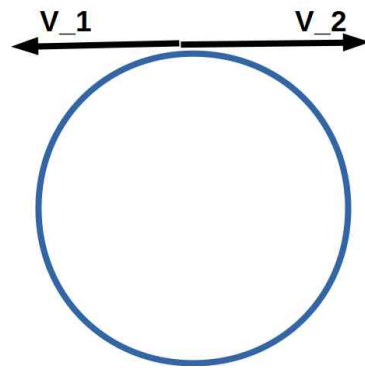


1 Esercizio

Due punti materiali, sono vincolati a muoversi su di una guida circolare di raggio $r = 15\text{cm}$. Ad un certo istante i due punti occupano la stessa posizione e si muovono in versi opposti con velocità di modulo costante, pari a $v_1 = 3\text{m/s}$ e $v_2 = 6\text{m/s}$. Determinare dopo quanto tempo si incontrano di nuovo e l'arco di traiettoria percorsa da ciascuno dei due punti.

Dati

- $r = 15\text{ cm}$
- $V_1 = 3\text{ m/s}$
- $V_2 = 6\text{ m/s}$



Secondo definizione, la velocità angolare é

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v}{r} \quad (1)$$

Usiamo i pedici 1 e 2 per identificare le grandezze di, rispettivamente, il primo e il secondo punto materiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{V_1}{r} = \frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t} \\ \omega_2 = \frac{V_2}{r} = \frac{2\pi - \Delta\alpha_1}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (2)$$

Esplicitando Δt nella prima delle equazioni 12

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha_1 r}{V_1} \quad (3)$$

E sostituendo nella seconda, si ha

$$\frac{V_2}{r} = \frac{2\pi - \Delta\alpha_1}{\Delta\alpha_1 r / V_1} \quad (4)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha_1 r}{V_1} \cdot \frac{V_2}{r} &= 2\pi - \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} &= 2\pi - \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_1 \frac{V_2}{V_1} + \Delta\alpha_1 &= 2\pi \\ \Delta\alpha_1 \left(\frac{V_2}{V_1} + 1 \right) &= 2\pi \end{aligned}$$

E quindi l'angolo descritto dal primo punto materiale, quello descritto dal secondo e il tempo richiesto sono

$$\Delta\alpha_1 = \frac{2\pi V_2}{V_1 + V_2} \quad \Delta\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 \quad \Delta t = \frac{\Delta\alpha_1 r}{V_2} \quad (5)$$

Mettendo i numeri

$$\Delta\alpha_1 = \frac{2\pi \cdot 3m/s}{3m/s + 6m/s} = 0.70rad \quad (6)$$

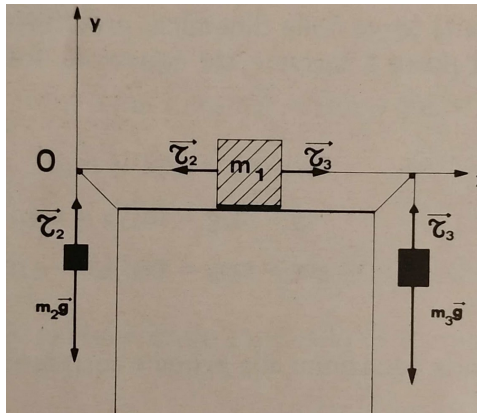
$$\Delta\alpha_2 = 5.58rad \quad (7)$$

$$\Delta t = \frac{0.70rad \cdot 0.15}{6m/s} = 0.017s \quad (8)$$

2 Esercizio

Un corpo di massa m_1 può scorrere senza attrito su di una superficie orizzontale. Due fili inestensibili e di massa trascurabile lo collegano, tramite due carrucole fisse e lisce, con due corpi di massa m_2 e m_3 (vedi

figura in allegato). Se m_2 diverso da m_3 , il sistema si mette in moto. Calcolare il modulo della accelerazione della massa m_1 , se $m_1 = m_2$ e $m_3 = 2m_2$.



$$\begin{cases} m_3 a = m_3 g - \tau_3 \\ m_1 a = \tau_3 - \tau_2 \\ m_2 a = -m_2 g + \tau_2 \end{cases} \quad (9)$$

Secondo l'esercizio $m_1 = m_2$ e $m_3 = 2m_2$. Chiamo $m = m_1$ e quindi posso scrivere

$$\begin{cases} 2ma = 2mg - \tau_3 \\ ma = \tau_3 - \tau_2 \\ ma = -mg + \tau_2 \end{cases} \quad (10)$$

L'ultima equazione diventa

$$\tau_2 = ma + mg = m(a + g) \quad (11)$$

e quindi

$$\begin{cases} 2ma = 2mg - \tau_3 \\ ma = \tau_3 - \tau_2 \\ \tau_2 = ma + mg = m(a + g) \end{cases} \quad (12)$$

Sostituendo l'espressione di τ_2 nell'ultima equazione, la penultima equazione la si può scrivere

$$\tau_3 = ma + m(a + g) = m(2a + g) \quad (13)$$

Che, sostituita nella prima, si ha

$$\begin{aligned} 2mg - m(2a + g) &= 2ma \\ 2g - 2a - g &= 2a \end{aligned} \quad (14)$$

Ossia

$$a = g/4 = 9.81m/s^2/4 = 2.45m/s^2 \quad (15)$$

3 Pag 279 n 62

L'equazione del momento della forza é

$$M = I\dot{\omega} \quad (16)$$

Il momento d'inerzia I di una asta omogenea di lunghezza l , rispetto ad un asse passante per il centro di massa é

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2 \quad (17)$$

L'asta é vincolata a muoversi attorno ad una sua estremitá , distante $l/2$ dal centro di massa, il momento d'inerzia é

$$I = I_{cm} + mr^2 \quad (18)$$

ove r é la distanza dell'asse di rotazione rispetto al centro di massa e vale la metà della lunghezza dell'asta stessa $l/2$. Quindi il momento d'inerzia vale

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 \quad (19)$$

La forza che agisce sul corpo é la forza peso che, ancora una volta, si applica al centro di massa. Nell'istante iniziale forza e braccio sono tra loro perpendicolari e il momento M é

$$M = mgl/2 \quad (20)$$

Quindi, mettendo insieme i risultati ottenuti si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}mL^2\dot{\omega} &= mg\frac{L}{2} \\ \frac{1}{3}L\dot{\omega} &= g\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Da cui si deduce che

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2L} \quad (22)$$

Questo é l'accelerazione dell'asta quando si trova disposta orizzontalmente, nell'istante in cui viene lasciata ruotare attorno al perno. L'accelerazione nell'istante in cui forma un angolo di 30 gradi con l'orizzontale va fatta tenendo conto che il momento é un prodotto vettoriale tra forza e braccio e, in quanto tale, il suo modulo é $Fb \sin \alpha$, ove α é l'angolo che i due vettori, forza e braccio formano tra loro. Nel caso specifico $\pi/3$. L'accelerazione angolare, quindi, é

$$\dot{\omega} = \frac{3g \sin \pi/3}{2L} = \frac{3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 0.5 \text{ m}} = 25.5 \text{ rad/s}^2 \quad (23)$$