

Steffen Haug

Øving 2

Diskret Matematikk

TMA4140

1 Oppgaver til seksjon 2.1

Oppgave 5

a: $\{1, 3, 3, 5, 5, 5, 5\} = \{5, 3, 1\}$

b: $\{\{1\}\} \neq \{1, \{1\}\}$

c: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Oppgave 24

a: \emptyset er ikkje potensmengde til nokon mengd.

b: $\{\emptyset, \{a\}\}$ er potensmengde til $\{a\}$

c: $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\} = \{\emptyset, \{a\}\}$ er potensmengde til $\{a\}$

d: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ er potensmengde til $\{a, b\}$

2 Oppgaver til seksjon 2.2

2.1 Oppgave 18

La A, B, C vera mengder. Skal vise at

c: $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus C$

Er det same som:

$$\{x \in A : x \notin B, x \notin C\} \subseteq \{x \in A : x \notin C\}$$

Brukar definisjonen av delmengder:

$$\forall x(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \rightarrow (x \in A \wedge x \notin C)$$

$$\forall x(x \in (A - B) - C \rightarrow x \in A - C)$$

$$\implies (A - B) - C \subseteq A - C$$

d: $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$

Er det same som:

$$\{x \in A : x \notin C\} \cap \{x \in C : x \notin B\}$$

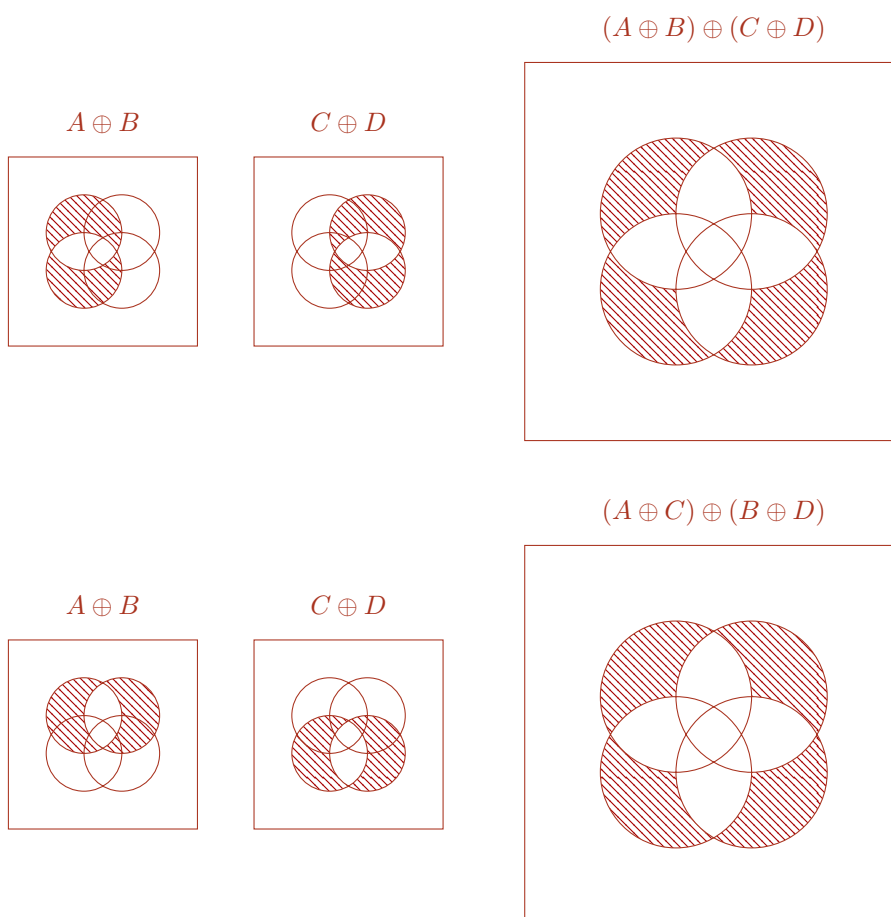
$$= \{x : x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C \wedge x \notin B\} \quad * \text{ motseiing } \implies \text{predikatet alltid usant}$$

$$= \emptyset$$

Oppgave 42

Skal sjekke om gitt mengder A, B, C, D , stemmer det at

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$$



Mengdene er like.

3 Oppgaver til seksjon 2.3

Oppgave 12

Skal avgjere om funksjonane er “ein til ein”

a: $f(n) = n - 1$

Sjekkar om $f(a) = f(b) \implies a = b$

$$a - 1 = b - 1$$

$$a = b \implies \text{funksjonen er 1-1}$$

b: $f(n) = n^2 + 1$

$$a^2 + 1 = b^2 + 1$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm b \implies \text{funksjonen er ikkje 1-1}$$

c: $f(n) = n^3$

$$a^3 = b^3$$

$$a = b \implies \text{funksjonen er 1-1}$$

d: $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Moteksempel: $f(1) = f(2) = 1 \implies \text{funksjonen er ikkje 1-1}$

Oppgåve 38

Skal finne begrensingar for a, b, c, d slik at $f \circ g = g \circ f$. Altso

$$f \circ g = g \circ f$$

$$a(cx + d) + b = c(ax + b) + d$$

$$acx + ad + b = acx + bc + d$$

$$ad + b = bc + d$$

$$d(a - 1) = b(c - 1)$$

Som er oppfylt når:

$$a, c = 1$$

eller

$$b, d = 0$$

eller

$$a = c$$

$$b = d$$

Oppgave 42

Gitt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Skal i prinsippet finne definisjonsmengdene (til f) som gjev dei oppgjevne verdimengdene.

a: $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$

b: $f^{-1}(\{x : 0 < x < 1\}) = \{x : 0 < x < 1\}$

c: $f^{-1}(\{x : x > 4\}) = \{x : x > 2\}$

4 Oppgaver til seksjon 2.4

Oppgave 12c

Skal undersøkje om $a_n = (-4)^n$ er løysing til $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$
 $\forall n > 2$:

$$\begin{aligned}(-4)^n &= 8(-4)^{n-1} - 16(-4)^{n-2} \\&= -2(-4)(-4)^{n-1} - (-4)^2(-4)^{n-2} \\&= -2(-4)^n - (-4)^n \\ \implies (-4)^n &= -3(-4)^n \quad \text{motseiing}\end{aligned}$$

$a_n = (-4)^n$ er *ikkje* løysing.

Oppgave 33d

Skal rekne ut summen

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 ij \\&= \sum_{i=1}^2 i \sum_{j=1}^3 j \\&= 3 \cdot 9 = \underline{\underline{27}}\end{aligned}$$

5 Oppgåver til seksjon 2.5

Oppgåve 16

Skal vise at ei delmengd av ei telleleg mengd (kall den S) sjølv er telleleg.

Bevis. At S er telleleg betyr at der eksisterar ein funksjon $f : S \rightarrow \mathbb{N}$, slik at f er injektiv for alle verdiar i S .

For ei kvar delmengd av S , kall den S' kan ein definere ein funksjon $f|_{S'} : S' \rightarrow \mathbb{N}$. Sidan $f|_{S'}$ berre er ei begrensing av f til delar av si definisjonsmengd, er $f|_{S'}$ òg injektiv.

Sidan $f|_{S'}$ injektiv $\iff S'$ telleleg, og $f|_{S'}$ eksisterer (og er injektiv) for alle $S' \subseteq S$, er alle delmengder av S tellelege. ■