Matematica Discreta e Algebra Lineare
9 Febbraio 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. Punti 5 ad esercizio. Per alcuni esercizi potrà eventualmente essere attribuito un punto in più per valorizzare la qualità, la chiarezza, la precisione.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

1) Dire se l'applicazione è diagonalizzabile quando $a = 3$.
2) Dire se l'applicazione è diagonalizzabile quando $a = 4$.
3) Trovare, nel caso $a = 2$, un autovettore relativo all'autovalore 4.

per $a=3$

1) $(A - xI) = \begin{bmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 0 & -1 & 2-x \end{bmatrix}$. $\quad P_A(x) = (4-x)\left[(3-x)(2-x)+1\right]$
$= (4-x)\left[x^2-5x+7\right]$

$x^2-5x+7=0 \iff x = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2}$ non ha soluzioni reali $\Rightarrow$ non diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

2) per $a=4$, $(A - xI) = \begin{bmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 0 & -1 & 2-x \end{bmatrix}$, $P_A(x) = (4-x)\left[(4-x)(2-x)+1\right]$

$(4-x)(2-x)+1 = x^2-6x+9 = (x-3)^2$.
autovalore 4 con molt. alg. 1, autovalore 3 con molt. alg. 2.
$V = \ker(A-3I)$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\dim V_3 = 1 \neq 2$ non diag.

Risposta 1: SI/NO	Risposta 2: SI/NO	Risposta 3: Autovettore
NO	NO	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) per $a=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. $\quad V_4 = \ker(A-4I)$. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ & -2 & 1 \end{array}$

verifico $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Risolvere le due congruenze del seguente sistema, e poi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^4 \equiv 1 \pmod{55} \\ 3x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

(eq 1) $\quad 3x^2+x+1 \equiv 0\ (5) \iff x \equiv 1\ (5) \ \vee\ x \equiv 2\ (5)$

(eq 2) $\quad x^4 \equiv 1\ (55) \iff x^4-1 \equiv 0\ (55) \iff \begin{cases} x^4-1 \equiv 0 & (5) \\ x^4-1 \equiv 0 & (11) \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1) \\ x^2-1 \text{ non ha soluzioni modulo } 11, \text{ quindi} \end{array}\right.$$

a) $x^4-1 \equiv 0\ (11) \iff x \equiv \pm 1\ (11)$

b) $x^4-1 \equiv 0\ (5)$ per ogni $x \not\equiv 0\ (5)$

$x^4 \equiv 1\ (55) \iff$ (8 casi)

$$\iff \begin{cases} x \equiv 1 & (5) \\ x \equiv 1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv 2 & (5) \\ x \equiv 1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv -2 & (5) \\ x \equiv 1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv -1 & (5) \\ x \equiv 1 & (11) \end{cases}.$$

$$\vee \begin{cases} x \equiv 1 & (5) \\ x \equiv -1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv 2 & (5) \\ x \equiv -1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv -2 & (5) \\ x \equiv -1 & (11) \end{cases} \vee \begin{cases} x \equiv -1 & (5) \\ x \equiv -1 & (11) \end{cases}$$

$\iff x \equiv 1\ (55) \ \vee\ x \equiv 12\ (55) \ \vee\ x \equiv -32\ (55) \ \vee\ x \equiv -21\ (55)$

$x \equiv 21\ (55) \ \vee\ x \equiv 32\ (55) \ \vee\ x \equiv -12\ (55) \ \vee\ x \equiv -1\ (55)$

(Sistema)

Soluzioni prima cong.	Soluzioni seconda cong.	Soluzioni sistema
1, 2 mod 5	$\pm 1, \pm 12$ (55) $\pm 32, \pm 21$	1, 12 (55) 21, 32

Esercizio 3. Trovare per quali valori di k si ha che

$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in Span\left(\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

<u>Soluzione:</u>

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in$ span $\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \iff \exists\, x\, y \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ k & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema con matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ k & -4 & 5 \end{array}\right)$

Per Gauss, $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ k & -4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \frac{k}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4-\frac{k}{3}2 & 5-\frac{k}{3}4 \end{array}\right]$

devo verificare se $-4-\frac{k}{3}2$ è un pivot.

$-4-\frac{k}{3}2 = 0 \iff k = -6$

Quindi se $k \neq -6$ ho soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ è nello span

(e in questo caso lo span è tutto $\mathbb{R}^2$).

Se invece $k = 6$ il sistema diventa $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5-\frac{6}{3}4 \end{array}\right]$

che non ha soluzione e $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ non è nello span. $\square$

Valori di k

$$\boxed{k \neq -6}$$

Esercizio 4. SIa $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$.

(1) Determinare il numero dei sottoinsiemi di due elementi $\{x, y\}$ di X in cui almeno uno fra x e y è pari.

(2) Determinare il numero dei sottoinsiemi di due elementi $\{x, y\}$ di X tali che $x + y$ è divisibile per 3.

(1) Tutti − Entrambi dispari

$\binom{100}{2} - \binom{50}{2}$

(2) [Entrambi $\equiv 0\ (3)$] $\cup$ [Uno $\equiv 1$ e l'altro $\equiv 2$]

$\binom{33}{2} + 33 \cdot 32$

Risposta 1

$\boxed{\binom{100}{2} - \binom{50}{2}}$

Risposta 2

$\boxed{\binom{33}{2} + 33 \cdot 32}$

Esercizio 5. Si consideri un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(1) Si scriva la matrice di L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(2) Si scriva la matrice di L rispetto alla base $\overbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}^{\beta}$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(3) Si scriva la matrice di L rispetto alla base $\overbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}^{\beta}$ in partenza e alla base $\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{\mathcal{E}}$ in arrivo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{E}} \arrow[r, "L"] & V_{\mathcal{E}} \arrow[d, "id"] \\
V_{\beta} \arrow[u, "id"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "L"'] & V_{\beta}
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{L}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ id

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se A, B, C sono matrici con $BA = C$ scrivo

$$A \xrightarrow{B} C$$

date A, C per trovare B scrivo
$B = C A^{-1}$ (se A^{-1} esiste).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right] \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right] \xrightarrow[R_1 - R_2]{} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

//

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3
$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Sia a un numero intero e sia

$$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - ax - 3.$$

(1) Determinare le radici razionali di $f(x)$ nel caso $a = 1$.
(2) Determinare tutti i valori di a per cui $f(x)$ ha almeno una radice razionale.
(3) Determinare tutti i valori di a per cui $f(x)$ ha tre radici razionali.

$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - ax - 3$. Sia $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ridotto ai minimi termini.

$f(\frac{m}{n}) = 0 \Rightarrow m \mid 3 \wedge n \mid 1 \Rightarrow \frac{m}{n} = \pm 3$.

Le radici razionali possono solo essere $+3$ e -3.

(1) per $a = 1$ ho solo la radice -3 .

(2) Per avere radici razionali $f(3) = 0 \vee f(-3) = 0$

$f(3) = 27 + (a+2)9 - a3 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a(9-3) + (27+18-3) = 0$

$\Leftrightarrow a(3-1) + (9+2-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 10 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -5}$

$f(-3) = -27 + (a+2)9 - a(-3) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a[9+3] - 27 + 18 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a[3+1] - 9 + 6 - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$.

(3) nessuno .

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3
-3	$1, -5$	nessuno