ȘIRURI AUDIOACTIVE

Mureanu Răzvan-Anton
Ștefan Patrichi

1 Introducere

Șirul *look-and-say* (*privește-și-spune*) a fost studiat de John Conway în ?. El pornește de la o înșiruire arbitrară de cifre (termenul zero, sau *seed*-ul), iar apoi, pentru a obține termenii ulteriori, se descrie configurația cifrelor termenului precedent. De exemplu, 3333555 este alcătuit din patru cifre de 3 și trei cifre de 5, deci următorul termen va fi 4335. Similar, următorii termeni vor fi:

$$142315,\ 111412131115,\ 3114111211133115 \text{ etc.}$$

2 Cuvinte, monoidul liber

Definiția 2.1. Fie I o mulțime. Vom numi *cuvânt de elemente* din I un sistem (o înșiruire) finit ordonat de elemente din I, $a_1a_2\dots a_k$. Vom spune că $\alpha = a_1a_2\dots a_k$ și $\beta = b_1b_2\dots b_l$, două cuvinte de elemente din I, sunt egale dacă și numai dacă $k = l$ și $a_i = b_i$ pentru $i = \overline{1,k}$. Notăm cu $L(I)$ mulțimea cuvintelor cu elemente din I.

Notăm cuvântul $\underbrace{aa\dots a}_{n \text{ ori}}$ cu a^n. Având în vedere definiția șirului *look-and-say*, nu vor apărea secvențe de forma $a^m a^n$, ci numai a^{m+n}. Înzestrăm mulțimea $L(I)$ cu operația de *concatenare*, lege de compoziție notată muliplicativ, definită prin $\alpha\beta = a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_l$.

Vom opera în continuare pe monoidul liber $L(\Sigma)$ generat de mulțimea Σ a cifrelor în baza 10. Notăm cu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir *look-and-say* și cu $\alpha : L(\Sigma) \to L(\Sigma)$ funcția de tranziție de la un termen la următorul. Astfel, avem:

$$s_{n+k} = \alpha^k(s_n)$$

pentru $n,\ k > 0$, unde f^m este iterata de m ori a funcției f.

Observăm că imaginea funcției α este mulțimea cuvintelor de lungime pară din $L(\Sigma)$: pentru prima incluziune, cifrele unui termen vin în perechi de forma ax, adică x de a ori (pe scurt, x^a). Reciproc, oricărui cuvânt de lungime pară îi corespunde un (unic) predecesor: de exemplu, predecesorul lui $axbycz$ este $x^ay^bz^c$. Similar se arată că restricția lui α la cuvinte de lungime pară este inversabilă. Mai notăm că, pentru $n \geq 1$, avem:

$$s_n = \alpha(s_{n-1}) \in \operatorname{Im}\alpha,$$

deci toți termenii șirului începând de la rangul 1 au lungime pară. De aceea, vom nota tot cu α această restricție bijectivă.

Propoziția 2.2. Dacă $s_0 = 1$, atunci niciun termen al șirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu va conține cifre mai mari decât 3.

Demonstrație. Demonstrăm afirmația prin inducție. Presupunem că s_n nu conține cifre mai mari decât 3 și că s_{n+1} conține o cifră $d \geq 4$. În cadrul unei perechi de forma ax din s_{n+1}, cifra de pe poziția x aparține exclusiv lui s_n, deci este cel mult 3. Perechea devine atunci dx, care provine din x^d, secvență care conține cel puțin două perechi xx. Dar $xxxx$ provine din $x^x x^x$, care nu este o secvență corectă dintr-un șir *look-and-say* (ea se scrie corect x^{2x}). $\square$