Matematica Discreta e Algebra Lineare
22 Gennaio 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. Punti 5 ad esercizio, più un punto extra ad esercizio per la qualità, la chiarezza, la precisione.

Esercizio 1 (AL)**.** Siano $v_1 = (2, 3, 4)$ e $v_2 = (1, 0, 2)$ due vettori in $\mathbb{R}^3$.

(1) Si trovi un vettore (a, b, c) con $c = 3$ ortogonale sia a v_1 sia a v_2.
(2) Stabilire se esistono due vettori w_1, w_2 linearmente indipendenti tra loro e ortogonali sia a v_1 sia a v_2 (rispondere SI o NO, e motivare la risposta).

Scrivere qui il vettore (a, b, c)

Scrivere qui SI o NO:

Esercizio 2 (MD)**.** Determinare tutte le soluzioni della congruenza $3^x \equiv 4 \pmod{55}$.

Scrivere qui il risultato finale:

Esercizio 3 (AL)**.** Si determini l'inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Scrivere qui la matrice A^{-1}:

$\boxed{\phantom{A^{-1}}}$

Esercizio 4 (MD)**.** Sia $p(x)$ il polinomio $x^3 + 5x^2 + 4x + 20$.

(1) Si trovino le radici razionali di $p(x)$.
(2) Si trovi la fattorizzazione completa di $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$.
(3) Si trovi la fattorizzazione completa di $p(x)$ in $\mathbb{C}[x]$.

Radici razionali	Fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$	Fattorizzazione in $\mathbb{C}[x]$

Esercizio 5 (AL)**.** Si consideri un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con nucleo uguale al sottospazio $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$ e tale che $L \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) Si trovino gli autovalori di L e dei corrispondenti autovettori.
(2) Si scriva la matrice A di L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$.
(3) Si determini se L è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva si trovi una matrice diagonale D e una matrice M tale che $M^{-1}AM = D$.

Autovalori	Matrice A	Matrice M

Esercizio 6 (MD)**.** Si considerino delle matrici $n \times n$ con coefficienti in $\{0, 1\}$.

(1) Quante sono le matrici con queste caratteristiche?
(2) Quante di queste matrici hanno esattamente $n - 1$ coefficienti uguali ad 1?
(3) Quante delle matrici hanno esattamente un 1 in ciascuna riga e in ciascuna colonna?
(4) Quante delle matrici hanno esattamente $n - 1$ coefficienti uguali ad 1, supponendo che non vi possano essere due 1 nella stessa riga o nella stessa colonna?

Soluzioni: (1) Ogni coefficiente può essere 0 o 1 e ci sono n^2 coefficienti, quindi ho $\boxed{2^{n^2}}$ possibilità.

(2) Devo scegliere $n - 1$ posizioni su n^2 dove mettere gli 1, quindi ho in tutto $\boxed{\binom{n-1}{n^2}}$ matrici con queste caratteristiche.

(3) Ci sono n scelte per la posizione dell'1 nella prima riga, poi $n - 1$ per la posizione dell'1 nella seconda riga poiché devo evitare la colonna già occupata, poi $n - 2$ per la posizione dell'1 nella terza riga perché devo evitare due colonne, e così via, fino ad arrivare ad una sola scelta obbligata per l'1 nell'ultima riga. In totale ho quindi $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ scelte. La risposta è $\boxed{n!}$.

(4) Se invece di $n - 1$ fossero n, per il punto precedente dell'esercizio avrei $n!$ modi di scegliere in quali posizioni mettere gli 1. Siccome però ne devo sistemare solo $n - 1$, dopo averne sistemati n ne tolgo uno, e ho n modi di scegliere quale togliere. Quindi la risposta è $\boxed{n! \cdot n}$.

Un altro modo per arrivare alla stessa soluzione è il seguente: prima scelgo la riga e la colonna che non contengono 1. Ho n scelte per la riga e n per la colonna, quindi n^2 scelte. Tolta quella riga e quella colonna, ho $(n - 1)!$ modi di sistemare gli 1. Quindi in tutto ho $n^2 \cdot (n - 1)!$ possibilità, che è la stessa cosa di $n \cdot n!$.

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3	Risposta 4
2^{n^2}	$\binom{n-1}{n^2}$	$n!$	$n! \cdot n$