Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare
13 Febbraio 2019

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere <u>**TASSATIVAMENTE**</u> nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Fattorizzare il polinomio $x^8 - 1$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Soluzione. Usando il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ otteniamo:

- $x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1 = (x^4+1)(x^4-1)$.
- $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$.
- $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Su $\mathbb{Q}$ la fattorizzazione è

- $x^8 - 1 = (x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

Su $\mathbb{C}$ possiamo ulteriormente fattorizzare. Innanzitutto $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Poi osserviamo che le radici complesse di $x^4 + 1$ sono:

- $e^{i\frac{\pi}{4}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$;
- $e^{i3\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$;
- $e^{i5\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$;
- $e^{i7\pi/4} = +\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

di cui la prima è coniugata con la quarta e la seconda con la terza. Quindi

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x - e^{i\frac{5\pi}{4}})(x - e^{i\frac{7\pi}{4}}) \\ &= (x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + 1)(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + 1) \end{aligned}$$

dove ciascuno dei due ultimi polinomi reali si ottiene moltiplicando tra loro i due fattori lineari complessi con radici coniugate.

Su $\mathbb{R}$ abbiamo dunque la fattorizzazione

$$(x^8 + 1) = (x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + 1)(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + 1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

mentre su $\mathbb{C}$ fattorizziamo $(x^8 + 1)$ come prodotto di otto fattori lineari che si possono scrivere nella forma $(x - e^{i2\pi k/8})$ con $k = 1, \ldots, 8$ (a seconda della scelta di k si ottengono i fattori evidenziati in precedenza). Si ricordi che $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. ■

su $\mathbb{Q}$	su $\mathbb{R}$	su $\mathbb{C}$
$(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$	vedi sopra	$\prod_{k=1}^{8}(x - e^{2\pi ik/8})$

Esercizio 2. 1) Determinare per quali valori del parametro intero a il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni intere. 2) Trovare tutte le soluzioni per $a = -3$.

$$\begin{cases} ax \equiv 6 \pmod{15} \\ 4x \equiv a \pmod{15} \end{cases}$$

SOLUZIONE.

- La secondo congruenza equivale a $x \equiv 4a \bmod 15$.
- Sostituendo questo valore di x nella prima ottengo $4a^2 \equiv 6 \bmod 15$.
- Questa è una condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione. Abbiamo appena visto che è necessaria. Per mostrare che è sufficiente osserviamo che se a verifica la condizione, $x \equiv 4a \bmod 15$ soddisfa il sistema.
- Possiamo semplificarla moltiplicando per 4 e ottenendo $a^2 \equiv 24 \equiv 9 \bmod 15$.
- Due possibili valori di a si vedono subito: $a \equiv \pm 3 \bmod 15$.
- Per vedere che non ne sono altri spezziamo $a^2 \equiv 9 \bmod 15$ nel sistema equivalente
$$\begin{cases} a^2 \equiv 9 \bmod 3 \\ a^2 \equiv 9 \bmod 5 \end{cases}$$
- Dalla prima congruenza ottengo $a \equiv 0 \bmod 3$ e dalla seconda $a \equiv \pm 1 \bmod 5$, che combinate insieme danno $a \equiv \pm 3 \bmod 15$. Questi sono i valori del parametro per cui il sistema ha soluzione.
- Per $a = -3$ il sistema diventa
$$\begin{cases} -3x \equiv 6 \pmod{15} \\ 4x \equiv -3 \pmod{15} \end{cases}$$
- Dividendo tutto per 3 (anche il modulo), la prima equivale a $-x \equiv 2 \bmod 5$, ovvero $x \equiv 3 \bmod 5$.
- Moltiplicando per 4 la seconda ottengo $x \equiv -12 \equiv 3 \bmod 15$.
- Se un numero è congruo a 3 modulo 15 lo è anche modulo 5, quindi la soluzione del sistema è $x \equiv 3 \bmod 15$.

■

per quali a ha soluzione?	soluzioni per $a = -3$
$a \equiv \pm 3 \bmod 15$	$x \equiv 3 \bmod 15$

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard. Sia $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che nella base standard è rappresentatata dalla matrice

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Trovare gli autovalori di A.
2) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi A.

Soluzione.

- Il polinomio caratteristico è $\det(xI - A) = (x+1)(x+2)(x-4)$.
- Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$.
- La matrice è simmetrica, quindi diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- La forma diagonale ha gli autovalori sulla diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- I tre autospazi sono $V_{-1} = \ker(A + I)$, $V_{-2} = \ker(A + 2I)$ e $V_4 = \ker(A - 4I)$.
- Le matrici di cui occorre calcolare i ker sono rispettivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- I tre ker hanno dimensione 1 e sono generati dagli autovettori

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Gli autovettori sono già ortogonali tra di loro, come ci dovevamo aspettare visto che gli autovalori sono distinti e la matrice è simmetrica.
- Le loro lunghezze sono rispettivamente

$$\sqrt{5}, \qquad 1 \qquad \sqrt{5}/2$$

- Per trovare una base ortonormale di autovettori dividiamo per le lunghezze:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

Autovalori	Base
-1, -2, 4	$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 4. Consideriamo la matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L : V \to V$ tale che per ogni matrice X vale

$$L(X) = XB - BX$$

Soluzione.

- Ponendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ abbiamo

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4b - c & a + 5b - d \\ -4a - 5c + 4d & -4b + c \end{pmatrix}$$

- Una base di V è data dalle matrici con un 1 e tre 0.
- Vediamo cosa fa L applicata alle matrici della base:

$$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- L'immagine di L è data dalle combinazioni lineari di queste quattro matrici. Le due in alto formano un insieme linearmente indipendente, mentre quelle in basso si ottengono come loro combinazioni lineari. Ad esempio la prima matrice in basso si ottiene dalle due in alto nel modo seguente:

$$\frac{5}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

  Abbiamo dimostrato che $\mathrm{Imm}(L)$ ha dimensione 2.
- Visto che $\dim(\ker L) + \dim(\mathrm{Imm}\, L) = \dim(V) = 4$, ne segue che $\dim(\ker L) = 2$.
- Ache senza alcun conto potevamo accorgergi che $\ker(L)$ ha dimensione almeno 2 in quanto vi appartengono la matrice identità I e la matrice B (che non è nello span di I). Per verificarlo basta notare che $L(I) = IB - BI = 0$ e $L(B) = BB - BB = 0$.

■

dimensione nucleo	dimensione immagine
2	2