SOLUZIONI

Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare
19 Giugno 2019, primo appello

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio o sul retro lo svolgimento.

Esercizio 1. Consideriamo il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 7x \equiv 3 \pmod{12} \\ 15x \equiv 26 \pmod{32}. \end{cases}$$

Determinare: (a) l'insieme delle soluzioni; (b) il numero di soluzioni x che soddisfano $0 \leq x \leq 6000$.

(I) $7x \equiv 3 \pmod{12} \iff x \equiv 21 \equiv -3 \pmod{12}$

moltiplico per 7

(II) $15x \equiv 26 \pmod{32} \iff x \equiv -6 \cdot 15 \equiv 6 \pmod{32}$

moltiplico per 15 (che è inverso di 15, da Bezout)

(SISTEMA) $\begin{cases} x \equiv -3 \pmod{12} \\ x \equiv 6 \pmod{32} \end{cases}$

Poiché $\underset{4}{\underset{\shortparallel}{\text{mcd}(32,12)}} \nmid 6+3=9$, ne segue che il sistema non è risolubile

Risposta a) $\emptyset$

Risposta b) 0

Esercizio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare con matrice A rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$. Sia $\alpha = (v_1, v_2)$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Determinare la matrice $[f]^{\alpha}_{\alpha}$ di f rispetto alla base α in partenza e in arrivo.

$$[f]^{\alpha}_{\alpha} = [id]^{\alpha}_{e} [f]^{e}_{e} [id]^{e}_{\alpha} = \left([id]^{e}_{\alpha}\right)^{-1} A \; [id]^{e}_{\alpha}$$

$$[id]^{e}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left([id]^{e}_{\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Risposta

M

Esercizio 3. Tra le matrici seguenti quali sono diagonalizzabili? Spiegare la risposta.

$$a)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad b)\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad c)\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(a) Il polinomio caratteristico della matrice è $(1-\lambda)^3$, quindi $\lambda = 1$ è un autovalore (l'unico!) con $m_{alg}(1) = 3$. Per la molteplicità geometrica:

$$\operatorname{Ker}(M - I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(M-I) = 1 \Rightarrow m_g(1) = 1.$$

La matrice non è quindi diagonalizzabile.

(b) Come sopra si ha $m_{alg}(1) = 3$ e $m_g(1) = 1$.

(c) Il polinomio caratt. è $(1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$, che dà tre autovalori distinti. Quindi la matrice è diagonalizzabile.

Risposta a)	Risposta b)	Risposta c)

Esercizio 4. Sedici carte, di cui 4 di cuori, 4 di quadri, 4 di fiori e 4 di picche vengono distribuite fra 4 giocatori A,B,C,D. Ciascun giocatore riceve un insieme di quattro carte, non ordinato.

a) In quanti modi si possono distribuire le carte fra i 4 giocatori?
b) In quanti modi si possono distribuire le carte fra i 4 giocatori in modo che ciascuno riceva tutte e 4 le carte dello stesso seme?
c) In quanti modi si possono distribuire le carte fra i 4 giocatori in modo che ciascuno riceva esattamente una carta di cuori?

PRIMO MODO: TUTTE LE CARTE DELLO STESSO SEME SONO DISTINTE

(a) $\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}$ scegliendo sottoinsiemi di 4 carte da quelle che via via rimangono

(b) $4!$, basta decidere come dare i semi tra i quattro

(c) $4! \cdot \binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}$, prima scegliendo come dare le carte di cuori ($4!$ modi) poi le rimanenti

SECONDO MODO: TUTTE LE CARTE DELLO STESSO SEME UGUALI

(a) $\dfrac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}$ prima permuto tutte le 16 carte, poi tengo conto dell'indistinguibilità di gruppi di carte

(b) $4!$, come sopra

(c) $\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$, date le carte di cuori (1 modo) è come il punto (a) con 12 carte e 3 semi

Risposta a) | Risposta b) | Risposta c)