

# Esperienza di Franck-Hertz

Gruppo 1G.BM

Gabriele Astorino, Stefano Romboni, Matteo Morresi

15 marzo 2022

## Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>  | <b>1</b> |
| 1.1      | Discussione qualitativa dell'andamento della corrente anodica . . . . .              | 2        |
| 1.2      | Scelta del punto di lavoro . . . . .   | 2        |
| 1.3      | Scelta tra massimi e minimi . . . . .  | 2        |
| 1.4      | Breve commento sulle incertezze . . . . .  | 3        |
| <b>2</b> | <b>Dipendenza della corrente anodica dalla tensione acceleratrice <math>U</math></b> | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>Posizione relativa dei massimi e minimi al variare di <math>U_F</math></b>        | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Posizione relativa dei massimi e minimi al variare di <math>T</math></b>          | <b>4</b> |
| <b>5</b> | <b>Stima del cammino libero medio e di <math>E_a</math></b>                          | <b>5</b> |
| <b>6</b> | <b>Stima della sezione d'urto</b>  | <b>6</b> |
| <b>7</b> | <b>Commenti sui risultati</b>  | <b>7</b> |

## 1 Introduzione

In questa esperienza andiamo a verificare la struttura discreta dei livelli energetici dell'atomo di mercurio e stimiamo la separazione energetica delle transizioni fra lo stato fondamentale  $6^1S_0$  e gli stati eccitati del mercurio. La strumentazione utilizzata è la seguente:

- un forno contenete un tubo a vuoto fornito di unità di controllo della temperatura;
- un generatore di tensione;
- un oscilloscopio AD2;
- un adattatore BNC per AD2.

All'interno del tubo a vuoto è contenuta una goccia di mercurio. Aumentando la temperatura del forno è possibile far evaporare una parte del mercurio che andrà a riempire il tubo a vuoto. Più la temperatura del forno è alta e maggiore sarà la quantità di mercurio fatta evaporare, e quindi la densità di mercurio vaporizzato presente nel tubo. All'interno del tubo sono presenti tre elettrodi in una configurazione chiamata triodo: il catodo (C), la griglia (G) e l'anodo (A) (vedi Figura 1). Il catodo viene riscaldato applicando ai suoi capi una tensione una tensione  $U_F$ , si ha così che gli elettroni vengono estratti dal catodo per effetto termoionico, rimanendo con un energia residua inferiore all'eV e quindi ininfluenza per la misura di corrente finale. Il canale 1 dell'oscilloscopio (CH1) è utilizzato per misurare la tensione acceleratrice ( $U$ ) tra catodo e griglia, mentre il canale 2 (CH2) è utilizzato per la misura di corrente sull'anodo tramite un convertitore corrente-tensione che restituisce un segnale di tensione proporzionale.

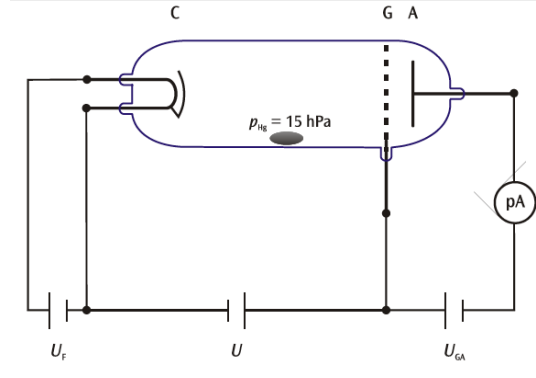


Figura 1: Schema tubo a vuoto

## 1.1 Discussione qualitativa dell'andamento della corrente anodica

Si accende l'apparato sperimentale seguendo la procedura raccomandata nella nota di accompagnamento. Sull'oscilloscopio si osservano quindi due tracce: sul canale 1 si ha la rampa di tensione  $U$  acceleratrice, applicata tra catodo e griglia, che cresce da 0 [V] a 6 [V] (ovvero da 0 [V] a 60 [V], dato che la tensione  $U$ , prima di essere inviata in ingresso all'oscilloscopio, viene deamplificata di un fattore 10 tramite un circuito contenuto nell'unità di alimentazione); sul canale 2 si ha invece il segnale ottenuto dalla conversione della corrente anodica tramite l'amplificatore a transimpedenza.

In assenza del gas di mercurio si osserverebbe una corrente di collettore che cresce esponenzialmente all'aumentare di  $U$ . In presenza del gas, si ha invece un aumento iniziale della corrente anodica, che persiste fino a quando l'energia degli elettroni è minore dell'energia di prima eccitazione  $E_a$  dell'atomo di mercurio e quindi gli urti elettrone-mercurio sono elastici; quando la tensione  $U$  è tale da portare gli elettroni ad energie dell'ordine e maggiori di  $E_a$ , gli urti diventano invece prevalentemente anelastici, e in tal caso gli elettroni cedono quasi completamente la loro energia agli atomi di mercurio rimanendo pressoché fermi dopo la collisione. Per tensioni  $U$  applicate sufficientemente grandi, si osservano iterazioni successive di questo processo, ovvero una serie di accelerazioni e collisioni con corrispondenti massimi e minimi della corrente anodica. Si osserva inoltre, come approfondito più avanti, un aumento della distanza relativa tra massimi e minimi all'aumentare di  $U$ .

Le transizioni energetiche degli elettroni di Mercurio di principale interesse in questo caso sono quelle dall'orbitale  $6^1S_0$  agli orbitali  $6^3P_0$ ,  $6^3P_1$ ,  $6^3P_2$  (Figura 6). Ci si aspetta che il valore del salto energetico osservato sia una media pesata con le sezioni d'urto di queste tre possibili transizioni, che è ciò che in effetti si ottiene dalle misure riportate in seguito.

## 1.2 Scelta del punto di lavoro

Per il punto di lavoro si è cercato di avere il maggiore numero di massimi e minimi possibili della corrente anodica, considerando anche la curvatura degli estremi. I valori nominali che realizzavano questa condizione sono:

| $U_F$ [V] | $U_{\min}$ [V] | $U_{\max}$ [V] | $U_E$ [V] | $U_{GA}$ [V] |
|-----------|----------------|----------------|-----------|--------------|
| 7.0       | 21             | 61.5           | 0.3       | 0.2          |

Tabella 1: Impostazioni per il punto di lavoro

## 1.3 Scelta tra massimi e minimi

Si è scelto di utilizzare i massimi invece che i minimi in quanto risultano più pronunciati e definiti, dunque la loro misura risulta più precisa ed affidabile rispetto a quella dei minimi.

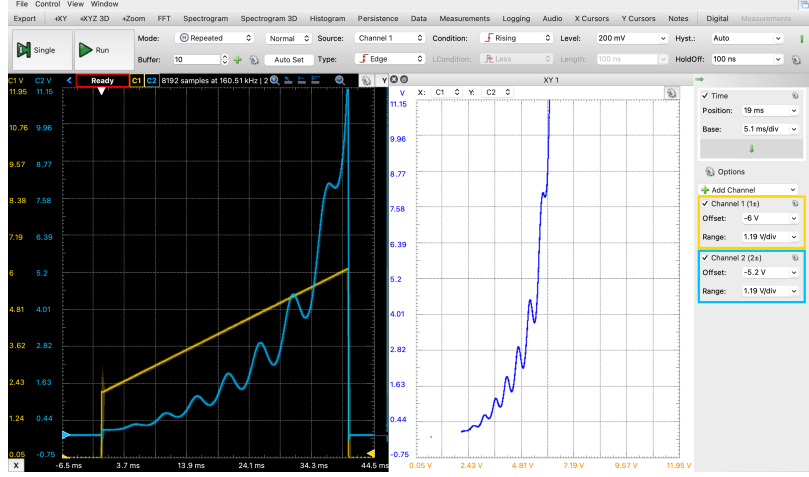


Figura 2: Tracce di oscilloscopio misurate al punto di lavoro scelto. Ch1: 1/10 rampa di tensione  $U$  acceleratrice; Ch2: tensione proporzionale alla corrente di collettore. A destra i due canali in modalità X-Y.

## 1.4 Breve commento sulle incertezze

Per quanto riguarda l'errore di misura sulle temperature si è considerata la risoluzione del termometro, dunque 1 [°C], mentre per quanto riguarda le misure dei potenziali corrispondenti ai massimi si sono considerati i contributi derivanti dall'utilizzo dell' AD2, ovvero lo 0.5 % della misura sommato in quadrato con 0.3 [mV]. Infine per le misure dei vari  $\Delta E$  semplicemente si sommano in quadratura le incertezze dei due massimi adiacenti.

## 2 Dipendenza della corrente anodica dalla tensione acceleratrice $U$

All'aumentare del valore della tensione acceleratrice  $U$  si osserva un aumento della distanza relativa tra massimi (e minimi) di urti consecutivi. Questo si può spiegare con l'aumento dell'energia acquisita dall'elettrone nel percorrere il cammino libero medio. Si ha infatti che in generale, una volta raggiunta l'energia minima per una collisione anelastica  $E_a$ , l'elettrone percorre un ulteriore cammino libero medio (anelastico)  $\lambda$  prima di effettuare un urto anelastico con l'atomo di Mercurio. Di conseguenza l'elettrone acquisisce un'ulteriore energia  $\delta_n$  ( $n$  indice che tiene conto del numero di collisioni). L'energia  $\delta_n$  cresce al crescere di  $n$ , in quanto la maggiore tensione acceleratrice determina un moto degli elettroni più focalizzato e con accelerazione maggiore. Per tensioni  $U$  sufficienti ad avere  $n$  collisioni elastiche, si ha che gli elettroni raggiungono all' $n$ -esima collisione un'energia:

$$E_n = n(E_a + \delta_n) \quad (1)$$

Assumendo che valga  $\lambda \ll L$ , con  $L = 8$  [mm] distanza tra catodo e griglia, si può scrivere  $\delta_n$  come:

$$\delta_n = n \frac{\lambda}{L} E_a \quad (2)$$

Combinando le due relazioni precedenti si ottiene allora che la distanza tra due massimi (e minimi) corrispondenti a collisioni successive è:

$$\Delta E_n = E_n - E_{n-1} = \left[1 + \frac{\lambda}{L}(2n-1)\right] E_a \quad (3)$$

da cui si vede che la distanza relativa tra massimi (e minimi) cresce linearmente con  $n$ . Si riporta in figura l'acquisizione ottenuta al punto di lavoro con associata dipendenza di  $\Delta E_n$  dall'ordine del massimo.

Si può inoltre notare che, come atteso, variando la pendenza della rampa della tensione acceleratrice, si ha che la distanza tra i massimi ed i minimi non cambia ma semplicemente varia il punto di partenza della curva visualizzata; in particolare si osserva un numero diverso di massimi e minimi in quanto la curva comincia a partire da voltaggi più o meno elevati (arrivando fino alla saturazione dell'OpAmp se troppo elevato  $U_{max}$ ), ma non una variazione significativa della distanza relativa tra i massimi ed i minimi.

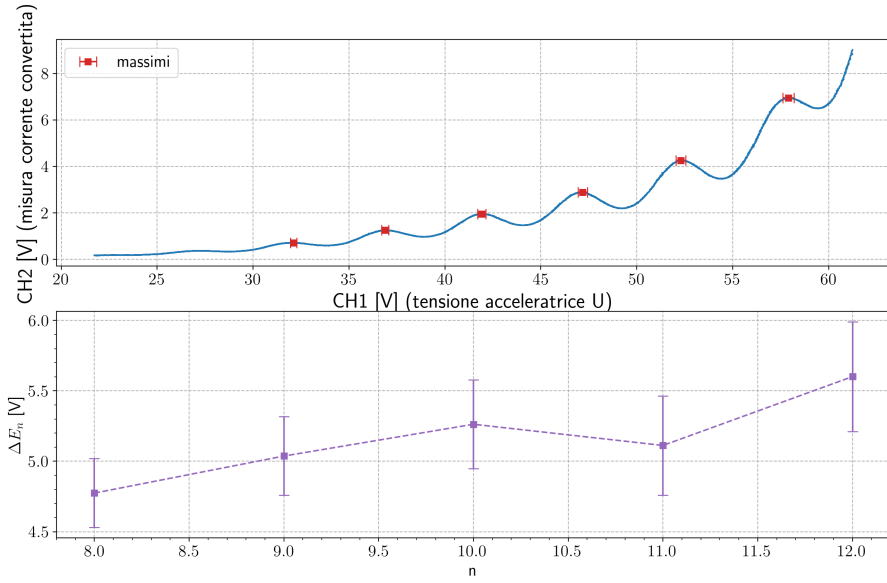


Figura 3: Dipendenza da  $U$  della distanza tra massimi per l'acquisizione al punto di lavoro.

### 3 Posizione relativa dei massimi e minimi al variare di $U_F$

In questa sezione si studia qualitativamente l'andamento di  $\Delta E$  al variare di  $U_F$ , ovvero la tensione necessaria per riscaldare il catodo con lo scopo di emettere gli elettroni per effetto termoionico.

Ci aspetta, per questo motivo, che l'andamento di  $\Delta E$  non cambi, in quanto, aumentando la temperatura del catodo da cui vengono emessi gli elettroni, la sola differenza si riscontra nel numero di elettroni emessi per effetto termoionico, dunque nell'intensità della corrente registrata. In particolare ci si aspetta quindi un riscaldamento verticale della curva senza intaccare la posizione relativa tra massimi e minimi. Riportiamo in tabella i risultati ottenuti per acquisizioni a tre diversi valori di  $U_F$ .

| $U_F$ [V] | $\Delta E_7$ [V] | $\Delta E_8$ [V] | $\Delta E_9$ [V] | $\Delta E_{10}$ [V] |
|-----------|------------------|------------------|------------------|---------------------|
| 8         | $4.9 \pm 0.4$    | $5.2 \pm 0.5$    | $5.2 \pm 0.5$    | $5.4 \pm 0.6$       |
| 9.5       | $4.9 \pm 0.4$    | $5.1 \pm 0.5$    | $5.2 \pm 0.5$    | $5.5 \pm 0.5$       |
| 11        | $5.2 \pm 0.4$    | $4.9 \pm 0.5$    | $5.3 \pm 0.5$    | /                   |

Tabella 2: Misure di  $\Delta E_n$  al variare di  $U_F$

### 4 Posizione relativa dei massimi e minimi al variare di $T$

Infine variando la temperatura, ci si aspetta che al suo aumentare, crescendo la densità del mercurio, diminuisca il cammino libero medio degli elettroni. Questo fa sì che tra urti successivi la differenza in energia dell'elettrone diminuisca. Si riportano in Tabella 3 le differenze di energia per ciascuna delle temperature utilizzate che verranno anche utilizzate in Sezione 5 per i vari fit.

| $T = 180 \pm 1$ [°C]              | $T = 185 \pm 1$ [°C]              | $T = 190 \pm 1$ [°C]              | $T = 195 \pm 1$ [°C]              | $T = 200 \pm 1$ [°C]              |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $\Delta E_8 = 4.8 \pm 0.2$ [V]    | $\Delta E_8 = 4.8 \pm 0.2$ [V]    | $\Delta E_8 = 4.8 \pm 0.3$ [V]    | $\Delta E_8 = 4.9 \pm 0.3$ [V]    | n.d.                              |
| $\Delta E_9 = 5.0 \pm 0.3$ [V]    | $\Delta E_9 = 5.1 \pm 0.3$ [V]    | $\Delta E_9 = 4.9 \pm 0.3$ [V]    | $\Delta E_9 = 4.8 \pm 0.3$ [V]    | $\Delta E_9 = 4.7 \pm 0.3$ [V]    |
| $\Delta E_{10} = 5.3 \pm 0.3$ [V] | $\Delta E_{10} = 5.2 \pm 0.3$ [V] | $\Delta E_{10} = 5.0 \pm 0.3$ [V] | $\Delta E_{10} = 4.9 \pm 0.3$ [V] | $\Delta E_{10} = 4.7 \pm 0.3$ [V] |
| $\Delta E_{11} = 5.1 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{11} = 5.1 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{11} = 5.1 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{11} = 5.2 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{11} = 5.1 \pm 0.4$ [V] |
| $\Delta E_{12} = 5.6 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{12} = 5.3 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{12} = 5.1 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{12} = 5.0 \pm 0.4$ [V] | $\Delta E_{12} = 4.8 \pm 0.4$ [V] |

Tabella 3: Tabella con le misure per i vari  $\Delta E_n$  tra i massimi per ciascuna temperatura utilizzata.

Dai dati in tabella si nota come complessivamente l'andamento atteso sia rispettato.

## 5 Stima del cammino libero medio e di $E_a$

Sapendo che  $\Delta E_n$  differenza di energia tra  $n$ -esimo urto e l' $n - 1$ -esimo,  $E_a$  energia minima per poter eccitare l'elettrone del mercurio,  $\lambda$  cammino libero medio dell'elettrone e  $L$  distanza tra catodo e griglia sono legati tra loro da

$$\Delta E_n = E_a + \frac{\lambda E_a}{L}(2n - 1)$$

si esegue un fit dei minimi quadrati mediante la funzione *curve\_fit* di Python con il modello

$$y(x; a, b) = a + ab(2x - 1) \quad (4)$$

con  $a$  corrispondente ad  $E_a$  e  $b$  a  $\lambda/L$ ,  $L = 8$  [mm] e si utilizza inoltre **absolute\_sigma** = True per la natura stocastica delle incertezze. Le misure sono riportate in Tabella 3 di Sezione 4.

Si riportano ora grafico e risultati di best-fit.

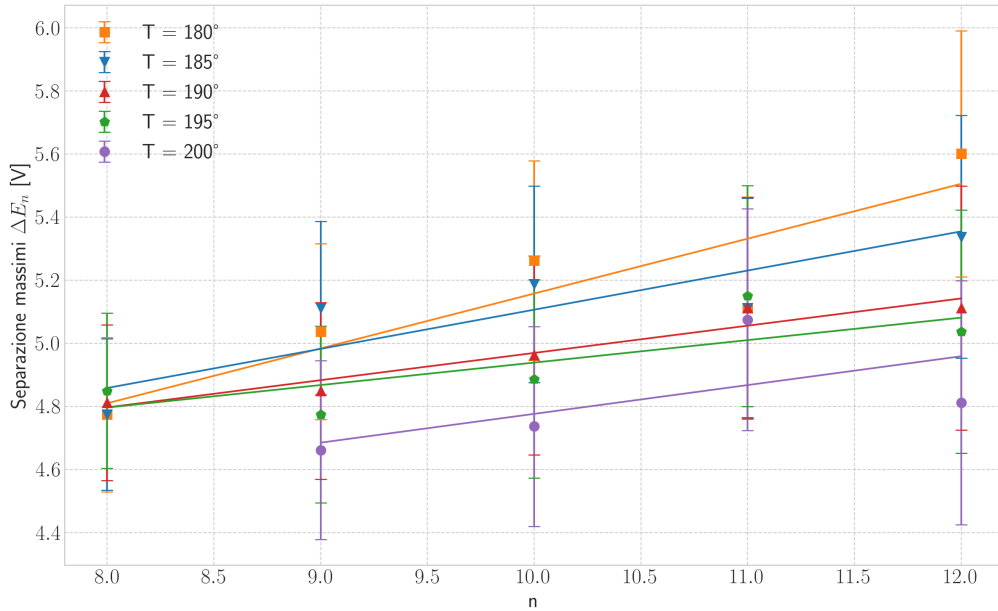


Figura 4: Grafici di best-fit per le varie temperature per il modello riportato nella (4)

| Risultati best-fit T = 180°C |                   |
|------------------------------|-------------------|
| $\chi^2/\text{ndof}$         | 0.6/3             |
| $a = E_a$                    | $3.5 \pm 0.9$ [V] |
| $b = \lambda/L$              | $0.02 \pm 0.02$   |

Tabella 4

| Risultati best-fit T = 185°C |                   |
|------------------------------|-------------------|
| $\chi^2/\text{ndof}$         | 0.5/3             |
| $a = E_a$                    | $3.9 \pm 0.9$ [V] |
| $b = \lambda/L$              | $0.02 \pm 0.02$   |

Tabella 5

| Risultati best-fit T = 190°C |                   |
|------------------------------|-------------------|
| $\chi^2/\text{ndof}$         | 0.05/3            |
| $a = E_a$                    | $4.1 \pm 0.9$ [V] |
| $b = \lambda/L$              | $0.01 \pm 0.01$   |

Tabella 6

| Risultati best-fit T = 195°C |                   |
|------------------------------|-------------------|
| $\chi^2/\text{ndof}$         | 0.4/3             |
| $a = E_a$                    | $4.3 \pm 0.9$ [V] |
| $b = \lambda/L$              | $0.01 \pm 0.01$   |

Tabella 7

| Risultati best-fit T = 200°C |                 |
|------------------------------|-----------------|
| $\chi^2/\text{ndof}$         | 0.5/2           |
| $a = E_a$                    | $4 \pm 1$ [V]   |
| $b = \lambda/L$              | $0.01 \pm 0.02$ |

Tabella 8

## 6 Stima della sezione d'urto

Infine, sapendo che il cammino libero medio degli elettroni è legato alla sezione d'urto secondo

$$\lambda = \frac{k_B}{\sigma} \frac{T}{P}, \quad \text{con} \quad P = 8.7 \times 10^9 - 3110/T[K]$$

si esegue un fit dei minimi quadrati con la funzione *curve\_fit* di Python con il modello

$$y(x; a) = a \frac{x}{8.7 \times 10^9 - 3110/(x+273.15)} \quad (5)$$

dove i valori per  $\lambda$  si ricavano a partire da  $\lambda = Lb$  ed impostando **absolute\_sigma** = True per la natura stocastica delle incertezze di misura. Si riportano quindi i dati riportati sul grafico, grafico e risultati di best-fit.

| $\lambda$ [ $\mu\text{m}$ ] | $\sigma_\lambda$ [ $\mu\text{m}$ ] | $T \pm 1$ [ $^\circ\text{C}$ ] |
|-----------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| 200                         | 160                                | 180                            |
| 130                         | 130                                | 185                            |
| 83                          | 110                                | 190                            |
| 67                          | 110                                | 195                            |
| 93                          | 190                                | 200                            |

Tabella 9: Tabella le misure per  $\lambda$  e temperatura per il fit.

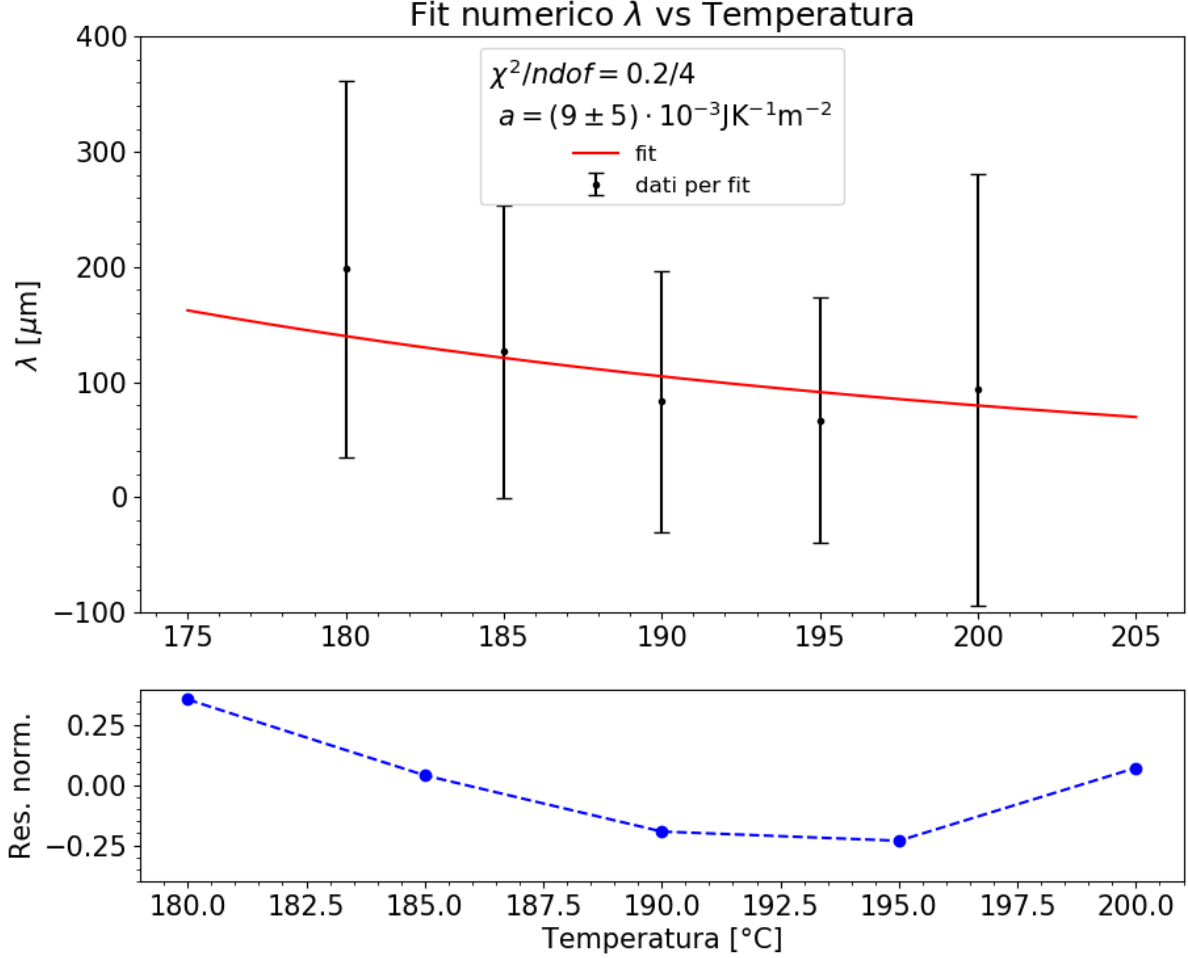


Figura 5: Grafico  $\lambda$  vs  $T$ .

Essendo quindi  $\sigma = k_B/a$ , si stima  $\sigma = (1.5 \pm 0.8) \cdot 10^{-20} [\text{m}^2]$ .

## 7 Commenti sui risultati

La prima cosa che si può dire dai risultati di best-fit è che, dai  $\chi^2$ , sono sovrastimate le incertezze di misura dei  $\Delta E_n$ . Osservando invece i vari  $E_a$  stimati dai fit in Sezione 5, si può stimare l'energia minima per eccitare l'elettrone

del Mercurio con una media dei risultati ottenuti associando come incertezza di misura la media della somma in quadratura delle incertezze.

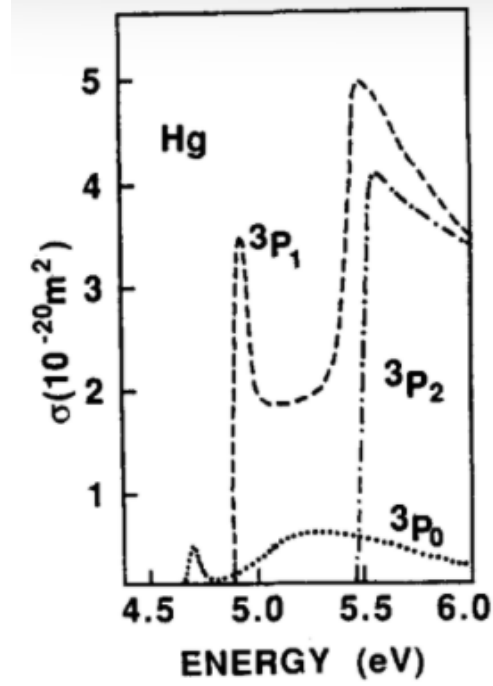
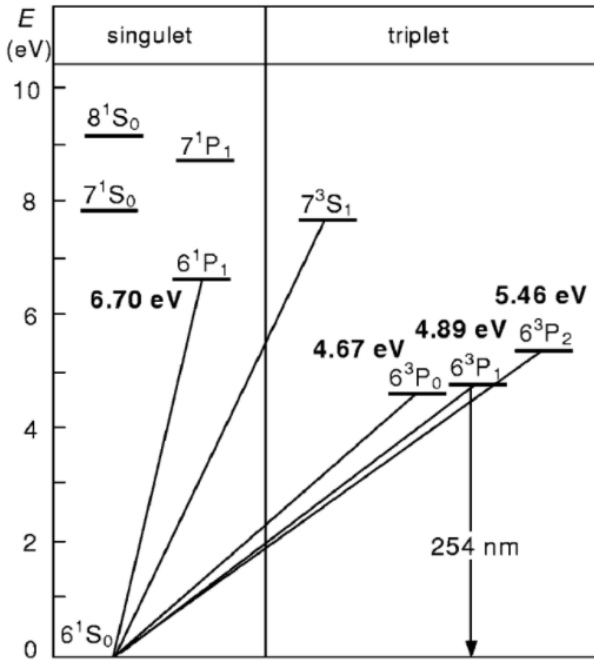


Figura 6: Diagramma dei livelli energetici del Mercurio, in particolare notare i salti di livello  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_0$ ,  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$  e  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_2$  (sulla sinistra) e sezione d'urto per le eccitazioni appena citate da scattering elettrone su Mercurio in funzione dell'energia (sulla destra).

Si ottiene quindi  $E_a = (4.0 \pm 0.4)$  [V] che risulta compatibile entro  $2\sigma$  per  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_0$  ed entro  $3\sigma$  per  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$  come si vede dalla Figura 6. Ora, prendendo la stima per la sezione d'urto  $\sigma = (1.5 \pm 0.8) \cdot 10^{-20}$  [m<sup>2</sup>], si nota come questa risulti in accordo con la cross section della transizione  $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$  a circa  $4.89 \div 4.9$  [V], quindi  $E_a$  ricavato attraverso i massimi risulta compatibile con quanto atteso entro  $3\sigma$ .