Compitino di Matematica Discreta e Algebra Lineare
4 Aprile 2019

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti vettori colonna

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ t^2-2 \\ t+2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Per quali valori di t si ha che v_1, v_2, v_3 sono vettori indipendenti?.

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 3t & t^2-2 \\ -2 & 1-2t & t+2 \\ 0 & t & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 3t & t^2-2 \\ -2 & 1-2t & t+2 \\ 0 & t & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & t & 4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_3]{R_3-tR_2} \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (4-t^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c \end{matrix}$$

$t = \pm 2 \iff c$ libera $\iff$ dipendenti

valori di t

$$\boxed{t \neq \pm 2}$$

Esercizio 2. Sia $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ una successione tale che $a_0 = 0, a_3 = 27$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ (il valore di a_1 non viene dato). Trovare una formula esplicita per a_n.

$x^2 - x - 2$ polinomio caratteristico

$\parallel$

$(x-2)(x+1)$ radici $2, -1$

$a_n = A2^n + B(-1)^n$

$a_0 = 0 \Rightarrow B = -A$.

$a_3 = 27 \Rightarrow A2^3 + B(-1)^3 = 27$

risolvo il sistema e trovo $A = 3, B = -3$

$a_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot (-1)^n = 3\left[2^n - (-1)^n\right]$

Risposta

$\boxed{3 \cdot 2^n - 3 \cdot (-1)^n}$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e sia $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ il sottospazio dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che $p'(2) = 0$, dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

i) Trovare la dimensione di V.

ii) Trovare una base di V.

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p'(2) = 12a + 4b + c = 0$

a, b, d libere , $c = -12a - 4b$

dim $V = 3$

coordinate $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -12a - 4b \\ d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

base è data dai ~~pol~~ 3 polinomi

$x^3 - 12x$, $x^2 - 4x$, 1

dimensione

$\boxed{3}$

base

$x^3 - 12x$
$x^2 - 4x$
1

Esercizio 4. Trovare tutte le soluzioni della congruenza

$$\begin{cases} 2^x \equiv 4 \bmod 51 \\ 3x \equiv 2 \bmod 28 \end{cases}$$

- $2^x \equiv 4\ (51) \iff \begin{cases} 2^x \equiv 4\ (3) \\ 2^x \equiv 4\ (17) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0\ (2) \\ x \equiv 2\ (8) \end{cases}$

$\iff x \equiv 2\ (8)$

- $3x \equiv 2\ (28) \overset{\times 9}{\iff} 27x \equiv 18\ (28)$

$\iff x \equiv -18\ (28)$

$\iff x \equiv 10\ (28)$

- $\begin{cases} x \equiv 10\ (28) \\ x \equiv 2\ (8) \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = 10 + 28y \\ 10 + 28y \equiv 2\ (8) \end{array}$

$\iff 2 + 4y \equiv 2\ (8)$

$\iff 4y \equiv 0\ (8)$

$\iff y \equiv 0\ (2) \iff y = 2k$

$x = 10 + 28(2k) \iff x \equiv 10\ (56)$

Risposta

$\boxed{x \equiv 10\ (56)}$