Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare, versione B
31 maggio 2018
Soluzioni dei problemi di Matematica Discreta

1. Stabilire quante sono le soluzioni di $x^{26} \equiv 1 \pmod{35}$ tli che $0 \leq x < 35$,

Soluzione: Per il teorema cinese del resto, l'equazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^{26} \equiv 1 \pmod{7} \\ x^{26} \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$$

La prima equazione certamente non ha soluzioni per $x \equiv 0 \pmod{7}$. Considerando quindi il caso $x \not\equiv 0 \pmod{7}$, per il piccolo teprema si ha $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Ma allora anche tutte le potenze di x^6 sono congrue a 1 modulo 7. In particolare, $x^{24} \equiv 1 \pmod{7}$ e dunque anche $x^2 = x^{26-24} \equiv 1 \pmod{7}$.

Qyest'ultima congruenza è equivalente alla relazione $7 \mid (x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$. Poiché 7 è un numero primo, si deve avere o $p \mid x-1$, ossia $x \equiv 1 \pmod{7}$, o $7 \mid x+1$, ossia $x \equiv -1 \pmod{7}$.

In conclusione, questa equazione ha due soluzioni, e cioè $x \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

La seconda equazione si tratta allo stesso modo della prima. Avremo $x \not\equiv 0$, $x^4 \equiv x^{24} \equiv 1$, $x^2 = x^{26-24} \equiv 1 \pmod{7}$. Anche in questo caso ci saranno due soluzioni, $x \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

Il sistema dato avrà dunque 4 soluzioni (si può calcolare che esse sono $x \equiv \pm 1, \pm 6 \pmod{35}$). Nell'intevallo richiesto c'è esattamente un numero per ogni classe di congruenza modulo 35. quindi il numero di soluzioni è uguale a 4.

4. Sia $z \in \mathbb{Z}$ un parametro e consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 + ax + 2$.

(a) Stabilire se $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per $a = 2$.

(b) Trovare tutte le radici reali di $p(x)$ quando $a = 5$.

(c) Determinare tutti i valori interi di a per i quali $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

Soluzione:

Ossetviamo innanzitutto che, poiché il polinomio è monico e dunque primitivo, la riducibilità in $\mathbb{Q}[x]$ è equivalente alla riducibilità in $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Per $a = 2$ si ha che $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 2$ soddisfa le condizioni del criterio di Eistenstein per il primo 2, in quanto è monico, tutti i coefficienti salvo il primo sono divisibili per 2, e il termine noto non è divisibile per 4. Pertanto $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Supponiamo ora $a = 5$ quindi $p(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$. Le eventuali radici razionali del polinomio vanno cercate fra i divisori di 2 (non ci sono denominatori in quanto il polinomio è monico). Calcolando i casi possibili, abbiamo

$$p(1) = 12, \quad p(-1) = 0, \quad p(2) = 36, \quad p(-2) = 0\,.$$

Per il toeorema di Ruffini, abbiamo che il polinomio è divisibile sia per $x + 1$ che per $x + 2$. Effettuando la divisione, si ottiene $p(x) = (x + 1)^2(x + 2)$. In definitiva, le radici reali del polinomio (che sono anche razionali) sono -1 e -2.

(c) Se il polinomio è riducibile, allora deve avere una radice intera, che, come abbiamo visto, va cercata fra i divisori di 2. Lasciando a come un parametro, otteniamo

$$p(1) = a + 8, \quad p(-1) = -a + 5, \quad p(2) = 2a + 26, \quad p(-2) = -2a + 10\,.$$

Usando nuovamente il teorema di Ruffini, si ha una radice c quando il polinomio calcolato in c è uguale a zero, e cioè, rispettivamente, per $a = -8$, $a = 5$, $a = -13$, $a = 5$. Pertanto i valori cercati di a sono $-8, 5, -13$.