

Compito di MDAL

12 Gennaio 2017

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Dopo aver mostrato che $\mathcal{B} = \langle x^2 - 1, x, x^2 + 1 \rangle$ è una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ (polinomi di grado ≤ 2) si risponda alle seguenti domande:

1. si calcolino i coefficienti c_1, c_2, c_3 del polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ nella base \mathcal{B} (ovvero si scriva $P(x)$ nella forma $c_1(x^2 - 1) + c_2x + c_3(x^2 + 1)$);
2. si consideri l'applicazione lineare $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ definita ponendo $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$ e si scriva la matrice associata a D rispetto alla base \mathcal{B} in partenza e in arrivo;
3. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di D ;
4. Stabilire se D è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^3 definito dall'equazione $3x + 5y = 0$ e sia W il sottospazio definito dall'equazione $z = 0$.

1. Si calcoli la dimensione di $V \cap W$;
2. Si trovi una base ortogonale di V ;
3. Si trovi un'applicazione lineare invertibile $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che manda W in V .

Esercizio 3. a) Risolvere la congruenza

$$84x \equiv 1540 \pmod{455}$$

b) Per quali valori del numero intero positivo m la congruenza

$$84x \equiv 770 \pmod{175m}$$

ammette soluzione ?

Esercizio 4. a) Quante sono le soluzioni in \mathbb{Z} dell'equazione $x + y + z = 33$ con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$?

b) Quante sono le soluzioni in \mathbb{Z} dell'equazione $x + y + z = 33$ soggette ai vincoli $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$?

