AL/Autovalori/2020-05-28

1. **Autovalori**

   Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che $A^{2020} = 0$.

   (a) Possiamo dire che $\dim \mathrm{Ker}(A) \geq 1$?

Sì ✓
No

   (b) Possiamo dire che A ammette un autovalore uguale a 0?

Sì ✓
No

   (c) Possiamo dire che le righe di A sono linearmente indipendenti?

Sì
No ✓

2. **Autovalori**

   Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che $A^{2020} = 0$.

   (a) Possiamo dire che $\dim \mathrm{Imm}(A) = n$?

Sì
No ✓

   (b) Possiamo dire che gli autovalori di A sono diversi da 0?

Sì
No ✓

   (c) Possiamo dire che le colonne di A sono linearmente dipendenti?

Sì ✓
No

AL/Sottospazi/2020-05-28

1. **Sottospazi**

   Consideriamo il piano $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 4y - 6z = 0$.

   (a) Trovare a e b tali che il vettore

   $$u = \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

   sia contenuto nell'ortogonale $V^\perp$ di V.

   Soluzione: $a = \boxed{-12 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{18 \quad \checkmark}$

(b) Trovare c e d tali che la dimensione dell'intersezione del sottospazio

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\\7\end{pmatrix}\right)$$

con V sia $\neq 1$.

Soluzione: $c = \boxed{7 \quad \checkmark}$, $d = \boxed{0 \quad \checkmark}$

2. **Sottospazi**

Consideriamo il piano $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 3y - 5z = 0$.

(a) Trovare a e b tali che il vettore

$$u = \begin{pmatrix}-2\\a\\b\end{pmatrix}$$

sia contenuto nell'ortogonale $V^\perp$ di V.

Soluzione: $a = \boxed{-6 \quad \checkmark}$, $b = \boxed{10 \quad \checkmark}$

(b) Trovare c e d tali che la dimensione dell'intersezione del sottospazio

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\9\\d\end{pmatrix}\right)$$

con V sia $\neq 1$.

Soluzione: $c = \boxed{9 \quad \checkmark}$, $d = \boxed{0 \quad \checkmark}$

AL/Diagonalizzabile/2020-05-28

1. **Diagonalizzabile**

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & a\\0 & -a & 0\end{pmatrix}$$

(a) Esiste un numero reale $a \neq 0$ tale che A sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Sì	
No	✓

(b) Si può dire che per ogni numero reale $a \neq 0$ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$?

Sì	✓
No	

(c) Si può dire che per ogni numero complesso $a \neq 0$ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$?

Sì	✓
No	

2. **Diagonalizzabile**

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Esiste un numero reale $a \neq 0$ tale che A sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Sì	
No	✓

(b) Si può dire che per ogni numero reale $a \neq 0$ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$?

Sì	✓
No	

(c) Si può trovare un numero complesso $a \neq 0$ tale che la matrice A non sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$?

Sì	
No	✓

MD/Congruenze-esponenziali/2020-05-28

1. **Congruenze**

Si trovino le soluzioni della congruenza

$$2^x \equiv 31 \pmod{33}.$$

Scrivere la risposta nella forma $x \equiv a \pmod{m}$ con $0 \leq a < m$.

Soluzione: $x \equiv$ $\boxed{6 \checkmark}$ (mod $\boxed{10 \checkmark}$)

2. **Congruenze**

   Si trovino le soluzioni della congruenza

$$4^x \equiv 31 \pmod{33}.$$

   Scrivere la soluzione nella forma $x \equiv a \pmod{m}$ con $0 \leq a < m$.

   Soluzione: $x \equiv$ $\boxed{3 \quad \checkmark}$ (mod $\boxed{5 \quad \checkmark}$)

MD/Counting/2020-05-28

1. **Counting**

   (a) Quante sono le funzioni iniettive $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la cui immagine contiene 4?

   Soluzione: Ci sono $\boxed{36 \quad \checkmark}$ funzioni con le caratteristiche specificate.

   (b) Quante sono le funzioni iniettive $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la cui immagine non contiene 4?

   Soluzione: Ci sono $\boxed{24 \quad \checkmark}$ funzioni con le caratteristiche specificate.

2. **Counting**

   (a) Quante sono le funzioni iniettive $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ la cui immagine contiene 2?

   Soluzione: Ci sono $\boxed{18 \quad \checkmark}$ funzioni con le caratteristiche specificate.

   (b) Quante sono le funzioni iniettive $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ la cui immagine non contiene 2?

   Soluzione: Ci sono $\boxed{6 \quad \checkmark}$ funzioni con le caratteristiche specificate.

MD/Diofantea/2020-05-28

1. **Diofantea**

   Trovare il minimo $n \geq 20$ tale che l'equazione diofantea $n = 60x + 42y$ ha una soluzione.

   Soluzione: $n = \boxed{24 \quad \checkmark}$

2. **Diofantea**

   Trovare il minimo $n > 16$ tale che l'equazione diofantea $n = 35x + 56y$ ha una soluzione.

   Soluzione: $n = \boxed{21 \quad \checkmark}$