

Initialverdi-oppgåver

Steffen Haug

27. mars 2019

I. DIFFUSJONSLIKNINGA

Gitt initialverdiproblemet

$$\phi(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2)$$

vil vi finne $\phi(x, t)$. Eg går ut frå at $x_0 = 0$. Dette går bra: So lenge ingen potensial er til stades vil det same skje med ei fordeling om $x = x_0$ som med den same fordelinga om $x = 0$, så vi kan berre flytte koordinatane i etterkant.

Vi treng hugse nokre få ting. Fourier-framstilling av δ -funksjonen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} dk e^{-ikx} \quad (3)$$

Taylor-utvikling av ϕ om $t = 0$:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} \right|_{t=0} \quad (4)$$

Leibniz' integral-regel:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{k=a}^{k=b} dk f(x, k) \right] = \int_{k=a}^{k=b} dk \frac{\partial f}{\partial x} \quad (5)$$

(bytte om rekkefølga på derivasjon og integrasjon, so lenge integrasjonsgrensene er uavhengige av variabelen vi deriverer med omsyn til) Frå (2) og (1) har vi:

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} = D^n \frac{\partial^{2n} \phi}{\partial x^{2n}}; \quad \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} \right|_{t=0} = D^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \delta(x) \quad (6)$$

som er det siste vi kjem til å få bruk for.

INTEGRAL-FRAMSTILLING

Skriv om (4) v. h. a. (6):

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[D^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \delta(x) \right]$$

Utvid $\delta(x)$ v. h. a. (3), og bytt integrasjon- og derivasjonsrekkefølge. (5) Eg droppar å skrive grensene; dei endrar seg ikkje.

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \sum \left[\frac{t^n}{n!} \frac{1}{2\pi} D^n \int dk \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} e^{-ikx} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum \left[\int dk \frac{t^n}{n!} D^n (-ik)^{2n} e^{-ikx} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \sum \left[\frac{(-Dtk^2)^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} e^{-Dtk^2} \end{aligned}$$

Skriv på grensene, og gjer koordinatskiftet:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} dk e^{-ik(x-x_0)} e^{-Dt k^2} \quad (7)$$

NORMALFORDELING

Vil evaluere integralet (7).

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} dk e^{-ik(x-x_0)} e^{-Dt k^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} dk e^{-(ak^2 + 2bik)}; \quad a = Dt \\ &\quad b = \frac{i}{2}(x - x_0) \quad (8) \\ &\stackrel{\pm}{=} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right) \end{aligned}$$

Som er det vi skulle vise. (4) er frå Rottmann.

FYSISK TOLKNING AV

DIFFUSJONSKOEFFISIENTEN

Tolkar vi (8) som ein sannsynstettleik, er variansen til tettleiken $\sigma^2 = 2Dt$. Fordelinga vert med andre ord *flatere* etter kvart som tida går framover, og jo høgare D er, jo raskare skjer utflatinga. D må derfor tolkast som “*farten*” til diffusjonsprosessen.

TIDSUTVIKLING AV VILKÅRLEG

INITIALVERDI

Vil løyse initialverdi problemet

$$\phi(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

og (2). Med andre ord betraktar vi vilkårlege initialverdiar. Eg ser ikkje korleis vi kan bruke hintet på en “enkel og grei måte”, så eg brukar ein betre måte. (:-)) Ta Fourier-transformasjonen av (2).

$$\hat{\phi} = \mathcal{F}\{\phi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} dx \phi e^{-i\omega x} \quad (10)$$

Ved hjelp av (5):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-i\omega x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} dx \phi e^{-i\omega x} \right] \quad (11) \\ &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \end{aligned}$$

Frå tabell:

$$\mathcal{F}\left\{D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right\} = -D\omega^2 \hat{\phi} \quad (12)$$

Ved å kombinere (10), (11) og (12) har vi fått ei ordinær differensiallikning,

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = -D\omega^2 \hat{\phi},$$

som vi kjenner løysinga til, gitt initialverdibetingelsen (9):

$$\hat{\phi}(\omega, t) = \hat{g}(\omega) e^{-Dt\omega^2}.$$

Høgresida er eit produkt av to Fourier-transformerte funksjonar, så ϕ er ein konvolusjon

$$\phi(x, t) = \frac{g * f}{\sqrt{2\pi}}; \quad f = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-Dt\omega^2}\}. \quad (13)$$

Invers Fourier-transformasjon:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-Dt\omega^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \quad (14)$$

Slår saman (13) og (14):

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}} \left[g(x) * \exp \left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{z=-\infty}^{z=\infty} dz \, g(z) \exp \left(-\frac{(x-z)^2}{4Dt} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Dette er en superposisjon av skalerte bell-kurver langs x -aksen.