# Monitoria em Matemática e Probabilidade

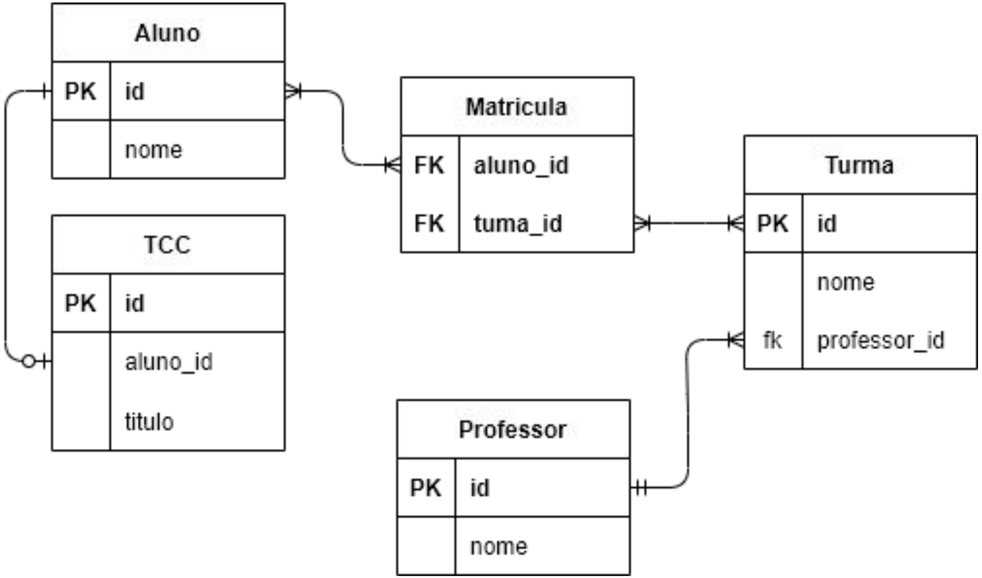
Aula 03 - Princípios elementares de contagem
Prof. Stefano Mozart

# Programa da aula

- Revisão:
  - Relações seriais e funcionais;
  - Cardinalidade de relações;
  - Funções injetoras e bijetoras;
- Problemas de contagem:
  - Princípio fundamental da contagem;
  - Contagem e probabilidade;
- Permutação;
  - Fórmula;
  - Exemplos;
- Combinação;
  - Fórmula;
  - Exemplos;
- Arranjo:
  - Fórmula;
  - Exemplos;

# Revisão

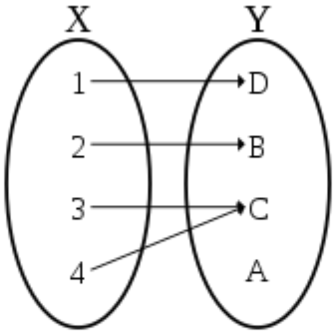
# Exemplos de relações



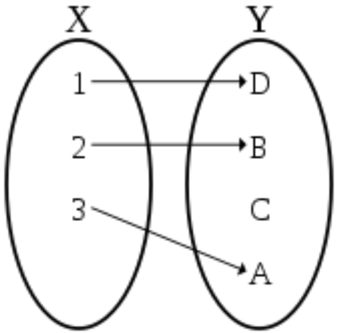

- Um para zero ou um:
  - Aluno⟶TCC
- Um para um:
  - TCC⟶Aluno
- Um para muitos:
  - Professor⟶Turma
- Muitos para um
  - Turma⟶Professor
- Muitos para muitos:
  - Aluno⟶Matrícula
  - Matrícula⟶Aluno
  - Matrícula⟶Turma
  - Turma⟶Matrícula

- Funcionais:
  - Aluno⟶TCC
  - TCC⟶Aluno
  - Turma⟶Professor
- Seriais:
  - TCC⟶Aluno
  - Aluno⟶Matrícula
  - Matrícula⟶Aluno
  - Matrícula⟶Turma
  - Turma⟶Matrícula
  - Turma⟶Professor
  - Professor⟶Turma

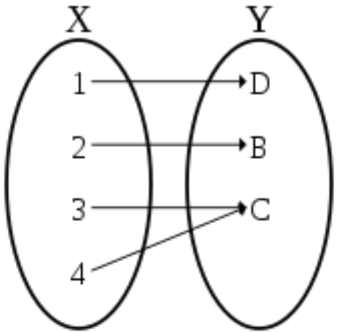
# Exemplos de funções



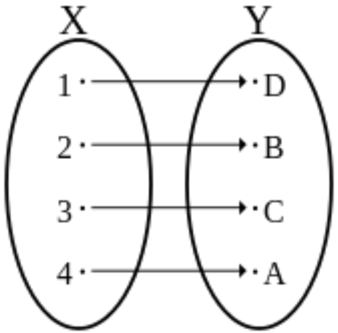

Não injetora
Não sobrejetora




Injetora
Não sobrejetora




Não injetora
Sobrejetora




Injetora
Sobrejetora
Bijetora

*É notável que uma ciência que começou com a consideração dos jogos de azar tenha se tornado o objeto mais importante do conhecimento humano.*

*Pierre-Simon Laplace - Théorie Analytique des Probabilitiés (1812)*

# Problemas de contagem

# Problemas de contagem

- Os problemas de contagem estão relacionados à necessidade de se conhecer ou estimar o tamanho de um espaço de probabilidade: possibilidades de observação em um evento ou sequência de eventos.
  - Também podem ser vistos como a contagem de elementos em uma relação $n$-ária, onde $n$ representaria o número de conjuntos considerados.

- O princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo, é o método algébrico de determinação de um espaço de probabilidade e consiste em simplesmente multiplicar o número de possíveis observações em cada evento da sequência.

# Problemas de contagem

- Os problemas de probabilidade, em geral, podem ser reduzidos a problemas de contagem, ou determinação da frequência relativa de um objeto de estudo numa série.
  - A probabilidade é essencialmente a razão entre o número de casos de interesse e o espaço de probabilidade - número total possibilidades;
  - Empiricamente, a probabilidade seria a razão entre o número de realizações da observação de interesse e o total de eventos observados.

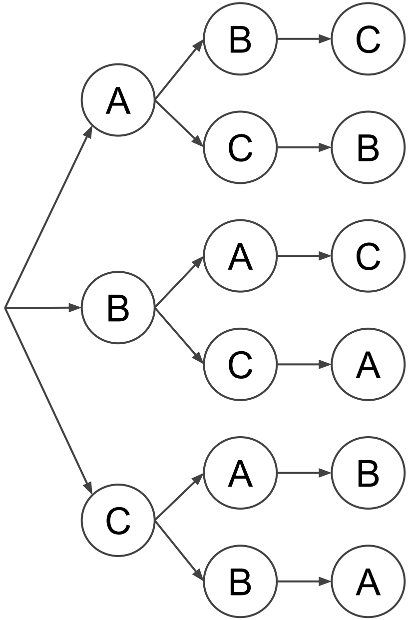
- Problemas de inferência, de igual forma, podem ser reduzidos a problemas de contagem em que, partindo-se de um subconjunto de casos particulares, induz-se a criação de um espaço de probabilidades:
  - "Em uma série de tentativas repetidas um grande número de vezes nas mesmas condições, quaisquer dos acontecimentos fortuitos possíveis manifestam-se com uma freqüência relativa sensivelmente igual à sua probabilidade matemática. A aproximação aumenta em geral muito rapidamente, à medida que as tentativas tornam-se mais numerosas" (Du Pasquier, 1926).

# Problemas de contagem

- Exemplo: de quantas maneiras podemos ordenar três letras (A, B, C)?

- No primeiro evento (escolha da primeira letra) há $3$ observações (letras) possíveis. No segundo, apenas $2$ possibilidades. O terceiro e último, nesse caso, tem sempre um único resultado esperado. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o espaço de probabilidade é de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

- Como esperado, esse valor corresponde à contagem das possibilidades, uma a uma, como expressas no grafo ao lado.



# Permutação

# Permutação

- Os problemas dessa classe (ordenar $n$ elementos) são chamados de permutação: contagem de ordenações possíveis de um número finito de elementos.

- Em coleções perfeitamente ordenáveis (conjuntos sem repetições), a solução segue sempre o princípio fundamental da contagem e pode ser expressa na forma fatorial: *e.g.* possíveis ordenações de três letras = $3!$
  - É fácil ver como a solução apresentada no slide anterior corresponde à definição de fatorial: multiplica-se o número total de elementos disponíveis na primeira escolha $n$, pelo número de elementos restantes para a próxima escolha, $n$-1, até que, no último evento, sobre apenas um elemento: $P_n = n(n\text{-}1)((n\text{-}1)\text{-}1)...(1)=n!$

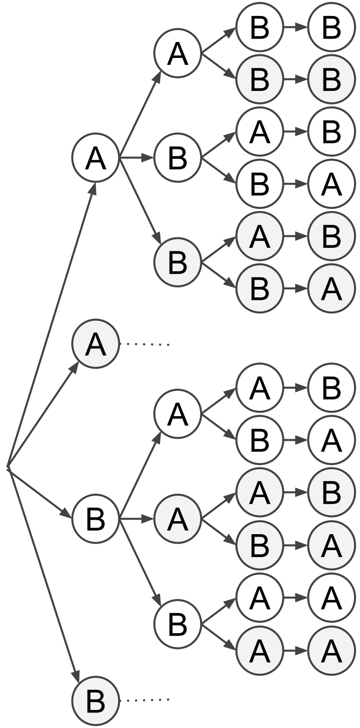
- Em coleções com repetições, deve-se retirar da contagem as permutações internas dos subconjuntos de elementos repetidos. Para isso basta ponderar a contagem global pelo produto das contagens dos repetidos: $\mathrm{Pr}_n = n!/\prod_{i=1}^{m}(n_i!)$
  - Onde $m$ representa o número de elementos com repetições e $n_i$ o número de repetições do $i$-ésimo elemento repetido.

# Permutação

- Exemplo: quantas permutações existem das letras [A, A, B, B]?

- No primeiro evento, 4 observações (letras) possíveis. No segundo, 3. No terceiro, 2, e no último apenas uma escolha possível. Teríamos, em princípio, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
  - Mas existem muitas sequência que resultam em ordenações indistinguíveis, de forma que, contando apenas as ordenações distintas, chegamos ao total de $6$.

- O valor é consistente com a fórmula $\mathrm{Pr}_n = n!/\prod_{i=1}^{m}(n_i!)$, que, nesse caso, resulta em:
  $(n!/(n_A!n_B!)) = 4!/2!2! = 24/(2(2)) = 6$



# Permutação

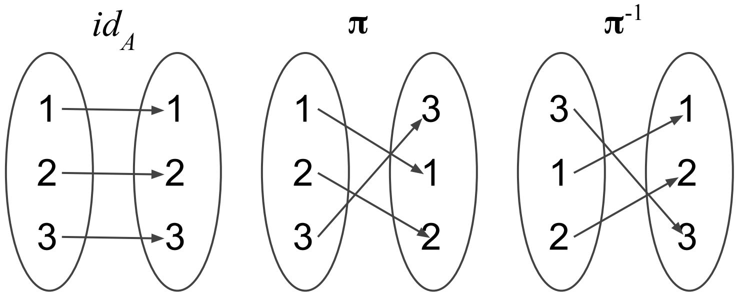
- Uma permutação dos elementos de um conjunto $A$ é sempre uma bijeção em $A$. A coleção de todas as possíveis permutações (ordenações dos elementos) de um conjunto $A$ com $n$ elementos é chamada de grupo simétrico de $A$ - denotado por $A_n$ - e pode ser usada, por exemplo, para determinar o número de soluções de equações polinomiais (pelo teorema fundamental de Galois);

- As permutações têm as seguintes propriedades:
  - Fechamento: a permutação de uma permutação sempre pertence ao grupo simétrico: $\forall \boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\sigma} \in A_n$ , $\boldsymbol{\pi\sigma} \in A_n$
  - Associatividade: para quaisquer três permutações, $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in A_n$, $(\boldsymbol{\pi\sigma})\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma\tau})$;
  - Identidade: existe uma permutação $id_A$, que mantém a ordem dos elementos de $A$: $\exists\, id_A \in A_n : \forall a_i \in A,\ id_A(a_i)=a_i$
  - Invertibilidade: para toda permutação $\boldsymbol{\pi}$, existe uma permutação $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ que reverte as alterações de ordem aplicadas por $\boldsymbol{\pi}$: $\forall \boldsymbol{\pi} \in A_n,\ \exists\, \boldsymbol{\pi}^{-1} \in A_n$: $\boldsymbol{\pi\pi}^{-1}=\boldsymbol{\pi}^{-1}\boldsymbol{\pi}=id_A$

- Permutações não são comutativas: $\boldsymbol{\pi\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma\pi}$

# Permutação

- Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:
  - $A_n = \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}\}$
  - $id_A=\{1,2,3\}$
  - Seja $\boldsymbol{\pi}=\{3,1,2\}$, então $\boldsymbol{\pi}^{-1}=\{2,3,1\}$ e $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}^{-1}=id_A=\{1,2,3\}$




- A notação de Cauchy é a mais utilizada nos textos de matemática:

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Permutação

- Outra notação possível é a notação matricial:

$$id_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$id_A A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi}^{-1} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Arranjo

# Arranjo

- Chamamos de arranjo os problemas onde se deseja conhecer o número de ordenações possíveis para $k$ elementos tomados entre os $n$ elementos de um dado conjunto.
  - A notação mais comum é $\mathscr{A}_k^n = n!/(n\text{-}k)!$
  - As notações $n\mathrm{P}k$ e $\mathrm{P}(n,k)$ também são bastante utilizadas. O 'P', nesse caso, refere-se ao fato de que se trata de uma permutação de $k$ elementos, tomados entre as $n$ opções no conjunto.

- Os arranjos são formas mais gerais das permutações:
  - A permutação é um arranjo na forma $n\mathrm{P}n$ – isto é, onde $k$=$n$
  - Enquanto as permutações são funções bijetoras, os arranjos são apenas relações. Ou seja, permutações são uma forma mais restrita de relação interna de um conjunto ou coleção.

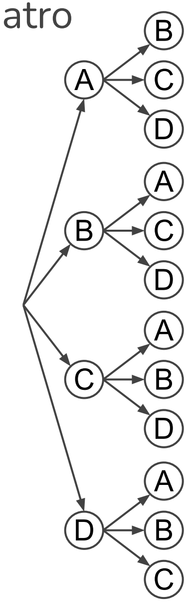
# Arranjo

- Exemplo: de quantas maneiras podemos ordenar duas entre quatro letras (A, B, C, D)?

  - Para computarmos o espaço de probabilidade criado pelo arranjo, seguimos o teorema fundamental da contagem para $k$ eventos: $\prod_{i=0}^{(k-1)}(n-i) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)=n!/(n-k)!$

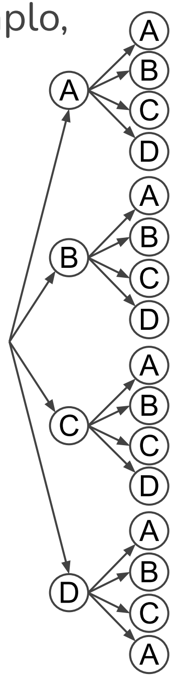
  - No primeiro evento (escolha da primeira letra) há 4 observações possíveis. No segundo, $3$ possibilidades. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o espaço de probabilidade é de $4{\cdot}3{=}12$

  - Como esperado, esse valor corresponde à contagem das possibilidades, uma a uma, como expressas no grafo ao lado. E também corresponde à fórmula $n\mathrm{P}k = n!/(n-k)!$, que, nesse caso, é $4!/(4-2)! = 4!/2! = 24/2 = 12$



# Arranjo

- Também existem problemas de arranjos com repetição: por exemplo, quantas ordenações existem para $2$ dentre $4$ letras (A, B, C, D), permitida a repetição?
  - Para computarmos o espaço de probabilidade criado pelo arranjo com repetição, seguimos o teorema fundamental da contagem para $k$ eventos: no primeiro evento (escolha da primeira letra) há $n$ observações possíveis. No segundo, tendo em vista a possibilidade de repetição, ainda teremos $n$ possibilidades. E assim, sucessivamente, até o $k$-ésimo evento.
  - Logo, a fórmula analítica para o arranjo com repetição é $n\text{Pr}k = n^k$
  - No exemplo específico, o valor é $n^k{=}4^2{=}16$. Como esperado, esse valor corresponde à contagem das possibilidades, uma a uma, como expressas no grafo ao lado.



# Combinação

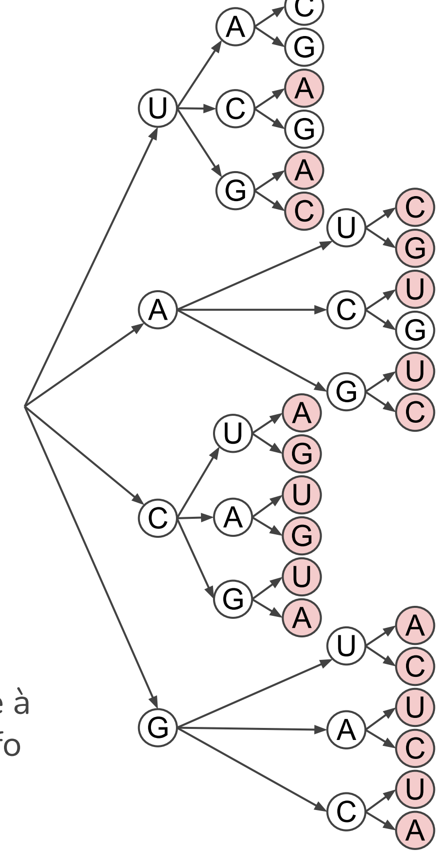
# Combinação

$\in \notin \exists \subset$
$\subseteq \rightarrow \leftrightarrow$
$\sum \forall \prod \boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{\rho \sigma \tau} \neq$

- Outra classe comum de problemas de contagem é chamado de combinação, ou seleção. Nessa classe, contamos os possíveis subconjuntos (amostras) contendo $k$ elementos retirados (sem repetição) dentre os $n$ elementos do conjunto original:
  - É comum utilizarmos a notação $\mathscr{C}^n_k = n!/((n\text{-}k)!k!)$
  - As notações ${}^n\mathscr{C}_k$ e $\binom{n}{k}$ e $\mathscr{C}(n,k)$ também são usadas
  - Note que nessa classe de problemas, a ordem não importa. Então $\{1,2\}$ e $\{2,1\}$ são contados como um único evento - por isso o número total de eventos $(n!/(n\text{-}k)!)$ é ponderado pelo número de possíveis permutações do subconjunto $(k!)$.

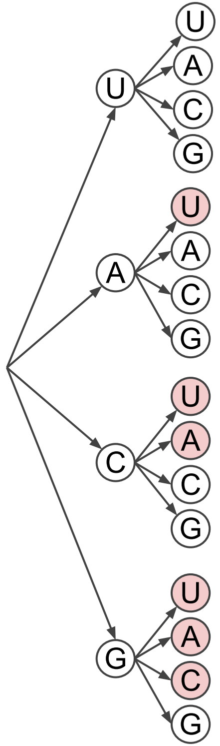
# Combinação

- Exemplo: de quantas formas podemos combinar $3$ de $4$ letras $\{U, A, C, G\}$?
  - Pelo teorema fundamental da contagem, temos $4$ possibilidades no primeiro evento; $3$ no segundo; e $2$ no terceiro e último. O que nos daria um total de $24$ ordenações diferentes.
  - Mas, como se trata de um problema de combinação, e não de ordenação/permutação, descontamos o número de permutações no subconjunto formado com $3$ letras, que é $3!$, chegando ao valor $24/6=4$.
- Usando a forma analítica, $\mathscr{C}^n_k = n!/((n\text{-}k)!k!)$, temos o valor $4!/((4\text{-}3)!3!) = 24/(1(6)) = 4$. Como esperado, esse valor corresponde à contagem das possibilidades, uma a uma, como expressas no grafo ao lado.



# Combinação

- Também existem problemas de combinação/seleção com repetição. Exemplo: de quantas formas podemos combinar 2 de 4 letras [U, A, C, G], permitida a repetição?
  - Pelo teorema fundamental da contagem, temos 4 possibilidades no primeiro evento e 4 no segundo. O que nos daria um total de 16 ordenações diferentes.
  - Mas, como se trata de um problema de combinação, e não de ordenação/permutação, descontamos o número de permutações no subconjunto formado pelas letras diferentes da primeira selecionada $(3!)$, chegando ao valor $16\text{-}(3!)=4$.
- A forma analítica para a combinação com repetição é $\mathscr{Cr}^{n}_{k} = (n+k\text{-}1)!/(k!(n\text{-}1)!)$. Por essa fórmula chegamos ao valor $(4+2\text{-}1)!/(2!(4\text{-}1)!) = 5!/(2!\cdot 3!) = 120/(2\cdot 6)=10$.
  - Como esperado, esse valor corresponde à contagem das possibilidades, uma a uma, como expressas no grafo ao lado.



# Dúvidas?


The chances of winning the lottery is 50%. You either win or don't
calm down calm down