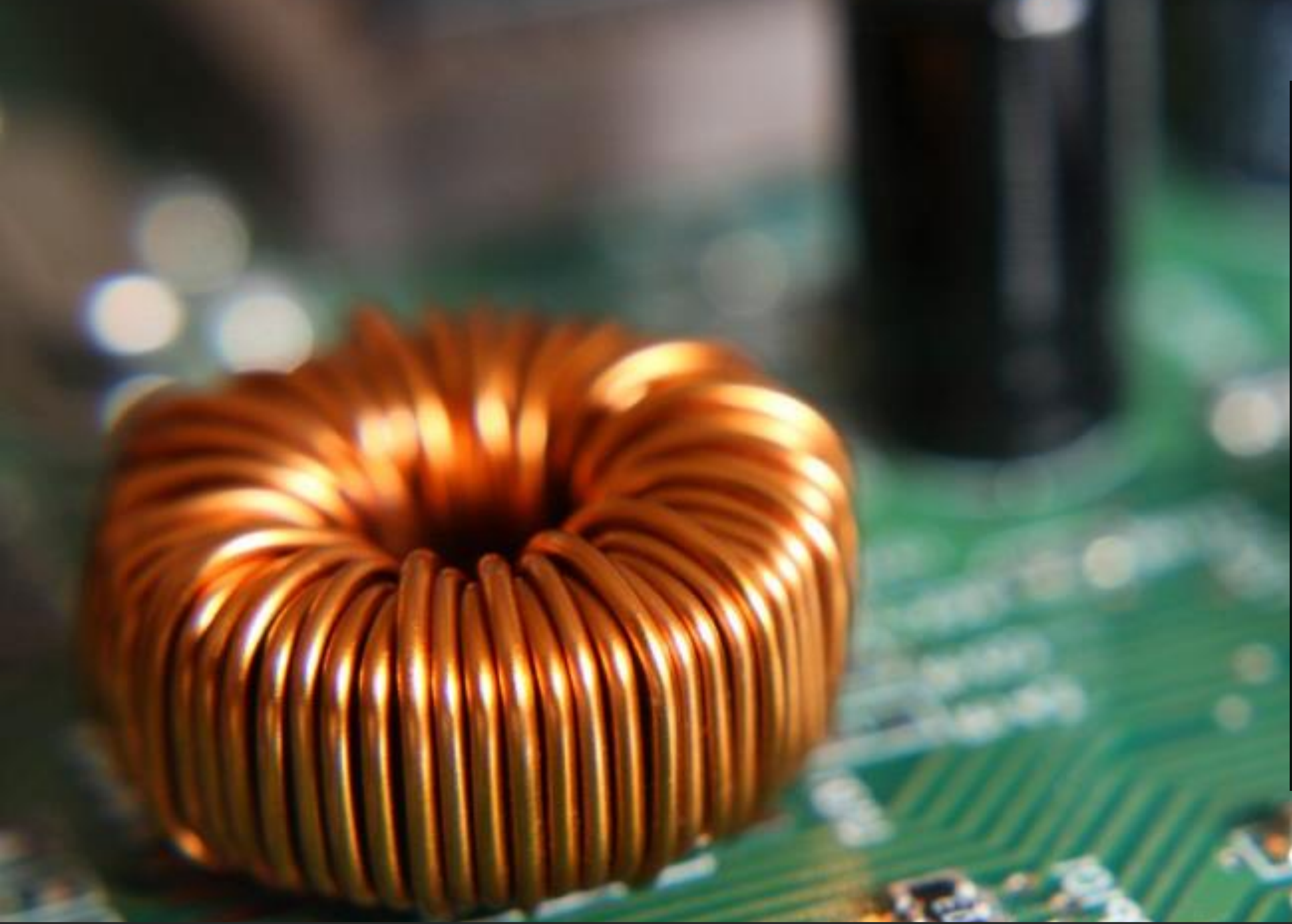
II Istituto Superiore “Arangio Ruiz”
LICEO SCIENTIFICO Opzione SCIENZE APPLICATE



L’induzione elettromagnetica e le derivate

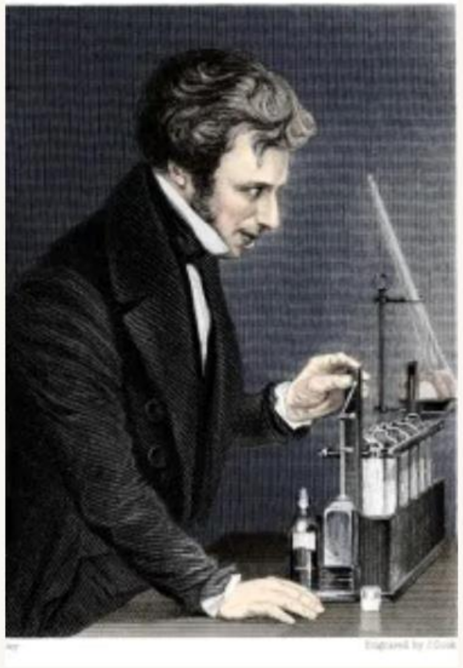
STEFANO CARAMAGNO
CLASSE V BL
ANNO SCOLASTICO 2020-2021

Tutor: Prof. Franco Carriglio

L’induzione Elettromagnetica

Fenomeni elettrici e fenomeni magnetici sono strettamente legati tra di loro e la branca della fisica che si occupa di studiare questo legame è l’**elettromagnetismo.**

- Nel 1820, lo scienziato Oersted aveva dimostrato come un campo elettrico generasse un campo magnetico.
- Nel 1831, lo scienziato sperimentale Michael Faraday, condusse degli esperimenti per mostrare come un campo magnetico generasse corrente.



Michael Faraday (1791-1867). Chimico e fisico britannico

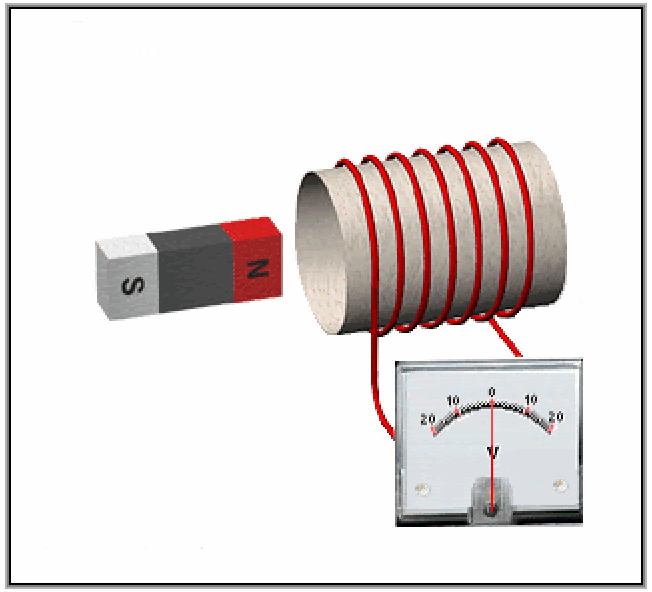
Esperimento 1: calamita in un solenoide

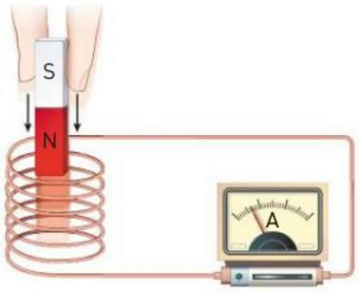
Il campo magnetico generato dalla calamita:

- aumenta quando la calamita viene avvicinata;
- diminuisce quando essa viene allontanata.

Queste variazioni del campo magnetico generano una corrente all'interno del solenoide.

Questa corrente viene chiamata “corrente indotta”

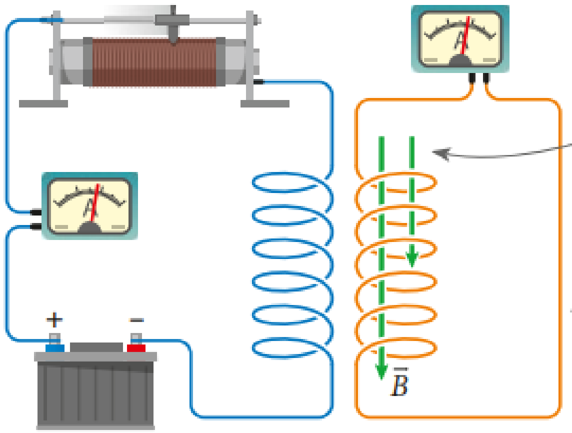




Affinché scorri corrente all'interno del solenoide, occorre che la calamità sia in movimento rispetto ad esso.

Esperimento 2: circuito induttore e indotto

- Il circuito a sinistra, detto circuito induttore, è composto da una batteria, un solenoide, un resistore variabile e un amperometro collegati in serie.
- Il circuito a destra, detto circuito indotto, è privo di batteria ed è formato solo da un solenoide e un amperometro.



Il generatore del circuito induttore genera una corrente che produce un campo magnetico, sia sul solenoide dello stesso circuito sia sul solenoide del circuito indotto, in quanto vicino ad esso.

Se in fase iniziale la resistenza del resistore variabile è piccola, nel circuito induttore scorrerà una corrente intensa che a sua volta genererà un campo magnetico intenso.

Se in una fase successiva, la resistenza del resistore variabile diventa maggiore, nel circuito induttore scorrerà una corrente meno intensa e quindi l'intensità del campo magnetico diminuirà.

Conclusioni:

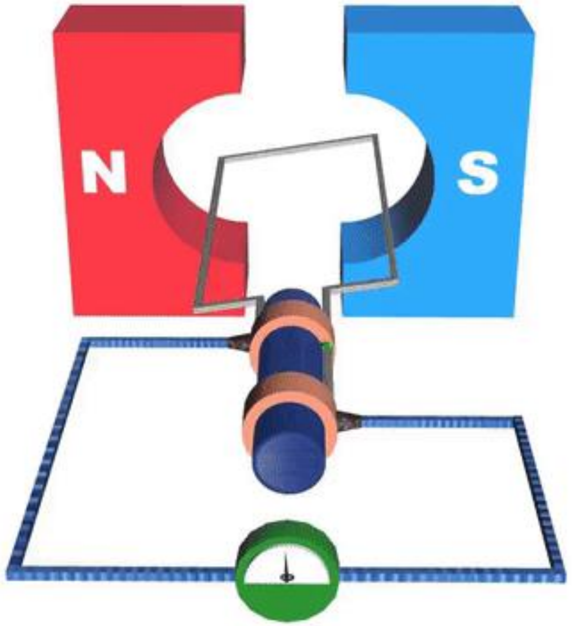
Se varia la corrente nel circuito induttore, varierà il campo magnetico nel circuito indotto producendo all'interno di esso una corrente indotta.

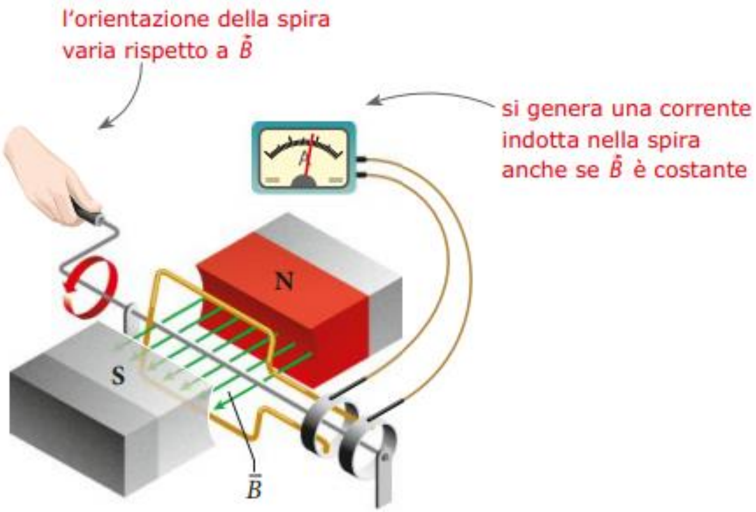
Se nel circuito induttore la corrente rimane costante, nel circuito indotto non passerà alcuna corrente.

Esperimento 3: movimento del circuito

Faraday suppose che la corrente indotta poteva essere prodotta anche dal movimento del circuito o parte di esso rispetto al magnete.

Egli osservò che per generare corrente indotta nel circuito, basta che vari il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito.





Per modificare il flusso, oltre a modificare l'intensità del campo magnetico, possiamo:

- allargare o restringere la superficie, cioè cambiare la sua area S;
- far variare l'orientamento della superficie rispetto al campo magnetico.

Conclusione Esperimenti

Con i primi due esperimenti: in un circuito si genera una corrente indotta ogni volta che, il campo magnetico in cui esso è immerso varia.

Con il terzo esperimento: flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata da un circuito elettrico è variabile nel tempo.

VARIAZIONE DI FLUSSO

Il fenomeno secondo cui si crea tale corrente è detto **Induzione Elettromagnetica**.

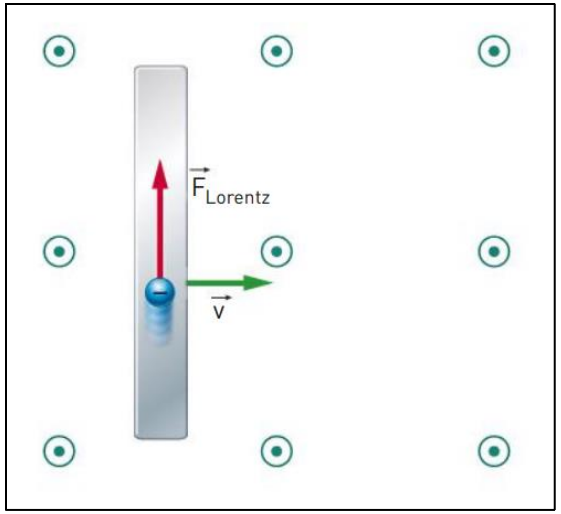
La legge fisica che descrive questo fenomeno è detta **legge di Faraday-Neumann-Lenz**

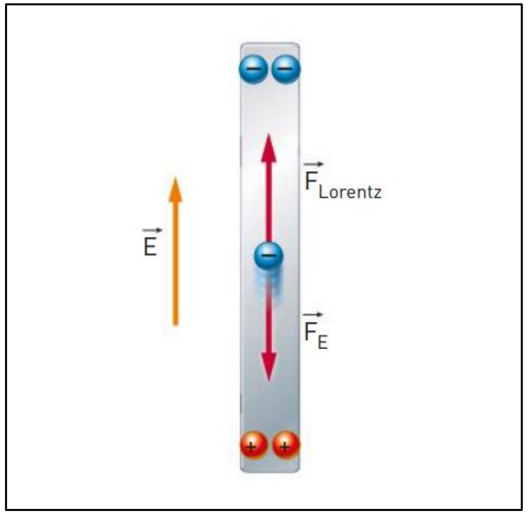
Esempi di applicazioni:
motori elettrici, alternatori, generatori elettrici, trasformatori, altoparlanti magnetodinamici, testine fonografiche, microfoni dinamici, pick-up per chitarra magnetici, ecc.

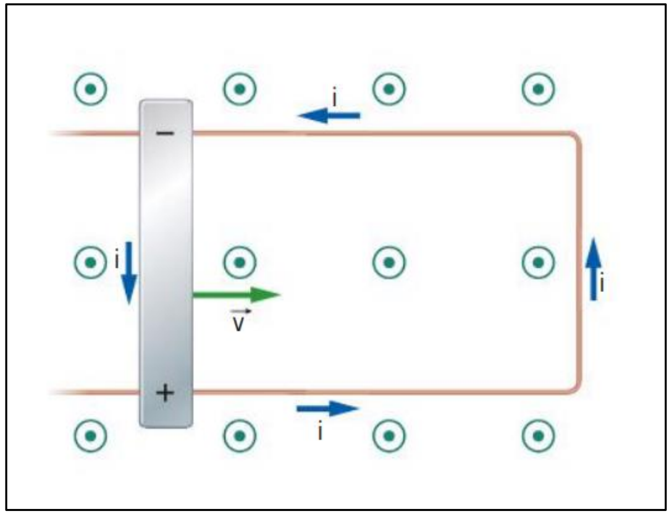
Generazione di una corrente indotta

Moto di una sbarra metallica in un campo magnetico

una sbarra conduttrice in moto in un campo magnetico si comporta come un generatore di forza elettromotrice.







Legge di Faraday-Neumann (1/2)

Se R è la resistenza complessiva di un circuito in cui scorre una corrente indotta di intensità i, si definisce la forza elettromotrice indotta f_{em} tramite la relazione:

$$\boxed{f_{em} = R\, i.}$$

<u>la forza elettromotrice di un circuito è tanto più maggiore quanto più rapida la variazione di flusso</u>

forza elettromotrice indotta (V)

variazione del flusso di campo magnetico (Wb)

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$$

intervallo di tempo (s)

Questa formula mette in relazione la forza elettromotrice con la rapidità con cui varia il flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito.

Legge di Faraday-Neumann (2/2)

Confrontando le due formule si ricava la corrente indotta:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}.$$

La formula della legge di Faraday-Neumann, fornisce il valore della forza elettromotrice media

Per ottenere il valore istantaneo occorre calcolare il limite del rapporto incrementale con la variazione del tempo che tende a zero

$$f_{em} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}\right],$$

poiché il limite al secondo membro (a parte il segno meno) è la derivata rispetto al tempo del flusso $\Phi(\vec{B})$:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

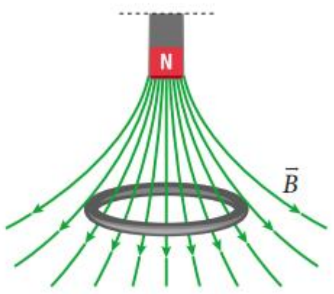
La forza elettromotrice istantanea è la derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico, cambiata di segno.

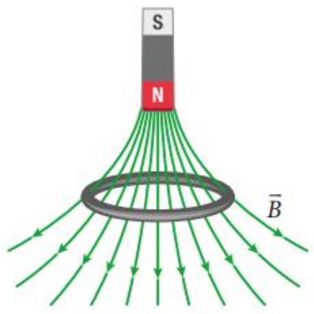
Legge di Lenz (1/2)

Il segno “meno” della Legge di Faraday-Neumann è sostanzialmente la **Legge di Lenz,** che descrive in che verso la corrente indotta scorre all’interno del circuito.

Il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera.

Per spiegare la legge, prendiamo una spira e un magnete, quando il magnete si avvicina alla spira, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie aumenta, viceversa quando si allontana, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie diminuisce.



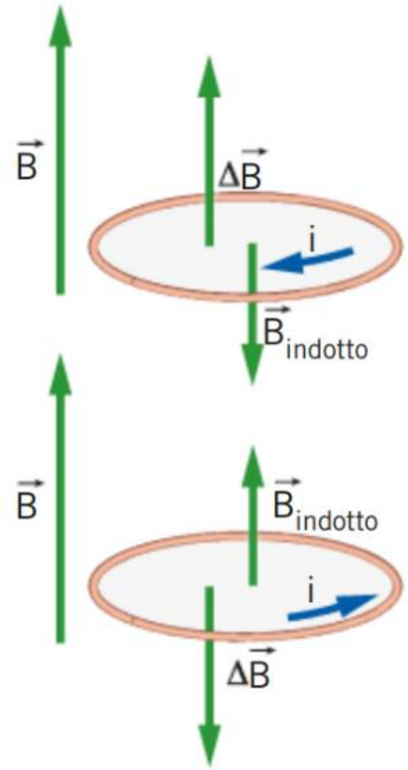


Legge di Lenz (2/2)

la corrente indotta scorre in senso antiorario, di conseguenza il campo magnetico indotto punta verso l'alto e contrasta la variazione di flusso che da origine alla corrente indotta.

Quando il magnete si avvicina alla spira, la corrente all'interno di essa, scorre in un senso, quando si allontana da essa scorre nel verso opposto

- Una corrente indotta, causata da un **aumento** della variazione del flusso del campo magnetico esterno, genera un campo magnetico indotto, che ha **verso opposto** a quello del campo magnetico esterno
- Una corrente indotta, causata da una **diminuzione** della variazione del flusso del campo magnetico esterno, genera un campo magnetico indotto, che ha lo **stesso verso** del campo magnetico esterno.

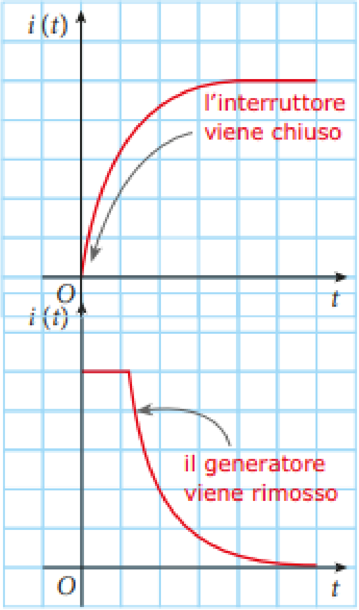


Autoinduzione

la variazione della corrente in un circuito elettrico genera una forza elettromotrice indotta nel circuito stesso.

Un caso di variazione di corrente è l'apertura e la chiusura del circuito.

- la corrente cresce da zero e crea un campo magnetico via via più intenso;
- il flusso del campo attraverso la superficie delimitata dal circuito aumenta e dà origine a una corrente indotta, che per Lenz contrasta il suo aumento;
- la corrente indotta percorre il circuito assieme alla corrente sospinta dal generatore, ma in verso opposto, e quindi rallenta la crescita della corrente totale.



Il campo magnetico generato dall'intensità di corrente produce un flusso del campo magnetico direttamente proporzionale alla corrente stessa:

flusso di campo magnetico (Wb)

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = Li$$

induttanza (H)

intensità di corrente (A)

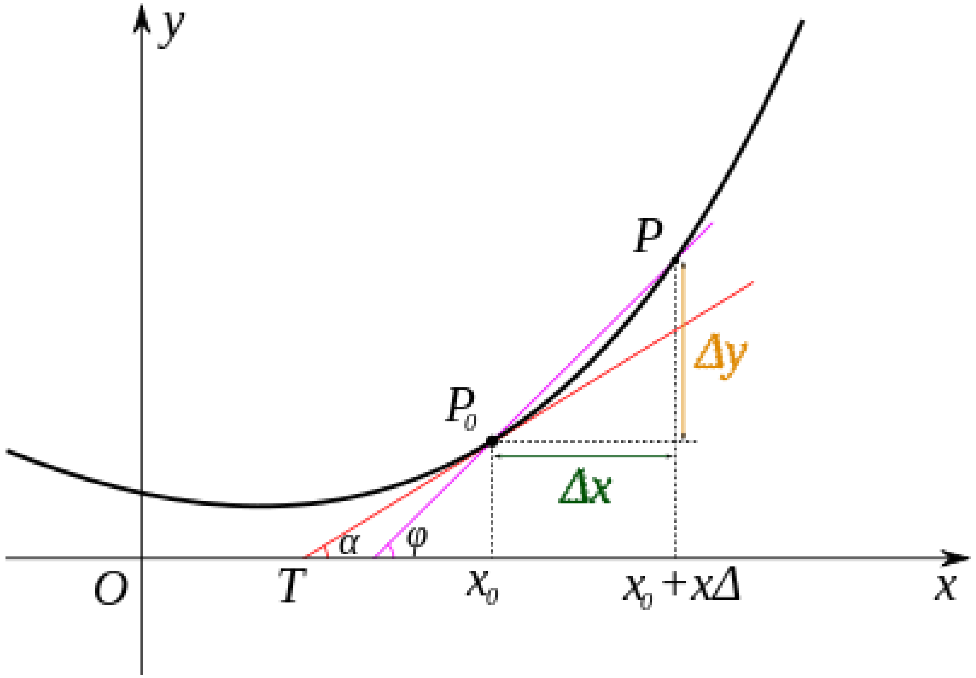
Le Derivate: definizione

Velocità istantanea (Newton)

Rapidità di variazione di una funzione in un suo punto

Significato geometrico (Leibnitz)

Pendenza di una funzione in un suo punto



Rapporto Incrementale

Sia $y=f\ (x)$ una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo (a, b) e siano x_0 (punto non isolato) e x_0+h due punti del dominio della funzione.

- **incremento della variabile x** la differenza tra le ascisse dei punti $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0+h, f(x_0+h))$:

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$

- **incremento della funzione f,** la differenza tra le ordinate dei punti $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0+h, f(x_0+h))$:

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

- **rapporto incrementale,** il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \textit{con} \quad \Delta x \neq 0$$

Condizione di Derivabilità

IN UN PUNTO

Una funzione f si dice derivabile in un punto di ascissa x_0 se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale, cioè se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

IN UN INTERVALLO

La funzione f è derivabile nell'intervallo (a,b) se essa è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

Affinché una funzione f sia derivabile in un punto x_0 è necessario che:

- la funzione f esista in x_0
- esistano finite e uguali la derivata destra e sinistra in x_0.

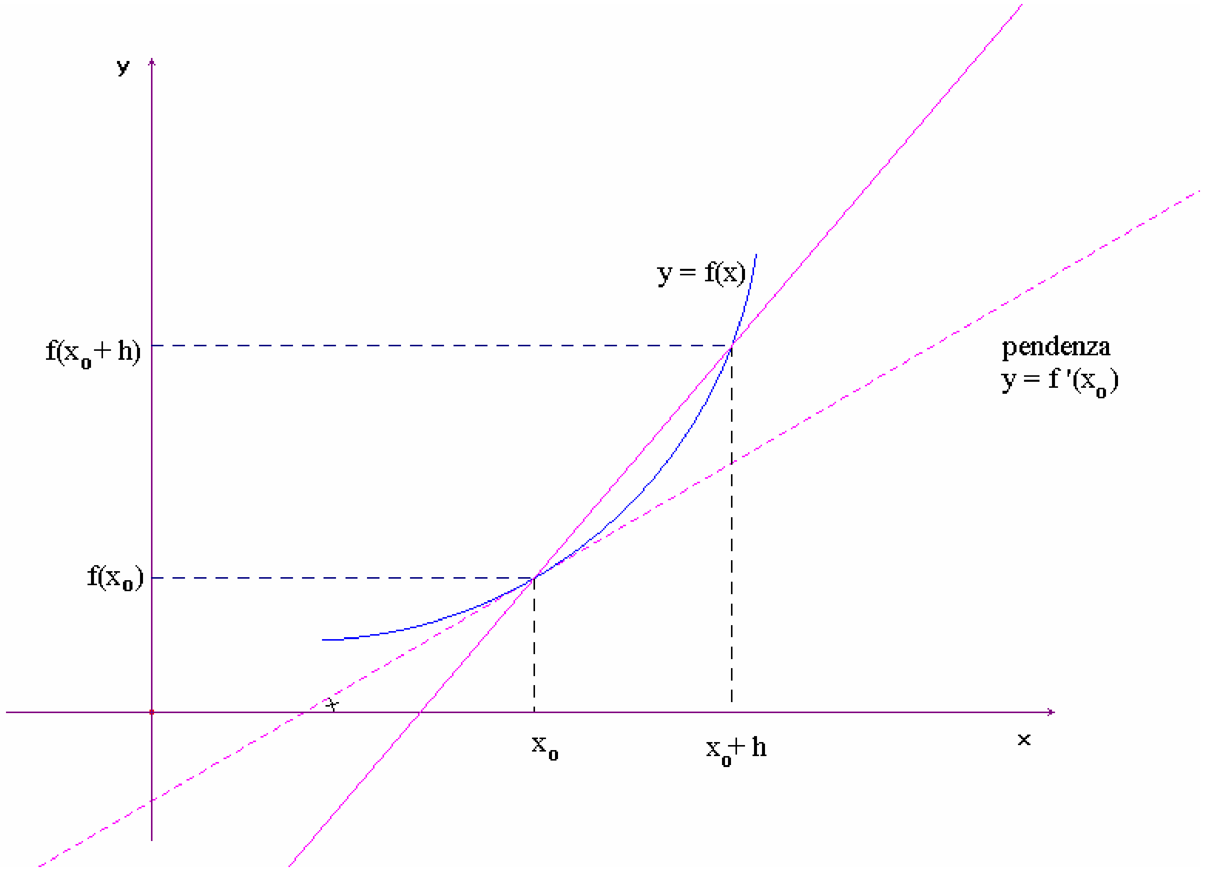
Significato geometrico 1/2

La derivata è il limite del rapporto incrementale di f, cioè della pendenza del segmento congiungente i punti

$P(x_0, f(x_0))$ e

$Q(x_0+h, f(x_0+h))$.

Pertanto $f'(x_0)$ è la **pendenza della retta tangente in x_0**



Significato geometrico 2/2

La derivata di una funzione in un punto P rappresenta pertanto **il coefficiente angolare m della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa x_0.

Calcolato m, possiamo scrivere l'equazione della tangente in $P(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y - f(x_0) = m(x-x_0)}$$

Una funzione è derivabile in un punto x_0

se esiste la derivata $f'(x_0)$.

Quindi, se una funzione è derivabile in x_0:

1. la funzione è definita in un intorno di x_0;
2. esiste il limite del rapporto incrementale, relativo a x_0, per Δx che tende a 0, cioè esistono i limiti dx e sx di tale rapporto e sono uguali;
3. questo limite è un numero finito.

Derivate e Scienze applicate

Il rapporto incrementale

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Viene anche chiamato **TASSO DI VARIAZIONE MEDIA** della f rispetto alla variabile x.

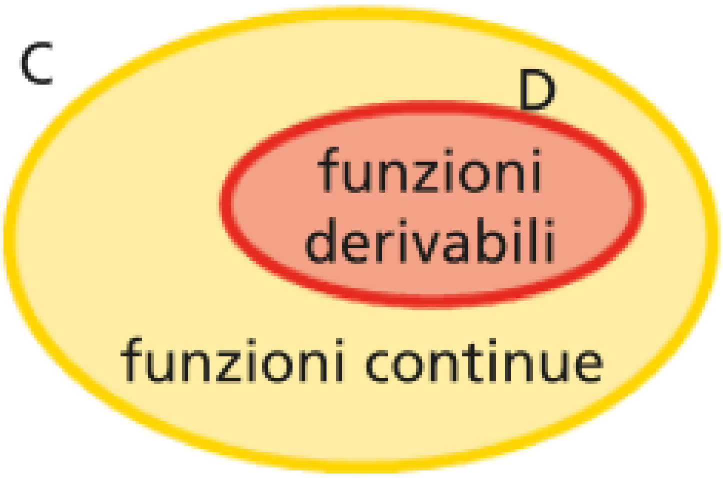
Perciò la derivata di f si dice **VELOCITÀ** o **TASSO DI VARIAZIONE ISTANTANEO** di f rispetto alla variabile x.

La derivata è, infatti, lo strumento per eccellenza per **quantificare il cambiamento (istantaneo) di una funzione f(x) rispetto ad x**, e perciò è di importanza fondamentale sia nella matematica che nelle scienze applicate.

Continuità e Derivabilità

Se una funzione f(x) è derivabile nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche continua

Esistono dei punti in cui una funzione è continua, ma non è derivabile, ma non esistono punti nei quali una funzione è derivabile, ma non continua.



Esistono funzioni continue che non sono derivabili, ma ***le funzioni derivabili sono sempre continue****.*

Condizioni di derivabilità

1. Una funzione f(x) definita nell'intervallo (a,b) è una funzione **derivabile in un punto x** se esiste il limite del rapporto incrementale in x per h tendente a zero.

2. Una funzione è **derivabile in un intervallo aperto (a,b)** se è derivabile in ogni punto x compreso tra gli estremi, a e b esclusi, ossia x ∈]a,b[.

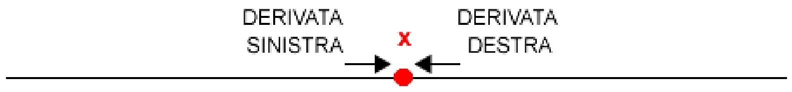
3. Una funzione è **derivabile in un intervallo chiuso [a,b]** se è derivabile in ogni punto x ∈ [a,b] e se esiste la derivata destra nel punto a e la derivata sinistra nel punto b.

I punti dove la funzione non è derivabile sono detti **punti singolari**.

Derivata SX e DX

Può comunque accadere che la funzione non sia derivabile nel punto x, ma lo sia negli altri punti a sinistra o a destra di x.

In questi casi i valori finiti dei limiti sono detti **derivata sinistra** e **derivata destra** di x.



$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **DERIVATA SINISTRA**

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **DERIVATA DESTRA**

Nella derivata sinistra l'incremento Δx tende a 0 da sinistra ed è un numero negativo $\Delta x<0$.

Nella derivata destra, l'incremento Δx tende a 0 da destra ed è un numero positivo $\Delta x>0$.

Se una funzione è derivabile nel punto x allora la derivata destra e sinistra **esistono e hanno lo stesso valore**

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$$

Non differentiability points

If a function isn’t continuous in a point x, then it isn’t differentiable in this point.

There are three cases of not differentiability:

1. **Vertical Tangent**
2. **Cusp**
3. **Corner**

Vertical Tangent (Non diff. points)

Example

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ at $x_0 = 0.$

$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$

A function isn't differentiable at *b* if its graph has a vertical tangent line at *b*.

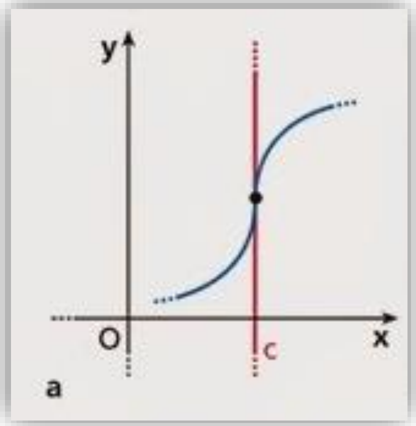
A point *b* is a **Vertical Tangent Point** if:

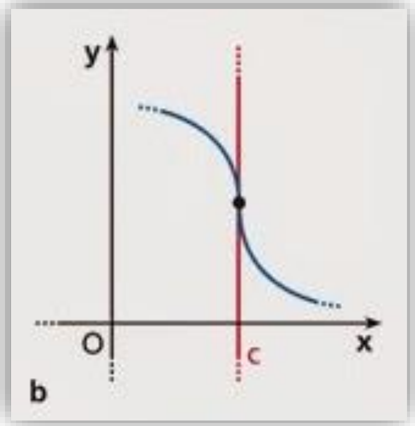
a) $f'_-(b) = f'_+(b) = +\infty$ or

b) $f'_-(b) = f'_+(b) = -\infty$,

with f(x) continuous at x = b,

but it doesn't differentiable at x = b





$f'_-(b)$ = left derivate
$f'_+(b)$ = right derivate

Cusp (Non differentiability points)

Example

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ at $x_0 = 0.$

$f'_-(x_0) = -\infty \wedge f'_+(x_0) = +\infty$

A function isn't differentiable at *b* if there is any type of discontinuity at *b*.

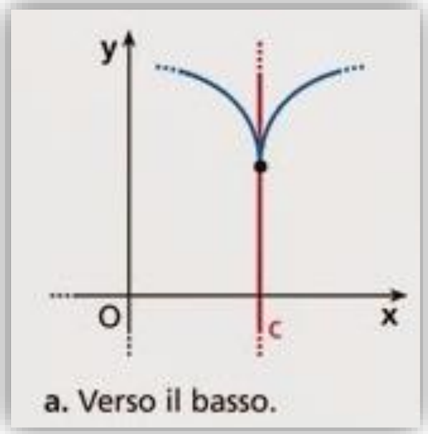
A point *b* is a **cusp** if:

a) $f'_-(b) = -\infty$ and $f'_+(b) = +\infty$, or

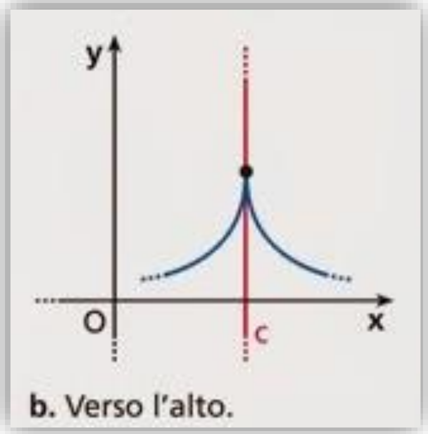
b) $f'_-(b) = +\infty$ and $f'_+(b) = -\infty$,

with f(x) continuous at x = b,

but it doesn't differentiable at x = b



a. Verso il basso.



b. Verso l'alto.

Corner (Non differentiability points)

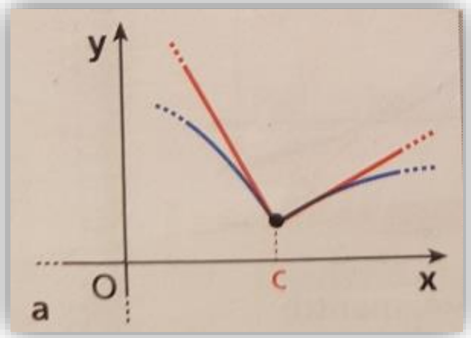
Example

$f(x) = |x|$ at $x_0 = 0.$

$f'_{-}(0) = -1$

$f'_{+}(x_0) = 1$

A function is not differentiable at *b* if its graph has a corner or kink at *b*.



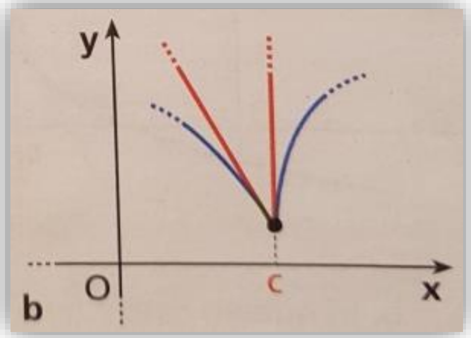
A point *b* is a **corner** point if:

a) the right and left derivatives are finite but $f'_{-}(b) \neq f'_{+}(b)$, or

b) $f'_{-}(b)$ is finite while $f'_{+}(b) = +\infty$,

with f(x) continuous at x = b,

but it doesn't differentiable at x = b



Ostacoli ed errori di calcolo 1/2

Nel calcolo della derivata **gli errori di tipo tecnico** si devono alla poca manualità con i limiti ed i relativi metodi di risoluzione.

Data, ad esempio, la funzione $y = \sqrt{x-4}$

il calcolo della derivata utilizzando la definizione di limite del rapporto incrementale porta a considerare il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}}{h}$$

che può generare delle difficoltà di calcolo, in quanto esso si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Tale limite può essere calcolato moltiplicando numeratore e denominatore per la quantità

$$\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}$$

Un altro errore comune, è quello di applicare in modo meccanico le regole di derivazione, senza valutare preliminarmente l'intervallo di definizione della derivata.

Ciò può portare erroneamente ad affermare che la derivata di una funzione esiste sempre, anche quando vi sono dei punti in cui essa non è definita.

Ostacoli ed errori di calcolo 2/2

Gli errori semantici, invece, sono legati all'errata interpretazione del significato di derivata.

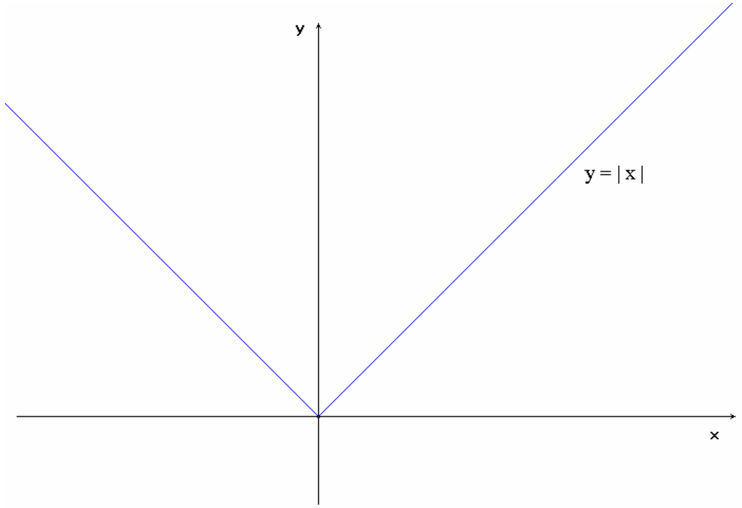
Ad esempio, spesso **c'è confusione tra il concetto di continuità e derivabilità**. Si potrebbe pensare che se una funzione è continua, allora è derivabile. I due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale potrebbero esistere ma essere diversi tra loro.

Così si potrebbe erroneamente prendere come valore della derivata nel punto uno dei due valori trovati.

Un classico controesempio in tal caso è lo studio della funzione del valore assoluto $f(x) = |x|$

nel punto di ascissa x = 0.

I limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in tale punto valgono rispettivamente +1 e -1, dunque per x=0 la derivata del valore assoluto non esiste.



Grazie

Stefano Caramagno
classe V BL - Anno Scolastico 2020-2021