Monitoria em Matemática e Probabilidade

Aula 01 - Teoria de Conjuntos
Prof. Stefano Mozart

Apresentação

Professor: Stefano Mozart

Analista de Planejamento e Orçamento em exercício no Cade, desempenhando a função de cientista de dados no âmbito do Projeto Cérebro.

Bacharel em Ciência da Computação e Mestre em Engenharia Elétrica (concentração em Redes de Telecomunicação) pela UnB. Atualmente, como candidato ao doutorado em Engenharia Elétrica na UnB, realiza pesquisas sobre aprendizado de máquina com garantias formais de privacidade.

Ementa

- Conceitos fundamentais: conjuntos, funções, vetores e matrizes;
- Princípios elementares de contagem e probabilidade;
- Noções básicas de álgebra linear: sistemas, equações e funções lineares, espaços vetoriais, transformações lineares e ortogonalidade;
- Princípios de cálculo diferencial;
- Noções de distribuições de probabilidade.

Programa

Data	Horário	Data	Horário	Data	Horário
10/06/21	18-21h	04/10/21	18-20h	31/01/22	18-20h
17/06/21	18-21h	18/10/21	18-21h	07/02/22	18-20h
24/06/21	18-21h	25/10/21	18-21h	21/03/22	9-11h
09/08/21	18-20h	08/11/21	18-20h	28/03/22	9-11h
16/08/21	18-20h	24/01/22	18-20h		

Metodologia

- **Apresentações teóricas seguidas de prática individual ou em grupo:**
  Exposição teórica, seguida de resolução de exercícios práticos, individuais ou em grupo, sendo permitida a consulta para retirar dúvidas com os colegas, ou com o professor.

- **Avaliação individual:**
  A avaliação para aprovação na disciplina se dará por meio de exercícios a serem resolvidos e entregues individualmente, por meio da plataforma Google Colab.

Conjuntos

Conjuntos

- A teoria de conjuntos é a base de toda a matemática moderna, bem como dos diferentes campos de matemática aplicada, tais como Estatística e Computação.

- Conceito fundamental: **Conjunto é a coleção que permite a identificação inequívoca de seus membros.**

  - Esse conceito inclui uma relação primordial entre um conjunto C qualquer e um elemento e qualquer: a relação de pertinência.
  - Em outras palavras, podemos dizer que C é um conjunto se, para qualquer elemento e, é possível valorar a expressão falseável $e \in C$

- Por conveniência, definimos o conjunto universo $\mathcal{U}$, que representa a coleção de quaisquer elementos, e o conjunto vazio, $\varnothing$ ou $\{\}$, que representa uma coleção que não contém nenhum elemento.

Conjuntos

- A notação mais comum para determinar (ou definir) um conjunto é $\boldsymbol{C} := \{\boldsymbol{e} : \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e})\}$, que se lê: "$\boldsymbol{C}$ é o conjunto de todo elemento $\boldsymbol{e}$, tal que $\boldsymbol{e}$ atende à propriedade $\boldsymbol{\varphi}$".
  - É muito comum usar expressões mais complexas no lado esquerdo da definição, de forma a determinar um subconjunto de conjuntos bem conhecidos. Por exemplo, o conjunto dos números pares pode ser determinado por $\boldsymbol{Pares} := \{2\boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros.
  - O símbolo de elípse (...) também é comumente utilizado para expressar a continuidade de uma sequência. Por exemplo, o conjunto $\boldsymbol{Pares} := \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
  - O asterisco sobrescrito geralmente indica que um conjunto é formado por todos os elementos de um conjunto, exceto o número zero, *eg*. $\mathbb{Z}^* := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z} : \boldsymbol{x} \neq 0\}$

- Alguns dos conjuntos numéricos mais utilizados são:
  - $\mathbb{N}$, o conjunto dos naturais, definido por $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
  - $\mathbb{Z}$, o conjunto dos inteiros, definido por $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - $\mathbb{Q}$, o conjunto dos racionais, definido por $\mathbb{Q} := \{\boldsymbol{p}/\boldsymbol{q} : \boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^*\}$
  - $\mathbb{R}$, o conjunto dos reais, definido como o conjunto dos números racionais e irracionais no intervalo infinito $\mathbb{R} = \{-\infty,\infty\}$

Conjuntos

- Conjuntos também pode ser determinados pela notação de intervalo, ou seja, o subconjunto que contém todos os números entre dois limites.
    - A notação de intervalo é utilizada para subconjuntos dos números reais, mas também pode ser usada para outros conjuntos, desde que expressamente indicado. Por exemplo

- Usamos o símbolo **[** para indicar um intervalo fechado (que contém o número usado como limite) à esquerda - *eg*. $[1, 2] := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$

- Usamos os símbolos **(** ou **]** para indicar um intervalo aberto (que não contém o limite) à esquerda - *eg*. $(1, 2] =]1,2] := \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}$

- Usamos o símbolo **]** para indicar um intervalo fechado à direita: $[1, 2] := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$

- E os símbolos **)** ou **[** para indicar um intervalo aberto à direita:
  $[1, 2) = [1,2[:= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

- **Axioma da extensão:** dois conjuntos são equivalentes (ou iguais) se forem compostos pelos mesmos elementos: $\forall X \forall Y \ [(x \in X \leftrightarrow x \in Y) \rightarrow X = Y]$
- **Axioma da regularidade:** todo conjunto não-vazio X contém pelo menos um elemento y tal que X e y sejam disjuntos: $\forall X \, [X \neq \varnothing \rightarrow \ \exists y \in X : y \cap X = \varnothing]$
- **Axioma da especificidade:** seja X um conjunto e φ uma propriedade que possa ser atribuída aos os elementos de X, então existe um subconjunto Y⊂X: $\forall X \, [\, \exists Y \subset X : (y \in Y \leftrightarrow \varphi(y))]$
- **Axioma do par:** quaisquer dois conjunto X e Y, existe um conjunto Z do qual ambos sejam elementos: $\forall X \forall Y \ [\exists Z : X \in Z \wedge Y \in Z]$
- **Axioma da união:** todo conjunto X existe um conjunto Z contendo todos os elementos que sejam elementos de um elemento de X: $\forall X \, [\exists Z : (e \in Y \wedge Y \in X) \rightarrow e \in Z]$

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

- **Axioma da substituição:** Seja ϕ uma função definida sobre um conjunto X, então existe um único conjunto ϕ(X), que é necessariamente subconjunto de um conjunto qualquer: $\forall X\ [(\exists!\phi(x)\ \ \forall x \in X) \rightarrow \exists Y : \forall x \in X\ \phi(x) \in Y]$

- **Axioma do infinito:** Seja $\mathbf{S}(X) = X \cup \{X\}$, a união entre X e o conjunto que contém X, então existe um conjunto Y que contém o conjunto vazio ($\varnothing \in Y$) de forma que, se y é um membro de Y, então $\mathbf{S}(y)$ também é um membro de Y: $\exists Y\ [\varnothing \in Y \rightarrow \mathbf{S}(y) \in Y]$

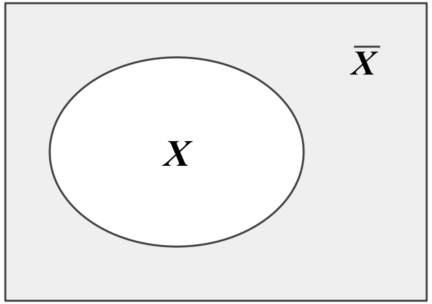
- **Axioma da potência:** Um conjunto X é subconjunto de Y se, e somente se, todos os elementos de X forem elementos de Y ($X \subseteq Y \leftrightarrow (\forall x \in X \rightarrow x \in Y)$). Portanto, para qualquer conjunto Z existe um conjunto W que contém todos os subconjuntos de Z: $\forall Z\ [\exists W : (z \subseteq Z \rightarrow z \subseteq W)]$

- **Axioma da escolha:** para todo X existe uma relação $\mathbf{R}$ que permite a ordenação de todos os elementos em X: $\forall X [\exists \mathbf{R} : \forall x \in X, \forall y \in X\ \ \exists \mathbf{R}(x,y)]$

Operadores

Complemento (negação)

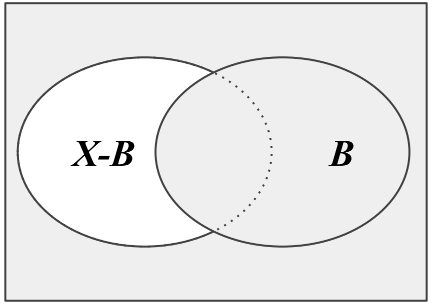
- O operador de complemento (ou negação) é um operador unário gera o conjunto de todos os elementos do conjunto Universo que não pertencem a um dado conjunto.
- Representações:
  $\overline{X} = \neg X = \mathcal{U} \setminus X = \mathcal{U} - X := \{e : e \in \mathcal{U} \wedge e \notin X\}$
  $\overline{X} := \{e : e \notin X\}$



- O operador de complemento, aplicado duas vezes, corresponde à idempotência: $\neg\neg X = X$

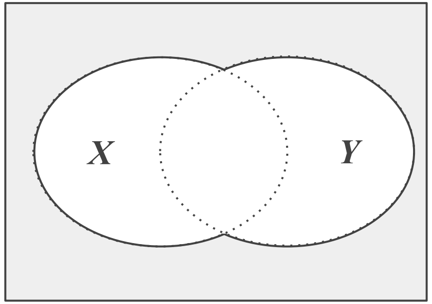
Diferença (complemento relativo)

- O operador de diferença (ou complemento relativo) é o operador binário que gera o conjunto de todos os elementos do primeiro operando que não pertencem ao segundo.
- Representações:
  $X\text{-}Y = X \setminus Y := \{e \in X : e \notin Y\}$



União (Disjunção)

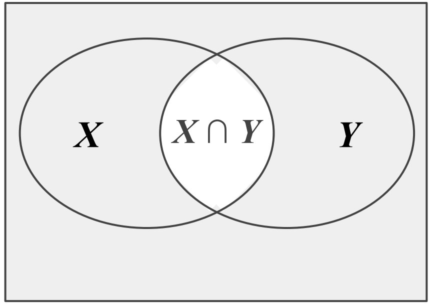
- O operador de união é binário: requer dois operandos.
- Representações: $X \cup Y := \{e \mid e \in X \vee e \in Y\}$



- O operador de união é idempotente: $X \cup X = X$
- O operador de união tem a propriedade comutativa: $X \cup Y = Y \cup X$
- O operador de união tem a propriedade associativa: $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
- O operador de união é distributivo em relação à intersecção: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Intersecção (Disjunção)

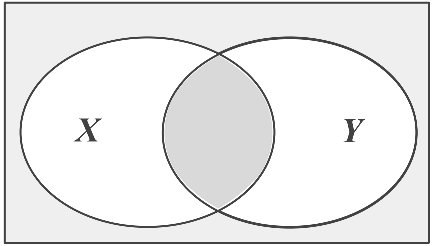
- O operador de intersecção (ou disjunção) é binário: requer dois operandos.
- Representação: $X \cap Y := \{e \mid e \in X \wedge e \in Y\}$



- O operador de intersecção é idempotente: $X \cap X = X$
- O operador de intersecção tem a propriedade comutativa: $X \cap Y = Y \cap X$
- O operador de intersecção tem a propriedade associativa: $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
- O operador de intersecção tem propriedade distributiva em relação à união, ou seja: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Diferença simétrica (Exclusão)

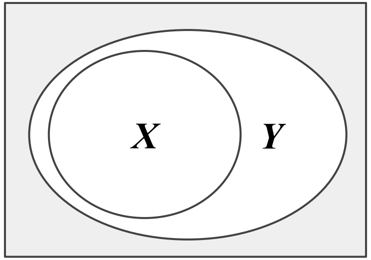
- O operador de diferença simétrica (ou exclusão) produz o conjunto que corresponde à diferença entre a união e intersecção de dois conjuntos.
- Representações:
  $X \Delta Y$, $X \veebar Y$, $X \oplus Y$, $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) := \{ e \mid e \in X \cup Y \wedge e \notin X \cap Y \}$



Inclusão (implicação)

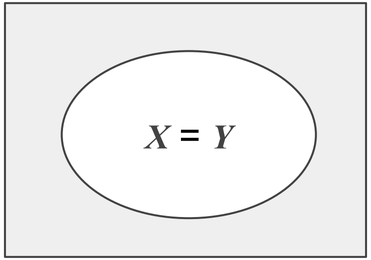
- O operador de inclusão (ou implicação) é um operador binário lógico, isto é, não expressa um conjunto, mas apenas uma relação entre dois conjuntos. A inclusão é uma expressão falseável.

- Representações: $X \subseteq Y \leftrightarrow X \cup Y = Y \leftrightarrow X \cap Y = X$

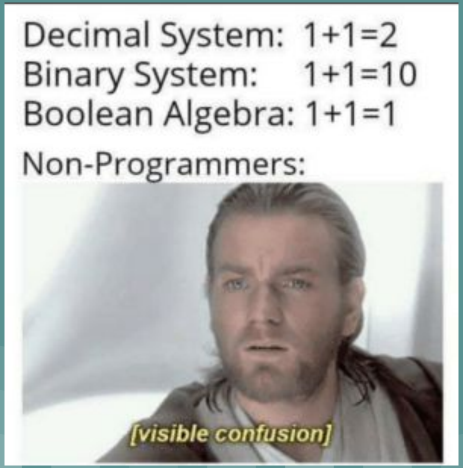


Equivalência

- O operador de equivalência é um operador binário lógico, e, assim como o operador de inclusão, expressa uma relação entre dois operandos.
- Representações: $X\!=\!Y$, $X \equiv Y$, $X\!:=\!Y$, $X \leftrightarrow Y$



Dúvidas?


Decimal System: 1+1=2
Binary System: 1+1=10
Boolean Algebra: 1+1=1
Non-Programmers:
[visible confusion]