Steffen Haug

Øving 6

Diskret Matematikk

TMA4140

Oppgåver til seksjon 6.5

Eg viser ikkje utrekning for $C(n, r)$. Verdiane er rekna slik:

```
(fn zero? [x] (= x 0))

(fn decr [x] (- x 1))

(fn fac [n]
  (if (zero? n) 1
  (* n (fac (decr n)))))

(fn ncr [n r]
  (div (fac n) (* (fac r) (fac (- n r)))))
```

Oppgåve 6

Frå Teorem 2: Å velje 5 element frå ei mengd av 3, med tilbakelegg, kan gjerast på

$$C(n + r - 1, r) = C(3 + 5 - 1, 5) = \underline{\underline{21}}$$

forskjellige måtar.

Oppgåve 14

Skal finne kor mange løysingar som eksisterer for $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, der x_1, x_2, x_3, x_4 er positive heiltal. Merk at dette er det same som å velja 17 element frå ei mangd med 4 (med tilbakelegg), slik at vi har x_1 element av type ein, x_2 element av type to, og so vidare. Antal løysingar er dermed talet på 17-kombinasjonar av ei mengde med 3 element, med tilbakelegg.

$$C(3 + 17 - 1, 17) = \underline{\underline{171}}$$

Oppgåve 30

Skal finne kor mange forskjellige ord som kan stavast med bokstavar frå ordet "MISSISSIPPI". Skal med andre ord finne antal permutasjonar av elleve bokstavar, med omsyn til at nokre av dei er like. Ordet har:

1 M, som kan plasserast på $C(11, 1)$ måtar, og etterlét 10 plasseringar
4 I, som kan plasserast på $C(10, 4)$ måtar, og etterlét 6 plasseringar
4 S, som kan plasserast på $C(6, 4)$ måtar, og etterlét 2 plasseringar
2 P, som kan plasserast på $C(2, 2)$ måtar

Som gjer

$$\begin{aligned}\text{antal ord} &= C(11,1)C(10,4)C(6,4)C(2,2) \\ &= \texttt{(foldl * [(ncr 11 1) (ncr 10 4) (ncr 6 4) (ncr 2 2)])} \\ &= \underline{\underline{34650}}\end{aligned}$$

Oppgåve 34

Skal finne kor mange ord med fem eller fleire bokstavar som kan lagast av bokstavar frå ordet "SEERESS". Vi har sju bokstavar, med frekvensar S: 3, E: 3, R: 1

Vi kan lage:
$C(7, 3)C(4, 3)C(1, 1) = 140$ ord med 7 bokstavar
6 bokstavar:
$C(6, 3)C(3, 3) = 20$ ord utan R
$2 \cdot C(6, 3)C(3, 2)C(1, 1) = 60$ ord utan ein S eller E
5 bokstavar:
$2 \cdot C(5, 3)C(2, 2) = 20$ ord utan R, og E eller S
$C(5, 2)C(3, 2)C(1, 1) = 30$ ord utan ein S og ein E
$2 \cdot C(5, 1)C(4, 3)C(1, 1) = 40$ ord utan to S, eller to E

Totalt $140 + 60 + 20 + 30 + 40 = \underline{\underline{290 \text{ ord}}}$

Oppgåver til seksjon 8.1

Oppgåve 11

a: Skal setje opp ein rekurrensrelasjon som beskriv antal måtar å gå opp n trappetrinn, dersom ein kan gå eitt eller to trappetrinn i gongen.

Dersom ein frå eit vilkårleg trinn, a_n, går opp to trinn, kan ein "fullføre" trappa på alle måtane som er mogleg frå dette trinnet, a_{n-2}, Dersom ein går eitt trinn kan ein fullføre trappa på a_{n-1} måtar. Dette gjev

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

b: Der er éin måte å gå ei trapp med eitt trinn(!), og to måtar å gå ei trapp med to trinn (1-1 eller 2).

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

c: Skal finne kor mange måtar der er å gå ei trapp på 8 trinn.

```
(fn trapp [n]
  (if (= n 1) 1
  (if (= n 2) 2
  (+ (trapp (- n 1)) (trapp (- n 2))))))
```

```
>>> (trapp 8) → 34
```

Oppgåve 20

a: Skal finne rekurrensrelasjon for kor mange måtar ein bussjåfør kan betale bompengar (n cent) med berre *nickels* (5 cent) og *dimes* (10 cent).

Merk at bussjåføren kun kan betale bompengar slik at $n \equiv 0 \pmod 5$. For å betale n cent kan sjåføren anten putte ein *nickel* i automaten, og ha $n - 5$ cent att å betale, eller putte ein *dime* i automaten, og ha $n - 10$ cent att å betale. Dette gjev

$$a_n = a_{n-5} + a_{n-10}, \quad a_5 = 1, \ a_{10} = 2$$

måtar å betale bompengar på n cent.

b: Skal finne kor mange måtar det er mogleg å betale bompengar på 45 cent

```
(fn toll [n]
  (if (= n 5) 1
  (if (= n 10) 2
  (+ (toll (- n 5)) (toll (- n 10))))))
```

```
>>> (toll 45) → 55
```

Oppgåver til seksjon 8.2

Oppgåve 3

Skal løyse rekurrensrelasjonane, saman med initialbetingelsane.

c: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 0$
Karakteristisk likning: $r^2 - 5r + 6 \to r_1 = 2,\ r_2 = 3$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$$

Frå initialbetingelsane:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = 1 &\quad = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 0 &\quad = \alpha_1 2 + \alpha_2 3 \end{aligned}\right\} \to \alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = -2$$

Som gjev

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

d: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 6,\ a_1 = 8$
Karakteristisk likning: $r - 4r + 4 \to r_0 = 2$

$$a_n = \alpha_1 2^n \alpha_2 n 2^n$$

Frå initialbetingelsane:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = 6 &\quad = \alpha_1 \\ a_1 = 8 &\quad = \alpha_1 2 + \alpha_2 2 \end{aligned}\right\} \to \alpha_1 = 6,\ \alpha_2 = -2$$

Som gjev

$$\begin{aligned} a_n &= 6 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

e: $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$
Karakteristisk likning: $r^2 + 4r + 4 \rightarrow r_0 = -2$

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n$$

Frå initialbetingelsane:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 0 & = \alpha_1 \\ a_1 = 1 & = \alpha_1(-2) + \alpha_2(-2) = \alpha_2(-2) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1$$

Som gjev:

$$a_n = -1 \cdot n(-2)^n$$

g: $a_n = a_{n-2}/4, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 0$
Merk at $a_n = 0a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2}$
Karakteristisk likning: $r^2 - 0r - \frac{1}{4} \rightarrow r_1 = \frac{1}{2},\ f_2 = -\frac{1}{2}$

$$a_n = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Frå initialbetingelsane:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 1 & = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 0 & = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Som gjev:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Oppgåve 6

Skal finne kor mange forskjellige beskjedar kan sendast på n mikrosekund, samansatt av tre signal – eitt som er 1 mikrosekund langt, og to som er to mikrosekund lange.

Grunntilfella er $a_1 = 1,\ a_2 = 3$. På eit mikrosekund kan vi berre sende signalet som er eit mikrosekund langt. På to mikrosekund kan vi sende to av det første, eller eitt av dei to signala på 2 mikrosekund.

På n mikrosekund kan vi gjere følgjande: Starte med signalet som er eit mikrosekund langt, og velje mellom dei $n-1$ gjenverande beskjedane, eller starte med eitt av dei to signala som er 2 mikrosekund lange, og velje mellom dei $n-2$ gjenverande beskjedane. På n mikrosekund har vi altso

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

moglege beskjedar.

Oppgåve 11

Gjeve

$$L_n = L_{n-1} + L_{n+2}$$

Med initialbetingelsane $L_0 = 2,\ L_1 = 1$

a: Skal vise at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ (f er fibonacci-tal). Brukar induksjon.

Induktivt steg

Antar at for ein k held følgjande for $n = k$

$$\begin{aligned} L_n &= f_{n-1} + f_{n+1} \\ L_{n+1} &= f_n + f_{n+2} \end{aligned}$$

Dette medfører at for alle $n > k$ held følgjande

$$\begin{aligned} L_{n+2} &\overset{\text{p. def}}{=} L_{n+1} + L_n \\ &= f_{n-1} + f_{n+1} + f_n + f_{n+2} \\ &= (f_{n-1} + f_n) + (f_{n+1} + f_{n+2}) \\ &\overset{\text{p. def}}{=} f_{n+1} + f_{n+3} \end{aligned}$$

Grunntilfelle

Sjekkar for n = 2

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = f_3 + f_1 \\ L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 1 = f_4 + f_2 \end{aligned}$$

Vi ser at påstanden held for alle $n \geq 2$

Oppgåve 42

Skal vise at dersom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, med initialbetingelsane $a_0 = s,\ a_1 = t$ så er $a_n = sf_{n-1} + sfn$. Induksjkonsbevis.

Induktiv del

Antar at får ein k held følgande for $n = k$

$$\begin{aligned} a_n &= sf_{n-1} + tf_n \\ a_{n+1} &= sf_n + tf_{n+1} \end{aligned}$$

Dette medfører at for alle $n > k$ held

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\overset{\text{p. def}}{=} sf_{n-1} + sf_n + tf_n + tf_{n+1} \\ &= s(f_{n-1} + f_n) + t(f_n + f_{n+1}) \\ &= sf_{n+1}\ t_{n+2} \end{aligned}$$

Grunntilfelle

$$\begin{aligned} a_2 &= s + t = sf_1 + sf_2 \\ a_3 &= s + 2t = sf_2 + sf_3 \end{aligned}$$

Vi ser at påstanden held for alle $n > 2$