

## Compito di MDAL

2 novembre 2017

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Istruzioni e punteggi:** Scrivere le risposte in un riquadro, seguite da brevi spiegazioni. Per ciascuna risposta: max 3 punti (di norma 0 o 3, salvo quando la domanda sia suscettibile di risposte parziali). Non contano le risposte prive di spiegazioni. Se si ottengono almeno 9 punti con le risposte, si valutano le spiegazioni. Per ciascuna spiegazione: max 2 punti. Una spiegazione completamente errata (che fa pensare che alla risposta si sia arrivati per caso) annulla il punteggio ottenuto con la risposta.

**Esercizio 1.** Determinare il numero di stringhe  $(a_1, \dots, a_7)$  di sette numeri interi con le seguenti proprietà:

- $1 \leq a_i \leq 5$  per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq 7$ ;
- per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq 6$  si ha che  $a_i$  e  $a_{i+1}$  hanno una diversa parità (altrimenti detto, uno dei due è pari e l'altro è dispari).

**Esercizio 2.** Determinare le soluzioni della congruenza  $2^x \equiv -1 \pmod{17}$ .

**Esercizio 3.** Fattorizzare il polinomio  $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$  in  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Esercizio 4.** Sia  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice  $M$  tale che  $M^{-1}AM$  sia in forma diagonale.

**Esercizio 5.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'applicazione lineare tale che  $L((2, 3)) = (4, 5)$  e  $L((3, 4)) = (-4, -5)$ . Stabilire se  $L$  è invertibile.

**Esercizio 6.** Consideriamo la matrice a coefficienti in  $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia  $V$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$ . Dire se l'applicazione  $L : V \rightarrow V$  tale che per ogni matrice  $X$  in  $V$  vale

$$L(X) = XB - BX$$

è lineare. Se è lineare, calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine (evidenziarla in un riquadro) e una base del nucleo e dell'immagine.