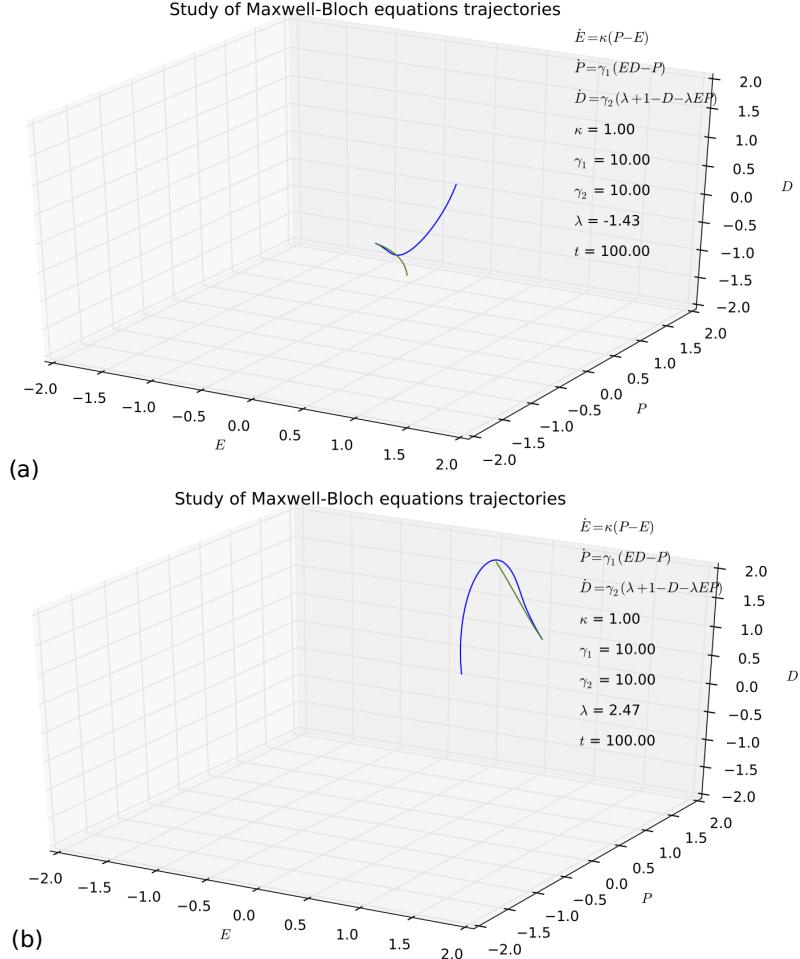


Figura 11: Confronto di una traccia ottenuta senza eliminazione adiabatica (in blu) con un'altra traccia ottenuta invece con eliminazione adiabatica (in verde) in condizioni opportune per $\lambda = -1.43$ e $\lambda = 2.47$ rispettivamente in (a) e (b).

siano compatibili con i risultati dello studio analitico del paragrafo 2.3.1: è verificata la presenza di un *repulsore* in E_1^* per $\lambda < 0$ e di due *attrattori* in E_2^* ed E_3^* per $\lambda > 0$.

Nelle figure (11a) e (11b) è mostrato l'uso della funzionalità che permette di visualizzare una seconda traccia corrispondente a quella data dal sistema effettuando l'eliminazione adiabatica. Si nota che se sussistono le condizioni per l'eliminazione adiabatica la traiettoria si adagia rapidamente su quella ottenuta ponendo $\dot{P} = 0$ e $\dot{D} = 0$. Se invece non sussistono le giuste condizioni sui parametri, ad esempio impostando $k > \gamma_1, \gamma_2$, la correlazione tra le due traiettorie è povera come in figura 12.

E' stato osservato che per alcuni valori dei parametri le traiettorie possono:

- spiraleggiare verso il punto fisso come in figura 13;
- evolvere in cicli limite come quello di figura 14;

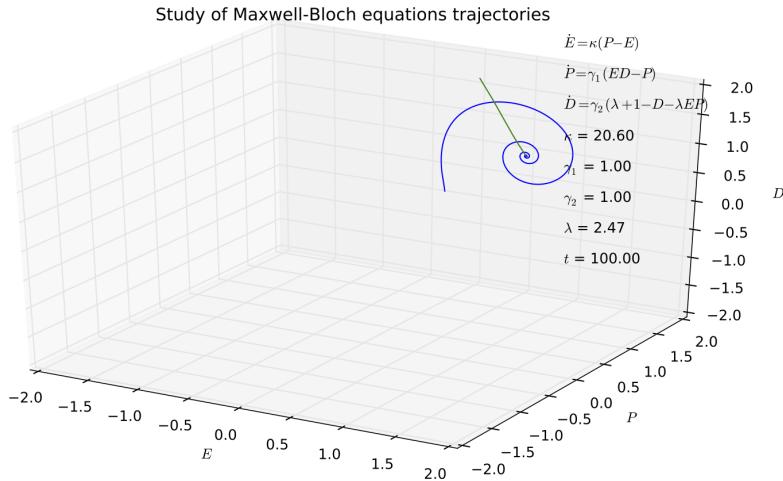


Figura 12: Confronto di una traccia ottenuta senza eliminazione adiabatica (in blu) con un'altra traccia ottenuta invece con eliminazione adiabatica (in verde) per condizioni errate.

- possono insorgere attrattori di tipo Lorenz come in figura (15a), e può verificarsi un comportamento caotico come quello delle figure (15b) e (15c).

2.3.3 Conclusioni

Oltre ad aver avuto un buon riscontro tra i risultati ottenuti per via analitica e numerica, visto che sono stati rilevati gli stessi punti fissi e la stessa stabilità, è stato possibile avere anche una dimostrazione del comportamento caotico della luce laser a livello computazionale, in quanto sono state visualizzate le traiettorie di tracce nelle ultime due figure che hanno punti di partenza che differiscono di poco e che dopo un certo tempo hanno raggiunto posizioni molto differenti. Abbiamo infine rilevato la presenza di attrattori di tipo Lorenz, verificando ulteriormente l'equivalenza tra il sistema di Maxwell Bloch per il laser e il sistema di Lorenz per i moti convettivi di un fluido.

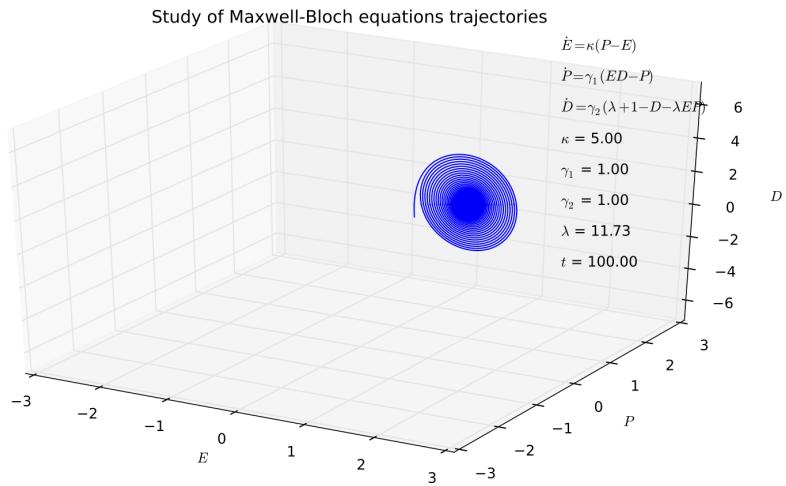


Figura 13: Traiettorie del modello: formazione di una spirale intorno al punto fisso attrattore (1,1,1).

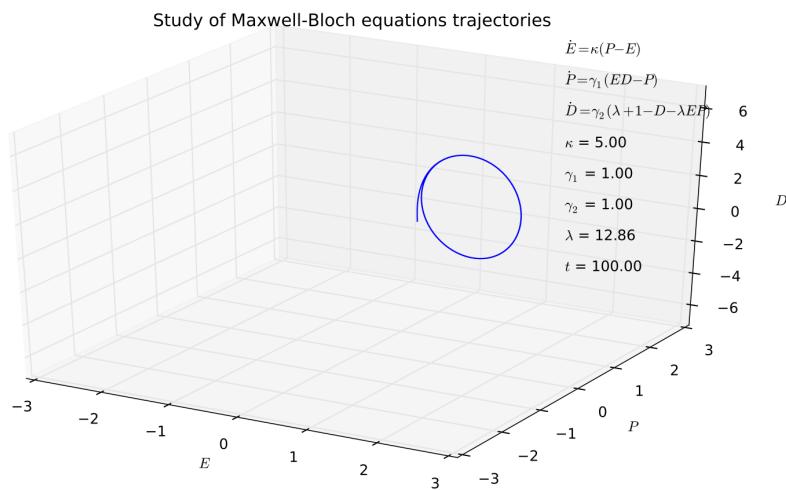


Figura 14: Traiettoria del modello: formazione del ciclo limite intorno al punto fisso attratto (1,1,1).

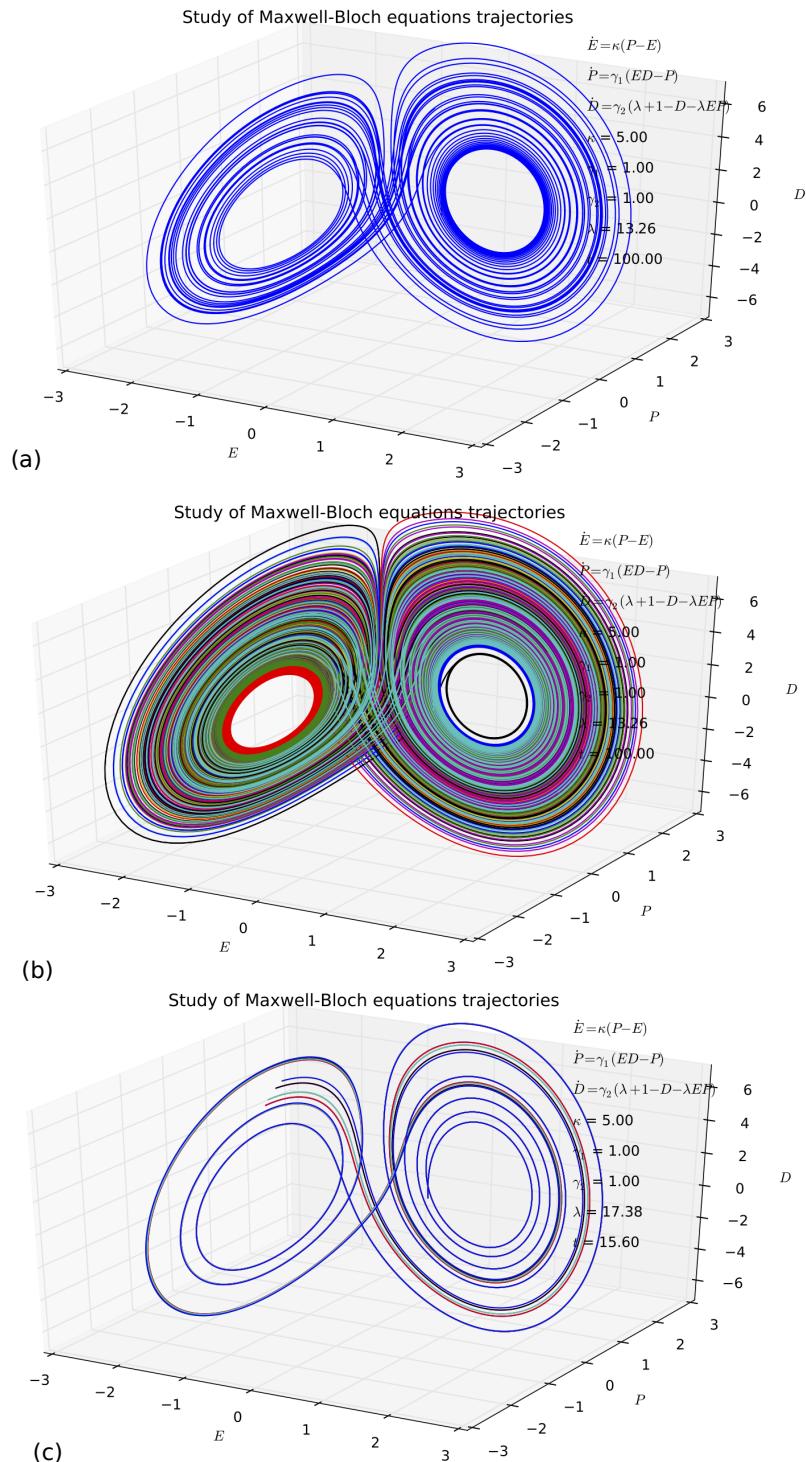


Figura 15: (a) Attrattori di tipo Lorenz. (b) e (c) Caos.