Steffen Haug
Rettast

Øving 8

Diskret Matematikk

Oppgåver til seksjon 9.1

7 Betraktar relasjonar på $\mathbb{Z}$

a: $R = \{(x, y) \mid x \neq y\}$
Relasjonen er ikkje refleksiv. Den inneheld alle (x, y), sett vekk frå (a, a), $a \in \mathbb{Z}$. Relasjonen er symmetrisk, fordi $x \neq y \to y \neq x$. Relasjonen er ikkje transitiv: til dømes er $(1, 2), (2, 1) \in R$ men $(1, 1) \notin R$.

b: $R = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$
Relasjonen er ikkje refleksiv fordi $(0, 0) \notin R$ sjølv om $0 \in \mathbb{Z}$. Relasjonen er symmetrisk fordi multiplikasjon er kommutativ. Relasjonen er transitiv: $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R \to a_1, b_2 \neq 0 \to (a_1, b_2) \in R$

c: $R = \{(x, y) \mid x = y + 1\}$
Relasjonen er ikkje refleksiv fordi $x = y + 1 \to x \neq y$. Relasjonen er antisymmetrisk fordi $x = y + 1 \to (p + 1, p) \in R$, men $y = x - 1 \to (p, p + 1) \notin R$. Relasjonen er ikkje transitiv fordi $(y + 1, y), (y, y - 1) \in R \to (y + 1, y - 1) \notin R$

d: $R = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod{7}\}$
Relasjonen er refleksiv fordi alle tal er ekvivalent med seg sjølv, i kva modulo som helst. Relasjonen er symmetrisk, fordi $x \equiv y \pmod{7} \to y \equiv x \pmod{7}$. Relasjonen er transitiv fordi $x \equiv y \pmod{7},\ y \equiv z \pmod{7} \to x \equiv z \pmod{7}$

e: $R = \{(x, y) \mid x \text{ er multiplum av } y\} = \{(x, y) \mid y|x\}$
Relasjonen er refleksiv, fordi alle tal deler seg sjølv. Relasjonen er antisymmetrisk, til dømes: $(15, 3) \in R$, men $(3, 15) \notin R$. Relasjonen er transitiv, fordi $\forall a, b, c\ (a, b) \in R, (b, c) \in R \to b|a, c|b \to c|a \to (a, c) \in R$

f: $$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \mid x, y \text{ begge negative eller begge ikkje-negative}\} \\ &= \{(x, y) \mid \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)\} * \end{aligned}$$
Relasjonen er refleksiv, fordi alle tal har same forteikn som seg sjølv. Relasjonen er symmetrisk, fordi $(a, b) \in R \to \text{signum}(a) = \text{signum}(b) \to (b, a) \in R$. Relasjonen er transitiv, fordi $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b), \operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(c) \to \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(c) \to (a, c) \in R$

$$* \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{dersom } x < 0 \\ 1 & \text{elles} \end{cases}$$

g: $R = \{(x, y) \mid x = y^2\}$
Relasjonen er ikkje refleksiv, fordi generelt er $a \neq a^2$. Relasjonen er ikkje symmetrisk, fordi $(x, y) \in R \to y = \sqrt{x} \to (y, x) \notin R$. Relasjonen er ikkje transitiv, fordi $(a, b) \in R, (b, c) \in R \to a = c^4 \to (a, c) \notin R$

h: $R = \{(x,y) \mid x \geq y^2\}$
Relasjonen er ikkje refleksiv, fordi generelt er $a \ngeq a^2$. Relasjonen er ikkje symmetrisk, fordi $(x,y) \in R \to x \geq y^2 \overset{*}{\to} \sqrt{x} \geq y \to y \ngeq x^2 \to (y,x) \notin R$ Relasjonen er transitiv, fordi $(a,b) \in R, (b,c) \in R \overset{*}{\to} a \geq b \geq c \to (a,c) \in R$
$* \; x \geq y^2 \to x \geq 0$

40 La R_1 og R_2 vera "deler"-relasjonen og "er multilum av"-relasjonen på $\mathbb{Z}^+$. Det vil seie

$$R_1 = \{(a,b) \mid a|b\} \qquad R_2 = \{(a,b) \mid b|a\}$$

Skal finne

a: $R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid a|b \lor b|a\}$

c: $R_1 \setminus R_2 = R_1 \setminus (R_1 \cap R_2) = \{(a,b) \mid a|b \land a \neq b\}$
På grunn av at $R_1 \cap R_2$ gjev $a|b \land b|a \to b = ma \land a = nb \to a = n(ma) \to n = m \to a = b$

Oppgåver til seksjon 9.3

10 Skal finne talet, heretter omtalt som $T(M_R)$, på ikkje-null element i matrisa som representerer R på $A = \{1, 2, 3, \ldots 1000\}$, dei første tusen positive heiltala, dersom

a: $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{sum} \\ 1000 \\ 999 \\ 998 \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Vi ser at $T(M_R)$ er summen av heiltal frå 1 til 1000.

$$T(M_R) = \sum_{i=1}^{1000} i = \frac{1000^2 + 1000}{2} = \underline{\underline{500500}}$$

b: $R = \{(a,b) \mid a = b \pm 1\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{sum} \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Vi ser at matrisa har 1 langs to "diagonalar" langs hoveddiagonalen, kvar med 999 einarar.

$$T(M_R) = 2 \cdot 999 = 1998$$

c: $R = \{(a,b) \mid a + b = 1000\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{sum} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Matrisa har berre 1 langs ein diagonal, som i b har denne 999 einarar.

$$T(M_R) = 999$$

d: $R = \{(a,b) \mid a + b \leq 1001\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{sum} \\ 1000 \\ 999 \\ 998 \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

$$T(M_R) = \sum_{i=1}^{1000} i = \frac{1000^2 + 1000}{2} = \underline{\underline{500500}}$$

e: $R = \{(a,b) \mid a \neq 0\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{sum} \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ \vdots \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{array}$$

$0 \notin A$, så $a \neq 0$ er sant for alle relasjonar på A. Dermed er alle element i M lik 1.

$$T(M_R) = 1000^2 = 10^6$$

14 La R_1 og R_2 vere relasjonar på mengda A representert ved matrisene

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Skal finne matrisene som representerer

a: $M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b: $M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c: $M_{R_2 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgåver til seksjon 9.4

16 Skal avgjere om sekvensane er stiar i grafen.

`a:` a, b, c, e
Ja

`b:` b, e, c, b, e
Nei, $e \to c$ er ikkje gyldig

`c:` a, a, b, e, d, e
Ja

`d:` b, c, e, d, a, a, b
Nei, $d \to a$ er ikkje gyldig

`e:` b, c, c, b, e, d, e, d
Ja

`f:` $a, a, b, b, c, c, b, e, d$
Nei, $b \to b$ er ikkje gyldig

20 La R vera relasjonen som inneheld (a, b) dersom a og b er byar slik at der er flyruter utan mellomlanding frå a til b. Skal avgjera når (a, b) er i

`a:` R^2
Når byane er knytta med nøyaktig ei mellomlanding

`a:` R^3
Når byane er knytta med nøyaktig to mellomlandingar

`a:` R^*
Når byane er knytta gjennom ein sekvens av byar slik at kvar av dei har ei flyrute til den neste.

24 Anta releasjonen R ikkje er refleksiv. Er relasjonen R^2 nødvendigvis òg ikkje-refleksiv?

Viser med moteksempel. Anta M_R er følgande matrise, og betraktar det boolske matriseproduktet $M_R^{[2]}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriseproduktet viser at R^2 kan vera refleksiv, sjølv om R ikkje er det.

Oppgåver til seksjon 9.5

9 Gjeve at A er ei ikkje-tom mengd, og f er ein funksjon med A som definisjonsmengd. La R vera relasjonen på A slik at $R = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$.

`a:` Skal vise at R er ein ekvivalensrelasjon
Refleksivitet: $\forall a \in A\ f(a) = f(a) \implies R$ er refleksiv
Symmetri: $(a, b) \in R \implies f(a) = f(b) \implies (b, a) \in R \to R$ er symmetrisk
Transitivitet: $(a, b) \in R, (b, c) \in R \implies f(a) = f(b) = f(c) \implies (a, c) \in R \implies R$ er transitiv

`b:` Kva er ekvivalensklassene til R? Sidan $a \sim b$ med omsyn til R berre når $f(a) = f(b)$ er ekvivalensklassene $[a] = \{a \mid f(a) = k \in V_f\}$, altso mengdene med element $a \in A$ som har same verdi $f(a)$.

16 La R vera relasjonen på settet med ordna par av positive heiltal slik at

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ad = bc\}$$

Skal vise at R er ein ekvivalensrelasjon.
Refleksivitet: $\forall a, b\ (ab = ab) \implies ((a, b), (a, b)) \in R \implies R$ er refleksiv.
Symmetri: $((a, b), (b, c)) \in R \implies ad = bc \implies cb = da \implies ((c, d), (a, b)) \in R \implies R$ er symmetrisk.
Transitivitet:

$$\begin{aligned}
&((a, b), (c, d)) \in R \land ((c, d), (e, f)) \in R \\
\implies &ad = bc \land cf = de \\
\implies &ad = b\frac{de}{f} \\
\implies &af = be \\
\implies &((a, b), (e, f)) \in R \implies R \text{ er transitiv}
\end{aligned}$$

Alle tre krava er oppfylde, og dermed er R ein ekvivalensrelasjon.