2° ISTITUTO SUPERIORE "A-RUIZ"
VIA CATANIA 83 - 96011 AUGUSTA (SR)
LICEO SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE

STEFANO CARAMAGNO
CLASSE: 5BL

L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA E LE DERIVATE

ANNO SCOLASTICO: 2020-2021

Fenomeni elettrici e fenomeni magnetici sono strettamente legati tra di loro e la branca della fisica che si occupa di studiare questo legame è l'**elettromagnetismo.**

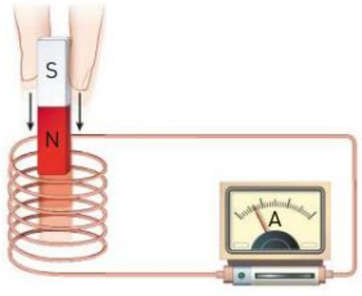
- Nel 1820, lo scienziato Oersted aveva dimostrato come un campo elettrico generasse un campo magnetico.
- Nel 1831, lo scienziato sperimentale Michael Faraday, condusse degli esperimenti per mostrare come un campo magnetico generasse corrente.

1°ESPERIMENTO

Uno degli esperimenti di Faraday, consiste nell'inserire una calamita all'interno di un solenoide; si noterà che in esso passerà corrente.

La corrente elettrica che non è prodotta da nessun generatore, in quanto il circuito ne è privo, è rilevata da un amperometro collegato ai due capi del solenoide.

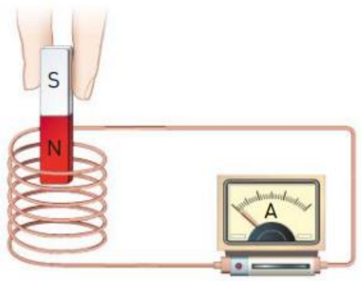
Affinché scorri corrente all'interno del solenoide, occorre che la calamità sia in movimento rispetto ad esso.



Infatti, l'amperometro segnerà un valore solo quando viene inserita o estratta da solenoide, invece non segnerà nessun valore quando essa è ferma all'interno di esso.

Il modulo campo magnetico generato dalla calamita:

- aumenta quando la calamita viene avvicinata;
- diminuisce quando essa viene allontanata.



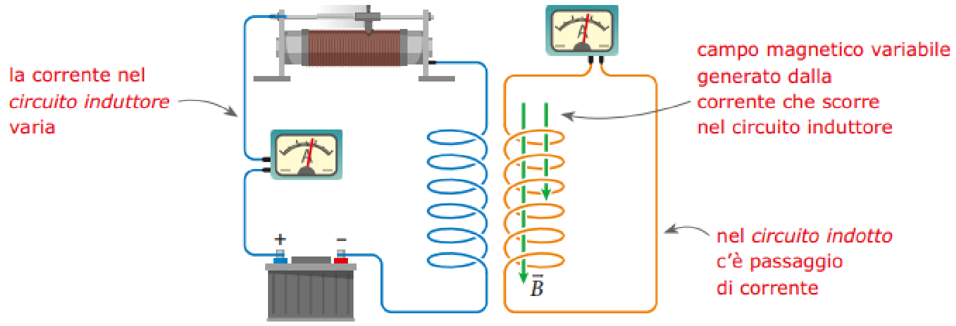
Queste variazioni del campo magnetico generano una corrente all'interno del solenoide.

Questa corrente viene chiamata "corrente indotta"

2°ESPERIMENTO

Un altro dei suoi esperimenti prevedeva come apparato sperimentale due circuiti:

- Il circuito a sinistra, detto circuito induttore, è composto da una batteria, un solenoide, un resistore variabile e un amperometro collegati in serie.
- Il circuito a destra, detto circuito indotto, è privo di batteria ed è formato solo da un solenoide e un amperometro.



Il generatore del circuito induttore genererà una corrente che a sua volta produrrà un campo magnetico in tutto lo spazio circostante, investendo sia il solenoide appartenente allo stesso circuito sia il solenoide del circuito indotto.

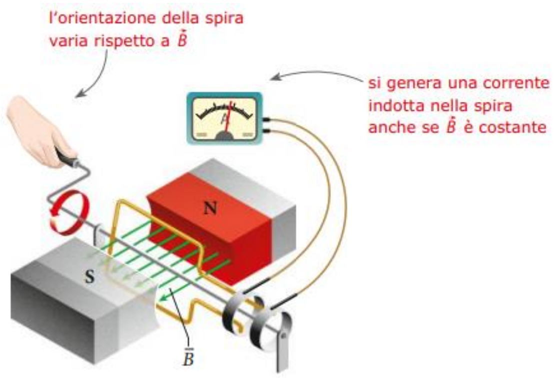
Supponendo che in una fase iniziale la resistenza del resistore variabile sia piccola, nel circuito induttore scorrerà una corrente intensa che a sua volta genererà un campo magnetico intenso.

Successivamente, supponiamo che in una fase secondaria la resistenza del resistore variabile diventi maggiore, nel circuito induttore quindi scorrerà una corrente meno intensa e di conseguenza l'intensità del campo magnetico diminuirà.

Da questo esperimento possiamo capire che se varia la corrente nel circuito induttore, varierà il campo magnetico nel circuito indotto producendo all'interno di esso corrente una corrente indotta, se essa però rimane costante, nel circuito indotto non passerà alcuna corrente.

3°ESPERIMENTO

Successivamente Faraday suppose che la corrente indotta avrebbe potuto essere prodotta anche dal movimento del circuito o parte di esso rispetto al magnete e lo dimostrò con un terzo esperimento.



Faraday osservò che per generare corrente indotta nel circuito, basta che vari il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito.

Per modificare il flusso, oltre a modificare l'intensità del campo magnetico, possiamo:

- allargare o restringere la superficie, cioè cambiare la sua area S;
- far variare l'orientazione della superficie rispetto al campo magnetico.

CONCLUSIONE DI QUESTI TRE ESPERIMENTI

Faraday con i primi due esperimenti arrivò alla conclusione che: <u>in un circuito si genera una corrente indotta ogni volta che, il campo magnetico in cui esso è immerso varia.</u>

Con il terzo esperimento dimostrò che si produce corrente indotta ogni volta che:
<u>il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata da un circuito elettrico è variabile nel tempo.</u>

Quindi in tutti e tre gli esperimento abbiamo una variazione di flusso.

Il fenomeno secondo cui si crea tale corrente è detto **Induzione Elettromagnetica**.

Attualmente esso è alla base del funzionamento dei comuni motori elettrici, alternatori, generatori elettrici, trasformatori, altoparlanti magnetodinamici, testine fonografiche, microfoni dinamici, pick-up per chitarra magnetici, ecc.

La legge fisica che descrive questo fenomeno è la legge di Faraday-Neumann-Lenz

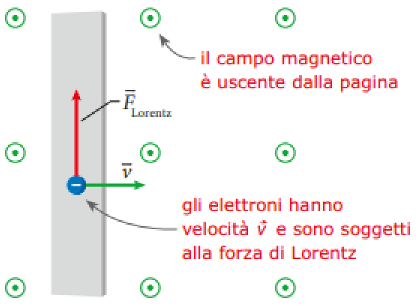
LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

Consideriamo una sbarra metallica in un campo magnetico costante nel tempo e uniforme nello spazio, essa si muoverà verso destra, in direzione perpendicolare alla propria lunghezza.

Gli elettroni della sbarra risentono della forza di Lorentz ($\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{e}\text{v} \times \vec{B}$) e si spostano verso l'alto, accumulandosi all'estremità superiore che diventa elettricamente negativa, mentre l'estremità inferiore diventa positiva.

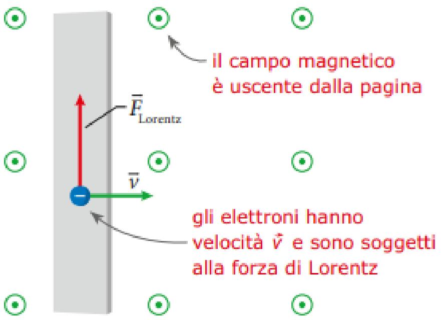
A mano a mano che le cariche di diverso segno si separano tra le due estremità all'interno della sbarra si crea un campo elettrico orientato verso l'alto di intensità crescente. G

Gli elettroni subiscono quindi una forza elettrica ($\vec{F}_{\text{E}} = -e\vec{E}$) verso il basso che contrasta la forza di Lorentz. Quando i moduli delle due forze arrivano ad essere uguali e opposti le due forze di compenseranno.



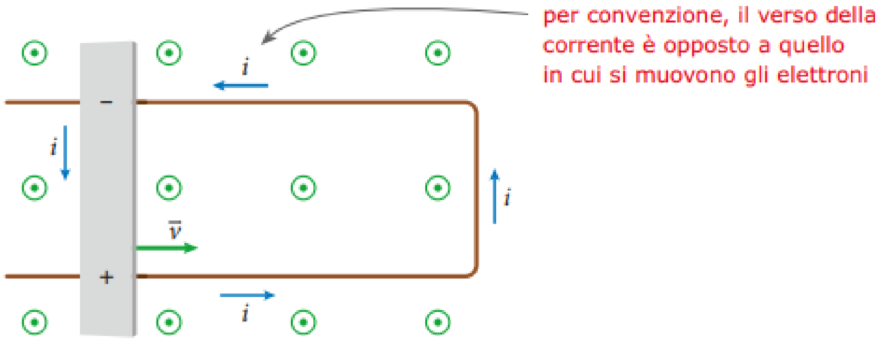
Il sistema arriverà ad uno stato di equilibrio, quindi la differenza di potenziale elettrico tra le due estremità rimane costante.

Per creare corrente si crea un circuito dove si inserisce la sbarra metallica, in modo che si libera di spostarsi verso destra. Gli elettroni che si spostano verso l'alto adesso non si accumulano più all'estremità superiore, ma si muovono lungo il filo, andando a dare origine a una corrente.



Questa sbarra conduttrice in movimento in un campo magnetico può essere vista definita come un generatore di forza elettromotrice.

La corrente che si genera in questo circuito è una corrente indotta, legata ad una variazione di flusso che diminuisce quando la sbarra si muove verso destra e restringe la superficie del circuito.



Se in un circuito scorre corrente indotta, per la prima legge di Ohm, in quel circuito agisce una forza elettromotrice indotta:

$$f_{em} = R\,i.$$

Faraday dopo aver scoperto il fenomeno dell'Induzione Elettromagnetica giunse ad affermare che: <u>la forza elettromotrice di un circuito è tanto più maggiore quanto più rapida la variazione di flusso.</u>

La formulazione matematica di questo risultato è dovuta al fisico tedesco Franz Neumann e per questo la legge dell'induzione elettromagnetica è ricordata come **Legge di Faraday-Neumann**.

forza elettromotrice indotta (V)

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$$

variazione del flusso di campo magnetico (Wb)

intervallo di tempo (s)

Questa formula mette in relazione la forza elettromotrice con la rapidità con cui varia il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito.

Confrontando le due formule si ricava la corrente indotta:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{1}{R}\,\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}.$$

La formula della legge di Faraday-Neumann, fornisce il valore della forza elettromotrice media. Questa grandezza, tralasciando il suo segno, è data dal rapporto incrementale, cioè il rapporto tra la variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie del circuito e la variazione del corrispondente tempo.

Per ottenere il valore istantaneo occorre calcolare il limite del rapporto incrementale con la variazione del tempo che tende a zero:

$$f_{em} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}\right],$$

o anche, poiché il limite al secondo membro (a parte il segno meno) la derivata rispetto al tempo del flusso:

$$f_{em} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t}.$$

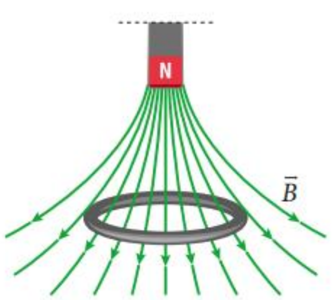
Quindi, la forza elettromotrice istantanea è la derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico, cambiata di segno.

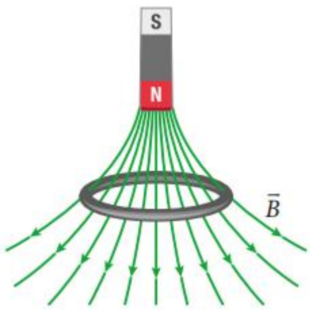
Il segno “meno” della Legge di Faraday-Neumann è sostanzialmente la **Legge di Lenz,** che descrive in che verso la corrente indotta scorre all’interno del circuito.

Questa è state enunciata dal russo Emilij K.Lenz nel 1834 e afferma che: <u>il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera.</u>

Per spiegare questa legge, prendiamo in considerazione una spira e un magnete, quando il magnete si avvicina alla spira, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie aumenta, viceversa quando si allontana, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie diminuisce.

Il flusso è direttamente proporzionale alle linee di campo che attraversano la spira, quindi quando il magnete si avvicina alla spira, maggiori saranno le linee di campo, quando il magnete si allontana dalla spira, minori saranno le linee di campo.

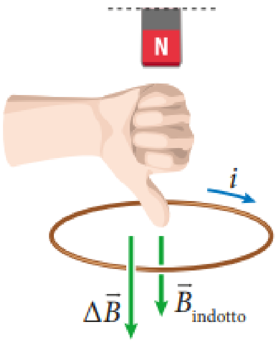




Questa variazione di campo magnetico genererà all’interno della spira una corrente indotta che a sua volta produrrà un campo magnetico indotto, quindi avremo la presenza di due campi magnetici:

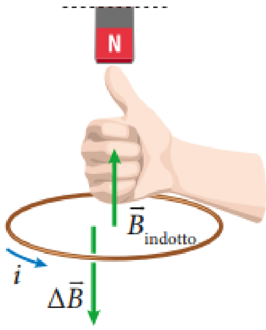
- il campo magnetico esterno, generato dal magnete, che crea la variazione di flusso;
- il campo magnetico indotto, generato dalla corrente indotta.

La domanda è: qual è il verso della corrente indotta nella spira?



Supponiamo che la corrente indotta circoli in senso orario, il campo magnetico indotto quindi sarebbe orientato verso il basso per la regola della mano destra, ma anche il campo magnetico esterno e quindi anche la variazione del flusso del campo magnetico puntano verso il basso.

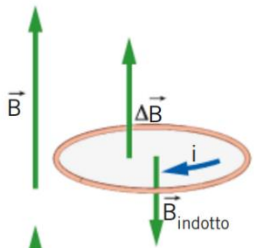
Il campo magnetico indotto e il campo magnetico esterno si andranno a sommare facendo si che, la variazione di flusso aumenti ancora di più, di conseguenza scorrerà più corrente e quindi aumenterà il campo magnetico indotto e la corrente indotta aumenterebbe all'infinito.

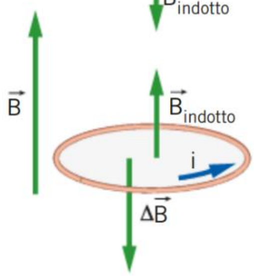


Questo non è possibile, va contro le leggi della conservazione dell'energia.

In realtà, la corrente indotta scorre in senso antiorario, di conseguenza il campo magnetico indotto punta verso l'alto e contrasta la variazione di flusso che da origine alla corrente indotta.

Quando il magnete si avvicina alla spira, la corrente all'interno di essa, scorre in un senso, quando si allontana da essa scorre nel verso opposto.





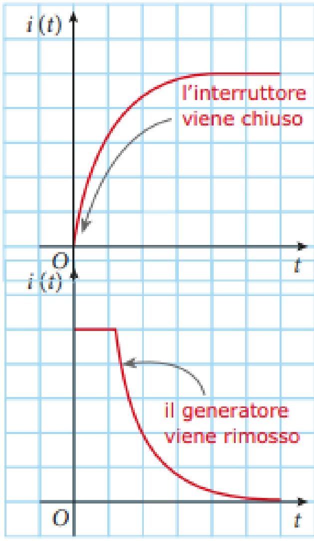
- Una corrente indotta, causata da un aumento della variazione del flusso del campo magnetico esterno, genera un campo magnetico indotto, che ha verso opposto a quello del campo magnetico esterno
- Una corrente indotta, causata da una diminuzione della variazione del flusso del campo magnetico esterno, genera un campo magnetico indotto, che ha lo stesso verso del campo magnetico esterno.

AUTOINDUZIONE

In un circuito si produce induzione elettromagnetica non solo con un campo magnetico esterno, ma anche quando vi è una variazione di corrente, non quando questa è costante.

Quindi: <u>la variazione della corrente in un circuito elettrico genera una forza elettromotrice indotta nel circuito stesso.</u>

Un caso di variazione di corrente è l'apertura e la chiusura del circuito.



Se chiudiamo l'interruttore di un circuito, l'intensità di corrente non raggiunge all'istante il suo valore regime, ma si avvicina a esso gradualmente.

Questo andamento è dovuto all'autoinduzione. Infatti:

- la corrente cresce da zero e crea un campo magnetico via via più intenso;
- il flusso del campo attraverso la superficie delimitata dal circuito aumenta e dà origine a una corrente indotta, che per la legge di Lenz contrasta il suo aumento;
- la corrente indotta percorre il circuito assieme alla corrente sospinta dal generatore, ma in verso opposto, e quindi rallenta la crescita della corrente totale.

In modo analogo, se si apre il circuito, la corrente nel filo non si annulla subito, ma diminuisce gradualmente: l'apertura dell'interruttore fa diminuire il flusso del campo magnetico; di conseguenza, la corrente indotta va nello stesso verso di quella che prima percorreva il circuito chiuso e la durata della corrente complessiva si prolunga.

Il campo magnetico generato dall'intensità di corrente produce un flusso del campo magnetico direttamente proporzionale alla corrente stessa:

flusso di campo magnetico (Wb)

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = Li$$

induttanza (H)

intensità di corrente (A)

La costante L prende il nome di induttanza o coefficiente di autoinduzione del circuito, nel sistema internazionale è misurata in Wb/A. Questa unità di misura è detta henry (H)

L'induttanza, una grandezza scalare, nonché la terza caratteristica di un circuito, dopo la resistenza e la capacità che sono caratteristiche rispettivamente di conduttori e condensatori.

LE DERIVATE

Da un punto di vista intuitivo possiamo definire le derivate in due modi:

- Pendenza di una funzione in un suo punto (significato geometrico della derivata; Leibnitz).
- Rapidità di variazione di una funzione in un suo punto (velocità istantanea; Newton).

RAPPORTO INCREMENTALE

Sia $y=f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo (a, b) e siano x_0 (punto non isolato) e x_0+h due punti del dominio della funzione.

Chiamiamo:

- **incremento della variabile x** la differenza tra le ascisse dei punti

$P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0+h, f(x_0+h))$:

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$

- **incremento della funzione f,** la differenza tra le ordinate dei punti

$P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0+h, f(x_0+h))$:

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

- **rapporto incrementale,** il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad con \quad \Delta x \neq 0$$

DERIVABILITÀ

- *In un punto:*

Una funzione f si dice derivabile in un punto di ascissa x_0 se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale, cioè se:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)}$$

- *In un intervallo:*

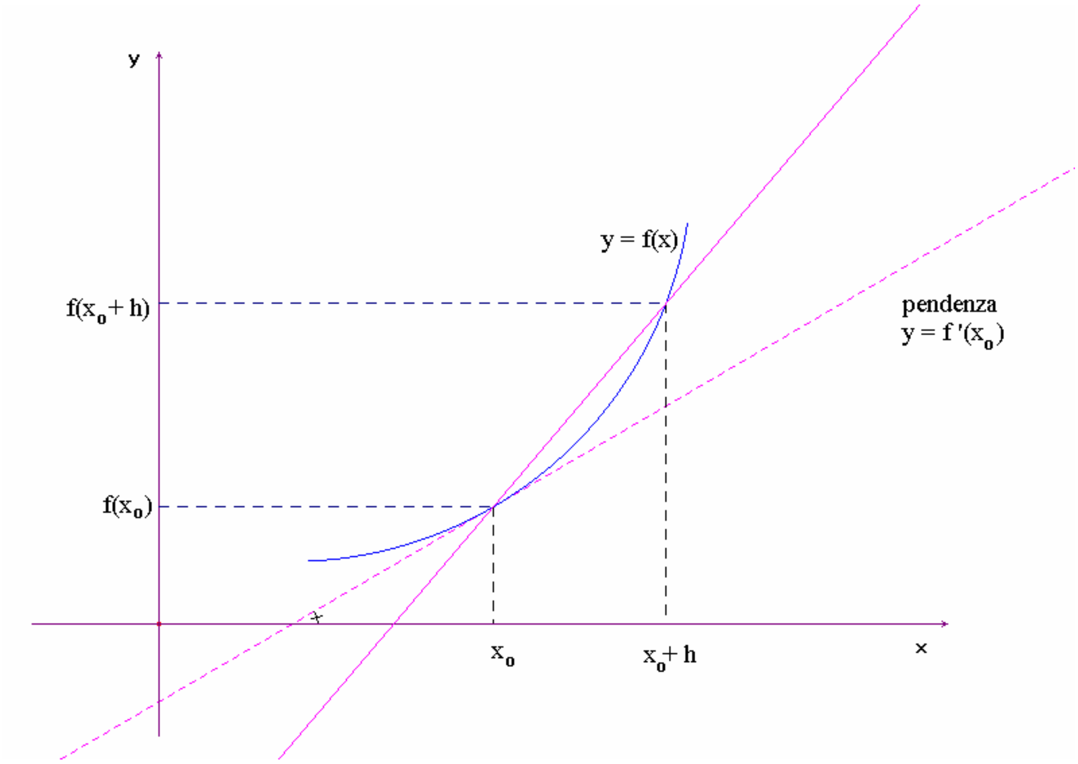
La funzione f è derivabile nell'intervallo (a,b) se essa è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

Affinché una funzione f ammetta derivata f' in un punto x_0 è necessario che:

- la funzione f esista in x_0
- esistano finite e uguali la derivata destra e sinistra in x_0.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Dalla definizione di derivata è facilmente intuibile che $f'(x_0)$ sia la **pendenza della retta tangente in x_0**; infatti la derivata è il limite del rapporto incrementale di f, cioè della pendenza del segmento congiungente i punti $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



La derivata di una funzione in un punto P rappresenta pertanto **il coefficiente angolare m della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa x_0.
Calcolato m, possiamo scrivere l'equazione della tangente in $P(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y - f(x_0) = m(x - x_0)}$$

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se esiste la derivata $f'(x_0)$.

Quindi ricapitolando, se una funzione è derivabile in x_0:

1. la funzione è definita in un intorno del punto x_0;
2. esiste il limite del rapporto incrementale, relativo a x_0, per Δx che tende a 0, cioè esistono il limite destro e il limite sinistro di tale rapporto e tali limiti coincidono;
3. questo limite è un numero finito.

DERIVATE E SCIENZE APPLICATE

Il rapporto incrementale

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

si dice anche **tasso di variazione media** della f rispetto alla variabile x.

Perciò la derivata di f si dice **velocità** o **tasso di variazione istantaneo** di f rispetto alla variabile x.

La derivata è, infatti, lo strumento per eccellenza per **quantificare il cambiamento (istantaneo) di una funzione f(x) rispetto ad x,** e perciò è di importanza fondamentale sia nella matematica che nelle scienze applicate.

CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Esaminiamo il legame che vi è tra continuità e derivabilità. Ci sono dei punti in cui una funzione è continua, ma non è derivabile, ma non esistono punti in una funzione è derivabile, ma non continua. Infatti il teorema afferma che:

Se una funzione f(x) è derivabile nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche continua.

Per quanto abbiamo detto, possiamo affermare che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni continue. *Esistono funzioni continue che non sono derivabili, mentre le funzioni derivabili sono sempre continue.*

LE CONDIZIONI DI DERIVABILITÀ

1. Una funzione f(x) definita nell'intervallo (a,b) è una funzione **derivabile in un punto x** se esiste il limite del rapporto incrementale in x per h tendente a zero.

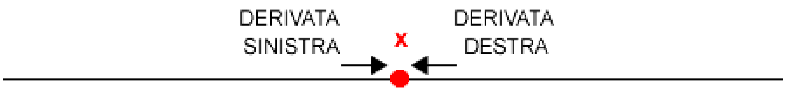
2. Una funzione è **derivabile in un intervallo aperto (a,b)** se è derivabile in ogni punto x compreso tra gli estremi, a e b esclusi, ossia x ∊]a,b[.

3. Una funzione è **derivabile in un intervallo chiuso [a,b]** se è derivabile in ogni punto x ∊ [a,b] e se esiste la derivata destra nel punto a e la derivata sinistra nel punto b.

I punti dove la funzione non è derivabile sono detti **punti singolari**.

LA DERIVATA SINISTRA E LA DERIVATA DESTRA

Può comunque accadere che la funzione non sia derivabile nel punto x, ma lo sia negli altri punti a sinistra o a destra di x.



In questi casi i valori finiti dei limiti sono detti **derivata sinistra** e **derivata destra** di x.

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **DERIVATA SINISTRA**

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **DERIVATA DESTRA**

Qual è la differenza?

Nella derivata sinistra l'incremento Δx tende a 0 da sinistra ed è un numero negativo $\Delta x<0$.

Nella derivata destra, invece, l'incremento Δx tende a 0 da destra ed è un numero positivo $\Delta x>0$.

<u>Se una funzione è derivabile nel punto x allora la derivata destra e sinistra esistono e hanno lo stesso valore.</u>

$$f'(x) = f'_{-}(x) = f'_{+}(x)$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Abbiamo definito la derivata come limite del rapporto incrementale; ora poniamo il problema del caso in cui questo limite NON esiste, ovvero i punti x_0 in cui NON riusciamo a calcolare il limite, e quindi in cui la derivata NON esiste. Tali punti si dicono **punti di non derivabilità**.

Si ricorda che una funzione $y = f(x)$ si dice **derivabile in un punto** se il risultato della sua funzione derivata è definito nel punto ed assume un valore FINITO.

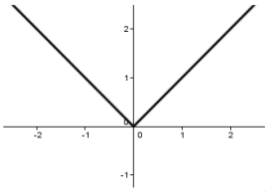
Possiamo verificare che una funzione NON è derivabile in due modi:

- Osservando che tale punto NON appartiene al dominio **della sua derivata** (ma deve appartenere al dominio **della funzione**: se la funzione non esiste non ha neppure senso chiedersi di quanto è inclinata o con quale velocità sta aumentando o diminuendo). La derivata della funzione non esiste quindi in $x = x_0$, che è quindi un punto di non derivabilità. Per capire di quale tipo di punto si tratti studiamo il limite $x \to x_0^{\pm}$ della **derivata**.

- Se **il limite del rapporto incrementale della funzione** (cioè la derivata) non è definito in quel punto, ad esempio perché il suo limite sinistro ($h \to 0^+$) e quello destro ($h \to 0^-$) non coincidono.

Abbiamo definito **tre tipologie di punti di non derivabilità:**

PUNTO ANGOLOSO



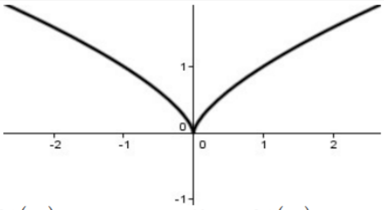
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

Esempio: $f(x) = |x|$

Sia f(x) una funzione continua e non derivabile in x_0 . In x_0 c'è un **punto angoloso** se esistono $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ ma $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$
e almeno uno dei due limiti è finito.

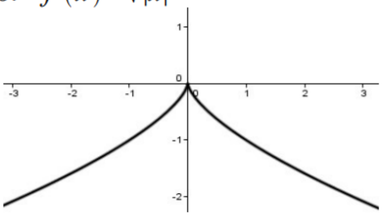
Geometricamente vuol dire che esistono due tangenti diverse in x_0 , una destra ed una sinistra.

CUSPIDE



$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

Esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$



$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

Esempio: $f(x) = -\sqrt{|x|}$

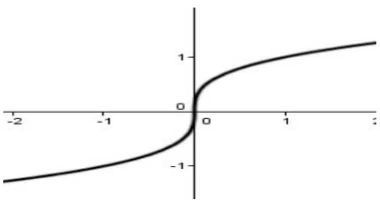
Sia f(x) una funzione continua e non derivabile in x_0 . In x_0 c'è una **cuspide** se esistono

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

sono entrambi infiniti e di segno opposto.

Geometricamente vuol dire che che in x_0 c'è una tangente verticale.

FLESSO A TANGENTE VERTICALE



$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$$

Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Sia f(x) una funzione continua e non derivabile in x_0 . In x_0 c'è una **flesso a tangente verticale** se esistono

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

sono entrambi infiniti e hanno lo stesso segno.

Geometricamente vuol dire che che in x_0 c'è una tangente verticale.

OSTACOLI ED ERRORI DI CALCOLO

Per quel che riguarda il concetto di derivata gli errori più frequenti, sono:

- di tipo tecnico;
- di tipo semantico.

Gli errori di tipo tecnico si devono alla poca manualità con i limiti ed i relativi metodi di risoluzione.

Data, ad esempio, la funzione $y = \sqrt{x-4}$

il calcolo della derivata utilizzando la definizione di limite del rapporto incrementale porta a considerare il limite $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}}{h}$

che può generare delle difficoltà di calcolo, in quanto esso si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Tale limite può essere calcolato moltiplicando numeratore e denominatore per la quantità

$$\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}$$

Un altro errore comune, è quello di **applicare in modo meccanico le regole di derivazione**, senza valutare preliminarmente l'intervallo di definizione della derivata.

Ciò può portare erroneamente ad affermare che la derivata di una funzione esiste sempre, anche quando vi sono dei punti in cui essa non è definita.

Gli errori semantici, invece, sono legati all'errata interpretazione del significato di derivata. Ad esempio, spesso **c'è confusione tra il concetto di continuità e derivabilità**. Si potrebbe pensare che se una funzione è continua, allora è derivabile. I due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale potrebbero esistere ma essere diversi tra loro. Così si potrebbe erroneamente prendere come valore della derivata nel punto uno dei due valori trovati.

Un classico controesempio in tal caso è lo studio della funzione del valore assoluto $f(x) = |x|$ nel punto di ascissa x = 0.

I limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in tale punto valgono rispettivamente +1 e -1, dunque per x=0 la derivata del valore assoluto non esiste.