STEFFEN HAUG

Numeriske Metodar

Prosjekt 3

I. Kvadraturmetodar

i. Adaptiv Simpson-kvadratur

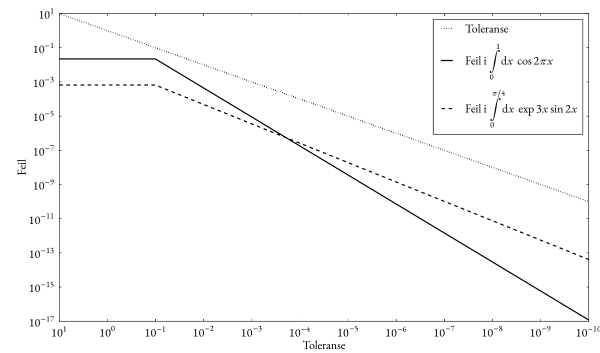
Listing 1: *Adaptiv Simpson-kvadratur*

```
def S(f, a, b):
    return (f(a) + 4 * f((a + b) / 2) + f(b))  \
         * (b - a) / 6

def asm_quad(f, a, b, tol=1e-5):
    I0 = S(f, a, b)
    c = (a + b) / 2

    I = S(f, a, c) + S(f, c, b)
    err = abs(I - I0) / 15

    if err < tol:
        return I + (I - I0) / 15
    else:
        return asm_quad(f, a, c, tol=tol/2)  \
             + asm_quad(f, c, b, tol=tol/2)
```

ii. Romberg-kvadratur

Listing 2: *Romberg-kvadratur*

```
def romberg(f, a, b, MAX_ITER=100, tol=1e-5):
    R = np.zeros((2, MAX_ITER))
    Rp, Rn = 0, 1

    h = b - a
    R[Rp, 0] = 0.5 * h * (f(a) + f(b))

    for n in range(1, MAX_ITER):
        h = h * 0.5
        L = np.linspace(a + h, b - h, 1 << n - 1)
        R[Rn, 0] = R[Rp, 0]/2 + h * np.sum(f(L))

        for k in range(1, n + 1):
            E = (R[Rn, k - 1] - R[Rp, k - 1])  \
              / ((1 << 2 * k) - 1)
            R[Rn, k] = R[Rn, k - 1] + E

        Rp, Rn = Rn, Rp

        if abs(E) < tol:
            break

    return R[Rp, n]
```



Figur 1: *Feil i adaptiv Simpson-kvadratur. Ein ser at feilen er grensa ovanfrå av toleransen.*

II. Simulasjon av fri, stiv lekam

Vi ønsker å simulere ein *fri, stiv lekam*, med andre ord ein lekam som ikkje lar seg deformere, som roterer fritt i rommet frå ein gitt start-tilstand.

Fri rotasjon betyr at netto påført dreiemoment er null. At lekamen ikkje lar seg deformere medfører at treighetsmomentet er konstant. (massen flyttar seg ikkje relativt til rotasjons-aksen) Dette betyr at normen til dreieimpulsen, og rotasjonsenergien er bevart. [1] Ingenting hindrar dreieimpulsen i å endre retning.

i. Definisjon av problemet

Differensiallikninga [1, Namn på symbola er endra for å passe vår oppgåvetekst]

$$\mathrm{T}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \times \mathrm{T}\omega = \mathrm{M} \tag{1}$$

skildrar rotasjonen til eit stivt legeme. Her er M påført dreiemoment, T treighetsmoment, og ω vinkelfart. Per antagelse er $M = 0$. Innfør substitusjonen

$$\mathbf{m} = \mathrm{T}\omega$$
$$\implies \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \mathrm{T}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad \text{og} \quad \omega = \mathrm{T}^{-1}\mathbf{m}$$

sett inn i (1), trekk frå $\mathrm{d}\mathbf{m}/\mathrm{d}t$ på begge sider, og snu kryssproduktet for å få like forteikn. Samtidig innfører vi notasjonen $\dot{f} = \mathrm{d}f/\mathrm{d}t$.

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \mathrm{T}^{-1}\mathbf{m} \tag{1*}$$

Bevaringslovene nevnt til å byrje med gir oss:

$$\gamma = \|\mathbf{m}\|^2 = \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{m}(t) \tag{2}$$
$$E = \frac{1}{2}\mathbf{m}(t) \cdot \mathrm{T}^{-1}\mathbf{m}(t) \tag{3}$$

Der (2) er ei sfære med radius $\|\mathbf{m}\|$, og (3) er ei ellipse. Sidan både γ og E er konstantar er løysingane $\mathbf{m}$ begrensa til å sitje på skjæringa mellom flatene.

Anta $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3)$. Ettersom T er diagonal er $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{diag}(1/\mathrm{I}_1, 1/\mathrm{I}_2, 1/\mathrm{I}_3)$. Skriv $\mathbf{m} = (x \;\; y \;\; z)$, og skriv ut (1*) på komponentform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{m}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}} \times \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\mathrm{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mathrm{I}_3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{T}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}} \right]$$

Rekn ut kryssproduktet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{m}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Ay(t)z(t) \\ Bx(t)z(t) \\ Cx(t)y(t) \end{pmatrix}}_{f(t,\mathbf{m})} \tag{4}$$

der A, B og C er konstantar

$$A = 1/I_3 - 1/I_2$$
$$B = 1/I_3 - 1/I_1$$
$$C = 1/I_2 - 1/I_1$$

ii. Implisitt Runge-Kutta midtpunkt-metode

Vi ønsker å løyse differensiallikningar av sorten

$$\dot{y} = f(t, y)$$

numerisk, ved hjelp av Runge-Kutta metoden

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right), \tag{5}$$

kalt *implisitt midtpunktmetode*, fordi y_{n+1} avheng av eit estimat for $y_{n+1/2}$ (derav implisitt) for å estimere tangenten i midpunktet mellom t_n og t_{n+1}. Substituer

$$u = \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \implies y_{n+1} = 2u - y_n$$

for å forenkle notasjonen litt. Dette gir likningssystemet

$$2u - y_n = y_n + hf(t + h/2, u)$$
$$\implies u = y_n + \frac{h}{2}f(t + h/2, u)$$
$$\implies y_n + \frac{h}{2}f(t + h/2, u) - u = 0$$

som må løysast med omsyn til u for kvart tidssteg. Gitt ein verdi for u reknar vi ut y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t + h/2, u) \tag{6}$$

Anvending på problemet

Eitt steg gjenstår før vi kan implementere løysaren: Vi er nøtt å velgje ein måte å løyse det implisitte steget. Frå (1*) får vi, med $\mathbf{u} = (x\ y\ z)$, likninga

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} Ayz \\ Bxz \\ Cxy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Vi innlemmer $h/2$ i konstantane A, B og C. Til slutt sit vi att med systemet

$$\begin{cases} x_n + \hat{A}yz - x = 0 \\ y_n + \hat{B}xz - y = 0 \\ z_n + \hat{C}xy - z = 0 \end{cases}$$

der x_n, y_n, z_n, samt $\hat{A}$, $\hat{B}$ og $\hat{C}$ er kjende konstantar. Jacobian-matrisa lar seg enkelt rekne ut ved hjelp av symbolske verktøy, til dømes `sympy` i Python. Vi har

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} -1 & \hat{A}z & \hat{A}y \\ \hat{B}z & -1 & \hat{B}x \\ \hat{C}y & \hat{C}x & -1 \end{pmatrix}.$$

Altso kan vi finne $\mathbf{u} = (x\ \ y\ \ z)$ med å bruke Newtons metode:

$$\mathbf{u} \longleftarrow \mathbf{u} - \mathcal{J}_{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u})$$

som burde konvergere i løpet av svært få iterasjonar dersom vi brukar førre iterasjon som startpunkt, og relativt kort skrittlengde.

Referansar

[1] J. R. Lien og G. Løvhøiden, *Generell fysikk for universiteter og høgskoler* (2015).