Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare
10 Luglio 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Stabilire per quali valori del parametro intero a il sistema

$$\begin{cases} 4^x \equiv 9 \pmod{13} \\ 5x \equiv a \pmod{9} \end{cases}$$

ha soluzione, e determinarne tutte le soluzioni per $a = 4$ e per $a = 5$ (scrivere nessuna se non vi sono soluzioni).

Il sistema equivale a $\begin{cases} x \equiv 4 \ (6) \\ x \equiv 2a \ (9) \end{cases}$

ha soluzione se $MCD(6,9) \mid 2a-4$

ovvero $2a - 4 \equiv 0 \mod (3)$

ovvero $a \equiv 2 \mod (3)$.

Per $a = 4$ nessuna soluzione.

Per $a = 5$ diventa $\begin{cases} x \equiv 4 \ (6) \\ x \equiv 1 \ (9) \end{cases}$

che equivale a $x \equiv 10 \ (18)$.

valori di a	Caso $a = 4$	Caso $a = 5$
$a \equiv 2 \ (3)$	nessuna	$x \equiv 10 \ (18)$

Esercizio 2 (8 punti)**.** Consideriamo un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad F\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice $[F]$ di F rispetto alle basi standard.

(2) Scrivere la matrice $[F]^{v_1,v_2}_{w_1,w_2}$ di F rispetto alla base $v_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ in partenza e $w_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ in arrivo.

$$[F] = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

$$[F]^{\vec{v}}_{\vec{w}} = [\vec{w}]^{-1}[F][v]$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 3\\7 & -5\end{bmatrix}.$$

$[F]$

$$\boxed{\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}}$$

$[F]^{v_1,v_2}_{w_1,w_2}$

$$\boxed{\begin{bmatrix}-4 & 3\\7 & -5\end{bmatrix}}$$

Esercizio 3 (7 punti)**.** Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dato dalle soluzioni dell'equazione $x + y - 2z = 0$.

(1) Trovare un vettore $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ di lunghezza 1 tale che $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ sia una base ortogonale di V.

(2) Trovare una base di $V^\perp$.

(1) $v \in V \Rightarrow a + b - 2c = 0$

v ortogonale a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c = 0$

Quindi $c = 0$ e $a = -b$

$v = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$. Se lo voglio di lunghezza 1

scelgo $a = 1/\sqrt{2}$ quindi: $v = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff x + y - 2z = 0$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in V^\perp$ ed è una base perché

$\dim V^\perp = 3 - \dim(V) = 1$.

vettore v	base
$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Le caselle di una scacchiera 4x4 vengono colorate in modo che vi siano 4 caselle rosse, 4 blu, 4 gialle e 4 verdi.

(1) Quante sono tutte le colorazioni possibili?
(2) Quante sono le colorazioni in cui su ciascuna riga vi siano 4 caselle di colori diversi?
(3) Quante sono le colorazioni in cui su ciascuna riga vi siano tutte caselle dello stesso colore?

(1) $\underbrace{\binom{16}{4}}_{\text{scelgo dove metto i Rossi}} \cdot \underbrace{\binom{12}{4}}_{\text{verdi}} \cdot \underbrace{\binom{8}{4}}_{\text{gialli}} \cdot \underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{blue}} = \dfrac{16!}{4!4!4!4!}$

(2) $4!$ modi di colorare la riga 1
$4!$ " 2
$4!$ " 3
$4!$ " 4
Tot. $4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4! = (4!)^4$

(3) 4 modi di scegliere il colore della riga 1
3 " 2
2 " 3
1 " 4
Tot $4!$

(1)	(2)	(3)
$\dfrac{16!}{(4!)^4}$	$(4!)^4$	$4!$