Steffen Haug

Øving 2

Diskret Matematikk

TMA4140

1 Oppgåver til seksjon 2.1

Oppgåve 5

a: $\{1,3,3,5,5,5,5,5\} = \{5,3,1\}$
b: $\{\{1\}\} \neq \{1,\{1\}\}$
c: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Oppgåve 24

a: $\varnothing$ er ikkje potensmengde til nokon mengd.
b: $\{\varnothing, \{a\}\}$ er potensmengde til $\{a\}$
c: $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\} = \{\varnothing, \{a\}\}$ er potensmengde til $\{a\}$
d: $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ er potensmengde til $\{a,b\}$

2 Oppgåver til seksjon 2.2

2.1 Oppgåve 18

La A, B, C vera mengder. Skal vise at
c: $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus C$
Er det same som:

$$\{x \in A : x \notin B, x \notin C\} \subseteq \{x \in A : x \notin C\}$$

Brukar definisjonen av delmengder:

$$\begin{aligned}
&\forall x(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \to (x \in A \wedge x \notin C)) \\
&\forall x(x \in (A \setminus B) \setminus C \to x \in A \setminus C) \\
\implies &(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus C
\end{aligned}$$

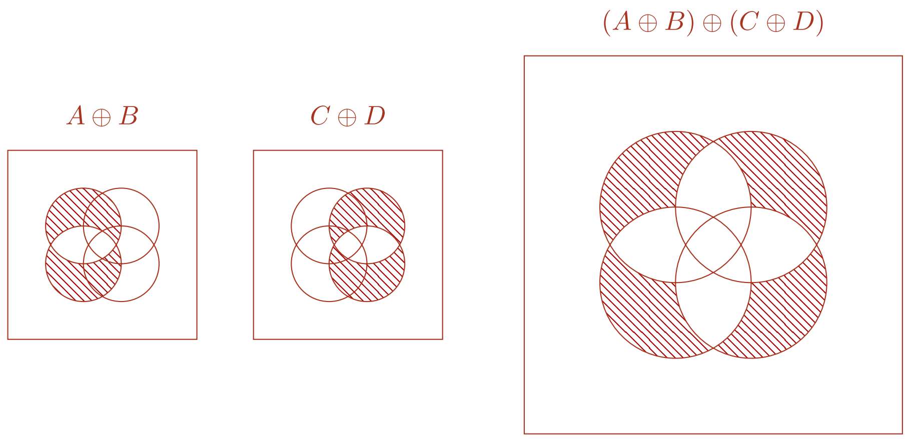
d: $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$
Er det same som:

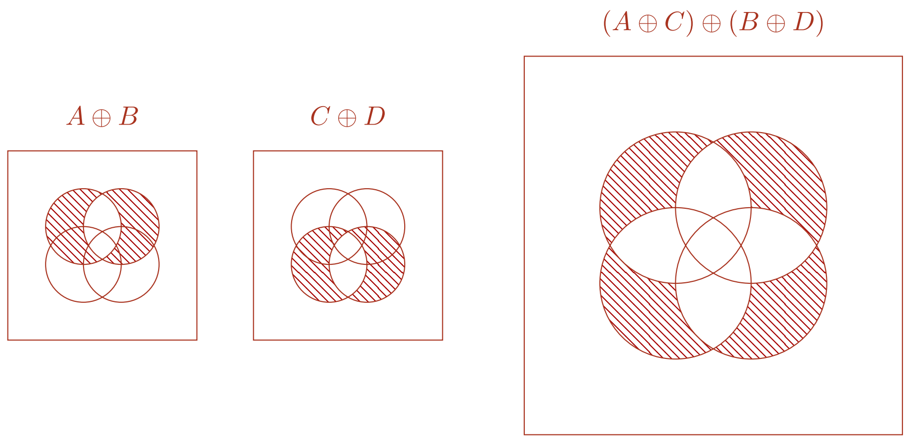
$$\begin{aligned}
&\{x \in A : x \notin C\} \cap \{x \in C : x \notin B\} \\
=&\{x : x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C \wedge x \notin B\} \quad * \text{ motseiing} \implies \text{predikatet alltid usant} \\
\overset{*}{=}&\varnothing
\end{aligned}$$

Oppgåve 42

Skal sjekke om gitt mengder A, B, C, D, stemmer det at

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$$





Mengdene er like.

3 Oppgåver til seksjon 2.3

Oppgåve 12

Skal avgjere om funksjonane er "ein til ein"

a: $f(n) = n - 1$

Sjekkar om $f(a) = f(b) \implies a = b$

$$a - 1 = b - 1$$
$$a = b \implies \text{funksjonen er 1-1}$$

b: $f(n) = n^2 + 1$

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= b^2 + 1 \\ a^2 &= b^2 \\ a &= \pm b \implies \text{funksjonen er ikkje 1-1} \end{aligned}$$

c: $f(n) = n^3$

$$\begin{aligned} a^3 &= b^3 \\ a &= b \implies \text{funksjonen er 1-1} \end{aligned}$$

d: $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Moteksempel: $f(1) = f(2) = 1 \implies$ funksjonen er ikkje 1-1

Oppgåve 38

Skal finne begrensingar for a, b, c, d slik at $f \circ g = g \circ f$. Altso

$$\begin{aligned} f \circ g &= g \circ f \\ a(cx + d) + b &= c(ax + b) + d \\ acx + ad + b &= acx + bc + d \\ ad + b &= bc + d \\ d(a - 1) &= b(c - 1) \end{aligned}$$

Som er oppfyld når:

$$a, c = 1$$

eller

$$b, d = 0$$

eller

$$\begin{aligned} a &= c \\ b &= d \end{aligned}$$

Oppgåve 42

Gitt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$. Skal i prinsippet finne definisjonsmengdene (til f) som gjev dei oppgjevne verdimengdene.

a: $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$

b: $f^{-1}(\{x : 0 < x < 1\}) = \{x : 0 < x < 1\}$

c: $f^{-1}(\{x : x > 4\}) = \{x : x > 2\}$

4 Oppgåver til seksjon 2.4

Oppgåve 12c

Skal undersøkje om $a_n = (-4)^n$ er løysing til $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ $\forall n > 2$:

$$
\begin{aligned}
(-4)^n &= 8(-4)^{n-1} - 16(-4)^{n-2} \\
&= -2(-4)(-4)^{n-1} - (-4)^2(-4)^{n-2} \\
&= -2(-4)^n - (-4)^n \\
\implies (-4)^n &= -3(-4)^n \quad \text{motseiing}
\end{aligned}
$$

$a_n = (-4)^n$ er *ikkje* løysing.

Oppgåve 33d

Skal rekne ut summen

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} ij \\
&= \sum_{i=1}^{2} i \sum_{j=1}^{3} j \\
&= 3 \cdot 9 = \underline{\underline{21}}
\end{aligned}
$$

5 Oppgåver til seksjon 2.5

Oppgåve 16

Skal vise at ei delmengd av ei telleleg mengd (kall den S) sjølv er telleleg.

Bevis. At S er telleleg betyr at der eksisterar ein funksjon $f : S \to \mathbb{N}$, slik at f er injiktiv for alle verdiar i S.

For ei kvar delmengd av S, kall den S' kan ein definere ein funksjon $f|_{S'} : S' \to \mathbb{N}$. Sidan $f|_{S'}$ berre er ei begrensing av f til delar av si definisjonsmengd, er $f|_{S'}$ òg injiktiv.

Sidan $f|_{S'}$ injiktiv $\iff$ S' telleleg, og $f|_{S'}$ eksisterer (og er injiktiv) for alle $S' \subseteq S$, er alle delmengder av S tellelege. ■