Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
PTC-5005 Processamento Digital de Sinais I

1º período de 2019

Lista de exercícios 3

MDM,FRMP,MTMS

Data de entrega: 09/04/2019.

Entregar apenas os exercícios **1, 3, 5, 6 e 7**.

1) Na Figura 1, são mostradas três sequências periódicas com período $N = 7$. Pede-se:

a) Encontre a sequência $\tilde{y}_1(n)$, cuja SFD é igual ao produto das SFDs de $\tilde{x}_1(n)$ e $\tilde{x}_2(n)$, ou seja, $\tilde{Y}_1(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$.

b) Encontre a sequência $\tilde{y}_2(n)$, cuja SFD é igual ao produto das SFDs de $\tilde{x}_1(n)$ e $\tilde{x}_3(n)$, ou seja, $\tilde{Y}2(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_3(k)$.

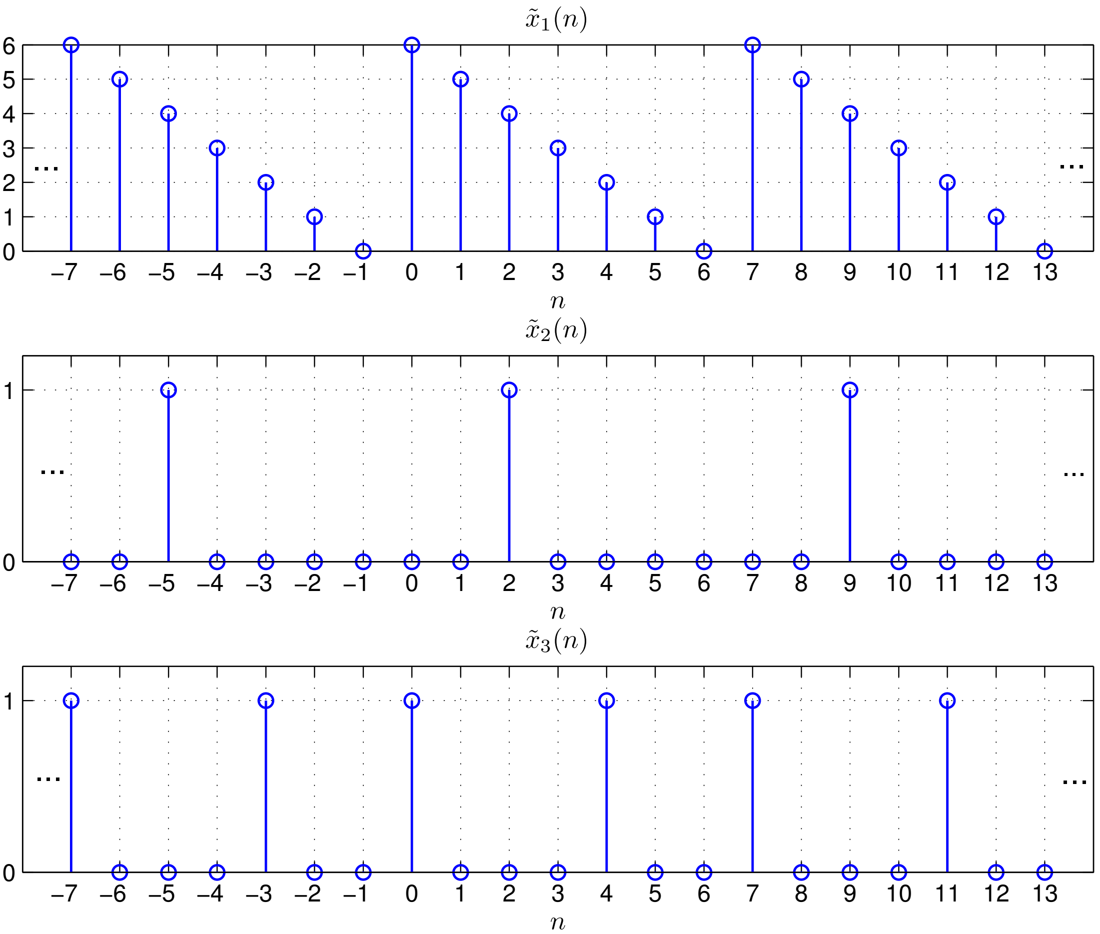

Figura 1: Sequências do Exercício 1.

2) Calcule a TFD de comprimento $N = 10$ das seguintes sequências

a) $x_1(n) = \delta(n) + \delta(n-5)$

b) $x_2(n) = u(n) - u(n-n_d)$, sendo $0 < n_d < N$

3) Calcule a TFD de comprimento N (sendo N par) das seguintes sequências

a) $x_1(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ ímpar}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$

b) $x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ 0, & N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}$

c) $x_3(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

4) Calcule a TFD inversa de comprimento $N = 10$ de

$$X(k) = \begin{cases} 3, & k = 0 \\ 2, & k = 3,\ 7 \\ 1, & \text{para outros valores de } k \end{cases}$$

5) Considere a sequência de comprimento finito

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-3) - \delta(n-8).$$

Calcule e faça um esboço da sequência $y(n)$, $0 \leq n \leq 9$, cuja Transformada de Fourier Discreta de comprimento $N = 10$ (TFD_{10}) é dada por $Y(k) = X(k)W(k)$, sendo $X(k) = \text{TFD}_{10}\{x(n)\}$, $W(k) = \text{TFD}_{10}\{w(n)\}$ e

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observações:

- Parte dos exercícios 6 a 9 devem ser resolvidos usando o Matlab ou programa similar.
- No Matlab, os cálculos da TFD e TFD^{-1} devem ser feitos utilizando o algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) por meio dos comandos `fft` e `ifft`. No final da lista há um texto com considerações sobre essas funções. É importante lê-lo antes de resolver os exercícios.
- Muitas vezes quando se deseja verificar se a TFD de um sinal é puramente real ou imaginária, a parte da transformada que teoricamente deveria ser zero não é exatamente igual a zero. Isso ocorre devido a erros de arredondamento no cálculo da TFD no MatLab, que normalmente são da ordem de 10^{-14}.

6) Considere as sequências

$$\begin{aligned} x_1(n) &= [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\ x_2(n) &= [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1] \\ x_3(n) &= [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1] \\ x_4(n) &= [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0] \\ x_5(n) &= [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\ x_6(n) &= [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0] \end{aligned}$$

Para responder os itens seguintes, use o comando `fft` do MatLab.

1. Esboce $X_1(k)$ e $X_2(k)$. Indique o espaçamento angular entre as amostras.
2. Qual a propriedade da TFD que relaciona $X_1(k)$ e $X_2(k)$?
3. Forneça os valores de $X_3(k)$ e $X_4(k)$. Compare e justifique a diferença entre eles.
4. Esboce $|X_2(k)|$ e $|X_5(k)|$. Compare e justifique a diferença entre as curvas de módulo.
5. Esboce $|X_2(k)|$ e $|X_6(k)|$. Compare e justifique a diferença entre as curvas de módulo.

7) Considere o seguinte sinal de tempo discreto:

$$x(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-2) - \delta(n-4) + \delta(n-5) - \delta(n-6) + 2\delta(n-8).$$

Para responder o item (d), utilize o MatLab. Considere `x` o vetor de comprimento `9` correspondente às amostras de $x(n)$ nos instantes $n = 0, 1, \ldots, 8$.

1. Determine a expressão de $X(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{x(n)\}$.
2. Determine a expressão de $X_5(k) = \text{TFD}_5\{x(n)\}$. O espectro $X_5(k)$ é real? Que propriedade justifica isso?
3. Determine a expressão de $y_5(n) = \text{TFD}_5^{-1}\{x(k)\}$ usando a propriedade da dualidade.
4. O comando `fft(x,5)` retorna os mesmos valores de $X_5(k)$? Por quê? O comando `ifft(x,5)` retorna os mesmos valores de $y_5(n)$? Por quê? Em caso negativo, sugira uma mudança no vetor `x` para que o resultados de `fft(x,5)` e `ifft(x,5)` sejam iguais aos resultados calculados de $X_5(k)$ e $y_5(n)$, respectivamente.

8) Considere a sequência de comprimento finito $x(n)$ tal que

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}.$$

Calcule $X(k) = \text{TFD}_{10}\{x(n)\}$ e obtenha gráficos de sua parte real e imaginária. Considere agora a sequência $x_1(n) = X(n)$, calcule $X_1(k) = \text{TFD}_{10}\{x_1(n)\}$ e compare com $x(n)$. Que propriedade da TDF foi verificada neste exemplo?

9) Considere a sequência:

$$v(n) = \frac{5 - |n|}{5}, \quad -5 \leq n \leq 5.$$

Sabendo que

$$V(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{v(n)\},$$
$$V(k) = V(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \cdots N-1,$$

e

$$\widetilde{V}(k) = V[k \mod N], \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pede-se:

a) Determine $V(k) = V(e^{j\omega_k})|_{w_k = \frac{2\pi}{128}k}$.

b) Obtenha $v_1(n) = \text{TFD}^{-1}\{V_1(k) = V[2k]\}$.

c) Obtenha $v_2(n) = \text{TFD}^{-1}\{V_2(k) = V[16k]\}$.

d) Apresente os resultados de b) e c) em um mesmo gráfico completando a sequência de c) com amostras nulas. Analise os resultados, justificando-os.

Considerações sobre as funções `fft` e `ifft`

A Transformada de Fourier Discreta (TFD) de uma sequência de tempo discreto $x(n)$ é

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

e a TFD inversa de $X(k)$ é

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Esses cálculos podem ser feitos de forma eficiente usando os algoritmos de *Fast Fourier Transform*, ou FFT. No MATLAB, é possível calcular a TFD e a TFD inversa com os comandos `fft` e `ifft`, respectivamente. Por exemplo, dada uma sequência $x(n)$ com N amostras, o comando

`fft(x,Ns)`

fornece `Ns` pontos de sua representação em frequência. Se `Ns` $> N$, a própria função inclui zeros ao final da sequência $x(n)$, até completar `Ns` amostras. Se for usado o comando

`fft(x)`,

teremos no domínio da frequência o mesmo número de amostras da sequência temporal, ou seja, N. Maiores detalhes desta função podem ser obtidos digitando `help fft` na tela de comandos do MatLab.

Supondo então que temos N pontos em ambos os domínios, os gráficos de módulo e fase da TFD $X(k)$ podem ser obtidos como:

```
subplot(2,1,1); stem([0:N-1],abs(X))
title('Módulo de X(k)')
subplot(2,1,2); stem([0:N-1],(angle(X)))
title('Fase de X(k)')
```