

# Algebra Lineare

Stefano Piccoli

17 febbraio 2022

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
0.1 Equazioni a 3 variabili . . . . .	3
0.2 Caso generale . . . . .	4
0.2.1 Sistema omogeneo . . . . .	4
0.2.2 Sistema omogeneo associato . . . . .	4
0.2.3 Soluzione di un sistema . . . . .	4
0.2.4 Trovare soluzioni comuni . . . . .	5
<b>1 Matrici</b>	<b>6</b>
1.0.1 Operazioni . . . . .	6
1.1 Matrice a scalini . . . . .	6
1.2 Algoritmo di Gauss . . . . .	7
1.2.1 Casi possibili . . . . .	8
1.3 Matrice ridotta a scalini . . . . .	9
1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan . . . . .	9
<b>2 Spazi vettoriali</b>	<b>11</b>
2.0.1 Somma . . . . .	11
2.0.2 Moltiplicazione . . . . .	11
2.1 Spazi vettoriali di dimensione n . . . . .	12
2.1.1 Somma . . . . .	12
2.1.2 Moltiplicazione . . . . .	12
2.2 Sottospazi vettoriali . . . . .	13
<b>3 Combinazioni lineari</b>	<b>14</b>
3.1 Span . . . . .	14
3.1.1 Esercizi . . . . .	15
3.2 Dipendenza lineare . . . . .	17
3.3 Base . . . . .	18
3.3.1 Coordinate . . . . .	19
3.4 Dimensione . . . . .	19

3.4.1	Proprietà . . . . .	20
-------	---------------------	----

# Introduzione

L'**Algebra Lineare** si occupa di trovare soluzioni ad equazioni e sistemi lineari.

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : y = 5 - 3 = 2$$

Sostituzione:  $x = 1$

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = 0$$

**Hanno le stesse soluzioni (infinità)**

$$\begin{cases} E1 : x + y = 3 \\ E2 : 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$E2 - E1 : 0 = -1$$

**Nessuna soluzione comune**

Quindi abbiamo 1,  $\infty$  o 0 soluzioni comuni. Così sarà in generale.

## 0.1 Equazioni a 3 variabili

Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio tridimensionale. L'intersezione può essere di 3 tipi:

- Un punto (**unica soluzione**)
- Una retta o un piano
- 0 ( $\infty$  **soluzioni**)

## 0.2 Caso generale

Un sistema di  $n$  equazioni lineari a  $m$  variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

$$n, m > 0$$

### 0.2.1 Sistema omogeneo

Il sistema (E) è **omogeneo** se  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

### 0.2.2 Sistema omogeneo associato

Un sistema omogeneo associato è un sistema dove la prima parte è uguale ad un altro e i coefficienti dopo l'uguale sono **0**.

### 0.2.3 Soluzione di un sistema

**Soluzione di un sistema = soluzione di un caso particolare + soluzione dell'omogenea associata.**

**Esempio**  $2x + 3y = 5, n = 1, m = 2$

### Soluzione particolare

$$2x + 3y = 5$$

$$x = y = 1$$

### Soluzione omogenea

$$2x + 3y = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}y$$

**Soluzione generale** Definiamo  $s$  parametro nel ruolo di  $y$ .

$$x = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)s$$

$$y = 1 + s$$

## 0.2.4 Trovare soluzioni comuni

Per trovare soluzioni comuni di  $E$  è necessario semplificare. Le 3 operazioni utili per semplificare sono:

A) Moltiplicare un'equazione  $E_i$  per una costante.  $\lambda \neq 0$ .  $E_i \Rightarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare un'equazione  $E_i$  per  $\lambda \neq 0$  e fare la somma con  $E_j$ .  
 $E_j \Rightarrow E_j + \lambda E_i$ .

C) Scambiare due equazioni.

# Capitolo 1

## Matrici

Per semplificare inseriamo i coefficienti delle equazioni in una **matrice**  $n \cdot m$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

### 1.0.1 Operazioni

Le operazioni che potevamo usare per semplificare il sistema possiamo utilizzarle anche sulle matrici:

- A) Moltiplicare una riga per  $\lambda \neq 0$ .  $R_i \Rightarrow \lambda \cdot R_i$ .
- B) Sostituire la riga  $R_j$  con una somma.  $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$ .
- C) Scambiare due righe.

### 1.1 Matrice a scalini

Una matrice  $n \cdot m$  è detta a **a scalini** se:

1. Le righe sono **in fondo**.
2. Il primo elemento di ogni riga, se esiste, è **a destra** del primo elemento  $\neq 0$  della riga precedente. Un tale elemento è detto **Pivot**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO}$$

## 1.2 Algoritmo di Gauss

1. Se la matrice è già in forma a **scalini** si termina. **END**.
2. Si cerca il primo elemento  $\neq 0$  della prima colonna  $\neq 0$ .
3. Scambiando le righe possiamo supporre che questo elemento è il **pivot** della prima riga. Lo segniamo con  $p$ .
4. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
5. Si annullano tutti gli elementi della colonna di  $p$  con operazioni di tipo  $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$ .
6. Se siamo in forma a scalini si **termina**. **END**.
7. Si ricomincia con la matrice ottenuta **escludendo** la prima riga.

**Esempio**

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** della prima riga è 1, ora devo annullare tutti gli elementi della colonna del pivot.

$$\xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La prima riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Nella seconda riga il **pivot** è 2, si procede annullando le colonne sotto il pivot.

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

La seconda riga è **completata**, si ripete l'algoritmo escludendola.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



L'algoritmo termina poiché -1 è un **pivot** e non ci sono colonne da annullare.

**Conclusioni** La matrice ritrasformata in sistema di equazioni è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

La **colonna di**  $x_4$  è senza **pivot** quindi  $x_4$  è detta **variabile libera**, e può assumere qualsiasi valore nel sistema. Sostituiamo la **variabile libera**  $x_4$  con il parametro  $t$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ -x_3 - 5t = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 + x_3 + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ 2x_2 - 5t + t = 0 \\ x_3 = -5t \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2t + 3t = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} & \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -5t \end{cases} \end{aligned}$$

L'equazione ha **infinite soluzioni** che possono essere parametrizzate in  $t$ .

### 1.2.1 Casi possibili

Se nella forma a scalini:

1. **Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot**  $\Leftrightarrow \exists$  **unica soluzione**
2. C'è un **pivot nell'ultima colonna**  $\Leftrightarrow \nexists$  **soluzione**
3. C'è una **colonna "non aggiunta" senza pivot** e l'ultima colonna non ne ha  $\Leftrightarrow \exists \infty$  **soluzioni**

## 1.3 Matrice ridotta a scalini

Una matrice è in forma **ridotta** a scalini se:

- È in forma **a scalini**
- Ogni **pivot** è  $= 1$
- Ogni **pivot** è l'unico elemento  $\neq 0$  nella sua colonna

**Esempi**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ SI } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ NO (A scalini ma non ridotta)}$$

## 1.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo produce una matrice in forma **ridotta** a scalini attraverso operazioni del tipo A, B, C.

1. Con l'**algoritmo di Gauss** si riduce a scalini la matrice.
2. Nelle colonne dei pivot gli elementi della colonna superiore e a sinistra nella riga sono già  $= 0$ . **Annullare** gli elementi sopra il pivot nella colonna con **operazioni del tipo B** ( $R_j \Rightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$ ).
3. In ogni riga si **cerca il pivot** (se esiste). Se il pivot  $\lambda \neq 1$ , si moltiplica la riga per  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Esempio** Partiamo da una matrice già ridotta a scalini dall'algoritmo di Gauss.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Algoritmo di Gauss}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan** alla matrice a scalini per trasformarla in matrice **ridotta** a scalini.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si **azzerano** gli elementi nelle colonne dei pivot che sono  $\neq 0$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora nelle colonne dei pivot **tutti gli elementi sono = 0** eccetto il pivot. Si individuano i **pivot**  $\neq 1$  e si procede con la loro **trasformazione a 1**. Si moltiplicano le righe con i **pivot**  $\neq 1$  per il loro **reciproco**.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**Conclusioni**

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

# Capitolo 2

## Spazi vettoriali

Si parla di **spazi vettoriali** quando definiamo punti e vettori nel piano  $\mathbb{R}^2$ . Un **punto** di  $\mathbb{R}^2$  si può descrivere con **due coordinate**  $(x_1, x_2)$ , ma anche con un **vettore** (una freccia) dall'**origine**  $(0, 0)$  a  $(x_1, x_2)$

### 2.0.1 Somma

Si può fare la **somma** di due vettori:

- Sulle **coordinate**:  $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
- **Geometricamente**: **Legge del parallelogramma** dove la **diagonale del parallelogramma** è la somma dei due vettori.

### 2.0.2 Moltiplicazione

Un vettore può essere moltiplicato con uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Sulle **coordinate**:  $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$
- **Geometricamente**: La **lunghezza** è moltiplicata da  $\lambda$  ma l'angolo non cambia.

## 2.1 Spazi vettoriali di dimensione n

Si definisce  $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$  uno **spazio n-dim standard** o spa-

zio dei vettori colonna.

Un spazio vettoriale di dimensione **2** corrisponde ad un **piano**, di dimensione **3** ad uno spazio **euclideo**.

**Definizione** Uno **spazio vettoriale** su  $\mathbb{R}$  è un insieme  $V$  che ammette due tipi di operazioni:

- **Somma:**  $v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$ .
- **Prodotto** con  $\lambda \in \mathbb{R} : v \in V \rightarrow \lambda \cdot v \in V$ .

Le operazioni devono soddisfare:

1.  $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2.  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3.  $\exists! 0 \in V : 0 + v = v + 0 = v \forall v$
4.  $\forall v \exists! -v \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$
5.  $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
6.  $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$
7.  $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$
8.  $1 \cdot v = v$

### 2.1.1 Somma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$$

### 2.1.2 Moltiplicazione

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>1</sup> $\exists!$  = Esiste un unico

## 2.2 Sottospazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un **sottospazio**  $W \subset V$  è un sottoinsieme tale che

- Dati due vettori nel sottospazio, la loro somma sarà nel sottospazio.

$$v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$$

- Dato un vettore nel sottospazio, il prodotto con un qualsiasi scalare è contenuto nel sottospazio.

$$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \quad \forall \lambda$$

Un sottospazio  $W \subset V$  è uno spazio vettoriale.

### Esempio

1.  $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$  è un sottospazio.

In generale

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1m}t_m = 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2m}t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nm}t_m = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

è **sottospazio**.

Quindi le **soluzioni** di un **sistema di equazioni lineari omogenei** a  $n$  variabili definiscono un **sottospazio** di  $\mathbb{R}^m$ .

**Non definiscono un sottospazio** di  $\mathbb{R}^m$  le soluzioni di equazioni lineari **non omogenee** (coefficiente  $\neq 0$ ).

# Capitolo 3

## Combinazioni lineari

Sia  $V$  uno spazio vettoriale,  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ . Una **combinazione lineare** di  $v_1, \dots, v_m$  è una somma  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$ , dove  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ .

La combinazione lineare è detta **banale** se  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

### Esempio

$$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Allora  $-2v_1 + 1v_2 = 0$  è **combinazione lineare non banale**.

### 3.1 Span

Siano  $v_1, \dots, v_m \in V$   $m$  vettori. Il **sottospazio generato** da  $v_1, \dots, v_m$  è:

$$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

Quindi  $\text{Span}$  è l'insieme di **tutte le combinazioni lineari**.

$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) \subset V$  è un **sottospazio**.

### Esempi

1.

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$  sono due rette, rispettivamente dell'asse  $y$  e  $x$ .

2.

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$$

$$\text{Allora } W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Quindi un **sottospazio** può essere lo **span di vettori diversi**.

### 3.1.1 Esercizi

Verificare che  $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se  $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  applicando l'**Algoritmo di Gauss** si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] &\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3-R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

**3 pivots** nelle 3 colonne a sinistra (non ci interessa a destra) quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 = b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

ammette un' **unica soluzione**  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Il **vettore generale**  $v$  è contenuto in  $\text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ .



**In generale** Se  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  sono vettori tali che  $v_n$  è **combinazione lineare** di  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \Rightarrow \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ .

**Trovare sistema di equazioni lineari omogenee tale che il sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  associato sia  $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$**

1. Si sceglie una base di  $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ . Possiamo supporre la base  $(v_1, \dots, v_r)$  con  $r \leq m$ .

2. Siano  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$   
 $v_1, \dots, v_n$  **linearmente indipendenti**  $\Leftrightarrow$  nella forma a scalini di A c'è un **pivot in ogni colonna**.

3. Sia  $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  qualsiasi.

$v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \Leftrightarrow v, v_1, \dots, v_r$  sono **linearmente dipendenti**  $\Leftrightarrow$   
 nella forma a scalini della matrice  $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$  ci sono sempre **r**  
**pivot** nelle prime **r** colonne ovvero **l'ultima colonna non contiene pivots**.

**Questo dà equazioni lineari per  $b_1, \dots, b_n$ .**

**Esempio**

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  sono vettori **linearmente indipendenti** perché non sono multipli tra loro.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Il **pivot** da controllare è nell'ultima colonna quindi se  $b_3 - b_1 = 0 \Leftrightarrow$  **non** è un pivot della terza colonna.

Quindi  $\text{Span}(v_1, v_2) = \{\text{soluzioni di } x_3 - x_1 = 0\}$

## 3.2 Dipendenza lineare

I vettori  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

vale **solo** per  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ . Altrimenti sono **linearmente dipendenti**.

**Geometricamente** Vettori linearmente dipendenti hanno la **stessa retta**.

**Proposizione**  $v_1, v_2, \dots, v_m$  sono **linearmente dipendenti**  $\Leftrightarrow \exists i : v_i$  è combinazione lineare dei  $v_j \forall j \neq i$ .

**Verificare se m vettori sono linearmente indipendenti**

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'equazione  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  **vale se e solo se**  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  è **soluzione del sistema**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

dove **x** **sostituisce**  **$\lambda$**  e lo 0 dell'equazione corrisponde al vettore  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Quindi  $v_1, \dots, v_m$  sono **linearmente indipendenti**  $\Leftrightarrow$  il sistema ammette **solo la soluzione banale**, cioè  $x = (0, \dots, 0)$ .

**Esempio** Verificare che i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$  siano **linearmente indipendenti**.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema **lineare omogeneo** con la **matrice dei coefficienti associata**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Algoritmo di Gauss:**

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono 3 **pivots** e una **variabile libera**  $\Rightarrow \infty$  **soluzioni**.

Il sistema ammette **soluzioni non banali**  $\Rightarrow$  i vettori sono **linearmente dipendenti**.

### 3.3 Base

Un sistema  $v_1, \dots, v_n$  di vettori è una **base** di  $V$  se:

- i vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono **linearmente indipendenti**
- $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$

**Esempio** Base standard di  $\mathbb{R}^n$ :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva  $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$

Dunque  $\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$  e  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  se e solo se  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

### 3.3.1 Coordinate

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e  $v \in V$  un vettore. Allora

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

ovvero **ogni vettore** si scrive in un modo **unico** come **combinazione lineare** degli **elementi della base**.

Gli  $\alpha_i$  sono le **coordinate** di  $v$  rispetto alla **base**.

**Trovare le coordinate di un vettore rispetto alla base**

Sappiamo da esercizi precedenti che  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  sono una **base** di  $\mathbb{R}^3$ . Trovare le coordinate di  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  rispetto a questa base.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'**algoritmo di Gauss-Jordan**.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{R_3-R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1-R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \quad \text{e } 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 3.4 Dimensione

La **dimensione** di uno spazio  $V$  sarà definita come il **numero degli elementi di una base**. **Questo numero è lo stesso per ogni base**.

<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Dimostrazione a fine lezione 06.

### 3.4.1 Proprietà

Se  $\dim V = n$  e  $v_1, \dots, v_r \in V$  i casi sono:

- $r > n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_r$  sono **linearmente dipendenti**
- $r = n$  e  $v_1, \dots, v_n$  **linearmente indipendenti**  $\Leftrightarrow$  è una **base**
- $r < n$  e  $v_1, \dots, v_n$  **linearmente indipendenti**  $\Leftrightarrow$  si **completa**<sup>2</sup> in una **base**

#### Esempio

Decidiamo se  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$  se sono **indipendenti** formano una **base**.

Verifichiamo con **Gauss**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**2 pivots**  $\Rightarrow$  i vettori sono **linearmente dipendenti**.

Però i **pivots** sono nelle colonne 1,3 quindi escludendo la colonna 2:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sono } \mathbf{linearmente indipendenti}.$$

Ora  $\dim \text{Span}(v_1, v_2) = 2, \dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

Troviamo ora un vettore di  $\mathbb{R}^3$  **non contenuto** nello  $\text{Span}(v_1, v_2)$ .

Una strategia può essere partire dalla **base standard**:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  Una

delle 3 basi standard non è sicuramente contenuta nello  $\text{Span}(v_1, v_2)$  altrimenti esso sarebbe una base.

**Cerchiamo quindi il vettore della base standard che è linearmente indipendente agli altri 2 vettori.** Proviamo con  $e_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**3 pivots**  $\Rightarrow e_3$  completa la nostra base.  $e_1$  invece **non la completa**.

---

<sup>2</sup>Posso aggiungere vettori affinché diventi una base

<sup>3</sup>Il vettore  $v_2$  è il vecchio vettore  $v_3$ , cambio di notazione per proseguire l'esercizio

**Proposizione** Sia  $W \subset V$  un **sottospazio**. Allora

1.  $\dim W \leq \dim V$
2. Se  $W \neq V$ , allora  $\dim W < \dim V$

Questa proposizione è utile per calcolare le dimensioni dei sottospazi.

**Esempio**

$$\text{Sia } V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} \text{ (Matrici simmetriche)}$$

$$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4 \text{ (base standard).}$$

$$V \neq M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3.$$

$$\text{Ma } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ sono } \mathbf{\text{linearmente indipendenti}} \Rightarrow \dim V = 3$$