Monitoria em Matemática e Probabilidade

Aula 02 - Conceitos básicos
Prof. Stefano Mozart

Programa da aula

- Conteúdo “bônus”: breve introdução ao SQL no Python com exemplo em Jupyter notebook;

- Funções;
    - Relações;
    - Funções;
    - Domínio e Imagem;
    - Composição;
    - Continuidade;
    - Monotonicidade;
    - Cardinalidade.

- Ranques e objetos;
    - Ranques:
    - Escalar;
    - Vetor;
    - Matriz;
    - Tensor.

- Matrizes:
    - Identidade;
    - Inversão;
    - Transposição;
    - Operações;
    - Determinante.

Bônus: breve introdução ao SQL no Python

SQL no Python

- Existem diversas bibliotecas que permitem o acesso a bancos de dados no Python: SQLAlchemy, Records, Django ORM, psycopg2, cx_Oracle, etc.
  - SQLAlchemy é a biblioteca de acesso a BD com melhor integração à biblioteca Pandas, por isso é a mais recomendada para iniciantes.

- As bibliotecas de acesso a bancos de dados geralmente apresentam dois grupos de funcionalidades:
  - Mapeamento do *driver* do banco (DB-API): permite a execução de instruções SQL, o controle de transações, entre outras funcionalidades.
  - Mapeamento objeto-relacional (ORM): permite que classes Python representem uma tabela no banco, de forma que a um objeto dessa classe corresponda um registro na tabela do BD.

SQLAchemy

- Para se conectar a um banco de dados utilizando o SQLAlchemy, utilize o método `create_engine`:

```
from sqlalchemy import create_engine

engine = create_engine('sqlite:///save_pandas.db', echo=True)
conn = engine.connect()
```

- Para executar um script SQL, o método `execute`:

```
df = engine.execute("SELECT * FROM users").fetchall()
```

SQLAchemy+Pandas

- Para salvar um dataframe no banco, utilize o método `pandas.DataFrame.to_sql`:

```
import pandas as pd

df = pd.read_csv('dados.csv')
df.to_sql(conn) # conn é a conexão SQLAlchemy, do slide anterior
```

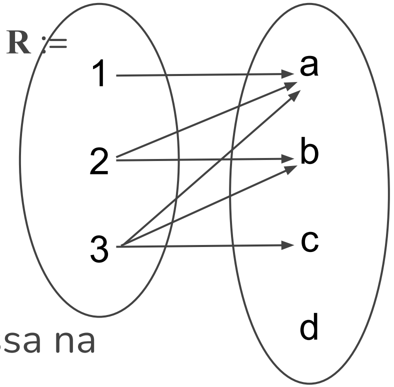
- Carregar um dataframe a partir de uma consulta no banco:

```
# conn é a conexão SQLAlchemy, do slide anterior
df = pd.read_sql_table('user', con=conn)
```

Funções

Relações

- Uma relação é uma correspondência ou associação entre elementos de dois conjuntos não vazios. Utiliza-se a notação $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$ para denotar uma relação entres elementos dos conjuntos X e Y.
  - A relação pode ser determinada por meio de uma propriedade: $\mathbf{R} := \{(x,y) : \boldsymbol{\varphi}(x, y)\}$
  - $\boldsymbol{\varphi}(x, y)$ pode ser uma fórmula - *e.g.* $y = \boldsymbol{f}(x)$ ou $y = 3x^2$
  - $\boldsymbol{\varphi}(x, y)$ também pode ser uma expressão falseável - *e.g.* $x > y$
  - $\boldsymbol{\varphi}(x, y)$ também é comumente expressa na forma $x\mathbf{R}y$



- Para quaisquer dois conjuntos X e Y não vazios, existe uma relação chamada **produto cartesiano**, que pode ser expressa na forma: $\mathbf{P} = X \times Y := \{(x,y) : x \in X \land y \in Y\}$
  - Logo, qualquer relação entre dois conjuntos é, necessariamente, um subconjunto de seu produto cartesiano.

Relações

- Uma relação pode ser definida entre elementos ou subconjuntos de um mesmo conjunto ($\mathbf{R} \subseteq X \times X$);

- Uma relação também pode ser definida de forma extensiva, ou tabular:
  R := $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$

- Existem relações de diversa natureza: seriais, funcionais, de ordem, de equivalência, de congruência, de adjacência, de ortogonalidade, etc;
  - Uma relação é dita serial se todos os elementos do primeiro conjunto forem associados a pelo menos um elemento do segundo: $\forall x \in X\ [\exists y \in Y : x\mathbf{R}y]$
  - Uma relação é dita funcional se a cada elemento do primeiro conjunto for associado um único elemento do segundo:
    $\forall x \in X,\ \forall \mathbf{y} \in Y,\ \forall z \in Y\ [(x\mathbf{R}y \wedge x\mathbf{R}z) \rightarrow y{=}z]$

- As relações podem ter diversas cardinalidades: um-para-um, um-para-muitos, muitos-para-um, muitos-para-muitos;

Funções

- Uma função é uma relação binária, serial e funcional: isto é, é a relação entre dois conjuntos que associa a cada elemento do primeiro conjunto um único valor no segundo conjunto;

- Funções foram criadas, originalmente, como uma abstração para a correlação entre duas quantidades: por exemplo, a correlação entre posição e tempo expressa pela função de velocidade;

- Funções também podem ser vistas como um mapeamento entre dois conjuntos, um “morfismo”, que indica a equivalência entre dois conjuntos;

Funções

- Uma função é geralmente determinada por uma fórmula - *e.g.* $\boldsymbol{f}(x) = 3x^2$
- A função, como qualquer relação, também pode ser determinada na forma extensa ou tabular: $\boldsymbol{f} = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$;
- Além da forma $x\mathbf{R}y$, existem várias notações específicas para denotar uma função:
  - $y = \boldsymbol{f}(x)$
  - $\{(x, f(x)) : x \in X\}$
  - $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)$
  - $\boldsymbol{f}_X$

Domínio, contradomínio e imagem

- Usamos a notação $\boldsymbol{f}$: $D \to C$ para expressar que uma função $\boldsymbol{f}$ está definida entre os conjuntos D e C.
  - Chamamos o primeiro conjunto, D, de **domínio** da função $\boldsymbol{f}$;
  - Chamamos o conjunto C, de **contradomínio** de $\boldsymbol{f}$;

- A imagem de $\boldsymbol{f}$, geralmente denotada como I, é o subconjunto de C formado pelos elementos que são efetivamente mapeados por $\boldsymbol{f}$. Assim $I \subseteq C \land \forall y \in I [\exists x \in D : y = \boldsymbol{f}(x)]$

- Por exemplo, seja $\boldsymbol{f}$:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $y = 2x$, então os naturais são tanto o domínio quanto o contradomínio de $\boldsymbol{f}$, e a imagem $\boldsymbol{f}$ é o conjunto dos naturais pares;

Domínio e Imagem

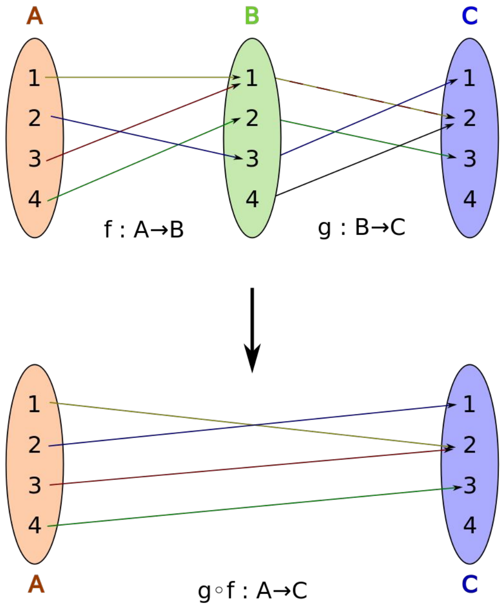
- Seja $A \subseteq D$ um subconjunto do domínio de $\boldsymbol{f}$, então $\boldsymbol{f}(A) = \{\boldsymbol{f}(x) \colon x \in A\}$
  - Pela definição de função, podemos afirmar que $A \subseteq D \longrightarrow \boldsymbol{f}(A) \subseteq \boldsymbol{f}(D)$
  - Também podemos afirmar que $\boldsymbol{f}(D) = I$
  - E, pelo mesmo raciocínio, $\boldsymbol{f}(A) \subseteq I$
- Em estatística, o domínio das funções de densidade probabilidade e de massa de probabilidade também é chamado de **suporte** e a notação mais comum é $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{f}_X$ (onde $\boldsymbol{X}$ é o suporte da função $\boldsymbol{f}$, e $\boldsymbol{f}_X$ é a densidade ou massa de probabilidade)

Composição

- Dadas duas funções $\boldsymbol{f}: A \rightarrow B$ e $\boldsymbol{g}: B \rightarrow C$, de modo que o contradomínio de $\boldsymbol{f}$ seja equivalente ao domínio de $\boldsymbol{g}$, a composição, $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}): A \rightarrow C$, entre elas é definida por: $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x))$

- A composição é uma operação não comutativa. Isto é, mesmo quando $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ compartilham o mesmo domínio e imagem, $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ podem ser diferentes:
  - Veja por exemplo $\boldsymbol{f}=2x$ e $\boldsymbol{g}=x^2$: $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(3)=18$ e $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(3)=36$

- A composição é uma operação associativa. Isto é, se $\boldsymbol{f} \circ (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h})$ é uma composição, então $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}) \circ \boldsymbol{h}$ também é, e é igual à anterior.



Composição

- Funções também podem ser vistas como vetores ou espaços vetoriais, e portanto, suportam operações internas (ou ponto a ponto). Isto é, sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ funções definidas em um mesmo domínio, então, as seguintes operações lineares estão definidas:
  - $(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{g}(x)+\boldsymbol{f}(x)$
  - $(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{g}(x)-\boldsymbol{f}(x)$
  - $(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{g}(x)\cdot\boldsymbol{f}(x)$

- Quando os elementos do domínio de uma função $\boldsymbol{f}$ são vetores, então dizemos que $\boldsymbol{f}$ é uma função vetorial.
  - Para vetores reais, utilizamos a notação $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Continuidade

- Intuitivamente, podemos dizer que uma função é contínua num intervalo se, naquele intervalo, a uma alteração arbitrariamente pequena em sua entrada corresponder uma variação igualmente pequena na saída:
  $lim_{a \to 0} \boldsymbol{f}(x+a) - \boldsymbol{f}(x) = 0$

- De maneira um pouco mais formal, podemos dizer que $\boldsymbol{f}$ é contínua em I se $\forall x \in I\ [\exists\ lim_{a \to x} \boldsymbol{f}(a)]$,

- Funções contínuas permitem os estudo de propriedades importantes tais como tendências, máximos e mínimos locais e absolutos, por meio de derivadas.

Monotonicidade

- Uma função $\boldsymbol{f}$ é dita crescente num intervalo quando, para qualquer par de pontos x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tem-se que $\boldsymbol{f}(x_1) \leq \boldsymbol{f}(x_2)$;

- Uma função $\boldsymbol{f}$ é dita decrescente num intervalo quando, para qualquer par de pontos x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tem-se que $\boldsymbol{f}(x_1) \geq \boldsymbol{f}(x_2)$;

- Uma função é considerada monótona se for crescente ou decrescente em todo o seu domínio.
  - Uma função monótona é uma relação de ordem entre dois conjuntos.

Cardinalidade

- Uma função $\boldsymbol{f}: D \to C$ é dita injetora, ou injetiva, se para quaisquer pontos x_1, $x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se que $\boldsymbol{f}(x_1) \neq \boldsymbol{f}(x_2)$;
  - Isso equivale a uma relação um-para-(zero ou um).

- Uma função $\boldsymbol{f}: D \to C$ é sobrejetora se a sua imagem for igual ao seu contradomínio. Isto é, $I = C \wedge \forall y \in \mathbf{C} [\exists x \in D : y = \boldsymbol{f}(x)]$;
  - Isso equivale a uma relação (zero ou um)-para-um.

- Uma função é considerada bijetora quando for injetora e sobrejetora.
  - Isso equivale a uma relação um-para-um.

Ranques

Ranques

- Objetos algébricos possuem uma propriedade chamada **ranque**, também referenciada como **ordem** ou **grau** em alguns contextos, que especifica a complexidade ou número de dimensões dos objetos:
  - Objetos de ranque 0 (zero) são chamados de escalares. Estes objetos possuem magnitude (seu ṕroprio valor) mas são adimensionais: $x \in \mathbb{R}$
  - Objetos de ranque 1 são chamados de vetores (ou arrays) e possuem uma dimensão, um número natural n que indica o número de escalares internos: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
  - Objetos de ranque 2 são chamados de matrizes (ou 2d-arrays) e possuem duas dimensões (n,m) indicam, respectivamente, o número de vetores internos e a dimensão desses vetores: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
  - Objetos de ranque 3 ou mais são chamados de tensores, ou nd-arrays, onde n corresponde ao número de dimensões: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\prod n}$

Ranques

- Em ciência da computação e estatística é muito comum utilizarmos objetos de ranque 2, ou seja, matrizes, para construir os modelos estudados:
  - De uma forma geral, qualquer construção algébrica válida para um objeto de ranque i, vale para todos os objetos de ranque $j \leq i$:
  - Assim, se um modelo matricial recebe uma prova formal, esse modelo também vale para vetores e escalares;
  - Vetores e escalares podem sempre ser vistos como formas particulares de matrizes: vetores são matrizes de forma $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ou $\mathbb{R}^{1 \times n}$, e os escalares, matrizes em $\mathbb{R}^{1 \times 1}$

Vetores

Vetores

- Indexamos os elementos de um vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ como x_i, onde $1 \leq i \leq n$. E assim, podemos definir algumas operações com vetores:
  - A soma, entre vetores de mesma dimensão é um vetor cujos elementos correspondem à soma dos elementos de mesmo índice nos operandos: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = <x_i+y_i>_{i=1..n}$
  - O escalonamento (multiplicação por escalar) corresponde à multiplicação de cada elemento do vetor pelo escalar: $c\boldsymbol{x} = <cx_i>_{i=1..n}$
    - Note que a multiplicação por escalar é um caso particular da soma: $c\boldsymbol{x} = \sum_{r=1..c} \boldsymbol{x}$
  - O produto interno, que corresponde ao vetor composto pela multiplicação dos elementos dos dois vetores, par à par: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = <x_i y_i>_{i=1..n}$

Matrizes

Matrizes

- São objetos que possuem duas dimensões (n,m), as quais indicam o número de vetores internos e a dimensão desses vetores: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
  - Também é comum usarmos a notação $A_{n \times m}$, e dizemos que $n \times m$ é a ordem da matriz, onde n e m representam, respectivamente, o número de linhas e o número de colunas da matriz A;

- Para simplificar a comunicação, sempre nos referimos aos elementos de uma matriz fazendo referência a uma linha e coluna;
  - Em notação matemática, as linhas e colunas são enumeradas a partir do 1. Na maior parte das linguagens de programação, no entanto, vetores e matrizes são indexados a partir do 0;
  - Usamos os números da linha e da coluna como índices subscritos: *e.g.* na matriz A, abaixo, o elemento $[A]_{1,2} = a_{1,2} = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Uma matriz é dita quadrada quando suas dimensões (n,m) forem coincidentes - isto é, $n=m$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz é dita diagonal quando todos os elementos de índices não coincidentes são iguais a zero: $(a_{i,j}=0 \ \forall\, i \neq j)[1 \leq i \leq n \ \wedge \ 1 \leq j \leq m]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

- A matriz quadrada e diagonal em que todo elemento diagonal é igual a 1 é chamada de matriz identidade I, pois: $AI = A$;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Uma matriz transposta de uma matriz $A_{n \times m}$ é a matriz $A^{\top}{}_{m \times n}$ em que $a^{\top}{}_{i,j} = a_{j,i}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz A é dita simétrica se $A = A^{\top}$. Toda matriz diagonal, incluindo a matriz de identidade, é uma matriz simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad A^{\top} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Uma matriz quadrada é dita invertível (ou não singular) quando existe uma matriz A^{-1} tal que $AA^{-1}=I$ e $A^{-1}A=I$
  - A inversa da identidade é, por definição, a própria identidade: $II=I$
- Se uma matriz é invertível, então sua inversa é única;
- A inversa de uma matriz invertível também é invertível, sendo a inversa da inversa igual à original: $(A^{-1})^{-1}=A$;
- A transposta de uma matriz invertível também é invertível, e a inversa da transposta é a transposta da inversa: $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- A inversa de uma matriz multiplicada por um escalar equivale ao inverso do escalar multiplicado pela inversa da matriz: $(\mathrm{c}A)^{-1}=\mathrm{c}^{-1}A^{-1}$;

Operações com matrizes

- Matrizes podem representar relações entre conjuntos. Também podem representar transformações lineares (*e.g.* rotações num espaço vetorial);
    - Dessa forma, assim como no caso das funções, as composições lineares de adição/subtração e multiplicação estão definidas;
    - A validade dessas operações está restrita, no entanto, à coincidência de formatos (o valor atribuído às dimensões) das matrizes - assim como a validade das composições de funções está restrita pela coincidência de domínios e contradomínios;

- A soma/subtração entre duas matrizes está definida entre matrizes com os mesmos formatos (mesmos valores para ambas dimensões).

- A multiplicação entre matrizes está definida entre matrizes em que o número de colunas do operando à esquerda corresponda ao número de linhas no operando à direita.

Operações com matrizes: soma

- A soma/subtração corresponde à soma/subtração realizada elemento a elemento: $[A \pm B]_{i,j} = [A]_{i,j} \pm [B]_{i,j}$ onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 1+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- O escalonamento, ou multiplicação por um escalar, corresponde à multiplicação de cada elemento da matriz por aquele escalar: $[\mathrm{c}A]_{i,j} = \mathrm{c}a_{i,j}$
  - Note que a multiplicação de uma matriz por um escalar corresponde a um caso particular de soma: $\mathrm{c}A = \sum_{\mathrm{r}=1..\mathrm{c}} A$

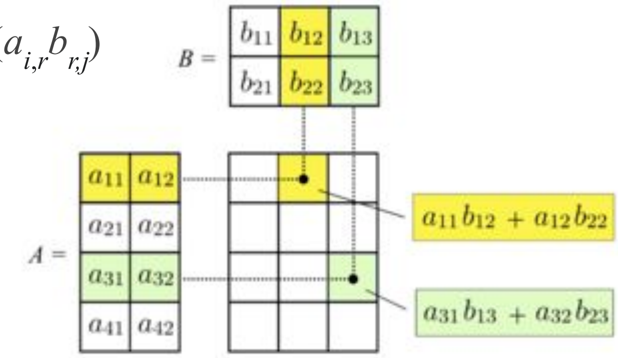
$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 8 & 2 \times -3 \\ 2 \times 4 & 2 \times -2 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes: multiplicação

- Sejam $A_{n \times m}$ e $B_{m \times p}$ matrizes de dimensões (n,m) e (m,p). A multiplicação entre A e B corresponde à matriz de dimensões (n,p) cujos elementos são definidos pelo produto interno de cada linha de A pela coluna de mesmo índice em B.

$$[AB]_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \ldots + a_{i,m}b_{m,j} = \sum_{r=1..m} (a_{i,r}b_{r,j})$$

Onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq p$.



Operações com matrizes: multiplicação

- Por sua definição, a multiplicação de matrizes não é comutativa: $AB \neq BA$
  - A comutatividade está definida apenas entre uma matriz quadrada e sua inversa, quando essa existir: $AA^{-1} = A^{-1}A$

- A multiplicação de matrizes, no entanto, é associativa, assim: $A(BC) = (AB)C$

- A multiplicação de matrizes também é distributiva, pois: $A(B+C)=AB+AC$

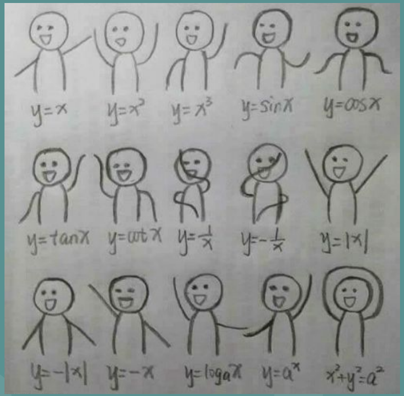
Determinante

- Determinantes são propriedades de matrizes quadradas Uma função é considerada monótona s;
  - Numa matrix $A_{1\times1}$, o determinante é definido com o valor de seu único elemento, $|A_{1\times1}| = a_{1,1}$
  - Numa matrix $A_{2\times2}$, o determinante pode ser calculado como: $|A_{2\times2}| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
  - Numa matrix $A_{3\times3}$, $|A_{3\times3}| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-(a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}+a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1})$
- Para qualquer ordem igual ou superior a 2, para um j fixo qualquer, $|A_{n\times n}| = \sum_{i=1..n} a_{i,j}C_{i,j}$
  - $C_{i,j}$ é o complemento algébrico, ou cofator, do elemento $a_{i,j}$ em A, e é calculado por $C_{i,j}=(-1)^{i+j}|A_{-(i,j)}|$
  - E $A_{-(i,j)}$ é a matriz que se obtém retirando da matriz original A a linha i e a coluna j

Determinante

- O determinante da matriz identidade é igual a 1: $|I| = 1$
- O determinante de uma matriz é sempre igual ao determinante de sua transposta: $|A| = |A^T|$
- Se uma matriz quadrada é invertível, então $|A^{-1}| = 1/|A|$
- Determinantes são utilizado em diversas aplicações: na solução de sistemas de equações lineares, em processos de otimização (determinação de máximo e mínimos locais ou globais), no teste de alinhamento entre pontos em um hiperplano, na determinação de campos elétricos e eletromagnéticos, etc.

Dúvidas?



y=x
y=x²
y=x³
y=sinx
y=cosx
y=tanx
y=cotx
y=1/x
y=-1/x
y=|x|
y=-|x|
y=-x
y=logₐx
y=aˣ
x²+y²=a²