

Șiruri audioactive

Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>

Ștefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

$AI + \alpha + Z = \text{Matematica noilor generații}$

8 noiembrie 2025

Care este următorul termen?

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

Care este următorul termen?

111221

312211

Care este următorul termen?

111221
31 22 11

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$
Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$
Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$
- $(\Sigma^*, \cdot) = \textbf{monoidul liber}$ generat de mulțimea Σ

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notăție: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notatie: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notatie: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$

- $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, $f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k$

Funcția de tranziție

- $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, $f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k$
- Condiție: $a_i \neq a_{i+1}$ ($a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$)

Propoziție.

$$\text{Im } f = \{\beta \mid \beta \in \Sigma^*, |\beta| = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \stackrel{\text{not}}{=} (\Sigma^2)^*$$

Demonstrație.

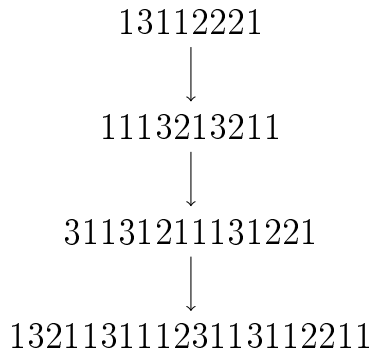
Pentru incluziunea \subset : Dacă $\alpha = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$, atunci $f(\alpha) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k$, deci $|f(\alpha)| = 2k$.

Pentru incluziunea \supset : Cuvântul $\beta = b_1 b_2 \dots b_{2k}$ are inversul (unic) $\alpha = b_2^{b_1} \dots b_{2k}^{b_{2k-1}}$. □

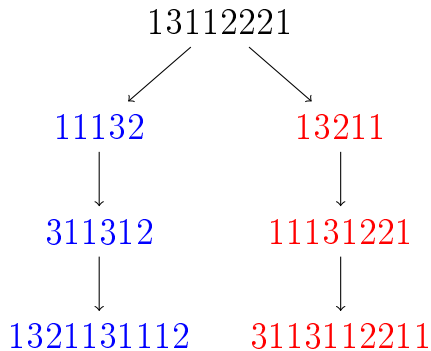
Observație.

$g : \Sigma^* \rightarrow (\Sigma^2)^*, g(x) = f(x) \Rightarrow g$ bijectivă!

Vom lucra cu funcția g .



Descompunerea



- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui $L_n \neq$ prima cifră a lui $R_n, \forall n \geq n_0$.

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui $L_n \neq$ prima cifră a lui $R_n, \forall n \geq n_0$.
- Notăție: $z = x.y$

Rezultate:



John Conway (1937-2020)

Despre ETF-uri

Ce este un ETF?

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzacționat pe piețele bursiere

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzacționat pe piețele bursiere
- Adesea urmăresc un indice bursier

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzacționat pe piețele bursiere
- Adesea urmăresc un indice bursier
- iShares Core S&P 500 ETF (IVV)

Avantaje ale ETF-urilor

- Diversitate \rightarrow Risc scăzut

- Diversitate → Risc scăzut
- Administrare pasivă, costuri administrative mici → Rată a cheltuielilor mică

- Diversitate → Risc scăzut
- Administrare pasivă, costuri administrative mici → Rată a cheltuielilor mică
- Lichiditate, eficiență

Cum funcționează aplicația?

Preluarea datelor

- Yahoo Finance (API – biblioteca `yfinance`)

- Yahoo Finance (API – biblioteca `yfinance`)
- Adaptare la diferite calendare bursiere prin interpolare (biblioteca `pandas`)

- Yahoo Finance (API – biblioteca `yfinance`)
- Adaptare la diferite calendare bursiere prin interpolare (biblioteca `pandas`)
- Trecere la euro

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .

- Rata rentabilității:

$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .
- Rata rentabilității:
$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$
- Ponderi (weights): $w(i, t) \in [0, 1]$ și $\sum_i w(i, t) = 1$ (prezise de rețeaua neuronală).

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .
- Rata rentabilității:
$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$
- Ponderi (weights): $w(i, t) \in [0, 1]$ și $\sum_i w(i, t) = 1$ (prezise de rețeaua neuronală).
- Portofoliul realizat: $R(t) = \sum_i w(i, t) \cdot r(i, t).$

Raportul Sharpe

- raportează performanța netă a portofoliului la riscul asumat
(\approx abaterea standard)

- raportează performanța netă a portofoliului la riscul asumat
(\approx abaterea standard)
- $$L = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sigma} = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[R^2(t)] - \mathbb{E}[R(t)]^2}}$$

- raportează performanța netă a portofoliului la riscul asumat
(\approx abaterea standard)
- $$L = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sigma} = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[R^2(t)] - \mathbb{E}[R(t)]^2}} \cdot \sqrt{252}$$

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).
- Nu satisfac neapărat $w(i, t) \geq 0$ și $\sum_i w(i, t) = 1$!

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).
- Nu satisfac neapărat $w(i, t) \geq 0$ și $\sum_i w(i, t) = 1$!
- $$\text{softmax}(w(i, t)) = \frac{e^{w(i, t)}}{\sum_{j=1}^n e^{w(j, t)}}.$$

Rețeaua neuronală

- 3 straturi:

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)
- Window-uri de câte 200 zile

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)
- Window-uri de câte 200 zile
- 80% train, 20% test

- API scris în biblioteca `fastapi`

- API scris în biblioteca `fastapi`
- `index.html/process`

- API scris în biblioteca `fastapi`
- `index.html/process`
- `index.html/get_etfs`

- API scris în biblioteca `fastapi`
- `index.html/process`
- `index.html/get_etfs`
- `index.html/get_etf_history?etf=EPOL`

- Grafice interactive în plotly

Limitări, posibilități de dezvoltare

- Anualizarea raportului Sharpe

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă
- Dezvoltare UI (ex. dropdown)

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă
- Dezvoltare UI (ex. dropdown)
- Formulă alternativă pentru portofoliul realizat (volatilitate!)

$$R(t) = \sum_i \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-1)} w(i, t-1) \cdot r(i, t) - C \cdot$$

$$\sum_i \left| \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-1)} w(i, t-1) - \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-2)} w(i, t-2) \right|$$

Vă mulțumim!