

Algebra Lineare

Stefano Piccoli

3 febbraio 2022

Indice

Introduzione	2
0.1 Equazioni a 3 variabili	2
0.2 Caso generale	3
0.2.1 Sistema omogeneo	3
0.2.2 Sistema omogeneo associato	3
0.2.3 Soluzione di un sistema	3
0.2.4 Trovare soluzioni comuni	4
1 Matrici	5
1.0.1 Operazioni	5
1.1 Matrice a scalini	5
1.2 Algoritmo di Gauss	6
1.2.1 Casi possibili	7
1.3 Matrice ridotta a scalini	8
1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan	8
2 Spazi vettoriali	10
2.0.1 Somma	10
2.0.2 Moltiplicazione	10
2.1 Spazi vettoriali di dimensione n	11
2.1.1 Somma	11
2.1.2 Moltiplicazione	11
2.2 Sottospazi vettoriali	12
3 Combinazioni lineari	13
3.1 Span	13
3.2 Dipendenza lineare	14

Introduzione

L'**Algebra Lineare** si occupa di trovare soluzioni ad equazioni e sistemi lineari.

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : y = 5 - 3 = 2$$

Sostituzione: $x = 1$

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = 0$$

Hanno le stesse soluzioni (infinità)

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = -1$$

Nessuna soluzione comune

Quindi abbiamo 1, ∞ o 0 soluzioni comuni. Così sarà in generale.

0.1 Equazioni a 3 variabili

Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio tridimensionale. L'intersezione può essere di 3 tipi:

- Un punto (**unica soluzione**)
- Una retta o un piano
- 0 (∞ **soluzioni**)

0.2 Caso generale

Un sistema di n equazioni lineari a m variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

$$n, m > 0$$

0.2.1 Sistema omogeneo

Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

0.2.2 Sistema omogeneo associato

Un sistema omogeneo associato è un sistema dove la prima parte è uguale ad un altro e i coefficienti dopo l'uguale sono **0**.

0.2.3 Soluzione di un sistema

Soluzione di un sistema = soluzione di un caso particolare + soluzione dell'omogenea associata.

Esempio $2x + 3y = 5, n = 1, m = 2$

Soluzione particolare

$$2x + 3y = 5$$

$$x = y = 1$$

Soluzione omogenea

$$2x + 3y = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}y$$

Soluzione generale Definiamo s parametro nel ruolo di y .

$$x = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)s$$

$$y = 1 + s$$

0.2.4 Trovare soluzioni comuni

Per trovare soluzioni comuni di E è necessario semplificare. Le 3 operazioni utili per semplificare sono:

A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante. $\lambda \neq 0$. $E_i \Rightarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare un'equazione E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j .
 $E_j \Rightarrow E_j + \lambda E_i$.

C) Scambiare due equazioni.

Capitolo 1

Matrici

Per semplificare inseriamo i coefficienti delle equazioni in una **matrice** $n \cdot m$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

1.0.1 Operazioni

Le operazioni che potevamo usare per semplificare il sistema possiamo utilizzarle anche sulle matrici:

- A) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$. $R_i \Rightarrow \lambda \cdot R_i$.
- B) Sostituire la riga R_j con una somma. $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
- C) Scambiare due righe.

1.1 Matrice a scalini

Una matrice $n \cdot m$ è detta a **a scalini** se:

1. Le righe sono **in fondo**.
2. Il primo elemento di ogni riga, se esiste, è **a destra** del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente. Un tale elemento è detto **Pivot**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO}$$

1.2 Algoritmo di Gauss

1. Se la matrice è già in forma a **scalini** si termina. **END**.
2. Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$.
3. Scambiando le righe possiamo supporre che questo elemento è il **pivot** della prima riga. Lo segniamo con p .
4. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
5. Si annullano tutti gli elementi della colonna di p con operazioni di tipo $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
6. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
7. Si ricomincia con la matrice ottenuta **escludendo** la prima riga.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** della prima riga è 1, ora devo annullare tutti gli elementi della colonna del pivot.

$$\xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La prima riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Nella seconda riga il **pivot** è 2, si procede annullando le colonne sotto il pivot.

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

La seconda riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo termina poiché -1 è un **pivot** e non ci sono colonne da annullare.

Conclusioni La matrice ritrasformata in sistema di equazioni è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

La **colonna di** x_4 è senza **pivot** quindi x_4 è detta **variabile libera**, e può assumere qualsiasi valore nel sistema. Sostituiamo la **variabile libera** x_4 con il parametro t .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ -x_3 - 5t = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 - 5t + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2t + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \end{aligned}$$

L'equazione ha **infinite soluzioni** che possono essere parametrizzate in t .

1.2.1 Casi possibili

Se nella forma a scalini:

1. **Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot** $\Leftrightarrow \exists$ **unica soluzione**
2. C'è un **pivot nell'ultima colonna** $\Leftrightarrow \nexists$ **soluzione**
3. C'è una **colonna "non aggiunta" senza pivot** e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow \exists \infty$ **soluzioni**

1.3 Matrice ridotta a scalini

Una matrice è in forma **ridotta** a scalini se:

- È in forma **a scalini**
- Ogni **pivot** è $= 1$
- Ogni **pivot** è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO (A scalini ma non ridotta)}$$

1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo produce una matrice in forma **ridotta** a scalini attraverso operazioni del tipo A, B, C.

1. Con l'**algoritmo di Gauss** si riduce a scalini la matrice.
2. Nelle colonne dei pivot gli elementi della colonna superiore e a sinistra nella riga sono già $= 0$. **Annullare** gli elementi sopra il pivot nella colonna con **operazioni del tipo B** ($R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$).
3. In ogni riga si **cerca il pivot** (se esiste). Se il pivot $\lambda \neq 1$, si moltiplica la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

Esempio Partiamo da una matrice già ridotta a scalini dall'algoritmo di Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Algoritmo di Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan** alla matrice a scalini per trasformarla in matrice **ridotta** a scalini.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si **azzerano** gli elementi nelle colonne dei pivot che sono $\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora nelle colonne dei pivot **tutti gli elementi sono = 0** eccetto il pivot. Si individuano i **pivot** $\neq 1$ e si procede con la loro **trasformazione a 1**. Si moltiplicano le righe con i **pivot** $\neq 1$ per il loro **reciproco**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Conclusioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

Si parla di **spazi vettoriali** quando definiamo punti e vettori nel piano \mathbb{R}^2 . Un **punto** di \mathbb{R}^2 si può descrivere con **due coordinate** (x_1, x_2) , ma anche con un **vettore** (una freccia) dall'**origine** $(0, 0)$ a (x_1, x_2)

2.0.1 Somma

Si può fare la **somma** di due vettori:

- Sulle **coordinate**: $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
- **Geometricamente**: **Legge del parallelogramma** dove la **diagonale del parallelogramma** è la somma dei due vettori.

2.0.2 Moltiplicazione

Un vettore può essere moltiplicato con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Sulle **coordinate**: $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$
- **Geometricamente**: La **lunghezza** è moltiplicata da λ ma l'angolo non cambia.

2.1 Spazi vettoriali di dimensione n

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ uno **spazio n-dim standard** o spa-

zio dei vettori colonna.

Un spazio vettoriale di dimensione **2** corrisponde ad un **piano**, di dimensione **3** ad uno spazio **euclideo**.

Definizione Uno **spazio vettoriale** su \mathbb{R} è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

- **Somma:** $v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$.
- **Prodotto** con $\lambda \in \mathbb{R} : v \in V \rightarrow \lambda \cdot v \in V$.

Le operazioni devono soddisfare:

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. $\exists! 0 \in V : 0 + v = v + 0 = v \forall v$
4. $\forall v \exists! -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
6. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
7. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v$

2.1.1 Somma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Moltiplicazione

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

¹ $\exists!$ = Esiste un unico

2.2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale. Un **sottospazio** $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che

- Dati due vettori nel sottospazio, la loro somma sarà nel sottospazio.

$$v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

- Dato un vettore nel sottospazio, il prodotto con un qualsiasi scalare è contenuto nel sottospazio.

$$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \quad \forall \lambda$$

Un sottospazio $W \subset V$ è uno spazio vettoriale.

Esempio

1. $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

In generale

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nm}t_m = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

è **sottospazio**.

Quindi le **soluzioni** di un **sistema di equazioni lineari omogenei** a n variabili definiscono un **sottospazio** di \mathbb{R}^m .

Non definiscono un sottospazio di \mathbb{R}^m le soluzioni di equazioni lineari **non omogenee** (coefficiente $\neq 0$).

Capitolo 3

Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Una **combinazione lineare** di v_1, \dots, v_m è una somma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Esempio

$$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$ è **combinazione lineare non banale**.

3.1 Span

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ m vettori. Il **sottospazio generato** da v_1, \dots, v_m è:

$$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

Quindi Span è l'insieme di **tutte le combinazioni lineari**.

$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) \subset V$ è un **sottospazio**.

Esempi

1.

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette, rispettivamente dell'asse y e x .

2.

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$$

Allora $W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Quindi un sottospazio può essere lo span di vettori diversi.

3.2 Dipendenza lineare

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

vale solo per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Altrimenti sono **linearmente dipendenti**.

Geometricamente Vettori linearmente dipendenti hanno la stessa retta.

Proposizione v_1, v_2, \dots, v_m sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow \exists i : v_i$ è combinazione lineare dei $v_j \forall j \neq i$.

Verificare se m vettori sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ vale se e solo se $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

dove \mathbf{x} sostituisce $\boldsymbol{\lambda}$ e lo 0 dell'equazione corrisponde al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi v_1, \dots, v_m sono **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow il sistema ammette solo la soluzione banale, cioè $x = (0, \dots, 0)$.