Initialverdi-oppgåver

Steffen Haug

27. mars 2019

I. Diffusjonslikninga

Gitt initialverdiproblemet

$$\phi(x,0) = \delta(x - x_0) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2}$$

vil vi finne $\phi(x,t)$. Eg går ut frå at $x_0 = 0$. Dette går bra: So lenge ingen potensial er til stades vil det same skje med ei fordeling om $x = x_0$ som med den same fordelinga om $x = 0$, så vi kan berre flytte koordinatane i etterkant.

Vi treng hugse nokre få ting. Fourier-framstilling av δ-funksjonen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathrm{d}k\, e^{-ikx}. \tag{3}$$

Taylor-utvikling av ϕ om $t = 0$:

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} \right|_{t=0}. \tag{4}$$

Leibniz' integral-regel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\int_{k=a}^{k=b} f(x,k)\,\mathrm{d}k \right] = \int_{k=a}^{k=b} \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}k. \tag{5}$$

(bytte om rekkefølga på derivasjon og integrasjon, so lenge integrasjonsgrensene er uavhengige av variablen vi deriverer med omsyn til) Frå (2) og (1) har vi:

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} = D^n \frac{\partial^{2n} \phi}{\partial x^{2n}} \; ; \quad \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} \right|_{t=0} = D^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \delta(x), \tag{6}$$

som er det siste vi kjem til å få bruk for.

Integral-framstilling

Skriv om (4) v. h. a. (6):

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[D^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \delta(x) \right]$$

Utvid $\delta(x)$ v. h. a. (3), og bytt integrasjon- og derivasjonsrekkefølgje. (5) Eg droppar å skrive grensene; dei endrar seg ikkje.

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \sum \left[\frac{t^n}{n!} \frac{1}{2\pi} D^n \int \mathrm{d}k \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} e^{-ikx} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum \left[\int \mathrm{d}k \frac{t^n}{n!} D^n (-ik)^{2n} e^{-ikx} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\, e^{-ikx} \sum \left[\frac{\left(-Dtk^2\right)^n}{n!} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\, e^{-ikx} e^{-Dtk^2}
\end{aligned}$$

Skriv på grensene, og gjer koordinatskiftet:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathrm{d}k\, e^{-ik(x-x_0)} e^{-Dtk^2} \tag{7}$$

Normalfordeling

Vil evaluere integralet (7).

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathrm{d}k\, e^{-ik(x-x_0)} e^{-Dtk^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathrm{d}k\, e^{-(ak^2+2bk)}\ ; \quad \begin{aligned} a &= Dt \\ b &= \tfrac{i}{2}(x-x_0) \end{aligned} \\
&\overset{\ddagger}{=} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Som er det vi skulle vise. ($\ddagger$) er frå Rottmann.

Fysisk tolkning av diffusjonskoeffisienten

Tolkar vi (8) som ein sannsynstettleik, er variansen til tettleiken $\sigma^2 = 2Dt$. Fordelinga vert med andre ord *flatare* etter kvart som tida går framover, og jo høgare D er, jo raskare skjer utflatinga. D må derfor tolkast som *"farten"* til diffusjonsprosessen.

Tidsutvikling av vilkårleg initialverdi

Vil løyse initialverdiproblemet

$$\phi(x,0) = g(x) \tag{9}$$

og (2). Med andre ord betraktar vi vilkårlege initialverdiar. Eg ser ikkje korleis vi kan bruke hintet på en "enkel og grei måte", så eg brukar ein betre måte. (:-)) Ta Fouriertransformasjonen av (2).

$$\hat{\phi} = \mathscr{F}\{\phi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \phi\, e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \tag{10}$$

Ved hjelp av (5):

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \phi\, e^{-i\omega x} \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{11}$$

Frå tabell:

$$\mathscr{F}\left\{D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right\} = -D\omega^2 \hat{\phi} \tag{12}$$

Ved å kombinere (10), (11) og (12) har vi fått ei ordinær differesiallikning,

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = -D\omega^2 \hat{\phi},$$

som vi kjenner løysinga til, gitt initialverdibetingelsen (9):

$$\hat{\phi}(\omega,t) = \hat{g}(\omega) e^{-Dt\omega^2}.$$

høgresida er eit produkt av to Fourier-transformerte funksjonar, så ϕ er ein konvolusjon

$$\phi(x,t) = \frac{g * f}{\sqrt{2\pi}}\ ; \quad f = \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-Dt\omega^2}\right\}. \tag{13}$$

Invers Fourier-transformasjon:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-Dt\omega^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{14}$$

Slår saman (13) og (14):

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2Dt}}\left[g(x) * \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{z=-\infty}^{z=\infty} \mathrm{d}z\, g(z)\exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4Dt}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

Dette er en superposisjon av skalerte bell-kurver langs x-aksen.