PTC2324: Processamento Digital de Sinais I

Lista de exercícios 6: Análise de sistemas LIT

MDM,FRMP-2014;ASP-2012

(†): Exercícios adaptados do livro *Discrete-Time Signal Processing* de Oppenheim e Schafer, 2ª edição.
(‡): Exercício adaptado do livro *Digital Signal Processing* de Hayes.

1. (‡) Uma sequência $x(n)$ de fase não mínima e causal tem transformada z

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{5}{3}z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}.$$

   Para que valores da constante α a sequência $y(n) = \alpha^n x(n)$ será de fase mínima?

2. (‡) Encontre o sistema de fase mínima que tem a magnitude de resposta em frequência dada por

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos(\omega)}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\omega)}.$$

3. (†) Prove a validade das duas afirmações a seguir:

   (a) A convolução de duas sequências de fase mínima também é uma sequência de fase mínima.

   (b) A soma de duas sequências de fase mínima não é necessariamente uma sequência de fase mínima. Especificamente, dê um exemplo de uma sequência de fase mínima e um exemplo de uma sequência de fase não mínima que possam ser formadas como a soma de duas sequências de fase mínima.

4. (†) A função de sistema $H(z)$ de um sistema LIT estável é dada por

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 0{,}75z^{-1})}{z^{-1}(1 - 0{,}5z^{-1})}.$$

   (a) $H(z)$ pode ser representada como uma cascata de um sistema de fase mínima $H_{\text{mín1}}(z)$ e um sistema passa tudo de ganho unitário $H_{\text{ap}}(z)$, ou seja,

$$H(z) = H_{\text{mín1}}(z)H_{\text{ap}}(z).$$

   Determine uma escolha para $H_{\text{mín1}}(z)$ e $H_{\text{ap}}(z)$ e especifique se eles são ou não únicos a um menos de um fator de escala.

   (b) $H(z)$ pode ser expressa como uma cascata de um sistema de fase mínima $H_{\text{mín2}}(z)$ e um sistema FIR de fase linear generalizada $H_{\text{lp}}(z)$, ou seja,

$$H(z) = H_{\text{mín2}}(z)H_{\text{lp}}(z).$$

   Determine uma escolha para $H_{\text{mín2}}(z)$ e $H_{\text{lp}}(z)$ e especifique se eles são únicos a menos de um fator de escala.

5. (†) A função de sistema $H(z)$ de um sistema LIT estável é dada por

$$H(z) = \frac{(1 - 9z^{-2})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

(a) $H(z)$ pode ser representada como uma cascata de um sistema de fase mínima $H_{\text{mín}}(z)$ e um sistema passa tudo de ganho unitário $H_{\text{ap}}(z)$. Determine uma escolha para $H_{\text{mín}}(z)$ e $H_{\text{ap}}(z)$ e especifique se eles são ou não únicos a menos de um fator de escala.

(b) O sistema de fase mínima $H_{\text{mín}}(z)$ é um sistema FIR? Explique.

(c) O sistema de fase mínima $H_{\text{mín}}(z)$ é um sistema de fase linear generalizada? Se não for, $H(z)$ pode ser representado como uma cascata de um sistema de fase linear generalizada $H_{\text{lin}}(z)$ e um sistema passa tudo $H_{\text{ap2}}(z)$? Se a sua resposta for sim, determine $H_{\text{lin}}(z)$ e $H_{\text{ap2}}(z)$. Se for não, explique por que essa representação não existe.

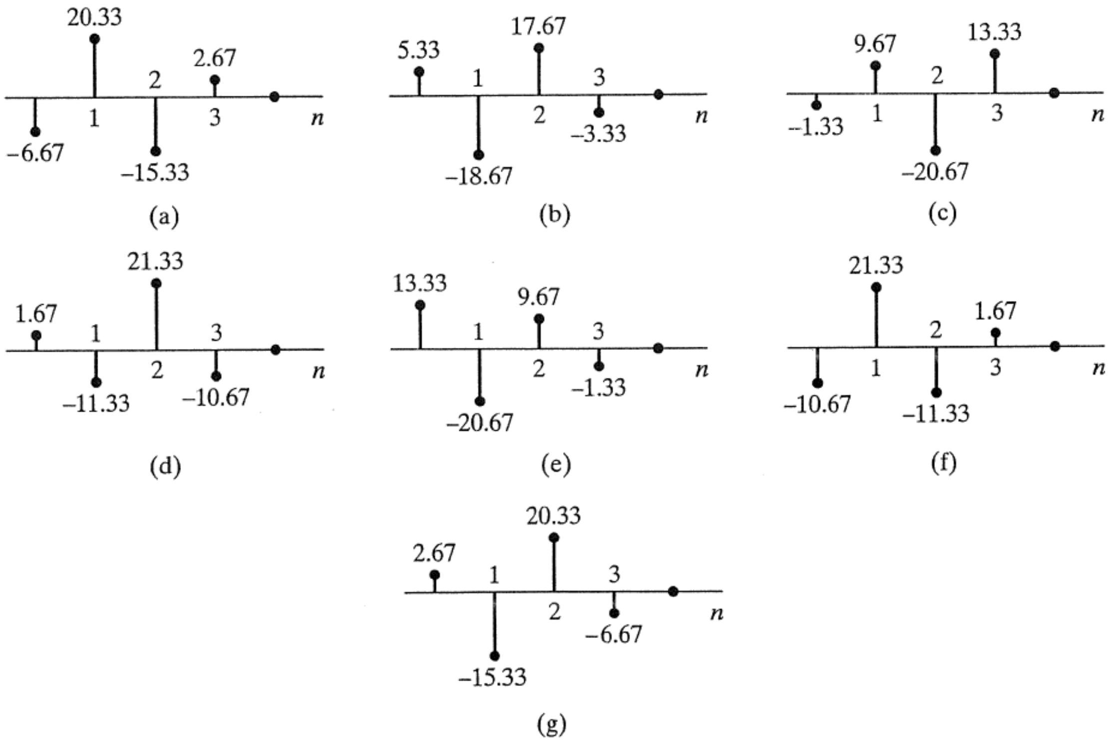
6. Considere um sistema LIT com função de sistema

$$H(z) = \frac{z^{-2}(1-2z^{-1})}{2(1-0{,}5z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{1}{2}.$$

(a) $H(z)$ é um sistema passa tudo? Explique.

(b) O sistema representado por $H(z)$ deve ser implementado como a cascata de três sistemas, nomeadamente, $H_{\text{mín}}(z)$, $H_{\text{máx}}(z)$ e $H_d(z)$, indicando fase mínima, fase máxima e deslocamento de tempo inteiro, respectivamente. Determine as respostas ao pulso unitário $h_{\text{mín}}(n)$, $h_{\text{máx}}(n)$ e $h_d(n)$, correspondentes a cada um dos três sistemas.

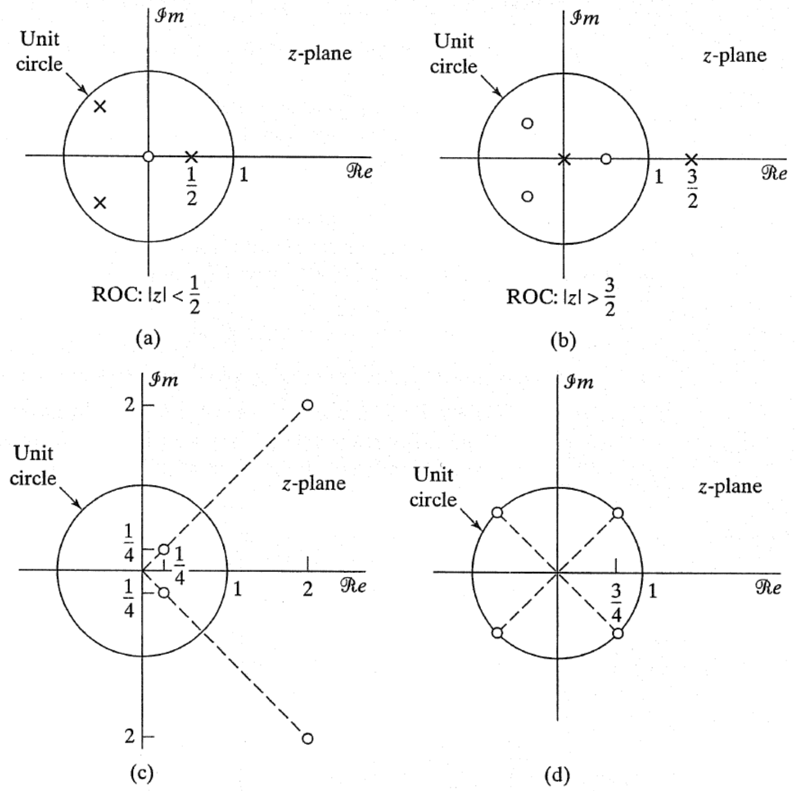
7. (†) Na figura a seguir são mostradas oito sequências diferentes de duração finita. Cada sequência tem comprimento de 4 pontos. A magnitude da transformada de Fourier é a mesma para todas as sequências. Qual das sequências tem todos os zeros de sua transformada z no interior da circunferência unitária?



8. (†) Cada um dos diagramas de polos e zeros na figura a seguir, juntamente com a especificação da RC (região de convergência), descreve um sistema LIT com função de sistema $H(z)$. Em cada caso, determine se alguma das afirmações a seguir é verdadeira. Justifique sua resposta com uma breve explicação ou um contraexemplo.

(a) O sistema é um sistema de fase linear generalizada.

(b) O sistema tem um inverso $H_i(z)$ estável.



9. (†) Considere a classe de filtros FIR que possui $h(n)$ real, $h(n) = 0$ para $n < 0$ e $n > M$, e uma das seguintes propriedades de simetria:

$$\text{Simétrico:} \quad h(n) = h(M - n),$$
$$\text{Antissimétrico:} \quad h(n) = -h(M - n).$$

Todos os filtros nessa classe possuem fase linear generalizada, ou seja, têm resposta em frequência da forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta},$$

em que $A(e^{j\omega})$ é uma função real de ω, e α e β são constantes reais. Para a tabela a seguir, mostre que $A(e^{j\omega})$ tem a forma indicada e encontre os valores de α e β.

Tipo	**Simetria**	$(M+1)$	**Forma de** $A(e^{j\omega})$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$
I	Simétrico	Ímpar	$\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}} a(n)\cos(\omega n)$		
II	Simétrico	Par	$\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} b(n)\cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$		
III	Antissimétrico	Ímpar	$\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} c(n)\sin(\omega n)$		
IV	Antissimétrico	Par	$\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} d(n)\sin\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$		

Seguem várias sugestões úteis:

- Para os filtros de tipo I, primeiro mostre que $H(e^{j\omega})$ pode ser escrita na forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h(M-n)e^{-j\omega(M-n)} + h\left(\frac{M}{2}\right)e^{-j\omega\frac{M}{2}}.$$

- A análise para os filtros de tipo III é muito similar àquela para os de tipo I, com exceção de uma mudança de sinal e da remoção de um dos termos precedentes.
- Para filtros de tipo II, primeiro escreva $H(e^{j\omega})$ na forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(M-n)e^{-j\omega(M-n)},$$

  e depois coloque em evidência um fator comum de $e^{-j\omega\frac{M}{2}}$ nos dois somatórios.
- A análise para os filtros de tipo IV é muito similar àquela para os filtros de tipo II.

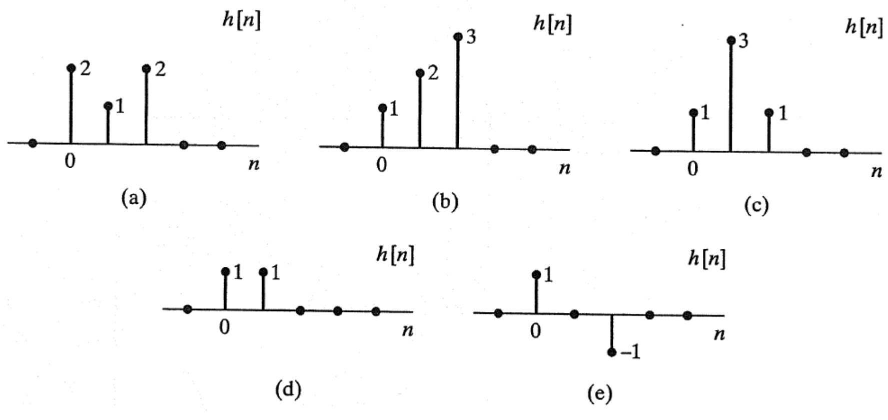
10. (†) Considere a classe de filtros de tempo discreto cuja resposta em frequência tem a forma

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega},$$

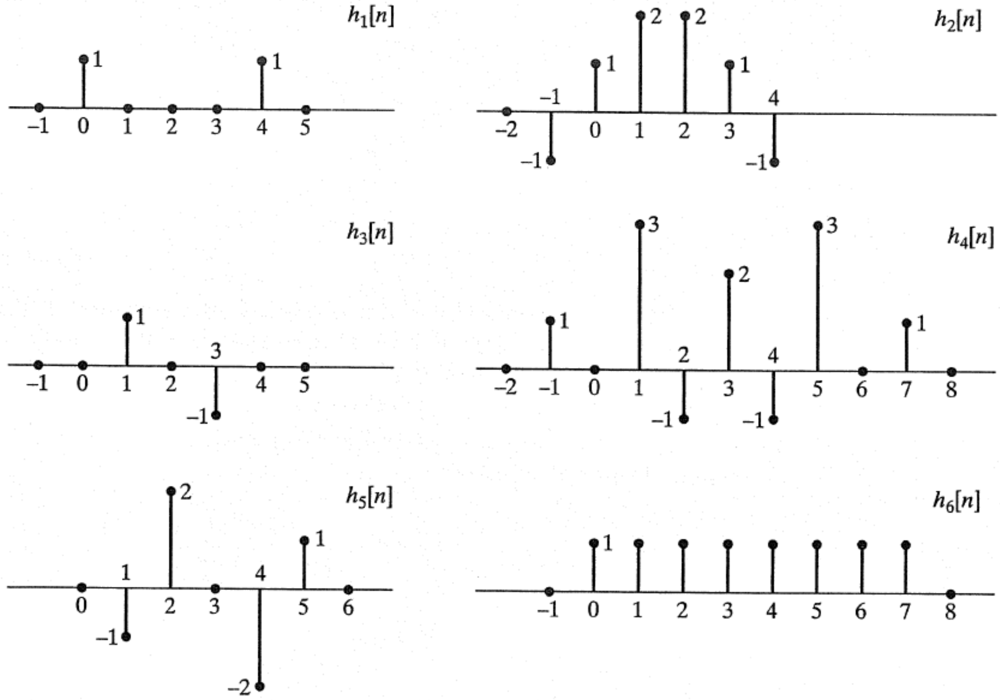
em que $H(e^{j\omega})$ é uma função real e não negativa de ω e α é uma constante real. Essa classe de filtros é conhecida como filtros de fase linear. Considere também a classe de filtros de tempo discreto cuja resposta em frequência tem a forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta},$$

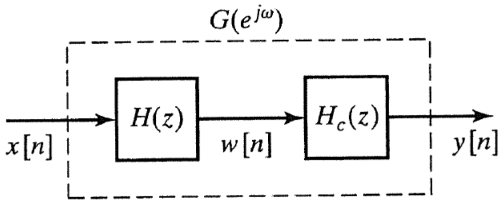
em que $A(e^{j\omega})$ é uma função real de ω, e α e β são constantes reais. Os filtros dessa classe são chamados de filtros de fase linear generalizada. Determine se cada um dos filtros da figura a seguir é um filtro de fase linear generalizada. Em caso afirmativo, calcule $A(e^{j\omega})$, α e β. Além disso, para cada um dos filtros que você determinou como de fase linear generalizada, indique se eles também atendem ao critério mais rigoroso para serem de fase linear.



11. (†) Na figura a seguir são mostradas as respostas ao pulso unitário para diversos sistemas LIT diferentes. Determine o atraso de grupo associado a cada sistema.



12. (†) Não é possível obter um sistema inverso causal e estável (compensador perfeito) para um sistema de fase não mínima. Neste problema, estudamos uma técnica para compensar apenas a magnitude da resposta em frequência de um sistema de fase não mínima. Suponha que um sistema de tempo discreto LIT, com fase não mínima, estável e com uma função de sistema racional $H(z)$, seja colocado em cascata com um sistema de compensação $H_c(z)$, como mostrado na figura a seguir.



(a) Como $H_c(z)$ deve ser escolhido de modo que seja estável e causal, e tal que a magnitude da resposta em frequência efetiva total seja unitária? Lembre-se de que $H(z)$ sempre pode ser representada como $H(z) = H_{\text{ap}}(z)H_{\text{mín}}(z)$.

(b) Quais são as funções de sistema correspondentes $H_c(z)$ e $G(z)$?

(c) Assuma que

$$H(z) = (1 - 0{,}8e^{j0{,}3\pi}z^{-1})(1 - 0{,}8e^{-j0{,}3\pi}z^{-1})(1 - 1{,}2e^{j0{,}7\pi}z^{-1})(1 - 1{,}2e^{-j0{,}7\pi}z^{-1}).$$

Determine $H_{\text{mín}}(z)$, $H_{\text{ap}}(z)$, $H_c(z)$ e $G(z)$ para esse caso e construa os diagramas de polos e zeros para cada função de sistema.