Compito di MDAL
2 novembre 2017

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia in forma diagonale.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ (dove $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3) data da

$$T(p(x)) = p''(x) + p'(x) + p(1)$$

a) (Punti 1) Scrivere qui la matrice associata a T rispetto alla base $x^3, x^2, x^1, 1$.

b) (Punti 1) Qual è la dimensione di $Imm\ T$? Scrivere qui....

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Siano $v_1 = (1, 0, -1, -1), v_2 = (1, 1, 1, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^4$ (scritti in riga per motivi di spazio).

1. (Punti 1) Trovare una base di $(Span\ (v_1, v_2))^\perp$.

2. (Punti 1) È vero che, comunque si prenda un vettore v_3 in $(Span\ (v_1, v_2))^\perp$, possiamo concludere che v_1, v_3 sono linearmente indipendenti ?

Esercizio 4. Consideriamo la matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dire se l'applicazione $L : V \to V$ tale che per ogni matrice X vale

$$L(X) = XB - BX$$

è lineare. Se è lineare, calcolare una base del nucleo e dell'immagine.

Esercizio 5. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 5×5 sul campo $\mathbb{R}$. Si considerino i seguenti due sottospazi di V: $\mathcal{S} = \{M \in V \,|\, M = M^t\}$ (il sottospazio delle matrici simmetriche) e $\mathcal{A} = \{M \in V \,|\, M = -M^t\}$ (il sottospazio delle matrici antisimmetriche).
a) Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{A}$.
b) Dimostrare che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ sono in somma diretta.
c) Sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(M) = M + M^t.$$

Dire se φ è diagonalizzabile e se lo è determinare una base di autovettori.

Esercizio 6.

1. Siano V e W due spazi vettoriali. Si dimostri che una applicazione lineare $R : V \to W$ è iniettiva se e solo se $Ker\ R = \{O\}$.

2. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alle basi standard è:
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Trovare una base per $Ker\ L$.

4. Trovare una base per $U = (Ker\ L)^\perp$.

5. Sia $e_1, e_2, ..., e_5$ la base standard di $\mathbb{R}^5$ e sia b_1, b_2, b_3 la base standard di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice di L rispetto alla base di $\mathbb{R}^5$ $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 + e_3$, $v_3 = e_1 + e_4$, $v_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v_5 = e_1 + e_2 - e_5$, e alla base di di $\mathbb{R}^3$ $w_1 = b_1 + 2b_2 + b_3$, $w_2 = b_2 + 5b_3$, $w_3 = b_3$.