Steffen Haug

Øving 5

Diskret Matematikk

TMA4140

Oppgåver til seksjon 4.4

Oppgåve 21

Skal finne løysing til systemet

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod 2 \\
x &\equiv 2 \pmod 3 \\
x &\equiv 3 \pmod 5 \\
x &\equiv 4 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

La $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330, M_1 = m/2 = 165, M_2 = m/3 = 110, M_3 = m/5 = 66, M_4 = m/11 = 30$ Vi ser at

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ er invers til } M_1 = 165 \pmod 2 \text{ fordi } 165 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 2 \\
&2 \text{ er invers til } M_2 = 110 \pmod 3 \text{ fordi } 110 \cdot 2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3 \\
&1 \text{ er invers til } M_3 = 66 \pmod 5 \text{ fordi } 66 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 5 \\
&7 \text{ er invers til } M_4 = 30 \pmod{11} \text{ fordi } 30 \cdot 7 \equiv 8 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Løysingar til systemet er dei slik at

$$
\begin{aligned}
x \equiv a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 + a_4M_4y_4 &= 1 \cdot 165 \cdot 2 + 2 \cdot 110 \cdot 2 + 3 \cdot 66 \cdot 1 + 4 \cdot 30 \cdot 7 \\
&= 1808 = 158 \pmod{330}
\end{aligned}
$$

Oppgåve 33

Skal bruke Fermats vesle teorem (heretter f.v.t.) til å finne 7^{121} **mod** 13. f.v.t. seier at $7^{12} \equiv 1 \pmod{13} \to (7^{12})^n \equiv 1 \pmod{13}$ For å nytte dette delar vi eksponenten på 12, og merkar at $121 = 12 \cdot 10 + 1$. Vi har at

$$7^{121} = 7^{12 \cdot 10+1} = (7^{12})^{10} 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{13}$$

Dermed 7^{121} **mod** $13 = 7$

37a

Skal vise at $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$. f.v.t gir direkte $(2^{10})^n \equiv 1 \pmod{11}$. Dermed har vi $2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1 \pmod{11}$

Oppgåver til seksjon 6.1

Oppgåve 27

Skal finne kor mange måtar ein kan organisere ein kommitté av representantar frå 50 statar, der kvar stat kan representerast av guvernøren *eller* ein av to senatorar.

Frå kvar stat er der 3 personar som vera representant, uavhenging av andre statar. Produktregelen gjev at kommitéen kan setjast saman på 3^{50} forskjellige måtar.

Oppgåve 44

Skal finne kor mange måtar ein kan plassere 4 personar av ei gruppe på 10 ved eit rundt bord, der to plasseringar er like dersom kvar person har den same personen på begge sider.

Vi vel eit vilkårleg sete som sete 1, og nummerer setene med klokka. Det er 10 måtar å velje ein person i sete 1, 9 måtar å velje sete 2, og so vidare. Dersom vi flyttar alle personar med klokka (vi vel med andre ord eit anna sete som sete 1) er plasseringa for øvrig den same. Talet måtar (n) vi kan plassere personane er

$$n = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 2 = 1260$$

Fordi vi kan velje sete 1 på 4 forskjellige måtar.

Oppgåver til seksjon 6.2

Oppgåve 10

Skal vise at dersom vi har 5 punkt $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5$, må minst eitt midtpunkta mellom dei ha heiltalskoordinatar, det vil seie

$$x_i + x_j, \text{ og } y_i + y_j$$

Skal begge vera partal for (minst) to punkt, i og j.

Merk at der kun er fire måtar å konstruere heiltalspunkt, med omsyn til odde- og partal: (o, p), (p, o), (p, p), og (o, o). Med fire punkt på nøyaktig denne forma klarar vi å unngå at begge koordinatane summerar til partal, men med ein gong vi introduserer eit nytt punkt, uansett kva for ei av dei fire formane det tek, klarer vi ikkje å unngå det.

Oppgåve 18

Gjeve ei klasse med 9 elevar. Skal vise at

a: Klassa har minst 5 jenter *eller* minst 5 guttar.

Dersom klassa har maksimalt 4 jenter og fire gutar kan det berre vera 8 elevar i klassa.

b: Klassa har minst 3 gutar *eller* minst 7 jenter.

Dersom klassa har maksimalt 2 gutar og 6 jenter kan det ikkje vera meir enn 8 elevar i klassa.

Oppgåver til seksjon 6.3

Oppgåve 13

Skal finne ut kor mange måtar ein kan organisere ein kø av n menn og n kvinner, slik at menn og kvinner alternerer.

Køen består med andre ord av kvinner og menn organisert parvis. Det fremste paret vert trekte frå n menn og n kvinner (n^2 måtar å organisere), det andre paret vert trekte frå $n-1$ menn og $n-1$ kvinner ($(n-1)^2$ måtar å organisere), og so vidare, så heile køen kan organiserast på $n^2(n-1)^2(n-2)^2 \cdots 2 \cdot 1$ måtar. Vi kjenner summen av n kvadrat, og den er

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Oppgåve 19

```
(fn fac [n]
  (if (zero? n)
    1
    (* n (fac (dec n)))))

(fn ncr [n r]
  (/ (fac n) (* (fac r) (fac (- n r)))))
```

b: Skal finne kor mange utfall som har nøyaktig 2 kron, når ein mynt vert kasta 10 gongar.

Rekkjefølgja vi "trekk" myntane i betyr ikkje noko. Svaret er altal 2-kombinasjonar av 10:

$$C(10, 2) = 45$$

c: Skal finne kor mange utfall som har maksimalt 3 mynt, når ein mynt vert kasta 10 gongar.

Rekkjefølgja vi "trekk" myntane i betyr ikkje noko. Svaret er summen av kombinasjonane som gjer nøyaktig 1, 2 og 3 myntar.

$$C(10,1) + C(10,2) + C(10,3) = 175$$

Oppgåve 34

Gjeve ei avdeling med 10 menn og 15 kvinner, skal finne kor mange måtar ein kan organisere ein kommitté på 6 personar slik at den har fleire kvinner enn menn. Kommittéen kan med andre ord ha 4 kvinner og 2 menn, 5 kvinner og 1 mann, eller 6 kvinner.

$$C(15,4) \cdot C(10,2) + C(15,5) \cdot C(10,1) + C(15,6) \cdot C(10,0) = 96460$$

Oppgåver til seksjon 6.4

Oppgåve 9

Skal finne koeffisienten til $x^{101}y^{99}$ i $(2x - 3y)^{200}$.

$$(2x + (-3y))^{200} = \sum_{j=0}^{200} \binom{200}{j} (2x)^{200-j} (-3y)^j$$

Koeffisienten vi skal finne svarar til $j = 99$, nemleg

$$\binom{200}{99} 2^{101} (-3)^{99} = -\frac{200!}{101!99!} 2^{101} (-3)^{99}$$