Steffen Haug

Øving 3

Diskret Matematikk

TMA4140

1 Oppgåver til seksjon 3.1

Oppgåve 53

Bruker grådig algoritme for myntveksling (Algoritme 6). I staden for å jobbe gjennom algoritma "for hand" brukar eg eit program:

```python
def change(C, n):
    D = []
    for c in C:
        t = 0
        while n >= c:
            t += 1
            n -= c
        D.append(t)
    return tuple(D)
```

a: 51 cents vekslast til 2 quarters og 1 cent

b: 69 cents vekslast til 2 quarters, 1 dime, 1 nickel og 4 cents

c: 76 cents vekslast til 3 quarters og 1 cent

d: 60 cents vekslast til 2 quarters og 1 dime

Oppgåve 55

Brukar same algoritme, *utan nickels*, med same mangde cents som i 53. Brukar same programmet som i 53, med forskjellig `C` (`C = [25,10,1]`).

a: 51 cents vekslast til 2 quarters og 1 cent

b: 69 cents vekslast til 2 quarters, 1 dime, og 9 cents

c: 76 cents vekslast til 3 quarters og 1 cent

d: 60 cents vekslast til 2 quarters og 1 dime

Oppgåve 56

Viser med eksempel. Ønsker å konstruere eit tal slik at å veksle til ein 12-cent mynt etterlét oss med eit tal som ikkje kan fordelast "fint" på dei gjenverande tala. Eit eksempel på eit slikt tal er 4 – det kan ikkje delast på 10 eller 5.

Vi prøver å rekne gjennom algoritma for `n = 16`, fordi vi veit at dette gjev 4 i rest etter å veksle til ein 12-cent.

$$\begin{array}{rll} (i) & \texttt{change}(\{25, 12, 10, 5, 1\}, 16) \to \{0, 1, 0, 0, 4\}, & \Sigma = 5 \\ (ii) & \texttt{change}(\{25, 10, 5, 1\}, 16) \to \{0, 1, 1, 1\}, & \Sigma = 3 \end{array}$$

Sidan algoritma er grådig finn den ikkje den beste løyinga. Same fordeling som i (ii) er gyldig i (i), men algoritma finn den ikkje.

2 Oppgåver til seksjon 3.2

Oppgåve 27

a:

$$
\begin{aligned}
&(n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n)(n^3 + 2) \\
\approx\ &(n^3 + n^2 \log n)(\log n) + (\log n)(n^3) \\
\approx\ &2n^3 \log n \\
\approx\ &n^3 \log n
\end{aligned}
$$

b:

$$
\begin{aligned}
&(2^n + n^2)(n^3 + 3^n) \\
\approx\ &(2^n)(3^n) \\
\approx\ &3^n
\end{aligned}
$$

Oppgåve 30

Skal vise at funksjonane er av same orden.

c: $\lfloor x + 1/2 \rfloor$ og x

Konstantar er irrellevante, $\lfloor x \rfloor$ kan maksimalt variere frå x med ± 0.5, som og er irrelevant når x aukar.

e: $\log_{10} x$ og $\log_2 x$

Brukar L'Hopital til å vise $\lim_{x \to \infty} = K$, altso at uttrykka ikkje er *polynomisk forskjellige*.

$$
\lim_{x \to \infty} \frac{\log_{10} x}{\log_2 x} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x \ln 10}}{\frac{1}{x \ln 2}} = \frac{\ln 2}{\ln 10} = K
$$

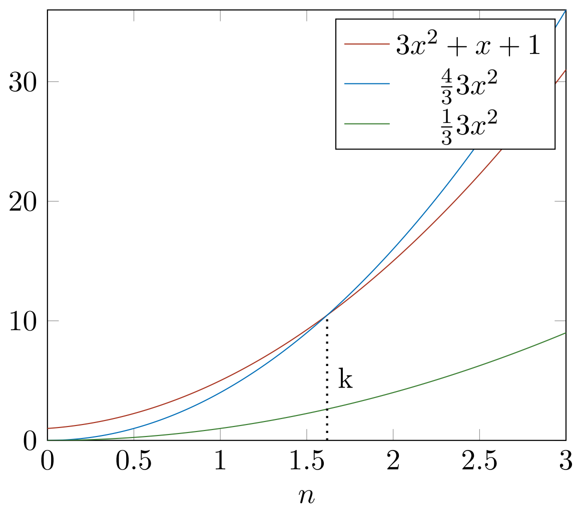
Oppgåve 34

a: Skal vise at $3x^2 + x + 1$ er $\Theta(3x^2)$ ved å finne konstantar C_1, C_2 og k. Ein kan (relativt) enkelt finne konstantar til polynom ved å gjette. Til dømes kan ein gjette at $4x^2 > 3x^2 + x + 1$ fordi $x^2 > x + 1$, og dermed $3x^2 + x^2 > 3x^2 + (x + 1)$, når x er stor nok.

Når ein løyser oppgåver på denne måten finn ein antageleg ikkje dei minste moglege verdiane for C_1, C_2 og k, men det er tidsparande.

Fann ved "gjetting" $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{4}{3}$. Løyste $3x^2 + x + 1 = 4x^2$ og fann $k = \frac{1}{2} + \sqrt{5}$.

b:



Oppgåve 42

Skal undersøkje om $f(x)$ er $O(g(x)) \implies 2^{f(x)}$ er $O(2^{g(x)})$

$$(i)\ f(x) \text{ er } O(g(x)) \implies \exists\, C, k > 0 \text{ slik at } |f(x)| < C|g(x)|\ \forall\, x > k$$
$$(ii)\ 2^x \text{ er monotont veksande: } x_2 > x_1 \implies 2^{x_2} > 2^{x_1}$$

For $x > k$ er altso |f(x)| strengt lågare enn C|g(x)| (i). Av (ii) følger det at

$$\begin{aligned} x > k &\implies |f(x)| < C|g(x)| \\ &\implies \log_2 2^{|f(x)|} < \log_2 2^{C|g(x)|} \\ &\implies \log_2 2^{|f(x)|} < C \log_2 2^{|g(x)|} \ * \\ &\implies 2^{|f(x)|} < C2^{|g(x)|} \\ &\implies |2^{f(x)}| < C|2^{g(x)}| \ ** \\ &\implies 2^{f(x)} \text{ er } O(2^{g(x)}) \end{aligned}$$

$*\ \log a^{xy} = \log(a^x)^y = y \log a^x, \quad x, y > 0$

$**$ Dette held kanskje ikkje dersom $f(x)$ og $g(x)$ er negative?

3 Oppgåver til seksjon 4.1

Oppgåve 11

a: 11:00 + 80 timar = 07:00

b: 12:00 − 40 timar = 08:00

c: 06:00 + 100 timar = 10:00