

Algebra Lineare

Stefano Piccoli

21 marzo 2022

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 4 |
| 0.1 Equazioni a 3 variabili | 4 |
| 0.2 Caso generale | 5 |
| 0.2.1 Sistema omogeneo | 5 |
| 0.2.2 Sistema omogeneo associato | 5 |
| 0.2.3 Soluzione di un sistema | 5 |
| 0.2.4 Trovare soluzioni comuni | 6 |
| 1 Matrici | 7 |
| 1.0.1 Operazioni | 7 |
| 1.1 Matrice a scalini | 7 |
| 1.2 Algoritmo di Gauss | 8 |
| 1.2.1 Casi possibili | 9 |
| 1.3 Matrice ridotta a scalini | 10 |
| 1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan | 10 |
| 2 Spazi vettoriali | 12 |
| 2.0.1 Somma | 12 |
| 2.0.2 Moltiplicazione | 12 |
| 2.1 Spazi vettoriali di dimensione n | 12 |
| 2.1.1 Somma | 13 |
| 2.1.2 Moltiplicazione | 13 |
| 2.2 Sottospazi vettoriali | 14 |
| 2.3 Combinazioni lineari | 15 |
| 2.4 Span | 15 |
| 2.4.1 Esercizi | 16 |
| 2.5 Dipendenza lineare | 17 |
| 2.6 Basi | 19 |
| 2.6.1 Coordinate | 19 |
| 2.7 Dimensione | 20 |
| 2.7.1 Proprietà | 20 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.7.2 | Sottospazi | 22 |
| | Intersezioni di sottospazi | 22 |
| | Formula di Grassmann | 22 |
| 2.8 | Rango | 24 |
| 2.8.1 | Trovare il rango | 24 |
| 3 | Applicazioni lineari | 25 |
| 3.1 | Kernel | 26 |
| 3.1.1 | Trovare il Kernel utilizzando la matrice | 26 |
| 3.2 | Immagine | 27 |
| 3.2.1 | Trovare l'immagine utilizzando la matrice | 27 |
| 3.2.2 | Trovare la dimensione | 27 |
| 3.3 | Dimensione | 28 |
| 3.4 | Prodotto | 28 |
| 3.5 | Matrice associata all'applicazione lineare | 29 |
| 3.6 | Isomorfismo | 31 |
| 3.7 | Composizione di funzioni | 32 |
| 3.8 | Proprietà della moltiplicazione | 32 |
| 3.9 | Cambiamento di base | 33 |
| 3.10 | Determinante | 34 |
| 3.10.1 | Effetto del determinante sulle operazioni elementari di Gauss | 35 |
| 3.10.2 | Teoremi | 36 |
| 3.10.3 | Formula di Cramer | 36 |
| 4 | Autovalori ed Autovettori | 38 |
| 4.1 | Autovalore | 39 |
| 4.2 | Diagonalizzazione | 40 |
| 4.2.1 | Definire se φ è diagonalizzabile | 40 |
| | Molteplicità | 40 |
| 4.3 | Numeri complessi | 42 |
| 4.3.1 | Operazioni | 42 |
| 5 | Prodotto scalare | 43 |
| 5.0.1 | Proprietà | 43 |
| 6 | Ortogonalità e ortonormalità | 44 |
| 6.0.1 | Trovare sottospazio ortogonale | 44 |
| 6.0.2 | Base ortonormale | 45 |
| | A cosa serve una base ortonormale? | 45 |
| | Trovare una base ortonormale | 45 |

| | | |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| | Algoritmo di Gram-Schmidt | 46 |
| 7 | Teorema spettrale | 47 |

Introduzione

L'**Algebra Lineare** si occupa di trovare soluzioni ad equazioni e sistemi lineari.

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : y = 5 - 3 = 2$$

Sostituzione: $x = 1$

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = 0$$

Hanno le stesse soluzioni (infinità)

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = -1$$

Nessuna soluzione comune

Quindi abbiamo 1, ∞ o 0 soluzioni comuni. Così sarà in generale.

0.1 Equazioni a 3 variabili

Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio tridimensionale. L'intersezione può essere di 3 tipi:

- Un punto (**unica soluzione**)
- Una retta o un piano
- 0 (∞ **soluzioni**)

0.2 Caso generale

Un sistema di n equazioni lineari a m variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

$$n, m > 0$$

0.2.1 Sistema omogeneo

Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

0.2.2 Sistema omogeneo associato

Un sistema omogeneo associato è un sistema dove la prima parte è uguale ad un altro e i coefficienti dopo l'uguale sono **0**.

0.2.3 Soluzione di un sistema

Soluzione di un sistema = soluzione di un caso particolare + soluzione dell'omogenea associata.

Esempio $2x + 3y = 5, n = 1, m = 2$

Soluzione particolare

$$2x + 3y = 5$$

$$x = y = 1$$

Soluzione omogenea

$$2x + 3y = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}y$$

Soluzione generale Definiamo s parametro nel ruolo di y.

$$x = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)s$$

$$y = 1 + s$$

0.2.4 Trovare soluzioni comuni

Per trovare soluzioni comuni di E è necessario semplificare. Le 3 operazioni utili per semplificare sono:

A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante. $\lambda \neq 0$. $E_i \Rightarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare un'equazione E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j .
 $E_j \Rightarrow E_j + \lambda E_i$.

C) Scambiare due equazioni.

Capitolo 1

Matrici

Per semplificare inseriamo i coefficienti delle equazioni in una **matrice** $n \cdot m$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

1.0.1 Operazioni

Le operazioni che potevamo usare per semplificare il sistema possiamo utilizzarle anche sulle matrici:

- A) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$. $R_i \Rightarrow \lambda \cdot R_i$.
- B) Sostituire la riga R_j con una somma. $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
- C) Scambiare due righe.

1.1 Matrice a scalini

Una matrice $n \cdot m$ è detta a **a scalini** se:

1. Le righe sono **in fondo**.
2. Il primo elemento di ogni riga, se esiste, è **a destra** del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente. Un tale elemento è detto **Pivot**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO}$$

1.2 Algoritmo di Gauss

1. Se la matrice è già in forma a **scalini** si termina. **END**.
2. Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$.
3. Scambiando le righe possiamo supporre che questo elemento è il **pivot** della prima riga. Lo segniamo con p .
4. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
5. Si annullano tutti gli elementi della colonna di p con operazioni di tipo $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$.
6. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
7. Si ricomincia con la matrice ottenuta **escludendo** la prima riga.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** della prima riga è 1, ora devo annullare tutti gli elementi della colonna del pivot.

$$\xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La prima riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Nella seconda riga il **pivot** è 2, si procede annullando le colonne sotto il pivot.

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

La seconda riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo termina poiché -1 è un **pivot** e non ci sono colonne da annullare.

Conclusioni La matrice ritrasformata in sistema di equazioni è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

La **colonna di** x_4 è senza **pivot** quindi x_4 è detta **variabile libera**, e può assumere qualsiasi valore nel sistema. Sostituiamo la **variabile libera** x_4 con il parametro t .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ -x_3 - 5t = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 - 5t + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 - 2t + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \quad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \end{aligned}$$

L'equazione ha **infinite soluzioni** che possono essere parametrizzate in t .

1.2.1 Casi possibili

Se nella forma a scalini:

1. **Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot** $\Leftrightarrow \exists$ **unica soluzione**
2. C'è un **pivot nell'ultima colonna** $\Leftrightarrow \nexists$ **soluzione**
3. C'è una **colonna "non aggiunta" senza pivot** e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow \exists \infty$ **soluzioni**

1.3 Matrice ridotta a scalini

Una matrice è in forma **ridotta** a scalini se:

- È in forma **a scalini**
- Ogni **pivot** è $= 1$
- Ogni **pivot** è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO (A scalini ma non ridotta)}$$

1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo produce una matrice in forma **ridotta** a scalini attraverso operazioni del tipo A, B, C.

1. Con l'**algoritmo di Gauss** si riduce a scalini la matrice.
2. Nelle colonne dei pivot gli elementi della colonna superiore e a sinistra nella riga sono già $= 0$. **Annullare** gli elementi sopra il pivot nella colonna con **operazioni del tipo B** ($R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$).
3. In ogni riga si **cerca il pivot** (se esiste). Se il pivot $\lambda \neq 1$, si moltiplica la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

Esempio Partiamo da una matrice già ridotta a scalini dall'algoritmo di Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Algoritmo di Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan** alla matrice a scalini per trasformarla in matrice **ridotta** a scalini.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si **azzerano** gli elementi nelle colonne dei pivot che sono $\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora nelle colonne dei pivot **tutti gli elementi sono = 0** eccetto il pivot. Si individuano i **pivot** $\neq 1$ e si procede con la loro **trasformazione a 1**. Si moltiplicano le righe con i **pivot** $\neq 1$ per il loro **reciproco**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Conclusioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

Si parla di **spazi vettoriali** quando definiamo punti e vettori nel piano \mathbb{R}^2 . Un **punto** di \mathbb{R}^2 si può descrivere con **due coordinate** (x_1, x_2) , ma anche con un **vettore** (una freccia) dall'**origine** $(0, 0)$ a (x_1, x_2)

2.0.1 Somma

Si può fare la **somma** di due vettori:

- Sulle **coordinate**: $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
- **Geometricamente**: **Legge del parallelogramma** dove la **diagonale del parallelogramma** è la somma dei due vettori.

2.0.2 Moltiplicazione

Un vettore può essere moltiplicato con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Sulle **coordinate**: $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$
- **Geometricamente**: La **lunghezza** è moltiplicata da λ ma l'angolo non cambia.

2.1 Spazi vettoriali di dimensione n

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ uno **spazio n-dim standard** o spazio dei vettori colonna.

Un spazio vettoriale di dimensione **2** corrisponde ad un **piano**, di dimensione **3** ad uno spazio **euclideo**.

Definizione Uno **spazio vettoriale** su \mathbb{R} è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

- **Somma:** $v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$.
- **Prodotto** con $\lambda \in \mathbb{R} : v \in V \rightarrow \lambda \cdot v \in V$.

Le operazioni devono soddisfare:

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. $\exists! 0 \in V : 0 + v = v + 0 = v \forall v$
4. $\forall v \exists! -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
6. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
7. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v$

2.1.1 Somma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Moltiplicazione

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

¹ $\exists!$ = Esiste un unico

2.2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale. Un **sottospazio** $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che

- Dati due vettori nel sottospazio, la loro somma sarà nel sottospazio.

$$v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

- Dato un vettore nel sottospazio, il prodotto con un qualsiasi scalare è contenuto nel sottospazio.

$$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \quad \forall \lambda$$

Un sottospazio $W \subset V$ è uno spazio vettoriale.

Esempio

1. $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

In generale

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nm}t_m = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

è **sottospazio**.

Quindi le **soluzioni** di un **sistema di equazioni lineari omogenei** a n variabili definiscono un **sottospazio** di \mathbb{R}^m .

Non definiscono un sottospazio di \mathbb{R}^m le soluzioni di equazioni lineari **non omogenee** (coefficiente $\neq 0$).

2.3 Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Una **combinazione lineare** di v_1, \dots, v_m è una somma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Esempio

$$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$ è **combinazione lineare non banale**.

2.4 Span

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ m vettori. Il **sottospazio generato** da v_1, \dots, v_m è:

$$Span(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \}$$

Quindi $Span$ è l'insieme di **tutte le combinazioni lineari**.

$Span(v_1, v_2, \dots, v_m) \subset V$ è un **sottospazio**.

Esempi

1.

$$\mathbb{R}^2 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette, rispettivamente dell'asse x e y .

2.

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$$

$$\text{Allora } W = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Quindi un **sottospazio** può essere lo **span di vettori diversi**.

2.4.1 Esercizi

Verificare che $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ applicando l'**Algoritmo di Gauss** si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] &\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

3 **pivots** nelle 3 colonne a sinistra (non ci interessa a destra) quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 = b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

ammette un' **unica soluzione** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Il **vettore generale** v è contenuto in $\text{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

In generale Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è **combinazione lineare** di $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \Rightarrow \text{Span}(v_1, v_1, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, v_1, \dots, v_{n-1})$.

Trovare sistema di equazioni lineari omogenee tale che il sottospazio di \mathbb{R}^n associato sia $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$

1. Si sceglie una base di $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$. Possiamo supporre la base (v_1, \dots, v_r) con $r \leq m$.

2. Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$
 v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow nella forma a scalini di A c'è un **pivot in ogni colonna**.

3. Sia $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ qualsiasi.
 $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \Leftrightarrow v, v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** \Leftrightarrow
 nella forma a scalini della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$ ci sono sempre **r**
pivot nelle prime **r** colonne ovvero **l'ultima colonna non contiene pivots**.
 Questo dà equazioni lineari per b_1, \dots, b_n .

Esempio

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono vettori **linearmente indipendenti** perché non sono multipli tra loro.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** da controllare è nell'ultima colonna quindi se $b_3 - b_1 = 0 \Leftrightarrow$ **non** è un pivot della terza colonna.

Quindi $\text{Span}(v_1, v_2) = \{\text{soluzioni di } x_3 - x_1 = 0\}$

2.5 Dipendenza lineare

I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

vale **solo** per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Altrimenti sono **linearmente dipendenti**.

Geometricamente Vettori linearmente dipendenti hanno la **stessa retta**.

Proposizione v_1, v_2, \dots, v_m sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow \exists i : v_i$ è combinazione lineare dei $v_j \forall j \neq i$.

Verificare se m vettori sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ **vale se e solo se** $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è **soluzione del sistema**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

dove \mathbf{x} **sostituisce** $\boldsymbol{\lambda}$ e lo 0 dell'equazione corrisponde al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi v_1, \dots, v_m sono **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow il sistema ammette **solo la soluzione banale**, cioè $x = (0, \dots, 0)$.

Esempio Verificare che i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 siano **linearmente indipendenti**.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema **lineare omogeneo** con la **matrice dei coefficienti associata**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Gauss:

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono 3 **pivots** e una **variabile libera** $\Rightarrow \infty$ soluzioni.

Il sistema ammette **soluzioni non banali** \Rightarrow i vettori sono **linearmente dipendenti**.

2.6 Basi

Un sistema v_1, \dots, v_n di vettori è una **base** di V se:

- i vettori v_1, \dots, v_n sono **linearmente indipendenti**
- $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$

Esempio Base standard di \mathbb{R}^n :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

Dunque $\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2.6.1 Coordinate

Sia v_1, \dots, v_n una base di V e $v \in V$ un vettore. Allora

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ovvero **ogni vettore** si scrive in un modo **unico** come **combinazione lineare** degli **elementi della base**.

Gli α_i sono le **coordinate** di v rispetto alla **base**.

Trovare le coordinate di un vettore rispetto alla base

Sappiamo da esercizi precedenti che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono

una **base** di \mathbb{R}^3 . Trovare le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$ e $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.7 Dimensione

La **dimensione** di uno spazio V sarà definita come il **numero degli elementi di una base**. Questo numero è lo stesso per ogni base.
2

2.7.1 Proprietà

Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_r \in V$ i casi sono:

- $r > n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti**
- $r = n$ e v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow è una **base**
- $r < n$ e v_1, \dots, v_n **linearmente indipendenti** \Leftrightarrow si **completa**³ in una **base**

²Dimostrazione a fine lezione 06.

³Posso aggiungere vettori affinché diventi una base

Esempio

Decidiamo se $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base di \mathbb{R}^3

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ se sono **indipendenti** formano una **base**.

Verifichiamo con **Gauss**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivots \Rightarrow i vettori sono **linearmente dipendenti**.

Però i **pivots** sono nelle colonne 1,3 quindi escludendo la colonna 2:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sono } \mathbf{linearmente indipendenti}^4$$

Ora $\dim \text{Span}(v_1, v_2) = 2, \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Troviamo ora un vettore di \mathbb{R}^3 **non contenuto** nello $\text{Span}(v_1, v_2)$.

Una strategia può essere partire dalla **base standard**: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Una

delle 3 basi standard non è sicuramente contenuta nello $\text{Span}(v_1, v_2)$ altrimenti esso sarebbe una base.

Cerchiamo quindi il vettore della base standard che è linearmente indipendente agli altri 2 vettori. Proviamo con e_3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow e_3$ completa la nostra base. e_1 invece **non la completa**.

Proposizione Sia $W \subset V$ un **sottospazio**. Allora

1. $\dim W \leq \dim V$
2. Se $W \neq V$, allora $\dim W < \dim V$

Questa proposizione è utile per calcolare le dimensioni dei sottospazi.

⁴Il vettore v_2 è il vecchio vettore v_3 , cambio di notazione per proseguire l'esercizio

Esempio

Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ (**Matrici simmetriche**)

$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ (base standard).

$V \neq M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3$.

Ma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono **linearmente indipendenti** $\Rightarrow \dim V = 3$

2.7.2 Sottospazi

Intersezioni di sottospazi

Se $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ è sottospazio.

Formula di Grassmann

Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi allora

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Osservazione $V_1 + V_2$ è un **sottospazio**.

Esempio

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3, \text{ ma anche } V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Formula di Grassmann Se $\dim < \infty, V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Esempio In \mathbb{R}^4 consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \text{Span} \left(v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $\dim(V \cap W)$, $\dim(V + W)$

Soluzione

$\dim W = 2$ perché ovviamente $W_1 \neq \lambda W_2$.

Calcoliamo $\dim V$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \text{ variabili libere} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 = x_3 + 6x_4 \end{cases}$$

$$\text{Soluzione generale} \begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Posso scrivere in forma parametrizzata $x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e ora sappiamo

che **$\dim V = 2$** e **v_1, v_2 è una base.**

Cerchiamo ora $\dim(V + W)$.

$V + W = \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Troviamo una base con **Gauss**:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_2 \circ R_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + \frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 pivots quindi le prime 3 colonne sono indipendenti.

Quindi $\dim \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2) = \dim(V + W) = 3$.

Grassmann: $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$

Potevamo anche calcolare direttamente $\dim(V \cap W)$:

$$Y \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Sostituiamo e otteniamo:

$$\begin{cases} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \dim(V \cap W) = 1 \text{ perché } V \cap W = \{\lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2.8 Rango

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, il **rango** di A è

$$rg(A) := \dim \text{Span} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

2.8.1 Trovare il rango

Per calcolare $rg(A)$ bisogna:

- estrarre una base di $\text{Span}(\text{colonne})$.
- usare l'algoritmo di Gauss sulla matrice A

Se numero colonne linearmente indipendenti = numero dei pivots della forma a scalini $\Rightarrow rg(A) = \text{numero di pivot nella forma a scalini}$.

Capitolo 3

Applicazioni lineari

Definizione Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su \mathbb{R} . Un'applicazione lineare è una funzione $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ che soddisfa:

- $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$
- $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_1$

3.1 Kernel

Il **Kernel o nucleo** è un sottospazio:

$$\text{Ker}(\varphi) := \{v \in V_1 : \varphi(v) = 0\}$$

Proposizione $\text{Ker}(\varphi_1) \subset V_1$ è un sottospazio.

3.1.1 Trovare il Kernel utilizzando la matrice

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$v \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ è soluzione di } \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Quindi per trovare $\text{Ker}(\varphi)$ bisogna **risolvere il sistema omogeneo** (ad esempio con Gauss).

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $\text{Ker}(\varphi)$.

Applichiamo Gauss alla matrice di φ .

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \text{soluzioni di } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \text{ soluzione generale del sistema.}$$

$$\text{Quindi } \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \text{ è la } \mathbf{base} \text{ di } \text{Ker}(\varphi).$$

3.2 Immagine

L'immagine è un sottospazio:

$$Im(\varphi) := \{w \in V_2 : \exists v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v)\}$$

Proposizione $Ker(\varphi) \subset V_2$ è un sottospazio.

3.2.1 Trovare l'immagine utilizzando la matrice

Sappiamo che se e_1, \dots, e_n è la base standard,

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma $Im(\varphi) = Span(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

Quindi **$Im(\varphi)$** è lo **span delle colonne** di A in \mathbb{R}^m

3.2.2 Trovare la dimensione

Per trovare la **$dim Im(\varphi)$** bisogna determinare la dimensione dello **span**, ovvero il **rango**.

Se φ ha matrice A allora **$dim Im(\varphi) = rg(A)$**

Esempio Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Trovare $Im(\varphi)$.

Applichiamo Gauss alla matrice di φ .

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono **pivots** nelle prime due colonne $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è la base di $Im(\varphi)$ e

il **rango** è 2.

3.3 Dimensione

Teorema Se $\dim V_1 < \infty$ allora

$$\dim \text{Ker}(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi) = \dim V_1$$

in $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$. La dimensione di V_2 non riguarda questo teorema.

3.4 Prodotto

Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$, il loro **prodotto** è il vettore in \mathbb{R}^m :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Il vettore moltiplicato deve avere lo stesso numero di colonne della matrice.

Proposizione Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale, allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Esempio 1 Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x + 2y + 3z$. Trovare $\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Naturalmente $1 \cdot 1 + -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2$. Ma anche:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 1, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 3.$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = [1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 3 = 2$$

Esempio 2 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} \text{ Vettore generico}$$

Conclusione Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare, $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ base standard allora:

- $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ **determina φ in maniera unica**
- $\forall v$ possiamo calcolare $\varphi(v) = A \cdot v$ dove $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice definita nel punto precedente.

3.5 Matrice associata all'applicazione lineare

Sia $\varphi : V \rightarrow W$ lineare.

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V [$\dim V = n$]

Sia $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ una base di W [$\dim W = m$]

Scriviamo

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m \\ \varphi(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m\end{aligned}$$

La matrice di φ rispetto alla base B, B' è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Quindi

$$A = [\varphi(e_1) \mid \varphi(e_2) \mid \dots \mid \varphi(e_n)]$$

dove le **colonne sono le coordinate di $\varphi(e_i)$ rispetto a e'_1, \dots, e'_m .**

Teorema Se $v = b_1e_1 + \dots + b_ne_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore

colonna in \mathbb{R}^n : $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ sono date dal vettore colonna

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Importante La matrice A è sempre definita con **due basi B, B' .**

Esempio $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi scrivendo le coordinate **non** rispetto alla base standard ma ad **altre basi**, φ può diventare molto più semplice. Per trovare **basi ottimali** si utilizzeranno gli **autovettori**.

3.6 Isomorfismo

Un'applicazione lineare $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ è un **isomorfismo** se

- $Im(\varphi) = V_2$
- per $v_1, v'_1 \in V_1$ $\varphi(v_1) = \varphi(v'_1) \Leftrightarrow v_1 = v'_1$. Notazione: $v_1 \xrightarrow{\sim} v_2$

Dunque φ è un **isomorfismo** se $\forall v_2 \in V_2 \exists! v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2$.

Osservazione φ è un isomorfismo $\Leftrightarrow Im(\varphi) = V_2, Ker(\varphi) = \{0\}$.

Esempio $V_1 = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), V_2 = \mathbb{R}^4$ $\varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ è un isomorfismo.}$$

Ma anche $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo**. $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Osservazione Sia V uno spazio vettoriale, $dim V = n$ e $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V . Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

Allora $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ definisce un **isomorfismo** $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

Infatti φ è lineare, $Im(\varphi) = \mathbb{R}^n, Ker(\varphi) = \{0\}$.

Osservazione Sia $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ una qualsiasi applicazione lineare, $dim V_1 = n, dim V_2 = m$.

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1 .

$B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ base di V_2 .

Sia A la matrice di φ rispetto a B e B' .

B definisce $\psi : V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

B' definisce $\psi' : V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$.

Lemma

- ψ^{-1} induce un **isomorfismo** $Ker(v \mapsto Av) \xrightarrow{\sim} Ker(\varphi)$
- ψ' induce un **isomorfismo** $Ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} Ker(v \mapsto Av)$

3.7 Composizione di funzioni

Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ applicazioni lineari.

Allora $\psi \circ \varphi : V_1 \rightarrow V_3$ è **lineare**.

Siano

$B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ base di V_1

$B_2 = (f_1, \dots, f_n)$ base di V_2

$B_3 = (g_1, \dots, g_n)$ base di V_3

Siano

$B =$ matrice di φ rispetto a B_1, B_2

$A =$ matrice di ψ rispetto a B_2, B_3

Allora la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a B_1, B_3 è $A \cdot B$.

3.8 Proprietà della moltiplicazione

1. $A(BC) = (AB)C$

2. $A \cdot B = B \cdot A$ **non è vero in generale**

3. Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice **identità** di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora
 $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : I \cdot A = A \cdot I = A$

4. Se $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ isomorfismo $\Rightarrow \exists \varphi^{-1} : V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$ ¹.

Se fissiamo le basi

B_1 di V_1 , B_2 di V_2 , φ ha matrice A e φ^{-1} ha matrice $A^{-1} \Rightarrow$

$$A \cdot A^{-1} = I, A^{-1} \cdot A = I$$

5. **Matrice inversa:** Esiste **solo** se è la matrice di φ isomorfismo.

¹id=identità

3.9 Cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale di dim n e B, B' due basi.
La **matrice di cambiamento di base** rispetto a (B, B') è definita da²

$$P := [id_V]_B^{B'}$$

Esempio Siano $V = \mathbb{R}^2, B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\varphi : v \mapsto A \cdot v$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Allora:

$[\varphi]_B = A$, calcoliamo $[\varphi]_{B'}$:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $[\varphi]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calcoliamo ora $P = [id_V]_B^{B'}$

Calcoliamo con Gauss la **matrice del cambiamento di base**. Scriviamo la base B usando le coordinate della base B' .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è la **matrice del cambio di base** da B a B'

³ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è la **matrice di cambio di base** da B' a B

Si nota che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

² id_V che va da B a B'

³Usando lo stesso metodo ma è banale poiché B , ovvero la base di destinazione, è la matrice identità

In generale $[id_V]_{B'}^B = [id_V]_B^{B'} = [id_V \circ id_V]_B = [id_V]_B$ è la **matrice identità**.

Quindi $P = [id_V]_B^{B'}$ è invertibile e $P^{-1} = [id_V]_{B'}^B$.

Teorema Se B, B' sono due basi di V , P matrice di cambiamento di base. $\varphi : V \rightarrow V$ applicazione lineare con $A = [\varphi]_B$ allora $[\varphi]_{B'} = PAP^{-1}$

Esempio Con l'esempio precedente:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.10 Determinante

Il **determinante** sarà un funzione $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprietà fondamentale:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le righe di A sono **linearmente indipendenti**
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono **linearmente indipendenti**

Esempi

- $n = 1$ $A = [a]$ $\det(A) = a$
- $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$

Geometricamente

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{area del parallelogramma costruito sui lati } \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Definizione generale Per induzione su $n-1$, sapendo $n=1,2$:

Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j :

- $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per i fisso (**sviluppo secondo la riga i**)
- $\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per j fisso (**sviluppo secondo la colonna j**)

Il risultato sarà uguale per entrambe le formule e per qualsiasi i, j scelto.

Promemoria per i segni

$$(-1)^{i+j} : \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Esempio Per $n=3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 0 + (-1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 - (-1) = \mathbf{3}$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 = 2 + 1 = \mathbf{3}$$

Esempio Matrice triangolare superiore ovvero $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

3.10.1 Effetto del determinante sulle operazioni elementari di Gauss

1. Scambio di due righe

adiacenti: $\det(A) \rightarrow -\det(A)$

scambio tra riga i e j qualsiasi: si eseguono cambi successivi adiacenti.

2. Sostituzione della riga R_i con $R_i + \lambda R_j (j \neq i)$: $\det(A)$ non cambia

3.10.2 Teoremi

Teorema Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Corollario Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A^{-1} \text{ esiste} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ allora } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Proposizione Sia $\varphi : V \rightarrow V$ una mappa lineare, B, B' due basi di V , A la matrice di φ rispetto a B , A' la matrice di φ rispetto a B' .

$$\det(A) = \det(A')$$

Quindi **$\det(A)$ dipende solo da φ** e non dalla base.

Corollario Se $\varphi : V \rightarrow V$ è un'applicazione lineare, A la matrice di φ rispetto ad una qualsiasi base

$$\text{Ker}(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) \neq V \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

3.10.3 Formula di Cramer

Definizione Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, la matrice **aggiunta** di A è

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \text{ dove } \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

Formula di Cramer

$$A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$$

dove $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

Corollario Se $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$$

Esempio Per $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Esempio Per $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{22} \cdot \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Capitolo 4

Autovalori ed Autovettori

Definizione Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , $\dim V < \infty$, $\varphi : V \rightarrow V$ applicazione lineare.

$\lambda \in \mathbb{R}$ è un **autovalore** di φ se $\exists v \neq 0 \in V : \varphi(v) = \lambda \cdot v$.

In questo caso v è un **autovettore** associato a λ .

Osservazioni

- v può essere autovettore per un solo λ
- λ può essere autovalore di molti vettori

Proposizione

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori per λ formano un sottospazio di V :

V_λ Autospazio

- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = (0)$

4.1 Autovalore

λ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0$

Ma se A è la matrice di φ rispetto ad una base $\Rightarrow A - \lambda I$ è la matrice di $\varphi - \lambda \cdot \text{id}$.

$\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definizione Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il **polinomio caratteristico** di A è:

$$P_A(t) := \det(A - t \cdot I) \in \mathbb{R}[t]$$

dove t è una variabile.

Conclusione λ è **autovalore** di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ **radice** di $P_A(t)$

dove A è matrice di φ rispetto ad una base.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - t & \dots & a_{nn} - t \end{bmatrix}$$

4.2 Diagonalizzazione

Definizione φ è **diagonalizzabile** se \exists una base di V dove la matrice di φ è diagonale.

Proposizione φ è **diagonalizzabile** $\Leftrightarrow \exists$ base di V costituita di **autovettori** di φ .

Proposizione Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono **autovalori distinti** di φ , v_i **autovettore** associato a λ_i dove $i = 1, \dots, n \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti**

Corollario

1. Ci sono un **numero finito** di **autovalori** distinti perché $\dim V < \infty$.
2. φ è **diagonalizzabile** \Leftrightarrow se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori distinti di φ allora

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_n} = \dim V$$

3. Se $n = \dim V$ e φ ha n autovalori distinti $\Rightarrow \varphi$ è **diagonalizzabile**

4.2.1 Definire se φ è diagonalizzabile

1. Trovare gli **autovalori**

Se ci sono $n = \dim V$ **distinti** \Rightarrow **diagonalizzabile**

2. Trovare gli **autovettori** per ogni λ_i e calcolare **$\dim V_{\lambda_i}$** .

Se $\sum_i \dim V_{\lambda_i} = \dim V \Rightarrow$ è **diagonalizzabile**

Se $\sum_i \dim V_{\lambda_i} < \dim V \Rightarrow$ **NON** è **diagonalizzabile**

Molteplicità

Definizione Sia λ un autovalore di φ .

La **molteplicità algebrica** di λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(t)$.

La **molteplicità geometrica** di λ è $\dim V_{\lambda}$.

Proposizione Molteplicità geometrica di $\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ .

Conclusione φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \forall$ autovalore λ di φ è reale e molteplicità algebrica = molteplicità geometrica.

In particolare se troviamo λ con molteplicità geometrica < molteplicità algebrica $\Rightarrow \varphi$ non è diagonalizzabile.

Esempio Determinare se la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 0 \\ 1 & -2t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t) \begin{bmatrix} -t & 3 \\ 1 & -2-t \end{bmatrix} =$$

$$(1-t)(t^2 + 2t - 3) = (1-t)(t-1)(t+3) = (t-1)^2(t+3)$$

Autovalori: 1, -3, 1

Autovettori per 1: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y = x \\ x - 2y = y \\ x - 3y + z = z \end{cases}$

$$x = 3y \Rightarrow \dim(V_1) = 2$$

Una base di V_1 : $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovettori per -3: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -3x \\ x - 2y = -3y \\ x - 3y + z = -3z \end{cases}$

$$x = -y, -4y = -4z \Rightarrow x = -y = -z \Rightarrow \dim(V_{-3}) = 1$$

Una base di V_{-3} : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A è diagonalizzabile nella base $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dove diventa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4.3 Numeri complessi

Un **numero complesso** è un'espressione $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i è un parametro formale con la proprietà $i^2 = -1$.

Ogni $a \in \mathbb{R}$ è anche un numero complesso: $a = a + 0i$.

Notazione \mathbb{C} è l'insieme dei **numeri complessi**.

Osservazione Se $\Delta \in \mathbb{R}, \Delta < 0, (\sqrt{-\Delta} i)^2 = \Delta \Rightarrow$
 \forall polinomio $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ ha **radici** in \mathbb{C} .

Teorema Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti **complessi** ammette una radice in \mathbb{C} .

Definizione Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il suo **coniugato** è $\bar{z} = a - bi$.

Teorema Se $f \in \mathbb{R}[x], z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = 0 \Rightarrow$ anche $f(\bar{z}) = 0$.
Quindi le **radici** di $f \in \mathbb{R}[x]$ sono **reali** o **coppie di numeri complessi coniugati**.

4.3.1 Operazioni

- Se $z = a + bi, z' = a' + b'i$
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$

Somma

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

Prodotto con scalare

$$\lambda z = \lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

Prodotto di numeri complessi

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Capitolo 5

Prodotto scalare

Siano $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ due vettori in \mathbb{R}^n .

Il loro **prodotto scalare** è $\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}$.
 $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama **prodotto scalare standard**.

5.0.1 Proprietà

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
2. Per $v \in \mathbb{R}^n$ **fisso**, la funzione $w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'**applicazione lineare** $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
Per $w \in \mathbb{R}^n$ **fisso**, la funzione $v \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'**applicazione lineare** $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
3. $\forall v \in \mathbb{R}^n \langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Definizione Se $v \in \mathbb{R}^n$, la sua **norma** è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Capitolo 6

Ortogonalità e ortonormalità

Definizione $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se $\langle v, w \rangle = 0$

Un **sistema** v_1, \dots, v_n è un **sistema ortogonale** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$.

Un **sistema** v_1, \dots, v_n è un **sistema ortonormale** se è ortonormale e $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \ \forall i$

Proposizione Un sistema ortogonale di vettori è linearmente indipendente.

Osservazione Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\varphi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora:

$\text{Ker}(\varphi_v) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0\}$

Notazione: $\text{Ker}(\varphi_v) =: \langle v \rangle^\perp$.

Terminologia: $\langle v \rangle^\perp$ è il sottospazio ortogonale a v .

6.0.1 Trovare sottospazio ortogonale

Generalizzazione Se $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$ allora:

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp =$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{bmatrix}$$

Esempio Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Troviamo il sottospazio $\langle v, w \rangle^\perp$.

$\langle v, w \rangle^\perp$ è il **sottospazio delle soluzioni**: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Troviamo una base: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$

Soluzione generale:

$$\begin{bmatrix} s \\ -s - t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ sono una base di } \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^\perp.$$

6.0.2 Base ortonormale

Teorema Ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ ammette una base **ortonormale**.

Corollario Sia $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ un **sistema ortonormale** in \mathbb{R}^n . Allora $\exists v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n : v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una **base ortonormale (ON)** di \mathbb{R}^n .

Corollario $\dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = n - r$.

Corollario

Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio, sia $V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}$ allora $V \cap V^\perp = \{0\}$ e $\text{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$ e in particolare

$$\dim V + \dim V^\perp = n$$

A cosa serve una base ortonormale?

Se v_1, \dots, v_n è una base **ortonormale** di \mathbb{R}^n allora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Trovare una base ortonormale

- $\dim V = 1$ Se $V = \langle v \rangle$, $\overline{v_1} = \frac{v}{\|v\|}$ è una **base ortonormale**.
- $\dim V = 2$ Se v_1, v_2 base di V , $\overline{v_1}$

Algoritmo di Gram-Schmidt

Se v_1, \dots, v_n sono vettori **linearmente indipendenti** di V costruiamo un insieme di **vettori ortogonali** w_1, \dots, w_n .

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$
- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$
- \dots
- $w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}$

Trovati w_1, \dots, w_n vettori **ortogonali** li **normalizziamo**:

$$w'_i = \frac{w_i}{||w_i||}$$

I vettori w'_1, \dots, w'_n formeranno una **base ortonormale**.

Capitolo 7

Teorema spettrale

Definizione $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ è **simmetrica** se $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ oppure se $A = A^T$ dove A^T è la **matrice trasposta**.

Lemma Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, allora

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema spettrale per matrici simmetriche

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è **simmetrica**, ogni **autovalore** di A è **reale** ed A è **diagonalizzabile** in una base **ortonormale** di **autovalori**.