

## Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare

10 Luglio 2018

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

**Esercizio 1** (8 punti). Stabilire per quali valori del parametro intero  $a$  il sistema

$$\begin{cases} 5^x \equiv 4 \pmod{11} \\ 3x \equiv a \pmod{25} \end{cases}$$

ha soluzione, e determinarne tutte le soluzioni per  $a = 9$  e per  $a = 10$  (scrivere nessuna se non vi sono soluzioni).

valori di  $a$

$a \equiv 4 \pmod{5}$

Caso  $a = 9$

$x \equiv 3 \pmod{25}$

Caso  $a = 10$

nessuna

**Esercizio 2** (8 punti). Consideriamo un'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$F \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice  $[F]$  di  $F$  rispetto alle basi standard.

(2) Scrivere la matrice  $[F]_{w_1, w_2}^{v_1, v_2}$  di  $F$  rispetto alla base  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  in partenza e

$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  in arrivo.

$[F]$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$[F]_{w_1, w_2}^{v_1, v_2}$

$$\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3** (7 punti). Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  dato dalle soluzioni dell'equazione  $x + y + z = 0$ .

- (1) Trovare un vettore  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  di lunghezza 1 tale che  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  sia una base ortogonale di  $V$ .
- (2) Trovare una base di  $V^\perp$ .

vettore  $v$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4** (7 punti). Le caselle di una scacchiera 4x4 vengono colorate in modo che vi siano 4 caselle rosse, 4 blu, 4 gialle e 4 verdi.

- (1) Quante sono tutte le colorazioni possibili?
- (2) Quante sono le colorazioni in cui su ciascuna riga vi siano tutte caselle dello stesso colore?
- (3) Quante sono le colorazioni in cui su ciascuna riga vi siano 4 caselle di colori diversi?

(1)

$$\frac{16!}{(4!)^4}$$

(2)

$$4!$$

(3)

$$(4!)^4$$