

Şiruri audioactive

Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>
Ştefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

AI + α + Z = Matematica noilor generații
8 noiembrie 2025

Care este următorul termen?

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

Care este următorul termen?

111221

312211

Care este următorul termen?

111221

31 22 11

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$
Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$
- Cuvânt vid: ε cu $|\varepsilon| = 0$ și $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha \forall \alpha$
- Multimea cuvintelor:
$$\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$$
- (Σ^*, \cdot) = **monoidul liber** generat de multimea Σ

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$
- Exemplu: $3333333333 = 3^{11} \rightarrow 113$

Terminologie

Definiție.

Un sir care evoluează după regula descrisă anterior se numește *sir look-and-say* (*priveste-si-spune*).

Definiție.

Primul termen al unui sir look-and-say se numește *origine*.

Terminologie

Definiție.

Un sir look-and-say a cărui origine nu conține nicio înșiruire de mai mult de 9 cifre identice adiacente se numește *sir compact*.

Definiție.

Notăm cu $\mathcal{C} \subset \Sigma^*$ mulțimea tuturor cuvintelor care apar în șiruri compacte, excludând originea.

Terminologie

Definiție.

Un sir look-and-say a cărui origine:

- (a) nu contine nicio cifră mai mare decât 3 și
- (b) nu contine nicio însiruire de mai mult de 3 cifre identice adiacente

se numește *sir armonic*.

Definiție.

Notăm cu $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \Sigma^*$ mulțimea tuturor cuvintelor care apar în siruri armonice, excludând originea.

Funcția de tranziție

- $LS : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $LS(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = n_1a_1n_2a_2\dots n_ka_k$

Funcția de tranziție

- $LS : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $LS(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = n_1a_1n_2a_2\dots n_ka_k$
- Condiție: $a_i \neq a_{i+1}$ ($a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$)
- $LS(777777) = 67$, nu 2747 sau 5717.

Proprietăți de bază

Propoziție.

Mulțimea \mathcal{C} coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1a_2 \dots a_k$ pentru care:

- (a) $2 \mid k$,
- (b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$.

Proprietăți de bază

Propoziție.

Mulțimea \mathcal{C} coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1a_2\dots a_k$ pentru care:

- (a) $2 \mid k$,
- (b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$.

Demonstrație.

Pentru incluziunea \supseteq , fie $a_1b_1a_2b_2\dots a_kb_k$ un cuvânt astfel încât $b_i \neq b_{i+1}$. Atunci putem să-i construim inversul, $b_1^{a_1}b_2^{a_2}\dots b_k^{a_k}$. □

Observație.

Am demonstrat că funcția f este bijectivă!

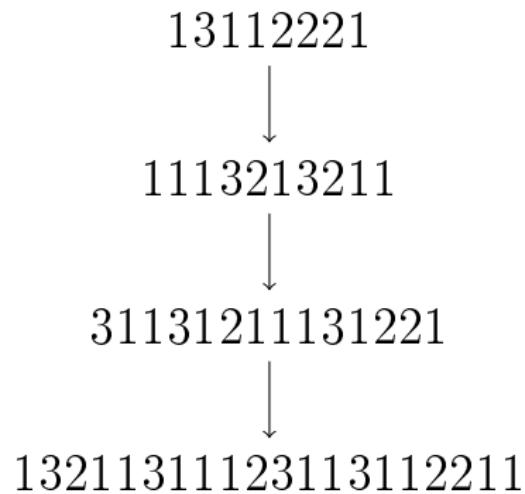
Proprietăți de bază

Propoziție.

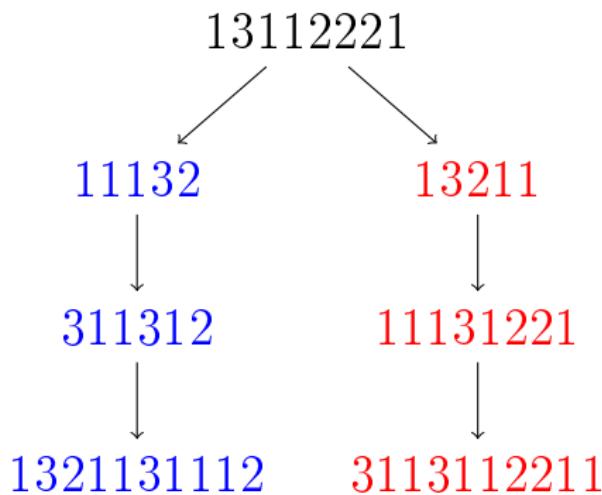
Mulțimea \mathcal{A} coincide cu mulțimea cuvintelor $a_1a_2 \dots a_k$ pentru care:

- (a) $2 \mid k$,
- (b) $a_{2i} \neq a_{2i+2}$ și
- (c) $a_i \in \{1, 2, 3\}$.

Proprietăți de bază – Descompunerea



Proprietăți de bază – Descompunerea



Proprietăți de bază – Descompunerea

- $LS^n(S \cdot D) = LS^n(S) \cdot LS^n(D)$
- Ultima cifră a lui $LS^n(S) \neq$ prima cifră a lui $LS^n(D)$, pentru $\forall n \geq n_0$.

Proprietăți de bază – Descompunerea

- $LS^n(S \cdot D) = LS^n(S) \cdot LS^n(D)$
- Ultima cifră a lui $LS^n(S) \neq$ prima cifră a lui $LS^n(D)$, pentru $\forall n \geq n_0$.
- Dacă y se descompune în x_1, x_2, \dots, x_k , atunci:

$$LS^n(y) = \prod_{i=1}^k LS^n(x_i)$$

$$|LS^n(y)| = \sum_{i=1}^k |LS^n(x_i)|$$

Rezultate:

- Modul în care se repetă începutul și sfârșitul termenilor dintr-un sir look-and-say



John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Condiții necesare și suficiente pentru descompunere



John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Teoremă: Există 92 de *elemente atomice* astfel încât orice origine se descompune eventual într-o succesiune de elemente atomice



John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Rata asimptotică de creștere a lungimii cuvintelor dintr-un sir look-and-say,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|}$$



John Conway (1937-2020)

Metodă de calcul pentru λ

- $e_i =$ cele d elemente atomice
- $t_{ij} =$ de câte ori apare e_i în regula de evoluție a lui e_j
- $f_i =$ de câte ori apare e_i în descompunerea originii sirului

#	Subsequence	Length	Evolves Into
1	1112	4	(63)
2	1112133	7	(64)(62)
3	1112133221112	12	(65)
4	1112133221113	12	(66)
5	1113	4	(68)
6	11131	5	(69)
7	1113112221112	12	(84)(55)
8	111312	6	(70)
9	11131221	8	(71)
10	11131221112	10	(76)
11	11131221113	10	(77)
12	111312211131112	14	(82)
13	1113122113112	12	(78)
14	11131221131211	14	(79)
15	111312211312113211	18	(80)
16	11131221131211322111332113221122112133221112	42	(81)(29)(91)
17	11131221131211322111332113221122112133221113	42	(81)(29)(90)
18	11131221131211322113322112	26	(81)(30)
19	11131221133112	14	(75)(29)(92)
20	11131221133221113111221131221	28	(75)(32)
21	11131221222112	14	(72)
22	11131221222111211123222112	24	(73)
23	11131221222111211123222113	24	(74)
24	11132	5	(83)
25	1113222	7	(86)
26	1113222112	10	(87)
27	1113222113	10	(88)
28	11133112	8	(89)(92)

Fragment din *Tabelul periodic* al celor $d = 92$ elemente

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$|s_{n_0+1}| = \sum_{i=1}^d (\text{nr. apariții } e_i \text{ în } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i|$$

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$\begin{aligned}|s_{n_0+1}| &= \sum_{i=1}^d (\text{nr. aparitii } e_i \text{ in } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i| \\&= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d t_{ij} f_j \right) \cdot |e_i|\end{aligned}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$\begin{aligned}|s_{n_0+1}| &= \sum_{i=1}^d (\text{nr. aparitii } e_i \text{ in } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i| \\&= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^{\textcolor{red}{d}} t_{ij} f_j \right) \cdot |e_i|\end{aligned}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$\begin{aligned}|s_{n_0+1}| &= \sum_{i=1}^d (\text{nr. apariții } e_i \text{ în } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i| \\&= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d t_{ij} f_j \right) \cdot |e_i|\end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1d} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{d1} & t_{d2} & \cdots & t_{dd} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ \vdots \\ |e_d| \end{pmatrix}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$\begin{aligned}|s_{n_0+1}| &= \sum_{i=1}^d (\text{nr. apariții } e_i \text{ în } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i| \\ &= (\mathbf{Tf}) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l}^\top (\mathbf{Tf})\end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1d} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{d1} & t_{d2} & \cdots & t_{dd} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ \vdots \\ |e_d| \end{pmatrix}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Fie n_0 astfel încât $LS^{n_0}(s_0) = s_{n_0}$ se descompune în elemente atomice.

$$\begin{aligned}|s_{n_0+1}| &= \sum_{i=1}^d (\text{nr. apariții } e_i \text{ în } LS(s_{n_0})) \cdot |e_i| \\ &= (\mathbf{Tf}) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l}^\top (\mathbf{Tf})\end{aligned}$$

- Analog,

$$|s_{n_0+k}| = (\mathbf{T}^k \mathbf{f}) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l}^\top (\mathbf{T}^k \mathbf{f})$$

Metodă de calcul pentru λ

- λ_i, \mathbf{v}_i = valori/vectori proprii ai matricei \mathbf{T}
- λ_p, \mathbf{v}_p = valoare/vector propriu Perron a matricei \mathbf{T}

Metodă de calcul pentru λ

- λ_i, \mathbf{v}_i = valori/vectori proprii ai matricei \mathbf{T}
- λ_p, \mathbf{v}_p = valoare/vector propriu Perron a matricei \mathbf{T}
- Pentru simplitate, $n_0 = 0$.

Metodă de calcul pentru λ

- λ_i, \mathbf{v}_i = valori/vectori proprii ai matricei \mathbf{T}
- λ_p, \mathbf{v}_p = valoare/vector propriu Perron a matricei \mathbf{T}
- Pentru simplitate, $n_0 = 0$.
- Când \mathbf{T} e diagonalizabilă,

$$\frac{1}{\lambda^n} \mathbf{T}^n \mathbf{f} = \frac{1}{\lambda^n} \mathbf{T}^n \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Metodă de calcul pentru λ

- λ_i, \mathbf{v}_i = valori/vectori proprii ai matricei \mathbf{T}
- λ_p, \mathbf{v}_p = valoare/vector propriu Perron a matricei \mathbf{T}
- Pentru simplitate, $n_0 = 0$.
- Când \mathbf{T} e diagonalizabilă,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^n} \mathbf{T}^n \mathbf{f} &= \frac{1}{\lambda^n} \mathbf{T}^n \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^d \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^n \mathbf{v}_i \rightarrow \alpha_p \mathbf{v}_p\end{aligned}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Acum,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p \frac{\frac{1}{\lambda_p^{n+1}} \mathbf{T}^{n+1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}}{\frac{1}{\lambda_p^n} \mathbf{T}^n \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Acum,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p \frac{\frac{1}{\lambda_p^{n+1}} \mathbf{T}^{n+1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}}{\frac{1}{\lambda_p^n} \mathbf{T}^n \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}}$$

Metodă de calcul pentru λ

- Acum,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p \frac{\frac{1}{\lambda_p^{n+1}} \mathbf{T}^{n+1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}}{\frac{1}{\lambda_p^n} \mathbf{T}^n \mathbf{f} \cdot \mathbf{l}} \\ &= \lambda_p \frac{\alpha_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{l}}{\alpha_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{l}} \\ &= \lambda_p \approx 1.303577269034\dots\end{aligned}$$

Variantiuni de siruri look-and-say

Varianții de siruri look-and-say

- LS cu nr. de aparitii postfixe (LS_{post})

$$LS_{\text{post}}(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = a_1n_1a_2n_2\dots a_kn_k$$

- LS în baza 2 (LS_{b2})
- LS cu cifre romane (LS_{roman})
- LS cu suprimarea cifrelor singure (LS_{sng})

$$LS_{\text{sng}}(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = m_1a_1m_2a_2\dots m_ka_k,$$

unde:

$$m_i = \begin{cases} \varepsilon, & n_i = 1 \\ n_i, & n_i \geq 2 \end{cases}$$

Probleme de investigat

- Elemente atomice
- Puncte fixe (de ex. ε și 22 pentru LS -ul obișnuit)
- Rata asimptotică de creștere a lungimii cuvintelor (λ)
- Stabilizarea (sirul (s_n) constant de la un rang încolo)
- Alte proprietăți specifice (regularități/ciclicități)

LS_{post}

$LS : 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, \dots$

$LS_{\text{post}} : 1, 11, 12, 1121, 122111, 112213, 12221131 \dots$

LS_{post}

$LS : 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, \dots$

$LS_{\text{post}} : 1, 11, 12, 1121, 122111, 112213, 12221131 \dots$

Teoremă.

$LS_{\text{post}}^n(s_0) = R(LS^n(s_0))$, unde $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ este operatorul de *răsturnare* a cuvintelor.

LS_{post}

lată o demonstrație scurtă și curată.

Notăm:

- L = operatorul look-and-say **clasic** (numărul de apariții urmat de cifra citită).
- L_{post} = operatorul look-and-say cu numărul de apariții **postpus** (cifra citită urmată de număr).
- R = operatorul care răstoarnă (oglindește) un sir de cifre.
- $s_{n+1} = L(s_n)$ și $s'_{n+1} = L_{\text{post}}(s'_n)$, cu $s_0 = s'_0 = 1$.

Lemă-cheie

Pentru orice sir x format din cifre, avem

$$L_{\text{post}}(x) = R(L(R(x))).$$

Dovadă a lemei. Scriem x ca alternanță de „run-uri” de aceeași cifră:

$$x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}, \quad a_i \neq a_{i+1}.$$

Atunci

$$L(x) = k_1 a_1 k_2 a_2 \cdots k_m a_m.$$

Pe de altă parte, $R(x) = a_m^{k_m} \cdots a_1^{k_1}$, deci

$$L(R(x)) = k_m a_m \cdots k_1 a_1,$$

iar răsturnând din nou,

$$R(L(R(x))) = a_1 k_1 \cdots a_m k_m = L_{\text{post}}(x).$$

Lema e dovedită. \square

LS_{post}

Inducție

Vrem să arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$s'_n = R(s_n).$$

- **Baza:** $n = 0$. Avem $s'_0 = 1 = R(1) = R(s_0)$.
- **Pas inductiv:** Presupunem $s'_n = R(s_n)$. Atunci, folosind lema,

$$s'_{n+1} = L_{\text{post}}(s'_n) = L_{\text{post}}(R(s_n)) = R(L(R(R(s_n)))) = R(L(s_n)) = R(s_{n+1}).$$

Deci proprietatea se păstrează la pasul $n + 1$.

Prin inducție, $s'_n = R(s_n)$ pentru toate n .

(Mini-exemplu)

$s_0 = 1 \Rightarrow s_1 = L(1) = 11$, iar $s'_1 = L_{\text{post}}(1) = 11$; într-adevăr, $R(s_1) = R(11) = 11$.

Pentru $s_1 = 11$, $s_2 = L(11) = 21$; în varianta postpusă, $s'_2 = L_{\text{post}}(11) = 12$, iar $R(s_2) = R(21) = 12$.

Astfel, sirul cu numărul postpus este, la fiecare pas, răsturnatul sirului obișnuit. 



+ Ask anything

0



LS_{b2}

$LS_{b2} : 1, 11, 101, 111011, 11110101, 100110111011$

Thought for 1m 3s >

Nu există puncte fixe nenule pentru funcția „look-and-say” în baza 2.

De ce

Fie cuvântul w și prima lui rună b^r (cu $b \in \{0, 1\}$, $r \geq 1$). În $LS_{b2}(w)$ această rună este înlocuită cu $\text{bin}(r)$ b , care are lungime $\ell = \lfloor \log_2 r \rfloor + 1 + 1$.

Dacă w ar fi punct fix, atunci primele r simboluri din $LS_{b2}(w)$ ar trebui să fie tot b , deci trebuie să avem neapărat $\ell = r$. Singurele soluții ale

$$r = \lfloor \log_2 r \rfloor + 2 \text{ sunt } r \in \{3, 4\}.$$

- Pentru $r = 4$: $\text{bin}(4) b = 100 b$ nu poate fi egal cu $bbbb$. Contradicție.
- Pentru $r = 3$: $\text{bin}(3) b = 11 b$ este egal cu bbb doar dacă $b = 1$, deci prefixul lui w ar fi „111”.

Următoarea rună ar fi „0...”. Oricare ar fi lungimea ei s , pentru a menține punct fix trebuie din nou $s \in \{3, 4\}$, dar $\text{bin}(3) 0 = 110 \neq 000$ și $\text{bin}(4) 0 = 1000 \neq 0000$. Contradicție.

Prin urmare, niciun cuvânt binar nenul nu este fix. (Șirul vid nu este, în mod obișnuit, considerat termen valid.)



Demonstrează



Thought for 4m 56s >

Mai jos dau o demonstrație (scurtă, dar completă) a faptului că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \rho, \quad \rho \approx 1,465571,$$

unde ρ este unica rădăcină reală a ecuației $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

1) Definiție și o observație-cheie

Şirul „look-and-say” în baza 2” pornește de la un cuvânt binar (de pildă „1”) și transformă fiecare bloc maximal de 0-uri sau 1-uri de lungime k în

(scrierea lui k în binar) || (bitul blocului).

De exemplu: $1 \mapsto 11$ (un „1”), $11 \mapsto 101$ (doi „1”), $101 \mapsto 111011$ (un „1”, un „0”, un „1”), ş.a.m.d.

Lemă (lungimi de blocuri ≤ 3). Pentru toți $n \geq 2$, niciun b_n nu conține un bloc de patru (sau mai multe) zerouri ori de patru (sau mai multe) unu-uri.

Schită de dovedă. Scrierea în binar a unui $k \geq 4$ are cel puțin două biți, iar concatenarea cu bitul blocului introduce alternanțe ce „taie” blocurile lungi; prinț-o verificare pe cazuri (ce se propagă inductiv) se vede că nu poate apărea un bloc ≥ 4 . □

Rezultă că toate blocurile care apar în oricare b_n (pentru n suficient de mare) au lungimi doar din

1. i
2. ii
3. iii
4. iiⁱⁱⁱⁱ
5. i^{vii}i
6. ii^{vii}vii
7. iiⁱⁱⁱⁱviiii
8. vi^{vii}viiii
9. iv^{viiii}vivi
10. ii^{vii}vivi^{viiii}vii
11. iiⁱⁱⁱⁱvii^{viiii}vii^{viiii}viiii
12. vi^{viiii}vivi^{viiii}vii^{viiii}viiii

1. i
2. ii
3. iii
4. iiⁱⁱⁱⁱ
5. i^{vi}i
6. iⁱⁱvii
7. iⁱⁱⁱⁱviii
8. vii^{viiiiii}
9. i^{viiiiivivi}
10. iⁱⁱvivi^{viiiiiiii}
11. iⁱⁱⁱⁱvii^{viiiiiiiiiiiiii}
12. vii^{viiiiiiivivi}vii^{viiiiii}

1. i
5. ivi
9. iviiiiviii
13. iviiiivviiiviiiviiiviiivii
17. iviiiivviiiviiiviiivviivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiivii
21. iviiiivviiiviiiviviivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiv...
iviiiivviiiviiivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiivii...
25. iviiiivviiiviiivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiivii...
29. iviiiivviiiviiivviiviiiviiiviiivviivviiviiiviiiviiivviiv...
iviiiivviiiviiivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiivii...
33. iviiiivviiiviiivviiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiviiiv...

Mai jos este o demonstrație „mecanică” (de tip automată finită) pentru formula:

$$k(n) = \#\text{blocuri comune la început între } s_n \text{ și } s_{n+4} = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \delta(n),$$

cu excepția micii faze de pornire $n \leq 11$, iar pentru $n \geq 12$ corecția $\delta(n)$ este periodică de perioadă 12:

$$\delta(n \bmod 12) = (0, 2, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Fie (s_n) un sir look-and-say cu cifre romane, cu $s_{n+1} = LS(s_n)$. De exemplu, pentru $s_0 = i$, sirul este: $i, ii, iii, iiiii, ivi, iiivii, iiiiiiviii, viiviiii, iviiiiivivi$ etc. Spunem că z se descompune în x și y și scriem $z = x.y$ dacă $LS^n(z) = LS^n(x) LS^n(y)$ pentru orice n natural. O mulțime A , finită, de cuvinte cu elemente din alfabetul $\Sigma = \{i, v\}$, se numește mulțime de elemente atomice dacă pentru orice valoare a lui s_0 există un număr natural n astfel încât $s_n = LS^n(s_0)$ se descompune în elemente din mulțimea A . Găsește mulțimea de elemente atomice a sirurilor look-and-say cu cifre romane.

Pe scurt: nu există puncte fixe nebanale. (Eventual, doar sirul vid, dacă îl permitem.)

De ce

Definim LS astfel: pentru fiecare bloc maximal a^k (aceeași literă română $a \in \{i, v, x, l, c, d, m\}$ repetată de k ori), îl înlocuim cu $R(k) a$, unde $R(k)$ este scrierea lui k în cifre romane (cu notația standard, inclusiv formele subtractive).

Presupune că $s \neq \varepsilon$ este un punct fix: $LS(s) = s$.

Fie prima rună din s egală cu a^k (cu $k \geq 1$). Atunci primul bloc produs de LS este tocmai $R(k) a$. Dar cum $s = LS(s)$, prefixul de lungime k al lui s este simultan:

- a^k (pentru că e prima rună a lui s),
- și $R(k) a$ (pentru că e primul bloc al lui $LS(s)$).

Rezultă

$$R(k) a = a^k \quad \Rightarrow \quad R(k) = a^{k-1}.$$

Deci reprezentarea romană a lui k ar trebui să fie o putere a aceleiași litere a , cu exact $k - 1$ caractere.

Dar asta e imposibil:

- Dacă $a = i$, atunci $R(k) \in \{i, ii, iii, iv, \dots\}$. Ca să fie $R(k) = i^{k-1}$, ar trebui $R(k)$ să fie format doar din i -uri; singurele cazuri sunt $k = 1, 2, 3$ cu $R(k) = i, ii, iii$, însă acestea au lungimi $1, 2, 3 \neq k - 1$.
- Dacă $a \in \{v, x, l, c, d, m\}$, singurele valori ale lui k pentru care $R(k)$ folosește doar litera a sunt $k \in \{5, 10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000\}$. În toate aceste cazuri $|R(k)| \in \{1, 2, 3\}$, deci nu poate fi $|R(k)| = k - 1$.

Contradicție. Așadar nu există sir nevid cu $LS(s) = s$.

LS_{sng}

LS_{sng} : 333221, 33221, 23221, 23221, 23221, ...

Notăm cu $R(w)$ lungimea maximă a unui bloc (run) de cifre egale din w .

Lemma 1 (contractia blocurilor lungi)

Pentru orice $r \geq 3$, dacă în w apare un bloc a^r (cu $a \in \Sigma$), atunci în $T(w)$ toate blocurile rezultate din acest bloc au lungime maximă $\leq A(r) + 1$, unde $A(r)$ este numărul maxim de cifre egale consecutive în $\text{repr}(r)$. În particular,

$$A(r) + 1 \leq \lfloor \log_{10} r \rfloor + 2 \leq r - 1 \quad (\text{pentru } r \geq 3).$$

Prin urmare, dacă $R(w) \geq 3$, atunci $R(T(w)) \leq R(w) - 1$.

Demonstrație. Blocul a^r devine $\text{repr}(r)$ a. Singurele blocuri de cifre egale din această imagine sunt (i) blocurile din interiorul $\text{repr}(r)$, a căror lungime maximă este $A(r)$, și (ii) eventual unirea ultimei cifre din $\text{repr}(r)$ cu a , ceea ce mai poate crește cu cel mult 1. Inegalitatea $A(r) + 1 \leq r - 1$ pentru $r \geq 3$ rezultă din $A(r) \leq \#\text{cifre}(r) = \lfloor \log_{10} r \rfloor + 1 \leq r - 2$. ■

Consecință. Aplicând Lemma 1 iterativ, după un număr finit de pași obținem un rang N cu

$$R(T^N(w)) \leq 2.$$

Lemma 2 (stabilizarea după ce toate blocurile au lungime ≤ 2)

Fie u un sir cu $R(u) \leq 2$. Atunci $R(T(u)) \leq 2$, iar toate blocurile de lungime 2 din $T(u)$ sunt exact „22”. Mai mult, $T(T(u)) = T(u)$; adică $T(u)$ este punct fix.

Vă mulțumim!