Algebra Lineare

Stefano Piccoli

9 marzo 2022

Indice

Introduzione

L'**Algebra Lineare** si occupa di trovare soluzioni ad equazioni e sistemi **lineari**.

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$E2 - E1$: **y=5-3=2**
Sostituzione: **x=1**

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$E2 - E1 : 0 = 0$
Hanno le stesse soluzioni (infinità)

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$E2 - E1 : 0 = -1$
Nessuna soluzione comune

Quindi abbiamo 1, ∞ o 0 soluzioni comuni. Così sarà in generale.

0.1 Equazioni a 3 variabili

Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio tridimensionale. L'intersezione può essere di 3 tipi:

- Un punto (**unica soluzione**)
- Una retta o un piano
- 0 (∞ **soluzioni**)

0.2 Caso generale

Un sistema di n equazioni lineari a m variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_i \in \Re$$
$$n, m > 0$$

0.2.1 Sistema omogeneo

Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

0.2.2 Sistema omogeneo associato

Un sistema omogeneo associato è un sistema dove la parte prima parte è uguale ad un altro e i coefficienti dopo l'uguale sono **0**.

0.2.3 Soluzione di un sistema

Soluzione di un sistema = soluzione di un caso particolare + soluzione dell'omogenea associata.

Esempio $2x + 3y = 5$, $n = 1, m = 2$

Soluzione particolare

$$\begin{aligned} &2x + 3y = 5 \\ &x = y = 1 \end{aligned}$$

Soluzione omogenea

$$\begin{aligned} &2x + 3y = 0 \\ &x = -\frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Soluzione generale Definiamo s parametro nel ruolo di y.

$$\begin{aligned} &x = 1 + (-\frac{3}{2})s \\ &y = 1 + s \end{aligned}$$

0.2.4 Trovare soluzioni comuni

Per trovare soluzioni comuni di E è necessario semplificare. Le 3 operazioni utili per semplificare sono:

A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante. $\lambda \neq 0$. $E_i \Rightarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare un'equazione E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j. $Ej \Rightarrow E_j + \lambda E_i$.

C) Scambiare due equazioni.

Capitolo 1

Matrici

Per semplificare inseriamo i coefficienti delle equazioni in una **matrice** $n \cdot m$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

1.0.1 Operazioni

Le operazioni che potevamo usare per semplificare il sistema possiamo utilizzarle anche sulle matrici:

A) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$. $R_i \Rightarrow \lambda \cdot R_i$.

B) Sostituire la riga R_j con una somma. $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.

C) Scambiare due righe.

1.1 Matrice a scalini

Una matrice $n \cdot m$ è detta a **a scalini** se:

1. Le righe sono **in fondo**.
2. Il primo elemento di ogni riga, se esiste, è **a destra** del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente. Un tale elemento è detti **Pivot**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} NO \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO}$$

1.2 Algoritmo di Gauss

1. Se la matrice è gia in forma a **scalini** si termina. **END**.
2. Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$.
3. Scambiando le righe possiamo supporre che questo elemento è il **pivot** della prima riga. Lo segniamo con p.
4. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
5. Si annullano tutti gli elementi della colonna di p con operazioni di tipo $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
6. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
7. Si ricomincia con la matrice ottenuta **escludendo** la prima riga.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** della prima riga è 1, ora devo annullare tutti gli elementi della colonna del pivot.

$$\xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La prima riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Nella seconda riga il **pivot** è 2, si procede annullando le colonne sotto il pivot.

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

La seconda riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

L'algoritmo termina poiché -1 è un **pivot** e non ci sono colonne da annullare.

Conclusioni La matrice ritrasformata in sistema di equazioni è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

La **colonna di** x_4 è senza **pivot** quindi x_4 è detta **variabile libera**, e può assumere qualsiasi valore nel sistema. Sostituiamo la **variabile libera** x_4 con il parametro t.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ -x_3 - 5t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 - 5t + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2t + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases}$$

L'equazione ha **infinite soluzioni** che possono essere parametrizzate in t.

1.2.1 Casi possibili

Se nella forma a scalini:

1. **Ogni colonna** "non aggiunta" **ha un pivot** $\Leftrightarrow \exists$ **unica soluzione**
2. C'è un **pivot nell'ultima colonna** $\Leftrightarrow \nexists$ **soluzione**
3. C'è una **colonna "non aggiunta" senza pivot** e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow \exists\ \infty$ **soluzioni**

1.3 Matrice ridotta a scalini

Una matrice è in forma **ridotta** a scalini se:

- È in forma **a scalini**
- Ogni **pivot** è $= 1$
- Ogni **pivot** è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{SI} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{NO (A scalini ma non ridotta)}$$

1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo produce una matrice in forma **ridotta** a scalini attraverso operazioni del tipo A, B, C.

1. Con l'**algoritmo di Gauss** si riduce a scalini la matrice.
2. Nelle colonne dei pivot gli elementi della colonna superiore e a sinistra nella riga sono già $= 0$. **Annullare** gli elementi sopra il pivot nella colonna con **operazioni del tipo B** ($R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$).
3. In ogni riga si **cerca il pivot** (se esiste). Se il pivot $\lambda \neq 1$, si moltiplica la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

Esempio Partiamo da una matrice già ridotta a scalini dall'algoritmo di Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Algoritmo di Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ora applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan** alla matrice a scalini per trasformarla in matrice **ridotta** a scalini.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si **azzerano** gli elementi nelle colonne dei pivot che sono $\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ora nelle colonne dei pivot **tutti gli elementi sono = 0** eccetto il pivot. Si individuano i **pivot** $\neq 1$ e si procede con la loro **trasformazione a 1**. Si moltiplicano le righe con i **pivot** $\neq 1$ per il loro **reciproco**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Conclusioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

Si parla di **spazi vettoriali** quando definiamo punti e vettori nel piano $\mathbb{R}^2$. Un **punto** di $\mathbb{R}^2$ si può descrivere con **due coordinate** (x_1, x_2), ma anche con un **vettore** (una freccia) dall'**origine** $(0, 0)$ a (x_1, x_2)

2.0.1 Somma

Si può fare la **somma** di due vettori:

- Sulle **coordinate**: $(x_1, x_2) + (x_1' + x_2') := (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$
- **Geometricamente**: **Legge del parallelogramma** dove la **diagonale del parallelogramma** è la somma dei due vettori.

2.0.2 Moltiplicazione

Un vettore può essere moltiplicato con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Sulle **coordinate**: $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$
- **Geometricamente**: La **lunghezza** è moltiplicata da λ ma l'angolo non cambia.

2.1 Spazi vettoriali di dimensione n

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ uno **spazio n-dim standard** o spazio dei vettori colonna.

Un spazio vettoriale di dimensione **2** corrisponde ad un **piano**, di dimensione **3** ad uno spazio **euclideiano**.

Definizione Uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$ è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

- **Somma**: $v_1, v_2 \in V \to v_1 + v_2 \in V$.
- **Prodotto** con $\lambda \in \mathbb{R} : v \in V \to \lambda \cdot v \in V$.

Le operazioni devono soddisfare:

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. [1]$\exists! 0 \in V : 0 + v = v + 0 = v \ \forall v$
4. $\forall v \ \exists! -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
6. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
7. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v$

2.1.1 Somma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Moltiplicazione

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \lambda \in \mathbb{R}.$$

[1] $\exists! =$ Esiste un unico

2.2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale. Un **sottospazio** $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che

- Dati due vettori nel sottospazio, la loro somma sarà nel sottospazio.

$$v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

- Dato un vettore nel sottospazio, il prodotto con un qualsiasi scalare è contenuto nel sottospazio.

$$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \ \forall \lambda$$

Un sottospazio $\boldsymbol{W \subset V}$ **è uno spazio vettoriale**.

Esempio

1. $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.
   In generale

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nm}t_m = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

   è **sottospazio**.
   Quindi le **soluzioni** di un **sistema di equazioni lineari omogenei** a n variabili definiscono un **sottospazio** di $\mathbb{R}^m$.
   Non definiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ le soluzioni di equazioni lineari **non omogenee** (coefficiente $\neq 0$).

2.3 Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Una **combinazione lineare** di $v_1, \ldots, v_m$ è una somma $\boldsymbol{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \in V}$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.
La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Esempio

$$V = \mathbb{R}^2,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$ è **combinazione lineare non banale**.

2.4 Span

Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$ m vettori. Il **sottospazio generato** da $v_1, \ldots, v_m$ è:

$$Span(v_1, v_2, ..., v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \ : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

Quindi *Span* è l'insieme di **tutte le combinazioni lineari**.
$Span(v_1, v_2, \ldots, v_m) \subset V$ è un **sottospazio**.

Esempi

1. $$\mathbb{R}^2 = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   $Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette, rispettivamente dell'asse x e y.

2. $$W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$$

   Allora $W = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Quindi un **sottospazio** può essere lo **span di vettori diversi**.

2.4.1 Esercizi

Verificare che $\boldsymbol{Span(v_1, v_2, v_3) = Span(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ applicando l'**Algoritmo di Gauss** si ottiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3-R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array}\right]$$

3 **pivots** nelle 3 colonne a sinistra (non ci interessa a destra) quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 = b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

ammette un' **unica soluzione** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Il **vettore generale** v è contenuto in $Span(v_1, v_2, v_3)$.

In generale Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è **combinazione lineare** di $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \Rightarrow Span(v_1, v_1, \ldots, v_n) = Span(v_1, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Trovare sistema di equazioni lineari omogenee tale che il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ associato sia $\boldsymbol{Span(v_1, \ldots, v_m)}$

1. Si sceglie una base di $Span(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Possiamo supporre la base $(v_1, \ldots, v_r)$ con $r \leq m$.

2. Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, ..., v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$
   $v_1, \dots, v_n$ **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini di A c'è un **pivot in ogni colonna**.

3. Sia $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ qualsiasi.
   $v \in Span(v_1, ..., v_r) \Leftrightarrow \boldsymbol{v}, v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$ ci sono sempre **r pivot** nelle prime **r colonne** ovvero **l'ultima colonna non contiene pivots**.
   Questo dà equazioni lineari per $\boldsymbol{b_1, \dots, b_n}$.

   Esempio
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono vettori **linearmente indipendenti** perché non sono multipli tra loro.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

   Il **pivot** da controllare è nell'ultima colonna quindi se $b_3 - b_1 = 0 \Leftrightarrow$ **non** è un pivot della terza colonna.
   Quindi $Span(v_1, v_2) = \{\text{soluzioni di } x_3 - x_1 = 0\}$

2.5 Dipendenza lineare

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0$$

vale **solo** per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Altrimenti sono **linearmente dipendenti**.

Geometricamente Vettori linearmente dipendenti hanno la **stessa retta**.

Proposizione $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow \exists i : v_i$ è combinazione lineare dei v_j $\forall j \neq i$.

Verificare se m vettori sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \; v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ **vale se e solo se** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ **è soluzione del sistema**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

dove **x sostituisce $\boldsymbol{\lambda}$** e lo 0 dell'equazione corrisponde al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi $v_1, \ldots, v_m$ sono **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ il sistema ammette **solo la soluzione banale**, cioè $x = (0, \ldots, 0)$.

Esempio Verificare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ siano **linearmente indipendenti**.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema **lineare omogeneo** con la **matrice dei coefficienti associata**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Gauss:

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono 3 **pivots** e una **variabile libera** $\Rightarrow$ ∞ **soluzioni**.
Il sistema ammette **soluzioni non banali** $\Rightarrow$ i vettori sono **linearmente dipendenti**.

2.6 Basi

Un sistema $v_1, \dots, v_n$ di vettori è una **base** di V se:

- i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti**
- $\boldsymbol{Span(v_1, \dots, v_n) = V}$

Esempio Base standard di $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.
Dunque $Span(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2.6.1 Coordinate

Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V e $v \in V$ un vettore. Allora

$$\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ovvero **ogni vettore** si scrive in un modo **unico** come **combinazione lineare** degli **elementi della base**.
Gli $\boldsymbol{\alpha_i}$ sono le **coordinate** di v rispetto alla **base**.

Trovare le coordinate di un vettore rispetto alla base
Sappiamo da esercizi precedenti che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono

una **base** di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Quindi $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$ e $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.7 Dimensione

La **dimensione** di uno spazio V sarà definita come il **numero degli elementi di una base**. **Questo numero è lo stesso per ogni base**. [2]

2.7.1 Proprietà

Se $dim\ V = n$ e $v_1, \ldots, v_r \in V$ i casi sono:

- $\boldsymbol{r > n} \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_r$ sono **linearmente dipendenti**
- $\boldsymbol{r = n}$ **e** $\boldsymbol{v_1, \ldots, v_n}$ **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ è una **base**
- $\boldsymbol{r < n}$ **e** $\boldsymbol{v_1, \ldots, v_n}$ **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ si **completa**[3] in una **base**

[2] Dimostrazione a fine lezione 06.
[3] Posso aggiungere vettori affinché diventi una base

Esempio

Decidiamo se $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$dim\ \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ **se** sono **indipendenti** formano una **base**.
Verifichiamo con **Gauss**:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2 **pivots** $\Rightarrow$ i vettori sono **linearmente dipendenti**.
Però i **pivots** sono nelle colonne 1,3 quindi escludendo la colonna 2:

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} \text{ sono } \textbf{linearmente indipendenti.}$$ [4]

Ora $dim\ Span(v_1, v_2) = 2, dim\ \mathbb{R}^3 = 3$.
Troviamo ora un vettore di $\mathbb{R}^3$ **non contenuto** nello $Span(v_1, v_2)$.

Una strategia può essere partire dalla **base standard**: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ Una delle 3 basi standard non è sicuramente contenuta nello $Span(v_1, v_2)$ altrimenti esso sarebbe una base.
Cerchiamo quindi il vettore della base standard che è linearmente indipendente agli altri 2 vettori. Proviamo con e_3:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow e_3$ completa la nostra base. e_1 invece **non la completa**.

Proposizione Sia $W \subset V$ un **sottospazio**. Allora

1. $dim\ W \leq dim\ V$
2. Se $W \neq V$, allora $dim\ W < dim\ V$

Questa proposizione è utile per calcolare le dimensioni dei sottospazi.

[4] Il vettore v_2 è il vecchio vettore v_3, cambio di notazione per proseguire l'esercizio

Esempio

$$\text{Sia } V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} \textbf{(Matrici simmetriche)}$$

$dim\ M_{2x2}(\mathbb{R}) = 4$ (base standard).
$V \neq M_{2x2}(\mathbb{R}) \Rightarrow dim\ V \leq 3$.
Ma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono **linearmente indipendenti** $\Rightarrow dim\ V = 3$

2.7.2 Sottospazi

Intersezioni di sottospazi

Se $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ è sottospazio.

Formula di Grassmann

Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi allora

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Osservazione $V_1 + V_2$ è un **sottospazio**.

Esempio

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma anche $V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Formula di Grassmann Se $dim < \infty, V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora

$$dim(V_1 + V_2) = dim\ V_1 + dim\ V_2 - dim(V_1 \cap V_2)$$

Esempio In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = Span \left(v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $dim(V \cap W)$, $dim(V + W)$

Soluzione
$\boldsymbol{dim\ W = 2}$ perché ovviamente $W_1 \neq \lambda W_2$.
Calcoliamo dim V

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

x_3, x_4 variabili libere $\rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 = x_3 + 6x_4 \end{cases}$

Soluzione generale $\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Posso scrivere in forma parametrizzata $x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e ora sappiamo

che $\boldsymbol{dim\ V = 2}$ e $\boldsymbol{v_1, v_2}$ **è una base**.
Cerchiamo ora $dim(V + W)$.
$V + W = Span(v_1, v_2, w_1, w_2)$
Troviamo una base con **Gauss**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \circlearrowleft R_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + \frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots quindi le prime 3 colonne sono indipendenti.
Quindi $\boldsymbol{dim\ Span(v_1, v_2, w_1, w_2) = dim(V + W) = 3}$.
Grassmann: $dim(V \cap W) = dim\ V + dim\ W - dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$
Potevamo anche calcolare direttamente $dim(V \cap W)$:

$$Y \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Sostituiamo e otteniamo:

$$\begin{cases} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow dim(V \cap W) = 1 \text{ perché } V \cap W = \{\lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2.8 Rango

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, il **rango** di A è

$$rg(A) := dim\ Span\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

2.8.1 Trovare il rango

Per calcolare $rg(A)$ bisogna:

- estrarre una base di $Span$(colonne).
- usare l'algoritmo di Gauss sulla matrice A

Se numero colonne linearmente indipendenti = numero dei pivots della forma a scalini $\Rightarrow$**$\boldsymbol{rg(A)}$ = numero di pivot nella forma a scalini**.

Capitolo 3

Applicazioni lineari

Definizione Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un'**applicazione lineare** è una funzione $\varphi : V_1 \to V_2$ che soddisfa:

- $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V_1$
- $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_1$

3.1 Kernel

Il **Kernel o nucleo** è un sottospazio:

$$Ker(\varphi) := \{v \in V_1 : \varphi(v) = 0\}$$

Proposizione $Ker(\varphi_1) \subset V_1$ è un sottospazio.

3.1.1 Trovare il Kernel utilizzando la matrice

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$v \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ è soluzione di } \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Quindi per trovare $Ker(\varphi)$ bisogna **risolvere il sistema omogeneo** (ad esempio con Gauss).

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $Ker(\varphi)$.

Applichiamo Gauss alla matrice di φ.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ker(\varphi) \Leftrightarrow \text{soluzioni di } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \text{ soluzione generale del sistema.}$$

Quindi $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$ è la **base** di $Ker(\varphi)$.

3.2 Immagine

L'**immagine** è un sottospazio:

$$Im(\varphi) := \{w \in V_2 : \exists v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v)\}$$

Proposizione $Ker(\varphi) \subset V_2$ è un sottospazio.

3.2.1 Trovare l'immagine utilizzando la matrice

Sappiamo che se $e_1, \dots, e_n$ è la base standard,

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \ \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma $Im(\varphi) = Span(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$
Quindi $\boldsymbol{Im(\varphi)}$ è lo **span delle colonne** di A in $\mathbb{R}^m$

3.2.2 Trovare la dimensione

Per trovare la $\boldsymbol{dim\ Im(\varphi)}$ bisogna determinare la dimensione dello **span**, ovvero il **rango**.
Se φ ha matrice A allora $\boldsymbol{dim\ Im(\varphi) = rg\ (A)}$

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $Im(\varphi)$.
Applichiamo Gauss alla matrice di φ.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono **pivots** nelle prime due colonne $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è la base di $Im(\varphi)$ e il **rango** è 2.

3.3 Dimensione

Teorema Se $dim\ V_1 < \infty$ allora

$$dim\ Ker(\varphi) + dim\ Im(\varphi) = dim\ V_1$$

in $\varphi : V_1 \to V_2$. La dimensione di V_2 non riguarda questo teorema.

3.4 Prodotto

Se $A \in M_{mxn}(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n$, il loro **prodotto** è il vettore in $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Il vettore moltiplicato deve avere lo stesso numero di colonne della matrice.

Proposizione Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale, allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Esempio 1 Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to R$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x+2y+3z$. Trovare $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
Naturalmente $1 \cdot 1 + -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2$. Ma anche:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1,\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2,\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 3 = 2$$

Esempio 2 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}\right)$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} \text{ Vettore generico}$$

Conclusione Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ base standard allora:

- $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ **determina φ in maniera unica**
- $\forall v$ possiamo calcolare $\varphi(v) = A \cdot v$ dove $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ è la matrice definita nel punto precedente.

3.5 Matrice associata all'applicazione lineare

Sia $\varphi : V \to W$ lineare.
Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V [dim V = n]
Sia $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ una base di W [dim W = m]
Scriviamo

$$\begin{gathered}
\varphi(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m \\
\varphi(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m \\
\vdots \\
\varphi(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m
\end{gathered}$$

La matrice di φ rispetto alla base B, B' è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(e_1) & | & \varphi(e_2) & | & \dots & | & \varphi(e_n) \end{bmatrix}$$

dove le **colonne sono le coordinate di $\varphi(e_i)$** rispetto a $e'_1, \dots, e'_m$.

Teorema Se $v = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore colonna in $\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.
Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ sono date dal vettore colonna

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Importante La matrice A è sempre definita con **due basi B, B'**.

Esempio $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+2y \end{pmatrix}$
Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi scrivendo le coordinate **non** rispetto alla base standard ma ad **altre basi**, φ può diventare molto più semplice. Per trovare **basi ottimali** si utilizzeranno gli **autovettori**.

3.6 Isomorfismo

Un'applicazione lineare $\varphi : V_1 \to V_2$ è un **isomorfismo** se

- $Im(\varphi) = V_2$
- per $v_1, v_1' \in V_1$ $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \Leftrightarrow v_1 = v_1'$. Notazione: $v_1 \tilde{\to} v_2$

Dunque φ è un **isomorfismo** se $\forall$ $\boldsymbol{v_2 \in V_2}$ $\boldsymbol{\exists! v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2}$.

Osservazione φ è un isomorfismo $\Leftrightarrow Im(\varphi) = V_2,\ Ker(\varphi) = V_1$.

Esempio $V_1 = M_{2x2}(\mathbb{R}), V_2 = \mathbb{R}^4$ $\varphi : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ è un } \textbf{isomorfismo}.$$

Ma anche $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo**. $\psi : \mathbb{R}^4 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$.

Osservazione Sia V uno spazio vettoriale, $dim\ V = n$ e $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V. Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$.

Allora $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo** $V \tilde{\to} \mathbb{R}^n$.

Infatti φ è lineare, $Im(\varphi) = \mathbb{R}^4, Ker(\varphi) = \{0\}$.

Osservazione Sia $\varphi : V_1 \to V_2$ una qualsiasi applicazione lineare,
$dim\ V_1 = n,\ dim\ V_2 = m$.
$B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1.
$B' = (e_1', \dots, e_m')$ base di V_2.
Sia A la matrice di φ rispetto a B e B'.
B definisce $\psi : V_1 \tilde{\to} \mathbb{R}^n$.
B' definisce $\psi' : V_2 \tilde{\to} \mathbb{R}^m$.

Lemma

- $\psi^{-}1$ induce un **isomorfismo** $Ker(v \mapsto Av) \tilde{\to} Ker(\varphi)$
- ψ' induce un **isomorfismo** $Ker(\varphi) \tilde{\to} Ker(v \mapsto Av)$

3.7 Composizione di funzioni

Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ applicazioni lineari.
Allora $\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$ è **lineare**.
Siano
$B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1
$B_2 = (f_1, \dots, f_n)$ base di V_2
$B_3 = (g_1, \dots, g_n)$ base di V_3
Siano
$B =$ matrice di φ rispetto a B_1, B_2
$A =$ matrice di ψ rispetto a B_2, B_3
Allora la matrice di $\boldsymbol{\psi \circ \varphi}$ rispetto a B_1, B_3 è $\boldsymbol{A \cdot B}$.

3.8 Proprietà della moltiplicazione

1. $A(BC) = (AB)C$

2. $A \cdot B = B \cdot A$ **non è vero in generale**

3. Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice **identità** di $M_{mxn}(\mathbb{R})$. Allora
   $\forall A \in M_{nxn}(\mathbb{R}) :$ $\boldsymbol{I \cdot A = A \cdot I = A}$

4. Se $\varphi : V_1 \tilde{\to} V_2$ isomorfismo $\Rightarrow \exists\ \varphi^{-1} : V_2 \tilde{\to} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$[1].
   Se fissiamo le basi
   B_1 di V_1, B_2 di V_2, φ ha matrice A e φ^{-1} ha matrice $A^{-1} \Rightarrow$

   $$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I},\ \boldsymbol{A^{-1} \cdot A = I}$$

5. **Matrice inversa:** Esiste **solo** se è la matrice di φ isomorfismo.

[1] id=identità

3.9 Cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale di dim n e B, B' due basi.
La **matrice di cambiamento di base** rispetto a (B, B') è definita da[2]

$$\boldsymbol{P := [id_V]_B^{B'}}$$

Esempio Siano $V = \mathbb{R}^2, B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
$\varphi : v \mapsto A \cdot v$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Allora:
$[\varphi]_B = A$, calcoliamo $[\varphi]_{B'}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $[\varphi]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Calcoliamo ora $\boldsymbol{P = [id_V]_B^{B'}}$
Calcoliamo con Gauss la **matrice del cambiamento di base**. Scriviamo la base B usando le coordinate della base B'.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \text{ è la } \textbf{matrice del cambio di base} \text{ da } \textbf{B} \text{ a } \boldsymbol{B'}$$

[3] $$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ è la } \textbf{matrice di cambio di base} \text{ da } \boldsymbol{B'} \text{ a } \textbf{B}$$

Si nota che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2] id_V che va da B a B'
[3] Usando lo stesso metodo ma è banale poiché B, ovvero la base di destinazione, è la matrice identità

In generale $[id_V]_{B'}^{B} = [id_V]_{B}^{B'} = [id_V \circ id_V]_B = [id_V]_B$ è la **matrice identità**.
Quindi $\boldsymbol{P = [id_V]_B^{B'}}$ è **invertibile** e $\boldsymbol{P^{-1} = [id_V]_{B'}^{B}}$

Teorema Se B, B' sono due basi di V, P matrice di cambiamento di base.
$\varphi : V \to V$ applicazione lineare con $A = [\varphi]_B$ allora $[\varphi]_{B'} = PAP^{-1}$

Esempio Con l'esempio precedente:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.10 Determinante

Il **determinante** sarà un funzione $\boldsymbol{det : M_{nxn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}}$ con la proprietà fondamentale:

- $det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono **linearmente indipendenti**
- $det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono **linearmente indipendenti**

Esempi

- $n = 1 \;\; A = [a] \;\; det(A) = a$
- $n = 2 \;\; A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\; det(A) = ad - bc$

Geometricamente

$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ **area del parallelogramma** costruito sui lati $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Definizione generale Per induzione su n-1, sapendo n=1,2:
Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j:

- $\sum_j (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; det(A_{ij})$ per i fisso (**sviluppo secondo la riga i**)
- $\sum_i (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; det(A_{ij})$ per j fisso (**sviluppo secondo la colonna j**)

Il risultato sarà uguale per entrambe le formule e per qualsiasi i,j scelto.

Promemoria per i segni

$$(-1)^{i+j}: \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Esempio Per n=3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 0 + (-1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 - (-1) = \mathbf{3}$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 = 2 + 1 = \mathbf{3}$$

Esempio Matrice triangolare superiore ovvero $a_{ij} = 0$ se i¿j.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$$

3.10.1 Effetto del determinante sulle operazioni elementari di Gauss

1. **Scambio di due righe**

   adiacenti: $\boldsymbol{det(A) \to -det(A)}$

   scambio tra riga i e j qualsiasi: si eseguono cambi successivi adiacenti.

2. Sostituzione della riga $\boldsymbol{R_i}$ con $\boldsymbol{R_i + \lambda R_j}(j \neq i)$: **det(A) non cambia**