

Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare

23 Gennaio 2019

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere TASSATIVAMENTE nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale delle soluzioni $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ dell'equazione $2x + 3y + 5z = 0$.

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ lo span dei due vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- 1) Si calcoli la dimensione dei tre spazi V , W e $V + W$;
- 2) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$;
- 3) Si trovi una base di $V \cap W$;
- 4) Si trovi una base di V^\perp .

Risposta 1

--

Risposta 2

--

Risposta 3

--

Risposta 4

--

Esercizio 2. Sia k un parametro reale e consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Per quali valori di k la matrice è invertibile?
- (2) Per quali valori di k la matrice ha $\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ come autovettore?
- (3) Per quali valori di k la matrice ha due autovalori distinti?

Risposta 1

Risposta 2

Risposta 3

Esercizio 3. Sia k un parametro intero e consideriamo il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4^x \equiv 9 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{7k} \end{cases}$$

- (1) Trovare tutte le soluzioni della prima congruenza.
- (2) Trovare tutte le soluzioni del sistema per $k = 2$.
- (3) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzione.

Risposta 1

Risposta 2

Risposta 3

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$$