Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
PTC-5005 Processamento Digital de Sinais I

1º período de 2019

Lista de exercícios 1

MDM,FRMP,MTMS

Data de entrega: 12/03/2019.
Entregar apenas os exercícios **2, 4, 8, 9, 10 e 11**.

1) Determine se os seguintes sinais são ou não periódicos. Para cada sinal periódico, determine também o período fundamental.

a) $x_1(n) = \cos(5n)$

b) $x_2(n) = 5\cos\left(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $x_3(n) = \text{Re}\{20e^{j6\pi n/5}\} + \text{Im}\{5e^{-j3\pi n/5}e^{j\pi/4}\}$

2) Seja o sinal de tempo discreto $x(n)$, mostrado na Figura 1.

a) Determine a expressão do sinal na forma $x(n) = A\cos(\omega n + \varphi)$, sabendo que $A = 10$. Considere ω e φ no intervalo de $[-\pi,\pi)$. Note que, embora na Figura 1 possa parecer que o valor 10 é atingido por $x(n)$ para algumas amostras, $|x(n)| \neq 10 \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{Z}$.

b) O sinal $x(n)$ foi obtido a partir da amostragem de um sinal de tempo contínuo $x_c(t)$. A amostragem foi feita a uma frequência de 25kHz, maior que o dobro da máxima frequência de $x_c(t)$. Determine a frequência de $x_c(t)$ que originou $x(n)$.

c) Considere que o sinal $x(n)$ passa por um sistema que fornece em sua saída $y(n) = x(2n)$. Classifique esse sistema quanto a linearidade, estabilidade e causalidade. Justifique adequadamente sua resposta.

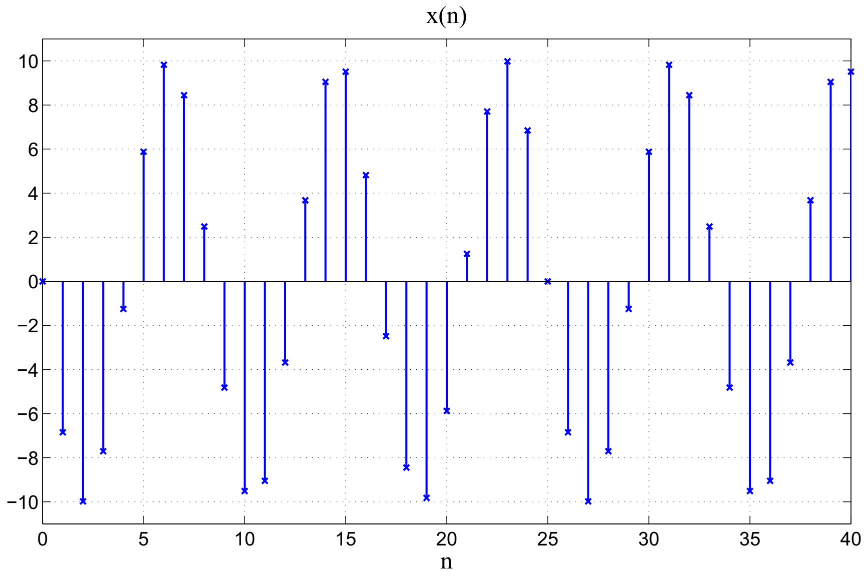

Figura 1: Gráfico do sinal de tempo discreto $x(n)$ em função de n.

3) Dada a sequência $x(n) = 0{,}5\,n\,[u(n) - u(n-6)]$, faça um esboço de

a) $y_1(n) = x(4 - n)$

b) $y_2(n) = x(2n - 3)$

c) $y_3(n) = x(8 - 3n)$

d) $y_4(n) = x(n^2 - 2n + 1)$

4) Calcule a sequência de saída $y(n)$ de um sistema LIT com resposta impulsiva

$$h(n) = (3 - |n - 3|)\,[u(n) - u(n-7)]\,,$$

para as seguintes sequências de entrada

a) $x_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$

b) $x_2(n) = u(n+1) - u(n-2)$

c) $x_3(n) = h(-n) + x_1(n)$

5) Para cada um dos sistemas abaixo com entrada $x(n)$ e saída $y(n)$, verifique se o sistema é (i) linear, (ii) invariante no tempo, (iii) estável, (iv) causal e (v) sem memória. Justifique suas respostas.

a) $y(n) = x(n) + x(-n)$

b) $y(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x(k)$

c) $y(n) = \displaystyle\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$, com n_0 fixo

d) $y(n) = \log\{x(n)\}$

6) Verifique se as declarações dos itens a) e b) seguintes são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta. Em seguida, resolva o item c).

a) A interconexão em série de dois sistemas lineares invariantes no tempo é em si um sistema linear invariante no tempo.

b) A interconexão em série de dois sistemas não-lineares é em si não-linear.

c) Considere três sistemas com as seguintes relações entrada-saída:

$$\begin{aligned}
&\text{Sistema 1: } y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases} \\
&\text{Sistema 2: } y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2), \\
&\text{Sistema 3: } y(n) = x(2n).
\end{aligned} \tag{1}$$

Suponha que esses sistemas sejam conectados em série conforme a representação da Figura 2. Encontre a relação entrada-saída para o sistema interconectado como um todo. Trata-se de um sistema linear? Ele é invariante no tempo?

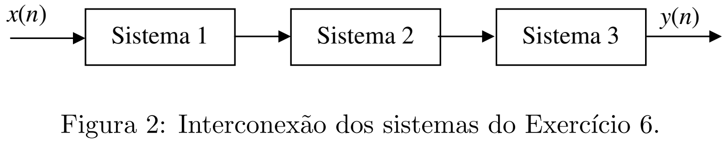

Figura 2: Interconexão dos sistemas do Exercício 6.

7) A relação entrada-saída de um sistema LIT é definida pelo somatório de convolução

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k), \tag{2}$$

sendo $x(n)$ o sinal de entrada e $h(n)$ a resposta impulsiva do sistema. Se $x(n)$ e $h(n)$ forem causais, (2) pode ser expressa de forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h(n) & h(n-1) & \cdots & \cdots & h(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \tag{3}$$

ou seja, $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}$. Conhecendo a resposta impulsiva $h(n)$ e a saída $y(n)$, pode-se determinar a entrada $x(n)$. Essa operação corresponde à inversa da convolução e é conhecida como desconvolução. Pede-se:

a) Verifique que para $x(n)$ e $h(n)$ causais, (2) pode ser expressa por (3).

b) Para um sistema com resposta impulsiva $(1, 2, 4)$, a sequência de saída é $(1, 1/2, 15/9)$. Determine a sequência de entrada.

8) Considere a sequência de tempo discreto

$$s(n) = \frac{1}{(-2)^n} - j\frac{1}{5^n},$$

sendo $j^2 = -1$ e $n = 0, \cdots, N-1$ com $N = 20$.

a) Faça uma rotina no MatLab para calcular

$$\bar{s}_N = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).$$

b) Confira o resultado da sua rotina usando a expressão para representar uma série geométrica de forma fechada, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}.$$

c) Calcule a energia de $s(n)$ no intervalo $n = 0, \cdots, N-1$:

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |s(n)|^2.$$

Note que $|s(n)|^2 = s(n) \times s^*(n)$, em que $s^*(n)$ representa o complexo conjugado de $s(n)$.

9) Considere as sequências de tempo discreto:

$$\begin{aligned} s_1(n) &= e^{j6n/\pi} \\ s_2(n) &= \sqrt{\cos(\pi n/13)} \end{aligned}$$

a) Verifique se cada uma das sequências é periódica ou não. Se for periódica, determine o período.

b) Para conferir o resultado faça os gráficos das sequências no MatLab. Use o comando `stem` e $n = 0, \cdots, N-1$ com $N = 75$. Comente brevemente o resultado.

Dica: Como $s_1(n)$ e $s_2(n)$ são sinais complexos, faça a parte real e a parte imaginária em gráficos separados. Use o comando `subplot` para dividir a tela gráfica em duas partes.

10) Considere a sequência de tempo discreto

$$s(n) = \cos\left(\frac{\pi}{9}n - \frac{\pi}{3}\right).$$

Aplica-se esse sinal à entrada do seguinte sistema

$$h(n) = \frac{1}{4}\left[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)\right],$$

resultando no sinal de saída $y(n)$.
Inicialmente, considere $n = 0, \cdots, N-1$, com $N = 4$.

a) Faça o gráfico de $s(n)$.

b) Com o comando `conv` calcule computacionalmente a saída do sistema e faça o gráfico da saída $y(n)$.

c) Justifique o comprimento e os valores obtidos no gráfico de $y(n)$ usando a definição da convolução.

   Dica: Para facilitar, divida a tela gráfica em duas partes e use os comandos `subplot` e `stem`. Faça os gráficos de $s(n)$ e $y(n)$ na mesma tela, mas em gráficos separados.

Considere agora $n = 0, \cdots, N-1$, com $N = 100$.

d) Faça o gráfico de $s(n)$.

e) Com o comando `conv` calcule computacionalmente a saída do sistema e faça o gráfico da saída $y(n)$.

f) Compare $s(n)$ e $y(n)$. Esse é o resultado esperado?

g) Considere uma frequência de amostragem de 16kHz. Determine a frequência de $s(t)$ que originou $s(n)$.

h) Supondo a mesma frequência de amostragem, determine a frequência de $y(t)$. **Dica**: Para facilitar a visualização, divida a tela gráfica em duas partes e use os comandos `subplot` e `stem`.

11) Considere as seguintes operações:

a) Multiplique os números inteiros: 131 e 122.

b) Compute a convolução dos sinais: $\{1, 3, 1\} * \{1, 2, 2\}$.

c) Multiplique os polinômios: $1 + 3z + z^2$ e $1 + 2z + 2z^2$.

d) Repita o item a) para os números 1,31 e 12,2.

e) Comente seus resultados.

12) Seja $x(n)$ a entrada e $y(n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} x(k)$ a saída de um sistema de tempo discreto.

a) Apresente a equação de diferenças que implementa o sistema.

b) Represente o sistema em termos de diagrama de blocos com apenas um atrasador.

c) O sistema é linear? O sistema é invariante no tempo? Em ambos os casos justifique sua resposta.