

Şiruri audioactive

Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>
Ştefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

AI + α + Z = Matematica noilor generații
8 noiembrie 2025

Care este următorul termen?

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

Care este următorul termen?

111221

312211

Care este următorul termen?

111221

31 22 11

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Multimea cuvintelor:
$$\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Multimea cuvintelor:
$$\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Multimea cuvintelor:
$$\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$
Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$

Monoid liber

- Alfabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ cu $a_i \in \Sigma$
- Multimea cuvintelor:
$$\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}^*\}$$
- Lungimea cuvântului: $|\alpha| = k$
- Concatenarea: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$
Atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$
- (Σ^*, \cdot) = **monoidul liber** generat de multimea Σ

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$

Convenții pentru notația multiplicativă

- Notație: $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu: $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$

Funcția de tranziție

- $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$,
$$f(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = n_1a_1n_2a_2\dots n_ka_k$$

Funcția de tranziție

- $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$,
$$f(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}) = n_1a_1n_2a_2\dots n_ka_k$$
- Condiție: $a_i \neq a_{i+1}$ ($a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$)

Proprietăți de bază

Propozitie.

$$\text{Im } f = \{\beta \mid \beta \in \Sigma^*, |\beta| = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \stackrel{\text{not}}{=} (\Sigma^2)^*$$

Demonstrație.

Pentru incluziunea \subset : Dacă $\alpha = a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}$, atunci $f(\alpha) = n_1a_1n_2a_2\dots n_ka_k$, deci $|f(\alpha)| = 2k$.

Pentru incluziunea \supset : Cuvântul $\beta = b_1b_2\dots b_{2k}$ are inversul (unic) $\alpha = b_2^{b_1}\dots b_{2k}^{b_{2k-1}}$. □

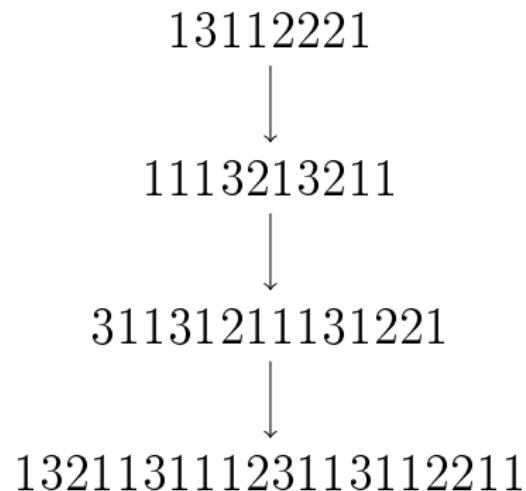
Proprietăți de bază

Observație.

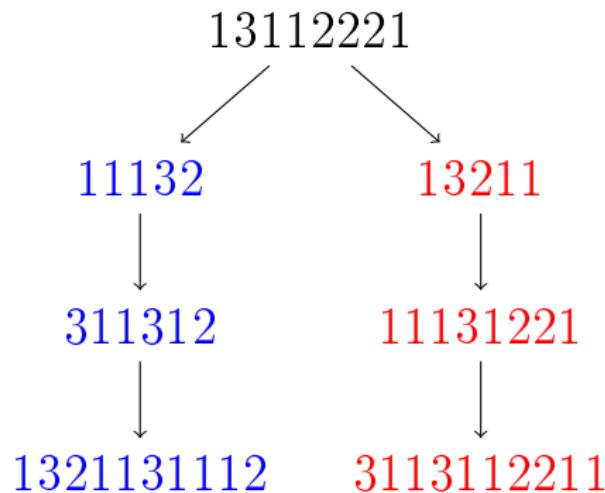
$g : \Sigma^* \rightarrow (\Sigma^2)^*$, $g(x) = f(x) \Rightarrow g$ bijectivă!

Vom lucra cu funcția g .

Descompunerea



Descompunerea



Descompunerea

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$

Descompunerea

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui $L_n \neq$ prima cifră a lui R_n , $\forall n \geq n_0$.

Descompunerea

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui $L_n \neq$ prima cifră a lui R_n , $\forall n \geq n_0$.
- Notație: $z = x.y$

Rezultate:



John Conway (1937-2020)

Despre ETF-uri

Ce este un ETF?

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzactionat pe piețele bursiere

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzactionat pe piețele bursiere
- Adesea urmăresc un indice bursier

Ce este un ETF?

- *Exchange-traded fund*
- Fond de investiții listat și tranzactionat pe piețele bursiere
- Adesea urmăresc un indice bursier
- iShares Core S&P 500 ETF (IVV)

Avantaje ale ETF-urilor

Avantaje ale ETF-urilor

- Diversitate → Risc scăzut

Avantaje ale ETF-urilor

- Diversitate → Risc scăzut
- Administrare pasivă, costuri administrative mici → Rată a cheltuielilor mică

Avantaje ale ETF-urilor

- Diversitate → Risc scăzut
- Administrare pasivă, costuri administrative mici → Rată a cheltuielilor mică
- Lichiditate, eficientă

Cum funcționează aplicația?

Preluarea datelor

Preluarea datelor

- Yahoo Finance (API – biblioteca yfinance)

Preluarea datelor

- Yahoo Finance (API – biblioteca `yfinance`)
- Adaptare la diferite calendare bursiere prin interpolare (biblioteca `pandas`)

Preluarea datelor

- Yahoo Finance (API – biblioteca `yfinance`)
- Adaptare la diferite calendare bursiere prin interpolare (biblioteca `pandas`)
- Trecere la euro

Măsurarea performanței unui portofoliu

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .
- Rata rentabilității:

$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .

- Rata rentabilității:

$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$

- Ponderi (weights): $w(i, t) \in [0, 1]$ și $\sum_i w(i, t) = 1$ (prezise de rețeaua neuronală).

Măsurarea performanței unui portofoliu

- $p(i, t)$ = prețul de închidere al activului i la timpul (ziua) t .
- Rata rentabilității:
$$r(i, t) = \frac{p(i, t) - p(i, t - 1)}{p(i, t - 1)} = \frac{p(i, t)}{p(i, t - 1)} - 1.$$
- Ponderi (weights): $w(i, t) \in [0, 1]$ și $\sum_i w(i, t) = 1$ (prezise de rețeaua neuronală).
- Portofoliul realizat: $R(t) = \sum_i w(i, t) \cdot r(i, t)$.

Raportul Sharpe

Raportul Sharpe

- raportează performanță netă a portofoliului la riscul asumat
(\approx abaterea standard)

Raportul Sharpe

- raportează performanța netă a portofoliului la riscul asumat
 $(\approx$ abaterea standard)
- $$L = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sigma} = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[R^2(t)] - \mathbb{E}[R(t)]^2}}$$

Raportul Sharpe

- raportează performanța netă a portofoliului la riscul asumat
 $(\approx$ abaterea standard)
- $L = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sigma} = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[R^2(t)] - \mathbb{E}[R(t)]^2}} \cdot \sqrt{252}$

Softmax

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).
- Nu satisfac neapărat $w(i, t) \geq 0$ și $\sum_i w(i, t) = 1$!

Softmax

- Modelul returnează ponderile care maximizează raportul Sharpe (L).
- Nu satisfac neapărat $w(i, t) \geq 0$ și $\sum_i w(i, t) = 1$!
- $\text{softmax}(w(i, t)) = \frac{e^{w(i,t)}}{\sum\limits_{j=1}^n e^{w(j,t)}}.$

Rețeaua neuronală

Rețeaua neuronală

- 3 straturi:

Rețea neuronală

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)

Rețea neuronală

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten

Rețea neuronală

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)

Rețea neuronală

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)
- Window-uri de câte 200 zile

Rețea neuronală

- 3 straturi:
 - LSTM (32 neuroni, dropout: 0,2)
 - Flatten
 - Dense (Softmax)
- Window-uri de câte 200 zile
- 80% train, 20% test

Comunicare frontend – backend

- API scris în biblioteca `fastapi`

Comunicare frontend – backend

- API scris în biblioteca fastapi
- index.html/process

Comunicare frontend – backend

- API scris în biblioteca fastapi
- index.html/process
- index.html/get_etfs

Comunicare frontend – backend

- API scris în biblioteca fastapi
- index.html/process
- index.html/get_etfs
- index.html/get_etf_history?etf=EPOL

Pagina web

- Grafice interactive în plotly

Limitări, posibilități de dezvoltare

Limitări, posibilități de dezvoltare

- Anualizarea raportului Sharpe

Limitări, posibilități de dezvoltare

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă

Limitări, posibilități de dezvoltare

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă
- Dezvoltare UI (ex. dropdown)

Limitări, posibilități de dezvoltare

- Anualizarea raportului Sharpe
- Mai multe ETF-uri listate la aceeași bursă
- Dezvoltare UI (ex. dropdown)
- Formulă alternativă pentru portofoliul realizat (volatilitate!)

$$R(t) = \sum_i \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-1)} w(i, t-1) \cdot r(i, t) - C \cdot \sum_i \left| \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-1)} w(i, t-1) - \frac{\sigma_{tgt}}{\sigma(i, t-2)} w(i, t-2) \right|$$

Vă mulțumim!