

# Șiruri audioactive

Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>

Ștefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

$AI + \alpha + Z = \text{Matematica noilor generații}$

8 noiembrie 2025

# Care este următorul termen?

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

Care este următorul termen?

111221

312211

Care este următorul termen?

111221  
31 22 11

- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$  cu  $a_i \in \Sigma$

- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$  cu  $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:  
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$

- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$  cu  $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:  
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului:  $|\alpha| = k$



- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$  cu  $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:  
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului:  $|\alpha| = k$
- Concatenarea:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$   
Atunci  $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$

- Alfabet:  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Cuvânt:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$  cu  $a_i \in \Sigma$
- Mulțimea cuvintelor:  
 $\Sigma^* = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$
- Lungimea cuvântului:  $|\alpha| = k$
- Concatenarea:  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k, \beta = b_1 b_2 \dots b_l$   
Atunci  $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$
- $(\Sigma^*, \cdot) = \textbf{monoidul liber}$  generat de mulțimea  $\Sigma$

# Convenții pentru notația multiplicativă

- Notăție:  $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$

# Convenții pentru notația multiplicativă

- Notatie:  $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$

# Convenții pentru notația multiplicativă

- Notăție:  $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu:  $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$

# Convenții pentru notația multiplicativă

- Notatie:  $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu:  $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$
- Exemplu:  $3333333333 = 3^{10}$

# Convenții pentru notația multiplicativă

- Notăție:  $\underbrace{aa \dots a}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{bb \dots b}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^m b^n$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- Exemplu:  $111221 = 1^3 2^2 1^1 \rightarrow 312211$
- Exemplu:  $3333333333 = 3^{10} \rightarrow 103$

## Definiție.

Un șir care evoluează după regula descrisă anterior se numește *șir look-and-say* (*privește-și-spune*).

## Definiție.

Primul termen al unui șir look-and-say se numește *origine*.



## Definiție.

Un șir look-and-say a cărui origine nu conține nicio înșiruire de mai mult de 9 cifre identice adiacente se numește *șir compact*.

## Definiție.

Notăm cu  $\mathcal{C} \subset \Sigma^*$  mulțimea tuturor cuvintelor care apar în șiruri compacte, excluzând originea.

## Definiție.

Un șir look-and-say a cărui origine:

- (a) nu conține nicio cifră mai mare decât 3 și
- (b) nu conține nicio înșiruire de mai mult de 3 cifre identice adiacente

se numește *șir armonic*.

## Definiție.

Notăm cu  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \Sigma^*$  mulțimea tuturor cuvintelor care apar în șiruri armonice, excluzând originea.

- $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \boxed{f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k}$

- $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k$
- Condiție:  $a_i \neq a_{i+1}$  ( $a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$ )

- $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \dots n_k a_k$
- Condiție:  $a_i \neq a_{i+1}$  ( $a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$ )
- $f(7777777) = 67$ , nu 2747 sau 5717.

## Propoziție.

Mulțimea  $\mathcal{C}$  coincide cu mulțimea cuvintelor  $a_1a_2 \dots a_k$  pentru care:

- (a)  $2 \mid k$ ,
- (b)  $a_{2i} \neq a_{2i+2}$ .

## Propoziție.

Mulțimea  $\mathcal{C}$  coincide cu mulțimea cuvintelor  $a_1a_2 \dots a_k$  pentru care:

- (a)  $2 \mid k$ ,
- (b)  $a_{2i} \neq a_{2i+2}$ .

## Demonstrație.

Pentru incluziunea  $\supset$ , fie  $a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k$  un cuvânt astfel încât  $b_i \neq b_{i+1}$ . Atunci putem să-i construim inversul,  $b_1^{a_1}b_2^{a_2} \dots b_k^{a_k}$ . □

# Proprietăți de bază

## Propoziție.

Mulțimea  $\mathcal{C}$  coincide cu mulțimea cuvintelor  $a_1a_2 \dots a_k$  pentru care:

- (a)  $2 \mid k$ ,
- (b)  $a_{2i} \neq a_{2i+2}$ .

## Demonstrație.

Pentru incluziunea  $\supset$ , fie  $a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k$  un cuvânt astfel încât  $b_i \neq b_{i+1}$ . Atunci putem să-i construim inversul,  $b_1^{a_1}b_2^{a_2} \dots b_k^{a_k}$ . □

## Observație.

Am demonstrat că funcția  $f$  este bijectivă!

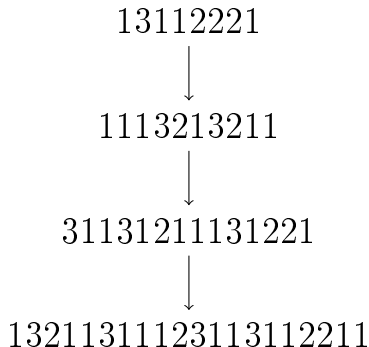


## Propoziție.

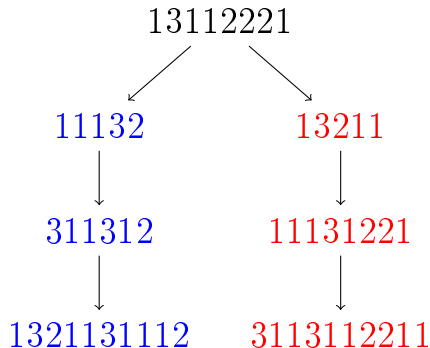
Mulțimea  $\mathcal{A}$  coincide cu mulțimea cuvintelor  $a_1 a_2 \dots a_k$  pentru care:

- (a)  $2 \mid k$ ,
- (b)  $a_{2i} \neq a_{2i+2}$  și
- (c)  $a_i \in \{1, 2, 3\}$ .

# Proprietăți de bază – Descompunerea



# Proprietăți de bază – Descompunerea



- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$

- $f^n(LR) = f^n(L)f^n(R)$
- Ultima cifră a lui  $f^n(L) \neq$  prima cifră a lui  $f^n(R)$ , pentru  $\forall n \geq n_0$ .

## Rezultate:

- Modul în care se repetă începutul și sfârșitul numerelor dintr-un șir look-and-say



John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Condiții necesare și suficiente pentru descompunere



John Conway (1937-2020)

Rezultate:

- Teoremă: **Există 92 de** *elemente atomice* astfel încât orice origine se descompune eventual într-o succesiune de *elemente atomice*



John Conway (1937-2020)



## Rezultate:

- Rata asimptotică de creștere a lungimii numerelor dintr-un șir look-and-say



John Conway (1937-2020)

Vă mulțumim!