Compitino di Matematica Discreta e Algebra Lineare
4 Aprile 2019

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti vettori colonna

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ 1-3t \\ t \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ t^2-3 \\ t+3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Per quali valori di t si ha che v_1, v_2, v_3 sono vettori indipendenti?.

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \iff$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 3 & 4t & t^2-3 \\ -3 & 1-3t & t+3 \\ 0 & t & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 3 & 4t & t^2-3 \\ -3 & 1-3t & t+3 \\ 0 & t & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & t & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-tR_2]{R_3-tR_2} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-t^2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix} \end{array}$$

$9-t^2=0 \leftrightarrow c$ libera
$\leftrightarrow$ dipendenti

$9-t^2=0 \leftrightarrow t=\pm 3$

valori di t

$$\boxed{t \neq \pm 3}$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e sia $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ il sottospazio dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che $p'(-1) = 0$, dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

i) Trovare la dimensione di V.

ii) Trovare una base di V.

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$p'(-1) = 3a - 2b + c = 0$$

a, b, d libere , $c = -3a + 2b$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -3a+2b \\ d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ +2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\dim V = 3$

base $= \{ x^3 - 3x,\ x^2 + 2x,\ 1 \}$

dimension

dimensione	base
3	$x^3 - 3x$ $x^2 + 2x$ 1

Esercizio 3. Sia $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ una successione tale che $a_0 = 0, a_2 = 16$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ (il valore di a_1 non viene dato). Trovare una formula esplicita per a_n.

polinomio caratteristico $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

radici $\begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$$a_n = A\,3^n + B(-1)^n$$

$$a_0 = 0 \implies A = -B$$

$$a_2 = 16 = A\,3^2 + B(-1)^2 = 9A + B = 9A - A = 8A$$

$$A = 2,\ B = -2$$

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 3^n - 2(-1)^n}$$

Esercizio 4. Trovare tutte le soluzioni della congruenza

$$\begin{cases} 2^x \equiv 8 \bmod 51 \\ 3x \equiv 1 \bmod 28 \end{cases}$$

- $2^x \equiv 8 \ (51) \iff \begin{cases} 2^x \equiv 8 \ (3) \\ 2^x \equiv 8 \ (17) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \ (2) \\ x \equiv 3 \ (8) \end{cases}$

$$\iff x \equiv 3 \ (8)$$

- $3x \equiv 1 \ (28) \overset{\times 9}{\iff} -x \equiv 9 \ (28)$

$$\iff x \equiv -9 \ (28)$$

$$\iff x \equiv 19 \ (28)$$

- $\begin{cases} x \equiv 3 \ (8) \\ x \equiv 19 \ (28) \end{cases}$

$$x = 19 + 28y$$
$$19 + 28y \equiv 3 \ (8)$$
$$3 + 4y \equiv 3 \ (8)$$
$$4y \equiv 0 \ (8)$$
$$y \equiv 0 \ (2) \qquad y = 2k$$

- $x = 19 + 28(2k)$

$x \equiv 19 \ (56)$

Risposta

$$\boxed{x \equiv 19 \ (56)}$$