

Algebra Lineare

Stefano Piccoli

7 aprile 2022

Indice

Introduzione	4
0.1 Equazioni a 3 variabili	4
0.2 Caso generale	5
0.2.1 Sistema omogeneo	5
0.2.2 Sistema omogeneo associato	5
0.2.3 Soluzione di un sistema	5
0.2.4 Trovare soluzioni comuni	6
1 Matrici	7
1.0.1 Operazioni	7
1.1 Matrice a scalini	7
1.2 Algoritmo di Gauss	8
1.2.1 Casi possibili	9
1.3 Matrice ridotta a scalini	10
1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan	10
2 Spazi vettoriali	12
2.0.1 Somma	12
2.0.2 Moltiplicazione	12
2.1 Spazi vettoriali di dimensione n	12
2.1.1 Somma	13
2.1.2 Moltiplicazione	13
2.2 Sottospazi vettoriali	14
2.3 Combinazioni lineari	15
2.4 Span	15
2.4.1 Esercizi	16
2.5 Dipendenza lineare	17
2.6 Basi	19
2.6.1 Coordinate	19
2.7 Dimensione	20
2.7.1 Proprietà	20

2.7.2	Sottospazi	22
	Intersezioni di sottospazi	22
	Formula di Grassmann	22
2.8	Rango	24
2.8.1	Trovare il rango	24
3	Applicazioni lineari	25
3.1	Kernel	26
3.1.1	Trovare il Kernel utilizzando la matrice	26
3.2	Immagine	27
3.2.1	Trovare l'immagine utilizzando la matrice	27
3.2.2	Trovare la dimensione	27
3.3	Dimensione	28
3.4	Prodotto	28
3.5	Matrice associata all'applicazione lineare	29
3.6	Isomorfismo	31
3.7	Composizione di funzioni	32
3.8	Proprietà della moltiplicazione	32
3.9	Cambiamento di base	33
3.10	Determinante	34
3.10.1	Effetto del determinante sulle operazioni elementari di Gauss	35
3.10.2	Teoremi	36
3.10.3	Formula di Cramer	36
4	Autovalori ed Autovettori	38
4.1	Autovalore	39
4.2	Diagonalizzazione	40
4.2.1	Definire se φ è diagonalizzabile	40
	Molteplicità	40
4.3	Numeri complessi	42
4.3.1	Operazioni	42
5	Prodotto scalare	43
5.0.1	Proprietà	43
6	Ortogonalità e ortonormalità	44
6.0.1	Trovare sottospazio ortogonale	44
6.0.2	Base ortonormale	45
	A cosa serve una base ortonormale?	45
	Trovare una base ortonormale	45

	Algoritmo di Gram-Schmidt	46
7	Teorema spettrale	47

Introduzione

L'**Algebra Lineare** si occupa di trovare soluzioni ad equazioni e sistemi lineari.

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : y = 5 - 3 = 2$$

Sostituzione: $x = 1$

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = 0$$

Hanno le stesse soluzioni (infinità)

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = -1$$

Nessuna soluzione comune

Quindi abbiamo 1, ∞ o 0 soluzioni comuni. Così sarà in generale.

0.1 Equazioni a 3 variabili

Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio tridimensionale. L'intersezione può essere di 3 tipi:

- Un punto (**unica soluzione**)
- Una retta o un piano
- 0 (∞ **soluzioni**)

0.2 Caso generale

Un sistema di n equazioni lineari a m variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

$$n, m > 0$$

0.2.1 Sistema omogeneo

Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

0.2.2 Sistema omogeneo associato

Un sistema omogeneo associato è un sistema dove la prima parte è uguale ad un altro e i coefficienti dopo l'uguale sono **0**.

0.2.3 Soluzione di un sistema

Soluzione di un sistema = soluzione di un caso particolare + soluzione dell'omogenea associata.

Esempio $2x + 3y = 5, n = 1, m = 2$

Soluzione particolare

$$2x + 3y = 5$$

$$x = y = 1$$

Soluzione omogenea

$$2x + 3y = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}y$$

Soluzione generale Definiamo s parametro nel ruolo di y .

$$x = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)s$$

$$y = 1 + s$$

0.2.4 Trovare soluzioni comuni

Per trovare soluzioni comuni di E è necessario semplificare. Le 3 operazioni utili per semplificare sono:

A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante. $\lambda \neq 0$. $E_i \Rightarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare un'equazione E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j .
 $E_j \Rightarrow E_j + \lambda E_i$.

C) Scambiare due equazioni.

Capitolo 1

Matrici

Per semplificare inseriamo i coefficienti delle equazioni in una **matrice** $n \cdot m$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

1.0.1 Operazioni

Le operazioni che potevamo usare per semplificare il sistema possiamo utilizzarle anche sulle matrici:

- A) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$. $R_i \Rightarrow \lambda \cdot R_i$.
- B) Sostituire la riga R_j con una somma. $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
- C) Scambiare due righe.

1.1 Matrice a scalini

Una matrice $n \cdot m$ è detta a **a scalini** se:

1. Le righe sono **in fondo**.
2. Il primo elemento di ogni riga, se esiste, è **a destra** del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente. Un tale elemento è detto **Pivot**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO}$$

1.2 Algoritmo di Gauss

1. Se la matrice è già in forma a **scalini** si termina. **END**.
2. Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$.
3. Scambiando le righe possiamo supporre che questo elemento è il **pivot** della prima riga. Lo segniamo con p .
4. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
5. Si annullano tutti gli elementi della colonna di p con operazioni di tipo $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
6. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
7. Si ricomincia con la matrice ottenuta **escludendo** la prima riga.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** della prima riga è 1, ora devo annullare tutti gli elementi della colonna del pivot.

$$\xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La prima riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Nella seconda riga il **pivot** è 2, si procede annullando le colonne sotto il pivot.

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

La seconda riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo termina poiché -1 è un **pivot** e non ci sono colonne da annullare.

Conclusioni La matrice ritrasformata in sistema di equazioni è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

La **colonna di** x_4 è senza **pivot** quindi x_4 è detta **variabile libera**, e può assumere qualsiasi valore nel sistema. Sostituiamo la **variabile libera** x_4 con il parametro t .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ -x_3 - 5t = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 - 5t + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - 2t + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \end{aligned}$$

L'equazione ha **infinite soluzioni** che possono essere parametrizzate in t .

1.2.1 Casi possibili

Se nella forma a scalini:

1. **Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot** $\Leftrightarrow \exists$ **unica soluzione**
2. C'è un **pivot nell'ultima colonna** $\Leftrightarrow \nexists$ **soluzione**
3. C'è una **colonna "non aggiunta" senza pivot** e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow \exists \infty$ **soluzioni**

1.3 Matrice ridotta a scalini

Una matrice è in forma **ridotta** a scalini se:

- È in forma **a scalini**
- Ogni **pivot** è $= 1$
- Ogni **pivot** è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO (A scalini ma non ridotta)}$$

1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo produce una matrice in forma **ridotta** a scalini attraverso operazioni del tipo A, B, C.

1. Con l'**algoritmo di Gauss** si riduce a scalini la matrice.
2. Nelle colonne dei pivot gli elementi della colonna superiore e a sinistra nella riga sono già $= 0$. **Annullare** gli elementi sopra il pivot nella colonna con **operazioni del tipo B** ($R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$).
3. In ogni riga si **cerca il pivot** (se esiste). Se il pivot $\lambda \neq 1$, si moltiplica la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

Esempio Partiamo da una matrice già ridotta a scalini dall'algoritmo di Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Algoritmo di Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan** alla matrice a scalini per trasformarla in matrice **ridotta** a scalini.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si **azzerano** gli elementi nelle colonne dei pivot che sono $\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora nelle colonne dei pivot **tutti gli elementi sono = 0** eccetto il pivot. Si individuano i **pivot** $\neq 1$ e si procede con la loro **trasformazione a 1**. Si moltiplicano le righe con i **pivot** $\neq 1$ per il loro **reciproco**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Conclusioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

Si parla di **spazi vettoriali** quando definiamo punti e vettori nel piano \mathbb{R}^2 . Un **punto** di \mathbb{R}^2 si può descrivere con **due coordinate** (x_1, x_2) , ma anche con un **vettore** (una freccia) dall'**origine** $(0, 0)$ a (x_1, x_2)

2.0.1 Somma

Si può fare la **somma** di due vettori:

- Sulle **coordinate**: $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
- **Geometricamente**: Legge del **parallelogramma** dove la **diagonale del parallelogramma** è la somma dei due vettori.

2.0.2 Moltiplicazione

Un vettore può essere moltiplicato con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Sulle **coordinate**: $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$
- **Geometricamente**: La **lunghezza** è moltiplicata da λ ma l'angolo non cambia.

2.1 Spazi vettoriali di dimensione n

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ uno **spazio n-dim standard** o spazio dei vettori colonna.

Un spazio vettoriale di dimensione **2** corrisponde ad un **piano**, di dimensione **3** ad uno spazio **euclideo**.

Definizione Uno **spazio vettoriale** su \mathbb{R} è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

- **Somma:** $v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$.
- **Prodotto** con $\lambda \in \mathbb{R} : v \in V \rightarrow \lambda \cdot v \in V$.

Le operazioni devono soddisfare:

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. $\exists! 0 \in V : 0 + v = v + 0 = v \forall v$
4. $\forall v \exists! -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
6. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
7. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v$

2.1.1 Somma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Moltiplicazione

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

¹ $\exists!$ = Esiste un unico

2.2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale. Un **sottospazio** $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che

- Dati due vettori nel sottospazio, la loro somma sarà nel sottospazio.

$$v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

- Dato un vettore nel sottospazio, il prodotto con un qualsiasi scalare è contenuto nel sottospazio.

$$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \quad \forall \lambda$$

Un sottospazio $W \subset V$ è uno spazio vettoriale.

Esempio

1. $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

In generale

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nm}t_m = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

è **sottospazio**.

Quindi le **soluzioni** di un **sistema di equazioni lineari omogenei** a n variabili definiscono un **sottospazio** di \mathbb{R}^m .

Non definiscono un sottospazio di \mathbb{R}^m le soluzioni di equazioni lineari **non omogenee** (coefficiente $\neq 0$).

2.3 Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Una **combinazione lineare** di v_1, \dots, v_m è una somma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Esempio

$$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$ è **combinazione lineare non banale**.

2.4 Span

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ m vettori. Il **sottospazio generato** da v_1, \dots, v_m è:

$$Span(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \}$$

Quindi $Span$ è l'insieme di **tutte le combinazioni lineari**.

$Span(v_1, v_2, \dots, v_m) \subset V$ è un **sottospazio**.

Esempi

1.

$$\mathbb{R}^2 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette, rispettivamente dell'asse x e y .

2.

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$$

$$\text{Allora } W = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Quindi un **sottospazio** può essere lo **span di vettori diversi**.

2.4.1 Esercizi

Verificare che $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ applicando l'**Algoritmo di Gauss** si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] &\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

3 **pivots** nelle 3 colonne a sinistra (non ci interessa a destra) quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 = b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

ammette un' **unica soluzione** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Il **vettore generale** v è contenuto in $\text{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

In generale Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è **combinazione lineare** di $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \Rightarrow \text{Span}(v_1, v_1, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, v_1, \dots, v_{n-1})$.

Trovare sistema di equazioni lineari omogenee tale che il sottospazio di \mathbb{R}^n associato sia $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$

1. Si sceglie una base di $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$. Possiamo supporre la base (v_1, \dots, v_r) con $r \leq m$.

2. Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$
 v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow nella forma a scalini di A c'è un **pivot in ogni colonna**.

3. Sia $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ qualsiasi.
 $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \Leftrightarrow v, v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** \Leftrightarrow
 nella forma a scalini della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$ ci sono sempre **r**
pivot nelle prime **r** colonne ovvero **l'ultima colonna non contiene pivots**.
 Questo dà equazioni lineari per b_1, \dots, b_n .

Esempio

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono vettori **linearmente indipendenti** perché non sono multipli tra loro.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** da controllare è nell'ultima colonna quindi se $b_3 - b_1 = 0 \Leftrightarrow$ **non** è un pivot della terza colonna.

Quindi $\text{Span}(v_1, v_2) = \{\text{soluzioni di } x_3 - x_1 = 0\}$

2.5 Dipendenza lineare

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

vale **solo** per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Altrimenti sono **linearmente dipendenti**.

Geometricamente Vettori linearmente dipendenti hanno la **stessa retta**.

Proposizione v_1, v_2, \dots, v_m sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow \exists i : v_i$ è combinazione lineare dei $v_j \forall j \neq i$.

Verificare se m vettori sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ **vale se e solo se** $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è **soluzione del sistema**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

dove \mathbf{x} **sostituisce** $\boldsymbol{\lambda}$ e lo 0 dell'equazione corrisponde al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi v_1, \dots, v_m sono **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow il sistema ammette **solo la soluzione banale**, cioè $x = (0, \dots, 0)$.

Esempio Verificare che i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 siano **linearmente indipendenti**.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema **lineare omogeneo** con la **matrice dei coefficienti associata**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Gauss:

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono 3 **pivots** e una **variabile libera** $\Rightarrow \infty$ soluzioni.

Il sistema ammette **soluzioni non banali** \Rightarrow i vettori sono **linearmente dipendenti**.

2.6 Basi

Un sistema v_1, \dots, v_n di vettori è una **base** di V se:

- i vettori v_1, \dots, v_n sono **linearmente indipendenti**
- $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$

Esempio Base standard di \mathbb{R}^n :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

Dunque $\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2.6.1 Coordinate

Sia v_1, \dots, v_n una base di V e $v \in V$ un vettore. Allora

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ovvero **ogni vettore** si scrive in un modo **unico** come **combinazione lineare** degli **elementi della base**.

Gli α_i sono le **coordinate** di v rispetto alla **base**.

Trovare le coordinate di un vettore rispetto alla base

Sappiamo da esercizi precedenti che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono

una **base** di \mathbb{R}^3 . Trovare le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$ e $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.7 Dimensione

La **dimensione** di uno spazio V sarà definita come il **numero degli elementi di una base**. Questo numero è lo stesso per ogni base.
2

2.7.1 Proprietà

Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_r \in V$ i casi sono:

- $r > n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti**
- $r = n$ e v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow è una **base**
- $r < n$ e v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow si **completa**³ in una **base**

²Dimostrazione a fine lezione 06.

³Posso aggiungere vettori affinché diventi una base

Esempio

Decidiamo se $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base di \mathbb{R}^3

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ se sono **indipendenti** formano una **base**.

Verifichiamo con **Gauss**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivots \Rightarrow i vettori sono **linearmente dipendenti**.

Però i **pivots** sono nelle colonne 1,3 quindi escludendo la colonna 2:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sono } \mathbf{linearmente indipendenti}^4$$

Ora $\dim \text{Span}(v_1, v_2) = 2, \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Troviamo ora un vettore di \mathbb{R}^3 **non contenuto** nello $\text{Span}(v_1, v_2)$.

Una strategia può essere partire dalla **base standard**: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Una

delle 3 basi standard non è sicuramente contenuta nello $\text{Span}(v_1, v_2)$ altrimenti esso sarebbe una base.

Cerchiamo quindi il vettore della base standard che è linearmente indipendente agli altri 2 vettori. Proviamo con e_3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow e_3$ completa la nostra base. e_1 invece **non la completa**.

Proposizione Sia $W \subset V$ un **sottospazio**. Allora

1. $\dim W \leq \dim V$
2. Se $W \neq V$, allora $\dim W < \dim V$

Questa proposizione è utile per calcolare le dimensioni dei sottospazi.

⁴Il vettore v_2 è il vecchio vettore v_3 , cambio di notazione per proseguire l'esercizio

Esempio

Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ (**Matrici simmetriche**)

$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ (base standard).

$V \neq M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3$.

Ma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono **linearmente indipendenti** $\Rightarrow \dim V = 3$

2.7.2 Sottospazi

Intersezioni di sottospazi

Se $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ è sottospazio.

Formula di Grassmann

Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi allora

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Osservazione $V_1 + V_2$ è un **sottospazio**.

Esempio

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3, \text{ ma anche } V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Formula di Grassmann Se $\dim < \infty, V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Esempio In \mathbb{R}^4 consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \text{Span} \left(v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $\dim(V \cap W)$, $\dim(V + W)$

Soluzione

$\dim W = 2$ perché ovviamente $W_1 \neq \lambda W_2$.

Calcoliamo $\dim V$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \text{ variabili libere} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 = x_3 + 6x_4 \end{cases}$$

$$\text{Soluzione generale} \begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Posso scrivere in forma parametrizzata $x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e ora sappiamo

che **$\dim V = 2$** e **v_1, v_2 è una base.**

Cerchiamo ora $\dim(V + W)$.

$V + W = \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Troviamo una base con **Gauss**:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_2 \circ R_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + \frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 pivots quindi le prime 3 colonne sono indipendenti.

Quindi $\dim \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \dim(V + W) = 3$.

Grassmann: $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$

Potevamo anche calcolare direttamente $\dim(V \cap W)$:

$$Y \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Sostituiamo e otteniamo:

$$\begin{cases} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \dim(V \cap W) = 1 \text{ perché } V \cap W = \{\lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2.8 Rango

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, il **rango** di A è

$$rg(A) := \dim \text{Span} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

2.8.1 Trovare il rango

Per calcolare $rg(A)$ bisogna:

- estrarre una base di $\text{Span}(\text{colonne})$.
- usare l'algoritmo di Gauss sulla matrice A

Se numero colonne linearmente indipendenti = numero dei pivots della forma a scalini $\Rightarrow rg(A) = \text{numero di pivot nella forma a scalini}$.

Capitolo 3

Applicazioni lineari

Definizione Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su \mathbb{R} . Un'applicazione lineare è una funzione $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ che soddisfa:

- $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$
- $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_1$

3.1 Kernel

Il **Kernel o nucleo** è un sottospazio:

$$\text{Ker}(\varphi) := \{v \in V_1 : \varphi(v) = 0\}$$

Proposizione $\text{Ker}(\varphi_1) \subset V_1$ è un sottospazio.

3.1.1 Trovare il Kernel utilizzando la matrice

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$v \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ è soluzione di } \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Quindi per trovare $\text{Ker}(\varphi)$ bisogna **risolvere il sistema omogeneo** (ad esempio con Gauss).

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $\text{Ker}(\varphi)$.

Applichiamo Gauss alla matrice di φ .

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \text{soluzioni di } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \text{ soluzione generale del sistema.}$$

$$\text{Quindi } \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \text{ è la } \mathbf{base} \text{ di } \text{Ker}(\varphi).$$

3.2 Immagine

L'immagine è un sottospazio:

$$Im(\varphi) := \{w \in V_2 : \exists v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v)\}$$

Proposizione $Ker(\varphi) \subset V_2$ è un sottospazio.

3.2.1 Trovare l'immagine utilizzando la matrice

Sappiamo che se e_1, \dots, e_n è la base standard,

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma $Im(\varphi) = Span(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

Quindi **$Im(\varphi)$** è lo **span delle colonne** di A in \mathbb{R}^m

3.2.2 Trovare la dimensione

Per trovare la **$dim Im(\varphi)$** bisogna determinare la dimensione dello **span**, ovvero il **rango**.

Se φ ha matrice A allora **$dim Im(\varphi) = rg(A)$**

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $Im(\varphi)$.

Applichiamo Gauss alla matrice di φ .

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono **pivots** nelle prime due colonne $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è la base di $Im(\varphi)$ e

il **rango** è 2.

3.3 Dimensione

Teorema Se $\dim V_1 < \infty$ allora

$$\dim \text{Ker}(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi) = \dim V_1$$

in $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$. La dimensione di V_2 non riguarda questo teorema.

3.4 Prodotto

Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$, il loro **prodotto** è il vettore in \mathbb{R}^m :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Il vettore moltiplicato deve avere lo stesso numero di colonne della matrice.

Proposizione Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale, allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Esempio 1 Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x + 2y + 3z$. Trovare $\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Naturalmente $1 \cdot 1 + -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2$. Ma anche:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 1, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 3.$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = [1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 3 = 2$$

Esempio 2 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} \text{ Vettore generico}$$

Conclusione Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare, $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ base standard allora:

- $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ **determina φ in maniera unica**
- $\forall v$ possiamo calcolare $\varphi(v) = A \cdot v$ dove $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice definita nel punto precedente.

3.5 Matrice associata all'applicazione lineare

Sia $\varphi : V \rightarrow W$ lineare.

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V [$\dim V = n$]

Sia $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ una base di W [$\dim W = m$]

Scriviamo

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m \\ \varphi(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m\end{aligned}$$

La matrice di φ rispetto alla base B, B' è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Quindi

$$A = [\varphi(e_1) \mid \varphi(e_2) \mid \dots \mid \varphi(e_n)]$$

dove le **colonne sono le coordinate di $\varphi(e_i)$** rispetto a e'_1, \dots, e'_m .

Teorema Se $v = b_1e_1 + \dots + b_ne_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore

colonna in \mathbb{R}^n : $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ sono date dal vettore colonna

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Importante La matrice A è sempre definita con **due basi B, B'** .

Esempio $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi scrivendo le coordinate **non** rispetto alla base standard ma ad **altre basi**, φ può diventare molto più semplice. Per trovare **basi ottimali** si utilizzeranno gli **autovettori**.

3.6 Isomorfismo

Un'applicazione lineare $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ è un **isomorfismo** se

- $Im(\varphi) = V_2$
- per $v_1, v'_1 \in V_1$ $\varphi(v_1) = \varphi(v'_1) \Leftrightarrow v_1 = v'_1$. Notazione: $v_1 \xrightarrow{\sim} v_2$

Dunque φ è un **isomorfismo** se $\forall v_2 \in V_2 \exists! v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2$.

Osservazione φ è un isomorfismo $\Leftrightarrow Im(\varphi) = V_2, Ker(\varphi) = \{0\}$.

Esempio $V_1 = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), V_2 = \mathbb{R}^4$ $\varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ è un isomorfismo.}$$

Ma anche $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo**. $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Osservazione Sia V uno spazio vettoriale, $dim V = n$ e $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V . Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

Allora $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo** $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

Infatti φ è lineare, $Im(\varphi) = \mathbb{R}^n, Ker(\varphi) = \{0\}$.

Osservazione Sia $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ una qualsiasi applicazione lineare, $dim V_1 = n, dim V_2 = m$.

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1 .

$B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ base di V_2 .

Sia A la matrice di φ rispetto a B e B' .

B definisce $\psi : V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

B' definisce $\psi' : V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$.

Lemma

- ψ^{-1} induce un **isomorfismo** $Ker(v \mapsto Av) \xrightarrow{\sim} Ker(\varphi)$
- ψ' induce un **isomorfismo** $Ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} Ker(v \mapsto Av)$

3.7 Composizione di funzioni

Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ applicazioni lineari.

Allora $\psi \circ \varphi : V_1 \rightarrow V_3$ è **lineare**.

Siano

$B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1

$B_2 = (f_1, \dots, f_n)$ base di V_2

$B_3 = (g_1, \dots, g_n)$ base di V_3

Siano

$B =$ matrice di φ rispetto a B_1, B_2

$A =$ matrice di ψ rispetto a B_2, B_3

Allora la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a B_1, B_3 è $A \cdot B$.

3.8 Proprietà della moltiplicazione

1. $A(BC) = (AB)C$

2. $A \cdot B = B \cdot A$ **non è vero in generale**

3. Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice **identità** di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora
 $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : I \cdot A = A \cdot I = A$

4. Se $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ isomorfismo $\Rightarrow \exists \varphi^{-1} : V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$ ¹.

Se fissiamo le basi

B_1 di V_1 , B_2 di V_2 , φ ha matrice A e φ^{-1} ha matrice $A^{-1} \Rightarrow$

$$A \cdot A^{-1} = I, A^{-1} \cdot A = I$$

5. **Matrice inversa:** Esiste **solo** se è la matrice di φ isomorfismo.

¹id=identità

3.9 Cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale di dim n e B, B' due basi.
La **matrice di cambiamento di base** rispetto a (B, B') è definita da²

$$P := [id_V]_B^{B'}$$

Esempio Siano $V = \mathbb{R}^2, B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\varphi : v \mapsto A \cdot v$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Allora:

$[\varphi]_B = A$, calcoliamo $[\varphi]_{B'}$:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $[\varphi]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calcoliamo ora $P = [id_V]_B^{B'}$

Calcoliamo con Gauss la **matrice del cambiamento di base**. Scriviamo la base B usando le coordinate della base B' .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è la **matrice del cambio di base** da B a B'

³ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è la **matrice di cambio di base** da B' a B

Si nota che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

² id_V che va da B a B'

³Usando lo stesso metodo ma è banale poiché B , ovvero la base di destinazione, è la matrice identità

In generale $[id_V]_{B'}^B = [id_V]_B^{B'} = [id_V \circ id_V]_B = [id_V]_B$ è la **matrice identità**.

Quindi $P = [id_V]_B^{B'}$ è invertibile e $P^{-1} = [id_V]_{B'}^B$.

Teorema Se B, B' sono due basi di V , P matrice di cambiamento di base. $\varphi : V \rightarrow V$ applicazione lineare con $A = [\varphi]_B$ allora $[\varphi]_{B'} = PAP^{-1}$

Esempio Con l'esempio precedente:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.10 Determinante

Il **determinante** sarà un funzione $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprietà fondamentale:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono **linearmente indipendenti**
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono **linearmente indipendenti**

Esempi

- $n = 1$ $A = [a]$ $\det(A) = a$
- $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$

Geometricamente

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{area del parallelogramma costruito sui lati } \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Definizione generale Per induzione su $n-1$, sapendo $n=1,2$:

Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j :

- $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per i fisso (**sviluppo secondo la riga i**)
- $\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per j fisso (**sviluppo secondo la colonna j**)

Il risultato sarà uguale per entrambe le formule e per qualsiasi i, j scelto.

Promemoria per i segni

$$(-1)^{i+j} : \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Esempio Per $n=3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 0 + (-1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 - (-1) = \mathbf{3}$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 = 2 + 1 = \mathbf{3}$$

Esempio Matrice triangolare superiore ovvero $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

3.10.1 Effetto del determinante sulle operazioni elementari di Gauss

1. Scambio di due righe

adiacenti: $\det(A) \rightarrow -\det(A)$

scambio tra riga i e j qualsiasi: si eseguono cambi successivi adiacenti.

2. Sostituzione della riga R_i con $R_i + \lambda R_j (j \neq i)$: $\det(A)$ non cambia

3.10.2 Teoremi

Teorema Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Corollario Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A^{-1} \text{ esiste} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ allora } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Proposizione Sia $\varphi : V \rightarrow V$ una mappa lineare, B, B' due basi di V , A la matrice di φ rispetto a B , A' la matrice di φ rispetto a B' .

$$\det(A) = \det(A')$$

Quindi **$\det(A)$ dipende solo da φ** e non dalla base.

Corollario Se $\varphi : V \rightarrow V$ è un'applicazione lineare, A la matrice di φ rispetto ad una qualsiasi base

$$\text{Ker}(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) \neq V \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

3.10.3 Formula di Cramer

Definizione Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, la matrice **aggiunta** di A è

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \text{ dove } \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

Formula di Cramer

$$A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$$

dove $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

Corollario Se $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$$

Esempio Per $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Esempio Per $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{22} \cdot \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Capitolo 4

Autovalori ed Autovettori

Definizione Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , $\dim V < \infty$, $\varphi : V \rightarrow V$ applicazione lineare.

$\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore** di φ se $\exists v \neq 0 \in V : \varphi(v) = \lambda \cdot v$.

In questo caso v è un **autovettore** associato a λ .

Osservazioni

- v può essere autovettore per un solo λ
- λ può essere autovalore di molti vettori

Proposizione

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori per λ formano un sottospazio di V :

V_λ Autospazio

- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = (0)$

4.1 Autovalore

λ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0$

Ma se A è la matrice di φ rispetto ad una base $\Rightarrow A - \lambda I$ è la matrice di $\varphi - \lambda \cdot \text{id}$.

$\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definizione Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il **polinomio caratteristico** di A è:

$$P_A(t) := \det(A - t \cdot I) \in \mathbb{R}[t]$$

dove t è una variabile.

Conclusione λ è **autovalore** di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ **radice** di $P_A(t)$

dove A è matrice di φ rispetto ad una base.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - t & \dots & a_{nn} - t \end{bmatrix}$$

4.2 Diagonalizzazione

Definizione φ è **diagonalizzabile** se \exists una base di V dove la matrice di φ è diagonale.

Proposizione φ è **diagonalizzabile** $\Leftrightarrow \exists$ base di V costituita di **autovettori** di φ .

Proposizione Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono **autovalori distinti** di φ , v_i **autovettore** associato a λ_i dove $i = 1, \dots, n \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti**

Corollario

1. Ci sono un **numero finito** di **autovalori** distinti perché $\dim V < \infty$.
2. φ è **diagonalizzabile** \Leftrightarrow se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori distinti di φ allora

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_n} = \dim V$$

3. Se $n = \dim V$ e φ ha n autovalori distinti $\Rightarrow \varphi$ è **diagonalizzabile**

4.2.1 Definire se φ è diagonalizzabile

1. Trovare gli **autovalori**

Se ci sono $n = \dim V$ **distinti** \Rightarrow **diagonalizzabile**

2. Trovare gli **autovettori** per ogni λ_i e calcolare **$\dim V_{\lambda_i}$** .

Se $\sum_i \dim V_{\lambda_i} = \dim V \Rightarrow$ è **diagonalizzabile**

Se $\sum_i \dim V_{\lambda_i} < \dim V \Rightarrow$ **NON** è **diagonalizzabile**

Molteplicità

Definizione Sia λ un autovalore di φ .

La **molteplicità algebrica** di λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(t)$.

La **molteplicità geometrica** di λ è $\dim V_{\lambda}$.

Proposizione Molteplicità geometrica di $\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ .

Conclusione φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \forall$ autovalore λ di φ è reale e molteplicità algebrica = molteplicità geometrica.

In particolare se troviamo λ con molteplicità geometrica < molteplicità algebrica $\Rightarrow \varphi$ non è diagonalizzabile.

Esempio Determinare se la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 0 \\ 1 & -2t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t) \begin{bmatrix} -t & 3 \\ 1 & -2-t \end{bmatrix} =$$

$$(1-t)(t^2 + 2t - 3) = (1-t)(t-1)(t+3) = (t-1)^2(t+3)$$

Autovalori: 1, -3, 1

Autovettori per 1: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y = x \\ x - 2y = y \\ x - 3y + z = z \end{cases}$

$$x = 3y \Rightarrow \dim(V_1) = 2$$

Una base di V_1 : $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovettori per -3: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -3x \\ x - 2y = -3y \\ x - 3y + z = -3z \end{cases}$

$$x = -y, -4y = -4z \Rightarrow x = -y = -z \Rightarrow \dim(V_{-3}) = 1$$

Una base di V_{-3} : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A è diagonalizzabile nella base $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dove diventa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4.3 Numeri complessi

Un **numero complesso** è un'espressione $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i è un parametro formale con la proprietà $i^2 = -1$.

Ogni $a \in \mathbb{R}$ è anche un numero complesso: $a = a + 0i$.

Notazione \mathbb{C} è l'insieme dei **numeri complessi**.

Osservazione Se $\Delta \in \mathbb{R}, \Delta < 0, (\sqrt{-\Delta} i)^2 = \Delta \Rightarrow$
 \forall polinomio $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ ha **radici** in \mathbb{C} .

Teorema Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti **complessi** ammette una radice in \mathbb{C} .

Definizione Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il suo **coniugato** è $\bar{z} = a - bi$.

Teorema Se $f \in \mathbb{R}[x], z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = 0 \Rightarrow$ anche $f(\bar{z}) = 0$.
Quindi le **radici** di $f \in \mathbb{R}[x]$ sono **reali** o **coppie di numeri complessi coniugati**.

4.3.1 Operazioni

- Se $z = a + bi, z' = a' + b'i$
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$

Somma

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

Prodotto con scalare

$$\lambda z = \lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

Prodotto di numeri complessi

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Capitolo 5

Prodotto scalare

Siano $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ due vettori in \mathbb{R}^n .

Il loro **prodotto scalare** è $\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}$.
 $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama **prodotto scalare standard**.

5.0.1 Proprietà

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
2. Per $v \in \mathbb{R}^n$ **fisso**, la funzione $w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'**applicazione lineare** $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
Per $w \in \mathbb{R}^n$ **fisso**, la funzione $v \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'**applicazione lineare** $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
3. $\forall v \in \mathbb{R}^n \langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Definizione Se $v \in \mathbb{R}^n$, la sua **norma** è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Capitolo 6

Ortogonalità e ortonormalità

Definizione $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se $\langle v, w \rangle = 0$

Un **sistema** v_1, \dots, v_n è un **sistema ortogonale** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$.

Un **sistema** v_1, \dots, v_n è un **sistema ortonormale** se è ortonormale e $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \ \forall i$

Proposizione Un sistema ortogonale di vettori è linearmente indipendente.

Osservazione Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\varphi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora:

$\text{Ker}(\varphi_v) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0\}$

Notazione: $\text{Ker}(\varphi_v) =: \langle v \rangle^\perp$.

Terminologia: $\langle v \rangle^\perp$ è il sottospazio ortogonale a v .

6.0.1 Trovare sottospazio ortogonale

Generalizzazione Se $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$ allora:

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp =$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{bmatrix}$$

Esempio Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Troviamo il sottospazio $\langle v, w \rangle^\perp$.

$\langle v, w \rangle^\perp$ è il **sottospazio delle soluzioni**: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Troviamo una base: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$

Soluzione generale:

$$\begin{bmatrix} s \\ -s - t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ sono una base di } \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^\perp.$$

6.0.2 Base ortonormale

Teorema Ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ ammette una base **ortonormale**.

Corollario Sia $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ un **sistema ortonormale** in \mathbb{R}^n . Allora $\exists v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n : v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una **base ortonormale (ON)** di \mathbb{R}^n .

Corollario $\dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = n - r$.

Corollario

Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio, sia $V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}$ allora $V \cap V^\perp = \{0\}$ e $\text{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$ e in particolare

$$\dim V + \dim V^\perp = n$$

A cosa serve una base ortonormale?

Se v_1, \dots, v_n è una base **ortonormale** di \mathbb{R}^n allora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Trovare una base ortonormale

- $\dim V = 1$ Se $V = \langle v \rangle$, $\overline{v_1} = \frac{v}{\|v\|}$ è una **base ortonormale**.
- $\dim V = 2$ Se v_1, v_2 base di V , $\overline{v_1}$

Algoritmo di Gram-Schmidt

Se v_1, \dots, v_n sono vettori **linearmente indipendenti** di V costruiamo un insieme di **vettori ortogonali** w_1, \dots, w_n .

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$
- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$
- \dots
- $w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}$

Trovati w_1, \dots, w_n vettori **ortogonali** li **normalizziamo**:

$$w'_i = \frac{w_i}{||w_i||}$$

I vettori w'_1, \dots, w'_n formeranno una **base ortonormale**.

Capitolo 7

Teorema spettrale

Definizione $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ è **simmetrica** se $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ oppure se $A = A^T$ dove A^T è la **matrice trasposta**.

Lemma Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, allora

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema spettrale per matrici simmetriche

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è **simmetrica**, ogni **autovalore** di A è **reale** ed A è **diagonalizzabile** in una base **ortonormale** di **autovalori**.