Semestre II - 2023

Modelación y Simulación
- Laboratorio 3 -

Instrucciones:

- Esta actividad en grupos de tres
- No se permitirá ni se aceptará cualquier indicio de copia. De presentarse, se procederá según el reglamento correspondiente.
- Recuerden dejar claro el procedimiento seguido para las soluciones dadas cuando corresponda.
- Cuando corresponda, deberán generar un archivo PDF para subirlo al espacio en Canvas.
- Cuando corresponda, deberán subir el archivo de código correspondiente a las respuestas de cada task.

Parte 1 - Ejercicio Teórico

Responda a cada ejercicio en un documento que deberá subir como PDF

Tasks 1

Suponga que en un escenario totalmente ficticio existe un virus conocido como el virus T. Se ha descubierto que este existe en el 0.5% de la población, y a la vez se ha desarrollado una prueba que es efectiva detectando el 97% de las veces si una persona está infectada. Pero, esta prueba da un falso positivo el 0.1% de las veces. Considerando esto conteste

a. Si una persona resulta con una prueba positiva para el virus T, ¿cuál es la probabilidad de realmente tener dicho virus?
a. Si un grupo de 5 personas se han tratado de refugiar y para ello han hecho una prueba cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 resulten positivos? Si dado el caso estos tres resulten positivos en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 tengan el virus?

Parte 2 - Ejercicios sobre Números Aleatorios

Realice cada uno de los siguientes ejercicios usando el lenguaje de programación de su preferencia. Pueden usar Jupyter Notebooks.

Tasks 1

Considere un experimento en el cual se cuentan cuántos carros pasan por una calle determinada dentro de un rango de tiempo dado. Sabemos que el tiempo de espera para el n-ésimo evento puede ser modelando a través de una variable gamma. Considere el caso en el que usted está esperando que pase el 3er carro en la calle dada.

1. Para diferentes lambdas en [2, 1, 0.5], grafique las distribuciones gamma para cada uno de los casos.
2. ¿Qué conclusiones puede obtener de las gráficas obtenidas en términos de los tiempos de espera y el número de ocurrencias del evento? ¿Qué relación existe entre el tiempo de espera y el número de ocurrencias de un evento?

Tasks 2

Considere las siguientes dos funciones generados de pseudo randoms y responda

Generador 1:

$$x_n = 5^5 x_{n-1} \bmod (2^{35} - 1)$$

Generador 2:

$$x_n = 7^5 x_{n-1} \bmod(2^{31} - 1)$$

Y considere al generador de números aleatorios uniformes en (0, 1) default de su lenguaje de programación de elección, como un tercer generador de números aleatorios.

Generador 3: (baseline)

$$x_n = Math.random()$$

1. Construya un programa que compare estos tres generadores a través de un histograma de asteriscos (de 0 a 1 con saltos de 0.1) Use tres comparaciones para 100, 5,000 y 100,000 repeticiones.
2. ¿Qué generador le parece mejor? (considere solamente Generador 1 y Generador 2) ¿Por qué?

Tasks 3

Considere la siguiente integral y responda

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.77245385090551602$$

1. Transforme la integral a una con límites de 0 a 1, muestre su procedimiento
2. Aproxime la integral usando el método de Montecarlo, haciendo 100, 10,000 y 100,000 iteraciones.

Tasks 4

Considere la siguiente integral y responda

$$\theta = \int_0^{\infty} \int_0^{x} e^{-(x+y)} dydx = 0.5$$

1. Transforme la integral múltiple a una en la que ambos límites sean de 0 a 1, muestre su procedimiento
2. Aproxime la integral usando el método de Montecarlo, haciendo 100, 10,000 y 100,000 iteraciones

Ejemplo

(10,000 corridas del generador 2)

Modelación y Simulación
- Laboratorio 3 -

```
0.0-0.1: ********************************************* (1001, 10.01%)
0.1-0.2: ********************************************** (1009, 10.09%)
0.2-0.3: ********************************************* (1004, 10.04%)
0.3-0.4: ********************************************* (985, 9.85%)
0.4-0.5: ******************************************** (981, 9.81%)
0.5-0.6: ******************************************** (970, 9.7%)
0.6-0.7: ********************************************* (992, 9.92%)
0.7-0.8: *********************************************** (1030, 10.3%)
0.8-0.9: ********************************************* (1002, 10.02%)
0.9-1.0: ********************************************** (1026, 10.26%)
```

Parte 3 - Ejercicios sobre Generación de V.A P1

Tasks 1

Genere muestras aleatorias a partir de una distribución geométrica utilizando el método de transformación inversa.

1. Defina una distribución geométrica objetivo con el parámetro p=0.3
2. Implemente el método de transformación inversa para generar muestras aleatorias a partir de la distribución geométrica.
3. Genere una muestra aleatoria de tamaño 1000 a partir de la distribución geométrica.
4. Trace un histograma de la muestra generada y compárelo con el PMF teórico de la distribución geométrica.

Tasks 2

Genere muestras aleatorias a partir de una distribución de Poisson utilizando el método de rechazo.

1. Defina una distribución de Poisson objetivo con el parámetro λ = 3.
2. Elija una distribución de propuesta que sea fácil de muestrear, como una distribución uniforme o exponencial.
3. Calcule la constante C para acotar la relación entre el PMF objetivo y el PMF propuesto.
4. Implemente el método de rechazo para generar muestras aleatorias a partir de la distribución de Poisson.
5. Genere una muestra aleatoria de tamaño 1000 a partir de la distribución de Poisson.
6. Trace un histograma de la muestra generada y compárelo con el PMF teórico de la distribución de Poisson.

Tasks 3

Genere muestras aleatorias a partir de una distribución de probabilidad discreta personalizada mediante el método de aceptación-rechazo.

1. Defina una distribución de probabilidad discreta objetivo con valores y probabilidades especificados.
    a. Función = (x**2) / 55
2. Elija una distribución de propuesta con un soporte mayor que cubra el soporte de la distribución de destino.
    a. N.B: El "soporte" de una variable aleatoria o distribución de probabilidad se refiere al conjunto de valores para los cuales la variable aleatoria tiene una probabilidad distinta de cero. En otras palabras, es el rango de valores donde la distribución de probabilidad es positiva.
3. Calcule la constante C para acotar la relación entre el PMF objetivo y el PMF propuesto.
4. Implemente el método de aceptación-rechazo para generar muestras aleatorias a partir de la distribución discreta personalizada.
5. Genere una muestra aleatoria de tamaño 1000 a partir de la distribución personalizada.
6. Trace un histograma de la muestra generada y compárelo con el PMF objetivo.

Modelación y Simulación
- Laboratorio 3 -

Parte 4 - Ejercicios sobre Generación de V.A P2

Tasks 1

Suponiendo que es simple generar variables aleatorias con función de probabilidad acumulada Fi(x) para i de 1 a n, tenemos la variable aleatoria V con una función de probabilidad acumulada

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)$$

Donde p_i constituye una distribución probabilística

1. Describa un algoritmo para generar V
2. Demuestre que el algoritmo genera adecuadamente V

Hint: Probablemente le sea de utilidad el método de composición

Task 2

Escriba un programa tal que, dada una función de masa de probabilidad (p_i para i de 1 a n), proporcione como salida el valor de una variable aleatoria con esta función de masa. Haga un histograma para alguna distribución de ejemplo.

Task 3

Suponga que usted es gerente de proyecto en Inversiones Chileras S.A.; y debe elegir entre dos proyectos a realizar, la construcción de un Hotel o la construcción de de un Centro Comercial. Los flujos de caja esperados para cada proyecto son los siguientes:

Proyecto Hotel

Tiempo	Vt
0	-800
1	normal(-800,50)
2	normal(-800,100)
3	normal(-700,150)
4	normal(300,200)
5	normal(400,200)
6	normal(500,200)
7	uniform(200,8440)

Proyecto Centro Comercial

Tiempo	Vt
0	-900
1	normal(-600,50)
2	normal(-200,50)
3	normal(-600,100)
4	normal(250,150)
5	normal(350,150)
6	normal(400,150)
7	uniform(1600,6000)

Si el parámetro que quiere utilizar para comprar ambos proyectos es el Valor Presente Neto al 10% del costo de capital.

1. Realice tres simulaciones para determinar cuál de los proyectos es el más rentable. Utilice 100, 1,000 y 10,000 iteraciones

Modelación y Simulación
- Laboratorio 3 -

Semestre II - 2023

Entregas en Canvas

1. Documento de respondiendo las preguntas del Ejercicio 1
2. Jupyter Notebook o script resolviendo y respondiendo el Ejercicio 2
3. Jupyter Notebook o script resolviendo y respondiendo el Ejercicio 2

Si usan JN por favor suban tanto el ipynb y una versión en PDF por favor.

Evaluación

1. [0.45 pts] Cada Task de cada Ejercicio

Total 5 pts