

Esperienza di spettroscopia

Gruppo 1G.BM

Gabriele Astorino, Stefano Romboni, Matteo Morresi

24 febbraio 2022

Indice

1	Misura della costante di Rydberg	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Misure effettuate	2
1.2.1	Lampada a Mercurio	2
1.2.2	Lampada a Idrogeno	2
1.2.3	Lampada a Sodio	3
1.3	Stima del passo reticolare e verifica della legge di diffrazione	3
1.3.1	Best-fit per ulteriore stima del passo reticolare	3
1.4	Righe di emissione dell'Idrogeno per ricavare la costante di Rydberg	4
1.5	Lampada al Sodio	5
1.5.1	Risoluzione dell'apparato e precisione della misura	5
2	Misura della lunghezza d'onda della riga gialla del Sodio	6
2.1	Calibrazione con lampada al Cadmio	6
2.2	Stima della lunghezza d'onda della riga gialla del Sodio	6
2.3	Commenti sui risultati	7

1 Misura della costante di Rydberg

1.1 Introduzione

In questa sezione viene esposta la procedura con cui è stata effettuata la misurazione della costante di Rydberg utilizzando la misura delle lunghezze d'onda delle righe di emissione dell'idrogeno nel visibile. La differenza energetica tra due livelli dell'idrogeno, indicati con n_1 e n_2 , è espressa dalla relazione:

$$\Delta E_{n_1, n_2} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad \text{con } n_1 > n_2,$$

dove h è la costante di Planck, ϵ_0 è la permeabilità elettrica del vuoto e m è la massa dell'elettrone. Utilizzando poi la relazione di De Broglie per l'energia, dove $E = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, con c la velocità della luce nel vuoto e λ la lunghezza d'onda, si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = \text{Ry} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad (1)$$

dove Ry indica proprio la costante di Rydberg. Nel caso specifico di questo esperimento, potendo misurare solamente lunghezze d'onda nel visibile, si sono analizzate solo le prime transizioni di Balmer, legate a lunghezze d'onda nel visibile:

n_1	n_2	λ [nm]
2	5	434
2	4	486
2	3	656

Tabella 1: Primi termini della serie di Balmer

1.2 Misure effettuate

1.2.1 Lampada a Mercurio

Si regola inizialmente la fenditura per avere un passaggio di luce non troppo intenso (successivamente vedremo che ha portato a ripetere questa procedura) per avere delle righe più sottili e ben definite nello schermo.

La radiazione proveniente dal reticolo viene raccolta da un secondo telescopio di osservazione che è montato su un goniometro, fornito di un nonio, ed è in grado di ruotare rispetto al reticolo. Si trova preventivamente l'angolo di azzeramento, misurato a $\beta_{ref} = (2.9429 \pm 0.0003)$ [rad] in quanto per le misure angolari si è scelto di mettere con incertezza 1' perché 30" ritenuta troppo ottimistica.

Ruotando il telescopio montato sul goniometro, si trovano quindi le altre righe di emissione della lampada al mercurio e si misurano, a ciascuna riga, gli angoli β_i rispetto allo zero del goniometro e si riferiscono poi a β_{ref} come $\alpha_i = \beta_i - \beta_{ref}$. Riportiamo adesso in Tabella 2 le misure per i β_i e α_i .

ordine	riga	$\beta_i \pm 0.0003$ [rad]	$\alpha_i \pm 0.0004$ [rad]
zero	n.d.	3.1848	0.2419
primo	verde	4.2906	1.3477
primo	viola	4.1454	1.2025
primo	dopp. giallo	4.3297	1.3868
primo	dopp. giallo	4.3322	1.3893
secondo	viola	4.6880	1.7450
secondo	verde	4.9583	2.0154
secondo	dopp. giallo	5.0372	2.0942
secondo	dopp. giallo	5.0428	2.0999

Tabella 2: Angoli riferiti allo zero del goniometro (β_i) e riferiti rispetto all'angolo di allineamento β_{ref} (α_i).

1.2.2 Lampada a Idrogeno

Sia per la lampada ad Idrogeno che per quella al Sodio si è cambiata l'apertura della fenditura in quanto le righe poco visibili, dunque calibrato di nuovo l'apparato e misurato nuovamente l'angolo di allineamento, risultato però uguale a β_{ref} .

Prima di riportare le misure si dichiara che durante la misura con la lampada a Idrogeno si sono riscontrati dei problemi nell'osservazione di molte delle righe di emissione: si sono riuscite ad osservare infatti solo le righe di colore ciano del primo e del secondo ordine e la riga rossa del primo ordine.

Si riportano ora le misure relative agli angoli per le righe della lampada ad idrogeno in Tabella 3

ordine	riga	$\beta_i \pm 0.0003$ [rad]	$\alpha_i \pm 0.0004$ [rad]
zero	n.d.	3.4064	0.4635
primo	ciano	4.3405	1.4021
primo	rosso	4.5585	1.6156
secondo	ciano	4.9402	1.9972

Tabella 3: Misure degli angoli β_i e α_i per la lampada ad Idrogeno.

1.2.3 Lampada a Sodio

Si è quindi utilizzata la lampada al sodio, misurando la posizione angolare delle righe di emissione del doppietto del sodio fino al primo ordine, che era l'ultimo visibile.

ordine	riga	$\beta_i \pm 0.0003$ [rad]	$\alpha_i \pm 0.0004$ [rad]
zero	n.d.	3.6829	0.7400
primo	dopp. giallo	4.6562	1.7133
primo	dopp. giallo	4.6571	1.7142

Tabella 4: Misure degli angoli β_i e α_i per la lampada al Sodio.

1.3 Stima del passo reticolare e verifica della legge di diffrazione

Si stima inizialmente il passo d del reticolo di diffrazione, mediante la lampada al Mercurio, a partire dall'ordine 0 con il quale si stima l'angolo di incidenza e, assumendo nota esattamente la lunghezza d'onda della riga verde $\lambda_v = 546.074$ [nm] al primo ordine di diffrazione si ottiene dalla legge del reticolo

$$d = \frac{\lambda_v}{\sin \theta_i - \sin \theta_{v,1}} \quad (2)$$

con $\theta_i = (\pi - \alpha_0)/2 = (1.4498 \pm 0.0002)$ [rad] l'angolo di incidenza e $\theta_{v,1} = \pi - \theta_i - \alpha_1 = (0.3441 \pm 0.0004)$ [rad] l'angolo di diffrazione rispetto alla normale al reticolo a cui si trova la riga verde del primo ordine.

A questo punto si ottiene $d = (833.2 \pm 0.3)$ [nm], ovvero $g = (1200.0 \pm 0.4)$ [mm⁻¹] righe per millimetro.

1.3.1 Best-fit per ulteriore stima del passo reticolare

Per un'ulteriore stima del passo reticolare e per verifica della legge di diffrazione, si sono prese, dal database del Nist https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html, le lunghezze d'onda di interesse per la lampada al mercurio (Hg), ovvero quelle relative alle righe viola, verde e doppietto giallo riportate in Tabella 5. A partire

Colore riga	$\lambda \pm 0.001$ [nm]	$\theta \pm 0.0004$ [rad]
viola	435.833	0.4892
verde	546.075	0.3440
giallo 1	576.961	0.3049
giallo 2	579.067	0.3024

Tabella 5: Lunghezze d'onda di alcune delle righe visibili di emissione della lampada al mercurio e relativi angoli di diffrazione.

quindi dagli angoli misurati per le righe della lampada al mercurio e riportati in Tabella 2 si esegue un fit dei minimi quadrati utilizzando come modello l'eq. (2). Riportiamo di seguito i risultati.

Risultati
$\chi^2/\text{ndof}=0.6/3$
$d = 833.4 \pm 0.1$ [nm]

Tabella 6: Risultati di best-fit per la stima del passo reticolare.

La densità di righe del reticolo utilizzato viene dunque: 1200.0 ± 0.2 [righe/mm]

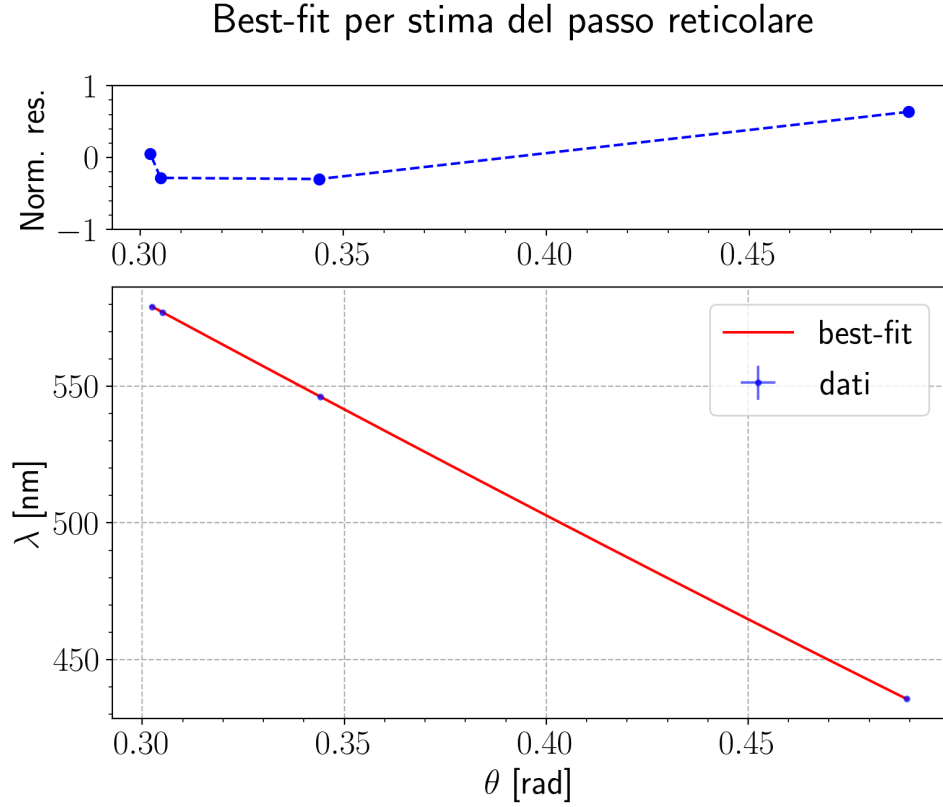


Figura 1: Immagine di best-fit dei dati relativi alla tabella 2 per il solo prim'ordine

1.4 Righe di emissione dell'Idrogeno per ricavare la costante di Rydberg

Partendo dal valore stimato per il passo d ed utilizzando la (2), si ricavano dai dati in Tabella 3 le lunghezze d'onda relative alle righe di emissione osservate per l'Idrogeno. Si riportano ora in Tabella 7.

ordine	riga	λ [nm]
primo	ciano	486.1 ± 0.2
primo	rosso	656.0 ± 0.3
secondo	ciano	486.1 ± 0.2

Tabella 7: Lunghezze d'onda delle righe di emissione per la lampada ad Idrogeno.

Si effettua quindi un fit dei minimi quadrati con la funzione *curve_fit* di Python prendendo come modello la (1) e variando per ogni lunghezza d'onda il numero quantico n_2 seguendo la serie di Balmer.

Risultati
$\chi^2/\text{ndof}=0.3/2$
$R_y = 10.9732 \pm 0.0009 [1/\mu\text{m}]$

Tabella 8: Risultati di best-fit relativi alle misura in Tabella 7.

Il valore atteso della costante di Rydberg è $R_y = 10.9737 [1/\mu\text{m}]$ preso da https://it.wikipedia.org/wiki/Costante_di_Rydberg, dove sono state considerate solo le prime 6 cifre significative, in linea con la nostra misura, nonostante la precisione riportata dal database fosse di oltre 12 cifre significative.

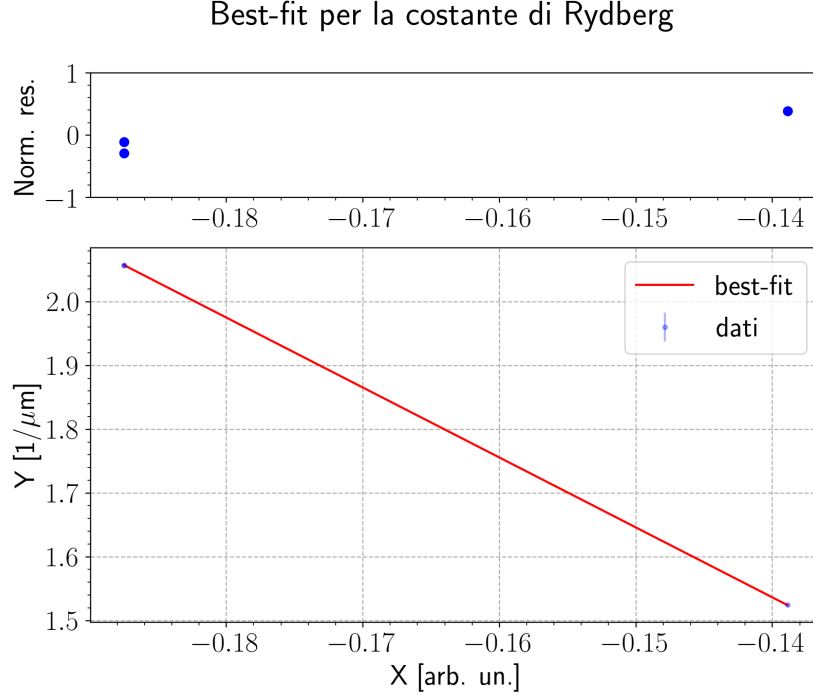


Figura 2: Grafico dati sperimentali in Tabella 7 e funzione di best-fit

1.5 Lampada al Sodio

Dalle misure degli angoli α_1 del primo ordine delle righe di emissione del doppietto del sodio e dalla misura del passo reticolare d si sono quindi calcolate tramite la (2) le lunghezze d'onda associate alle due righe di emissione del doppietto. Si riportano in Tabella 9 i risultati.

ordine	riga	λ [nm]
primo	dopp. giallo	588.9 ± 0.4
primo	dopp. giallo	589.6 ± 0.4

Tabella 9: Lunghezze d'onda delle righe di emissione per la lampada al Sodio.

Si nota anche che la distanza tra le righe è stimata essere 0.7 ± 0.6 [nm] che è in accordo con quanto atteso e che le lunghezze d'onda delle due righe sono in accordo con quanto noto.

1.5.1 Risoluzione dell'apparato e precisione della misura

Per dare una stima della risoluzione dell'apparato si può ragionare nel seguente modo:

sappiamo che le righe del sodio sono distanti 0.6 [nm] e gli angoli misurati in loro corrispondenza sono $\alpha_1 = 1.7133 \pm 0.0004$ [rad] e $\alpha_2 = 1.7142 \pm 0.0004$ [rad].

Notando che la risposta dello strumento è lineare nel range di angoli di interesse in quanto sviluppando la (2) attorno ad un angolo θ (tra quelli di interesse per il doppietto) si nota come gli ordini superiori al primo siano trascurabili rispetto all'incertezza di misura sulla lunghezza d'onda:

$$\lambda = d(\sin \theta_{\text{inc}} - \sin(\theta + \Delta\theta)) = d \sin \theta_{\text{inc}} - d(\sin \theta + \cos(\theta)\Delta\theta + \sin^2(\theta)\Delta\theta^2 + O(\Delta\theta^3))$$

$$\frac{\sin^2 \theta \Delta\theta}{\cos \theta} \ll 1, \quad \frac{d \sin^2 \theta \Delta\theta^2}{d\lambda} \ll 1.$$

Si può quindi dire che per ogni radiante fatto con il goniometro, si percorre una lunghezza d'onda pari a

$$\frac{0.6[\text{nm}]}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{0.6}{0.9}[\text{nm} \cdot \text{mrad}^{-1}] \simeq 0.7 [\text{nm} \cdot \text{mrad}^{-1}].$$

A questo punto considerando la risoluzione migliore possibile data dal goniometro è 30", ovvero 0.1 [mrad] ovvero $\simeq 0.07$ [nm]. Avendo scelto però come incertezza di misura 1', quindi 0.3 [mrad], si ha 0.2 [nm]. Si evince quindi che le incertezze misura che sulle lunghezze d'onda sono sovrastimate.

2 Misura della lunghezza d'onda della riga gialla del Sodio

In questa parte di esperienza si utilizza invece uno spettroscopio a prisma.

Con questo tipo di spettroscopio, non possiamo però visualizzare il doppietto in quanto la risoluzione dello strumento sappiamo essere 0.8 [nm] mentre le due righe del doppietto sono distanti 0.6 [nm]. Ci aspettiamo quindi che la lunghezza d'onda da stimare, si trovi all'interno del range $[\lambda_1 \pm \Delta_1, \lambda_2 \pm \Delta_2] = [588.9 \pm 0.4, 589.6 \pm 0.4]$ [nm].

2.1 Calibrazione con lampada al Cadmio

Inizialmente si calibra l'apparato sperimentale utilizzando una lampada al Cadmio. Si regola l'apertura della slitta d'ingresso cercando di massimizzare l'intensità della luce trasmessa e mantenendo uno spessore delle linee osservate tale che il risultato della misura angolare non vari (ovvero vari meno della risoluzione del nonio) tra gli estremi della linea. Si misura quindi l'angolo di allineamento $\beta_{ref} = (4.6094 \pm 0.0003)$ [rad]; si trova dunque l'angolo di minima deviazione δ per la riga più vicina al giallo, che per la lampada al Cadmio risulta essere la riga verde, e si misurano gli angoli a cui si trovano le altre righe di interesse.

Riga	$\beta \pm 0.0003$ [rad]	$\alpha \pm 0.0004$ [rad]
blu	3.8005	-0.8090
azzurro	3.8039	-0.8055
verde	3.8118	-0.7976
rosso	3.8330	-0.7764

Tabella 10: angoli misurati utilizzati per il best-fit di figura 3

2.2 Stima della lunghezza d'onda della riga gialla del Sodio

Tramite i dati raccolti si esegue quindi un fit dei minimi quadrati con la funzione *curve_fit* di Python ricavando la curva (retta) di calibrazione per il nostro strumento con un modello lineare con ordinata la misura angolare ed ascissa l'inverso della lunghezza d'onda

$$y(\lambda; m, q) = m \frac{1}{\lambda} + q. \quad (3)$$

Si trattano le incertezze con **absolute_sigma** = False in quanto non puramente statistiche.

Si riportano di seguito grafico in Figura 3 e risultati di best-fit in Tabella 11. Al fit sono stati passati gli opposti degli angoli misurati, ovvero semplicemente con un segno - davanti per averli positivi. Tramite i parametri trovati e la misura dell'angolo del doppietto del sodio, $\beta_{\text{giallo}} = 3.8170 \pm 0.0003$ [rad] e $\alpha_{\text{giallo}} = -0.7924 \pm 0.0003$ [rad], si ricava quindi la lunghezza d'onda:

$$\lambda_{Na} = \frac{m}{-\alpha_{\text{giallo}} + q} = 540 \pm 30 \quad [\text{nm}]$$

nella quale si è propagato l'errore tenendo conto anche della covarianza tra coefficiente angolare ed intercetta restituiti dal fit lineare.

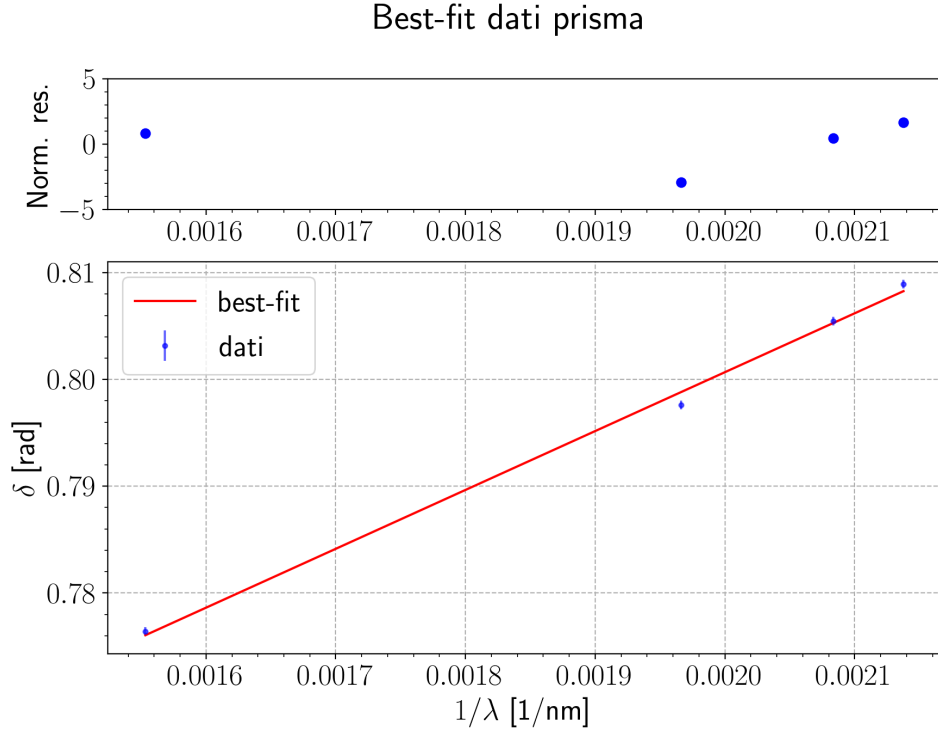


Figura 3: Best-fit dei dati di tabella (quella della lampada al cadmio) per stima λ del sodio

Risultati
$\chi^2/\text{ndof}=12.2/2$
$m = 55 \pm 2 \text{ [rad}\cdot\text{nm]}$
$q = 0.690 \pm 0.004 \text{ [rad]}$
$C_{m,q} = -0.99$

Tabella 11: Risultati di best-fit di Figura 3 relativi alle misura in Tabella (quella della lampada al cadmio), dove con $C_{m,q}$ viene indicata la covarianza normalizzata.

2.3 Commenti sui risultati

Confrontando le lunghezze d'onda misurate per la riga gialla del Sodio, risulta che non siano compatibili tra loro. Questo potrebbe essere dovuto a diversi fattori:

- i)* il primo motivo plausibile è che sia stato commesso un errore durante la misura di allineamento per trovare l'angolo di minima deviazione per la riga verde oppure che, una volta trovato l'angolo di minima deviazione, si sia accidentalmente, nella fase di fissaggio del telescopio, spostato leggermente il goniometro perdendo l'effettivo angolo di minima deviazione;
- ii)* Un'altra ragione possibile può essere un errore di lettura dell'angolo di minima deviazione della riga verde: infatti si può notare dai residui che sia quello più distante dal livello del fit, anche se, essendo pochi punti sperimentali, l'affidamento ai residui per tale considerazione viene meno.