Șiruri audioactive

Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>
Ștefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

AI + α + Z = Matematica noilor generații
8 noiembrie 2025

Care este următorul termen?

$$1$$
$$11$$
$$21$$
$$1211$$
$$111221$$
$$312211$$
$$13112221$$
$$1113213211$$

Care este următorul termen?

111221

312211

Care este următorul termen?

111221

31 22 11

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
  $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
  $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \ldots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
  $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$, $\beta = b_1 b_2 \dots b_l$
  Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
  $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$, $\beta = b_1 b_2 \dots b_l$
  Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$
- $(\Sigma^*, \cdot) =$ **monoidul liber** generat de mulțimea Σ

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa\ldots a}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa\ldots a}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa\ldots a}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \to 312211$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa\ldots a}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \to 312211$
- Exemplu: $3333333333 = 3^{10}$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa\ldots a}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{bb\ldots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \to 312211$
- Exemplu: $3333333333 = 3^{10} \to 103$

Terminologie

Definiție.

Un șir care evoluează după regula descrisă anterior se numește *șir look-and-say* (*privește-și-spune*).

Definiție.

Primul termen al unui șir look-and-say se numește *origine*.

Terminologie

Definiție.

Un șir look-and-say a cărui origine nu conține nicio înșiruire de mai mult de 9 cifre identice adiacente se numește *șir compact*.

Definiție.

Notăm cu $\mathcal{C} \subset \Sigma^*$ mulțimea tuturor cuvintelor care apar în șiruri compacte, excluzând originea.

Definiție.

Un șir look-and-say a cărui origine:

(a) nu conține nicio cifră mai mare decât 3 și

(b) nu conține nicio înșiruire de mai mult de 3 cifre identice adiacente

se numește *șir armonic*.

Definiție.

Notăm cu $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \Sigma^*$ mulțimea tuturor cuvintelor care apar în șiruri armonice, excluzând originea.

Funcția de tranziție

- $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\boxed{f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k}$

- $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\boxed{f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \ldots n_k a_k}$
- Condiție: $a_i \neq a_{i+1}$ $\left(a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}\right)$

Funcția de tranziție

- $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\boxed{f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k}$
- Condiție: $a_i \neq a_{i+1}$ $\left(a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}\right)$
- $f(777777) = 67$, nu 2747 sau 5717.

Proprietăți de bază

Propoziție.

Mulțimea $\mathcal{C}$ coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1 a_2 \ldots a_k$ pentru care:

(a) $2 \mid k$,

(b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$.

Proprietăți de bază

Propoziție.

Mulțimea $\mathcal{C}$ coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1 a_2 \ldots a_k$ pentru care:

(a) $2 \mid k$,

(b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$.

Demonstrație.

Pentru incluziunea $\supset$, fie $a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_k b_k$ un cuvânt astfel încât $b_i \neq b_{i+1}$. Atunci putem să-i construim inversul, $b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_k^{a_k}$. $\square$

Proprietăți de bază

Propoziție.

Mulțimea $\mathcal{C}$ coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1a_2\dots a_k$ pentru care:

(a) $2 \mid k$,

(b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$.

Demonstrație.

Pentru incluziunea $\supset$, fie $a_1b_1a_2b_2\dots a_kb_k$ un cuvânt astfel încât $b_i \neq b_{i+1}$. Atunci putem să-i construim inversul, $b_1^{a_1}b_2^{a_2}\dots b_k^{a_k}$. $\square$

Observație.

Am demonstrat că funcția f este bijectivă!

Propoziție.

Mulțimea $\mathcal{A}$ coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1 a_2 \ldots a_k$ pentru care:

(a) $2 \mid k$,

(b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$ și

(c) $a_i \in \{1, 2, 3\}$.

Proprietăți de bază – Descompunerea

$$13112221$$

$$\downarrow$$

$$1113213211$$

$$\downarrow$$

$$31131211131221$$

$$\downarrow$$

$$13211311123113112211$$

Proprietăți de bază – Descompunerea

$$
\begin{tikzcd}
& 13112221 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
11132 \arrow[d] & & 13211 \arrow[d] \\
311312 \arrow[d] & & 11131221 \arrow[d] \\
1321131112 & & 3113112211
\end{tikzcd}
$$

Proprietăți de bază – Descompunerea

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$

Proprietăți de bază – Descompunerea

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui $f^n(L) \neq$ prima cifră a lui $f^n(R)$, pentru $\forall n \geq n_0$.

Rezultate:

- Modul în care se repetă începutul și sfârșitul numerelor dintr-un șir look-and-say

John Conway (1937-2020)

Istoric

Rezultate:

- Condiții necesare și suficiente pentru descompunere

John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Teoremă: **Există 92 de *elemente atomice* astfel încât orice origine se descompune eventual într-o succesiune de elemente atomice**

John Conway (1937-2020)

Istoric

Rezultate:

- Rata asimptotică de creștere a lungimii numerelor dintr-un șir look-and-say

John Conway (1937-2020)

Vă mulțumim!