

# Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

---

## Πεδίο συχνοτήτων

# Σειρά / Μετασχηματισμός Fourier

---

## Σειρά Fourier

"Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ημιτόνων και / ή συνημιτόνων διαφορετικών συχνοτήτων, το κάθε ένα από τα οποία πολλαπλασιάζεται με διαφορετικό συντελεστή."

## Μετασχηματισμός Fourier

"Ακόμη και μη περιοδικές συναρτήσεις (των οποίων η περιοχή κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης είναι πεπερασμένη) μπορούν να εκφραστούν σαν το ολοκλήρωμα ημιτόνων και / ή συνημιτόνων πολλαπλασιασμένων με μια συνάρτηση βαρών."

Μια συνάρτηση που εκφράζεται με τη σειρά ή το μετασχηματισμό Fourier μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως με την αντίστροφη διαδικασία, χωρίς απώλειες πληροφορίας.

# Εικόνα και Μετασχηματισμός Fourier

---

Εικόνα: συνάρτηση πεπερασμένης διάρκειας



Μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα φιλτραρίσματος στο πεδίο των συχνοτήτων με σκοπό τη βελτίωση της εικόνας, αντίστοιχα με το χωρικό πεδίο

Φίλτρα εξομάλυνσης (smoothing)

Φίλτρα όξυνσης (sharpening)

# Εισαγωγικά στοιχεία - Μιγαδικοί

---

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από μιγαδικούς αριθμούς.

$$C = R + jI, \quad C^* = R - jI \text{ (συζυγής μιγαδικός)}$$

Μιγαδικοί αριθμοί: σημεία (R,I) στο μιγαδικό επίπεδο

Μιγαδικοί αριθμοί σε πολικές συντεταγμένες:

$$C = |C| (\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}, \quad \tan\theta = (I/R) \quad \text{ή} \quad \theta = \arctan(I/R)$$

$$\text{Τύπος Euler: } e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \rightarrow C = |C| e^{j\theta}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και για μιγαδικές συναρτήσεις, π.χ.  $F(u) = R(u) + jI(u)$ ,  $F^*(u) = R(u) - jI(u)$ , ...

# Εισαγωγικά στοιχεία - Σειρά Fourier

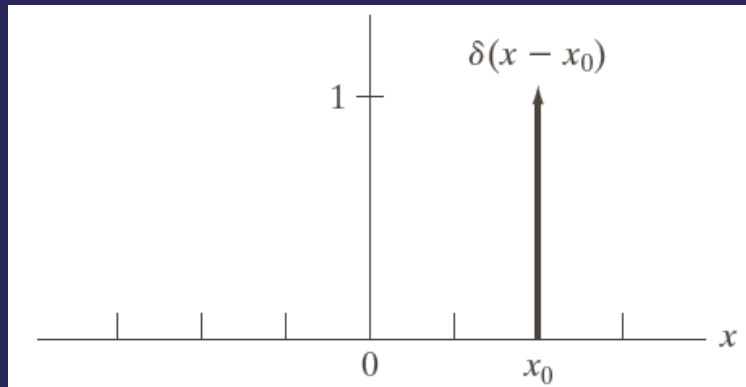
Μία συνάρτηση  $f(t)$  μιας συνεχούς μεταβλητής  $t$ , η οποία είναι περιοδική με περίοδο  $T$ , μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

Μέσω του τύπου Euler  
→ άθροισμα ημιτόνων  
και συνημιτόνων

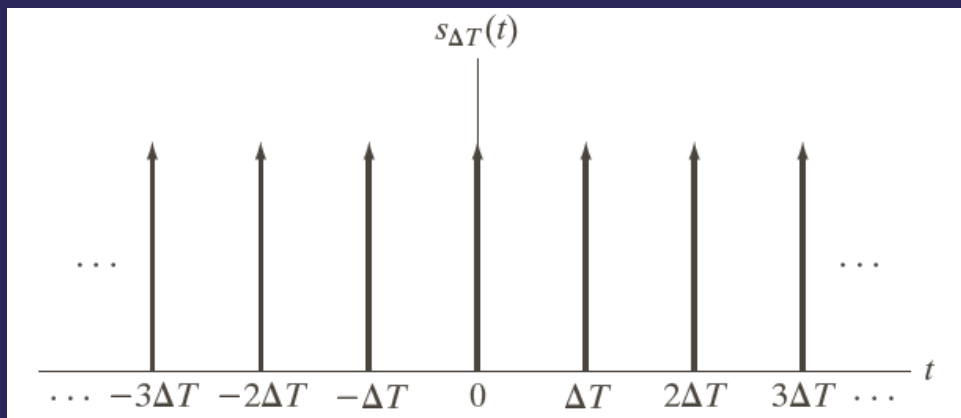
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt \quad \text{for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

# Εισαγωγικά στοιχεία - Παλμοί και ιδιότητα ολίσθησης



$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

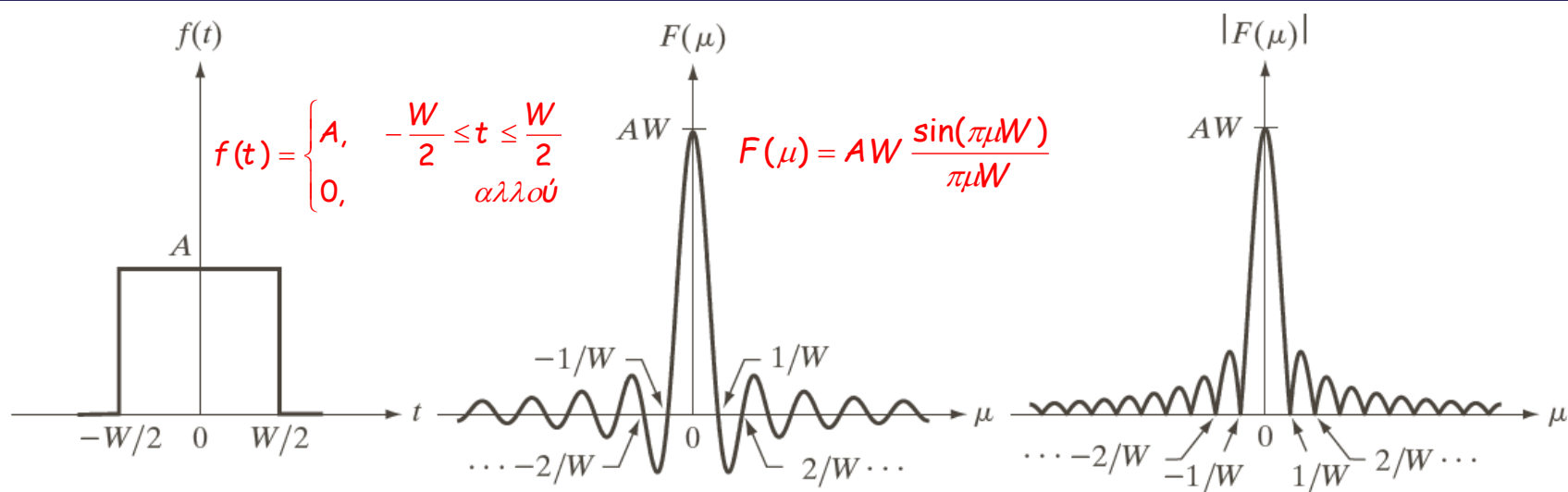


$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

# Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης μίας συνεχούς μεταβλητής

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j 2\pi \mu t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j 2\pi \mu t} d\mu$$



a b c

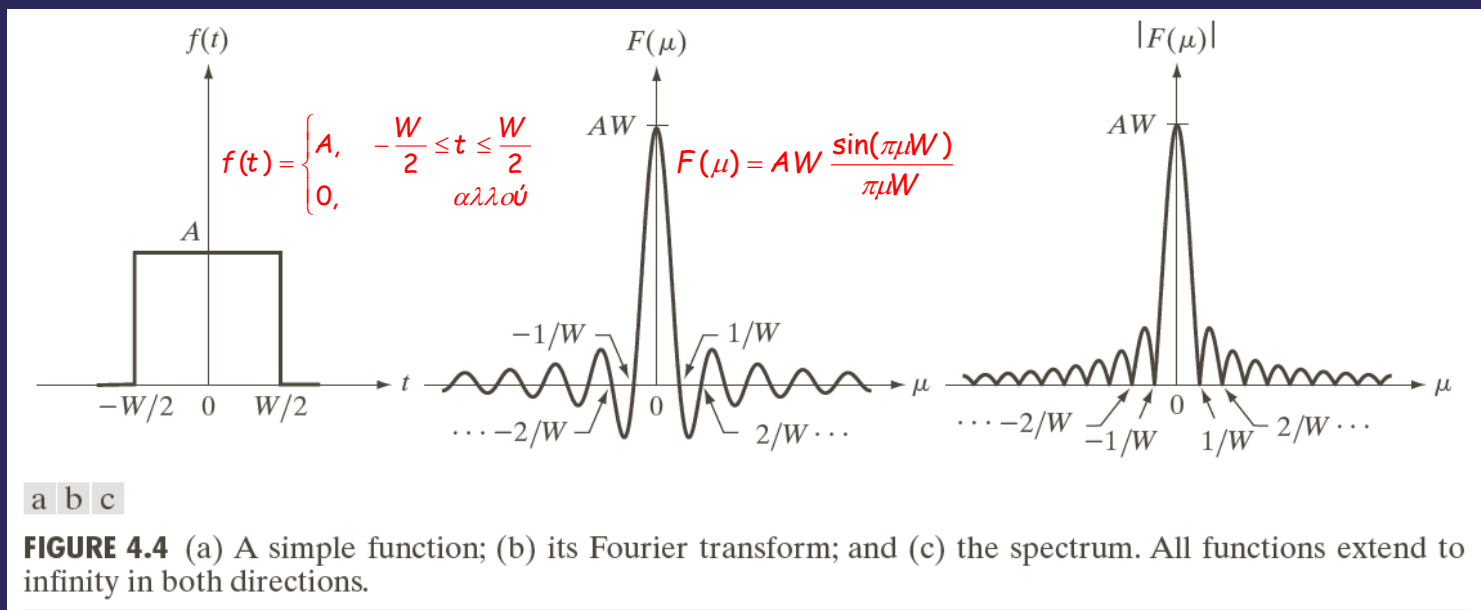
**FIGURE 4.4** (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

# Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης μίας συνεχούς μεταβλητής

Οι θέσεις των μηδενικών για την  $F(\mu)$  (και την  $|F(\mu)|$ ) είναι αντιστρόφως ανάλογες με το εύρος  $W$  του παλμού.

Το ύψος των λοβών είναι συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο (μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο).

Η συνάρτηση εκτείνεται στο άπειρο και για θετικές και για αρνητικές τιμές του  $\mu$ .





# Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης μίας συνεχούς μεταβλητής

---

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad F(\mu) = 1$$

σταθερά

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad F(\mu) = \cos(2\pi\mu t_0) - j \sin(2\pi\mu t_0)$$

μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το κέντρο  
του μιγαδικού επιπέδου

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad F(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

περίοδος  $\Delta T$  περίοδος  $1/\Delta T$

# Συνέλιξη συνεχών συναρτήσεων – Μετασχηματισμός Fourier

---

Συνέλιξη δύο συναρτήσεων:

Αναστροφή της μιας συνάρτησης (περιστροφή 180°)

Ολίσθηση πάνω στην άλλη

Συνέλιξη συνεχών συναρτήσεων  $f(t)$ ,  $h(t)$  μιας συνεχούς μεταβλητής  $t$ :

$$f(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Θεώρημα συνέλιξης (η βάση για φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων):

$$f(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow H(\mu) F(\mu)$$

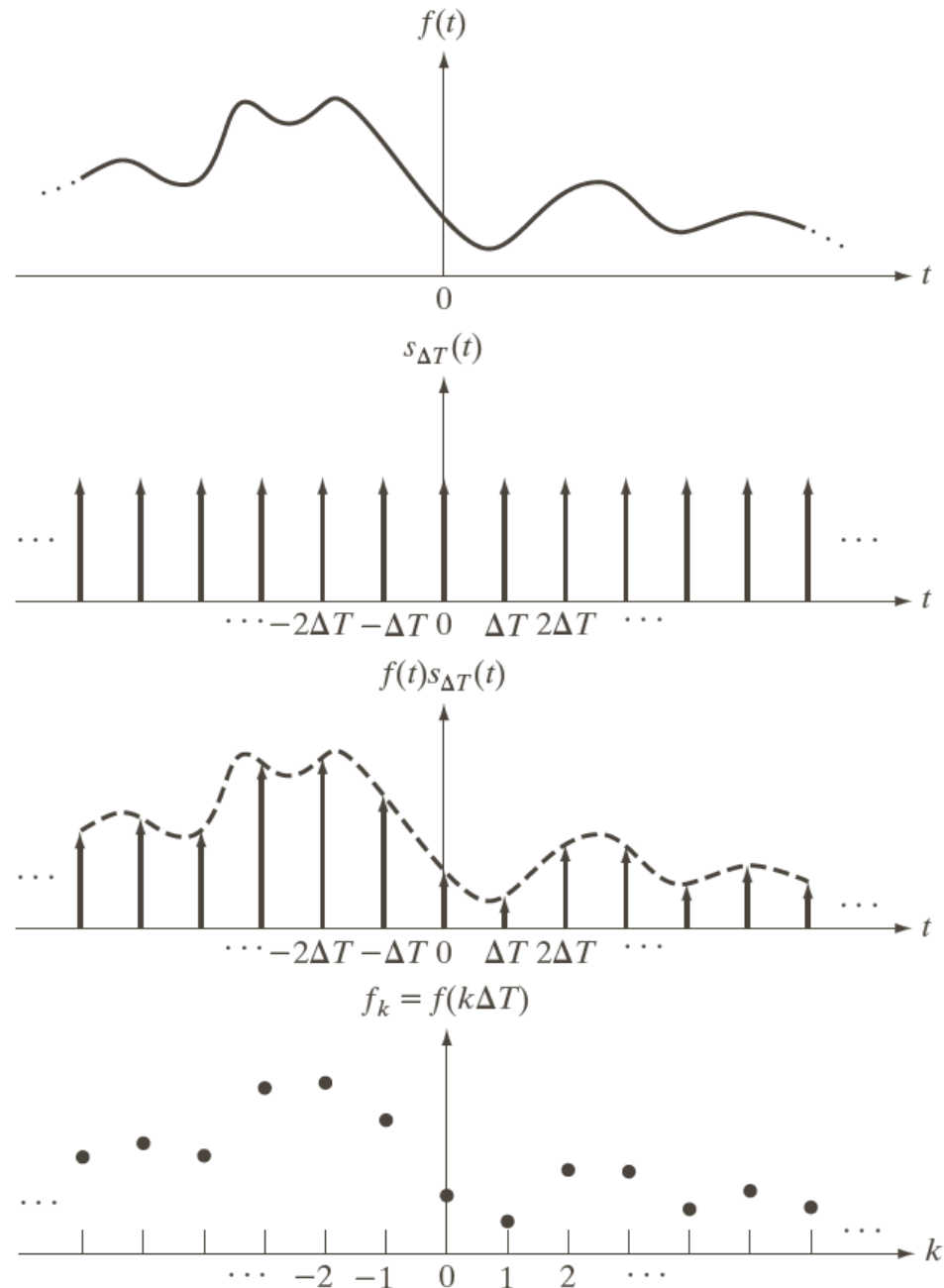
$$f(t) h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \otimes F(\mu)$$

# Δειγματοληψία (sampling)

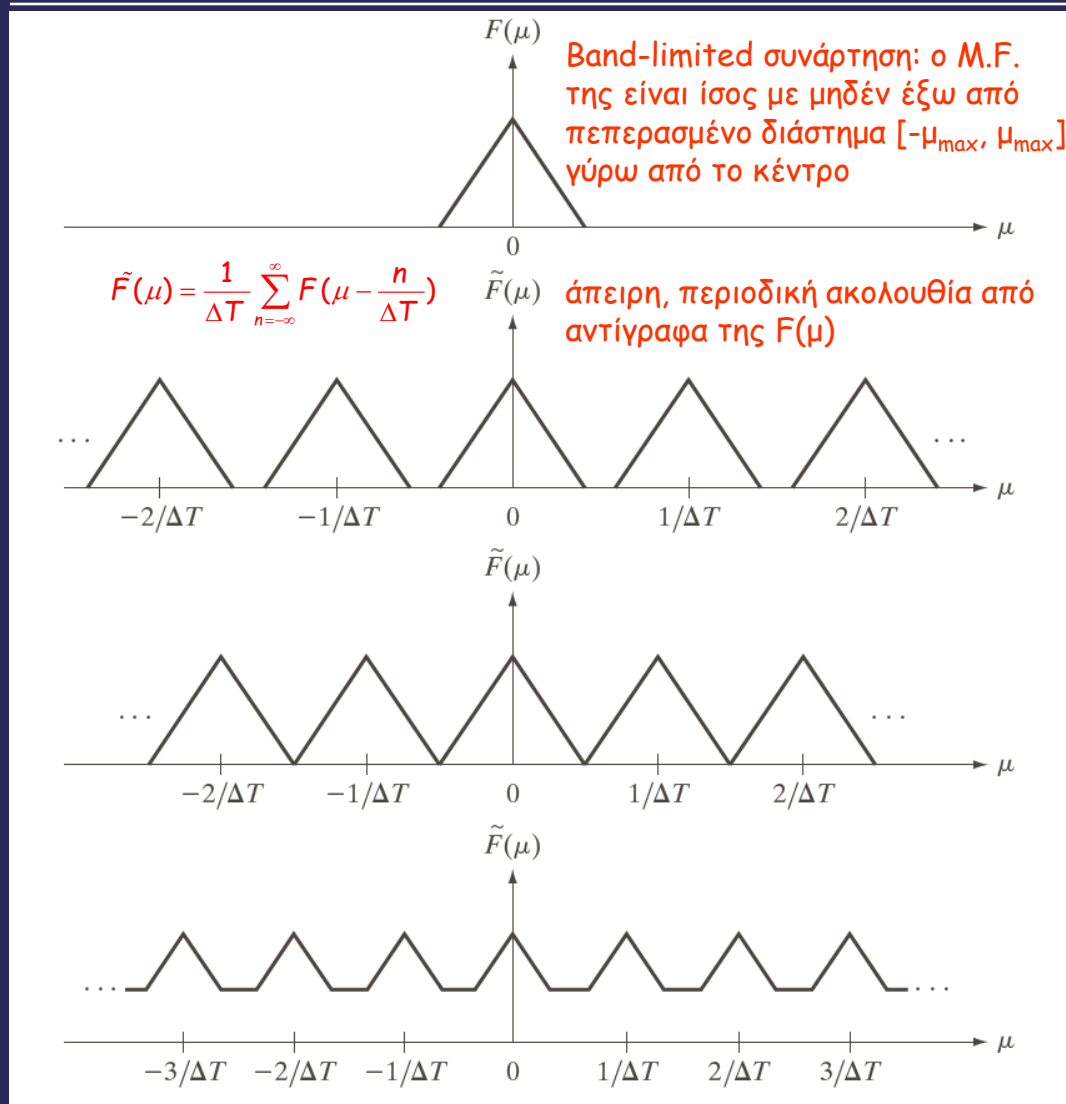
a  
b  
c  
d

**FIGURE 4.5**

(a) A continuous function. (b) Train of impulses used to model the sampling process. (c) Sampled function formed as the product of (a) and (b). (d) Sample values obtained by integration and using the sifting property of the impulse. (The dashed line in (c) is shown for reference. It is not part of the data.)



# Μετασχηματισμός Fourier δειγματοληπτημένης συνάρτησης



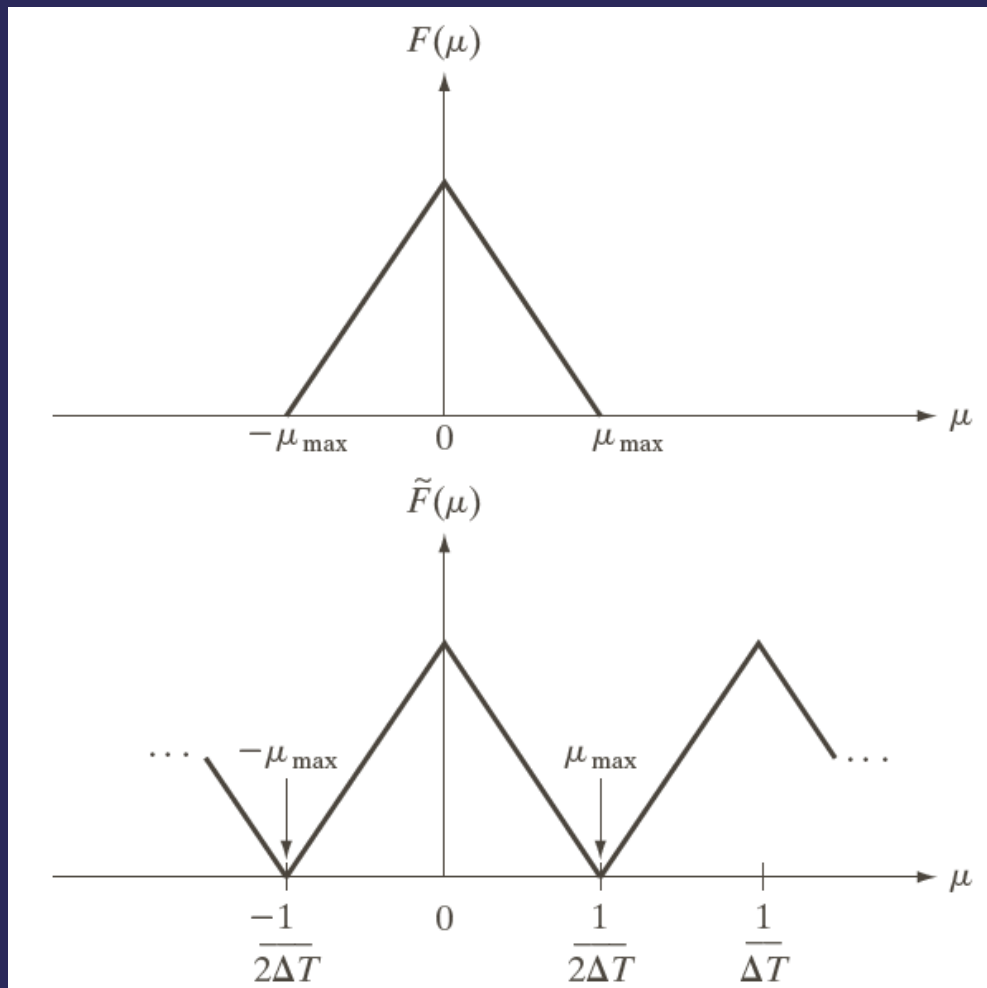
a  
b  
c  
d

**FIGURE 4.6**

(a) Fourier transform of a band-limited function.

(b)–(d) Transforms of the corresponding sampled function under the conditions of over-sampling, critically-sampling, and under-sampling, respectively.

# Θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist)



a  
b

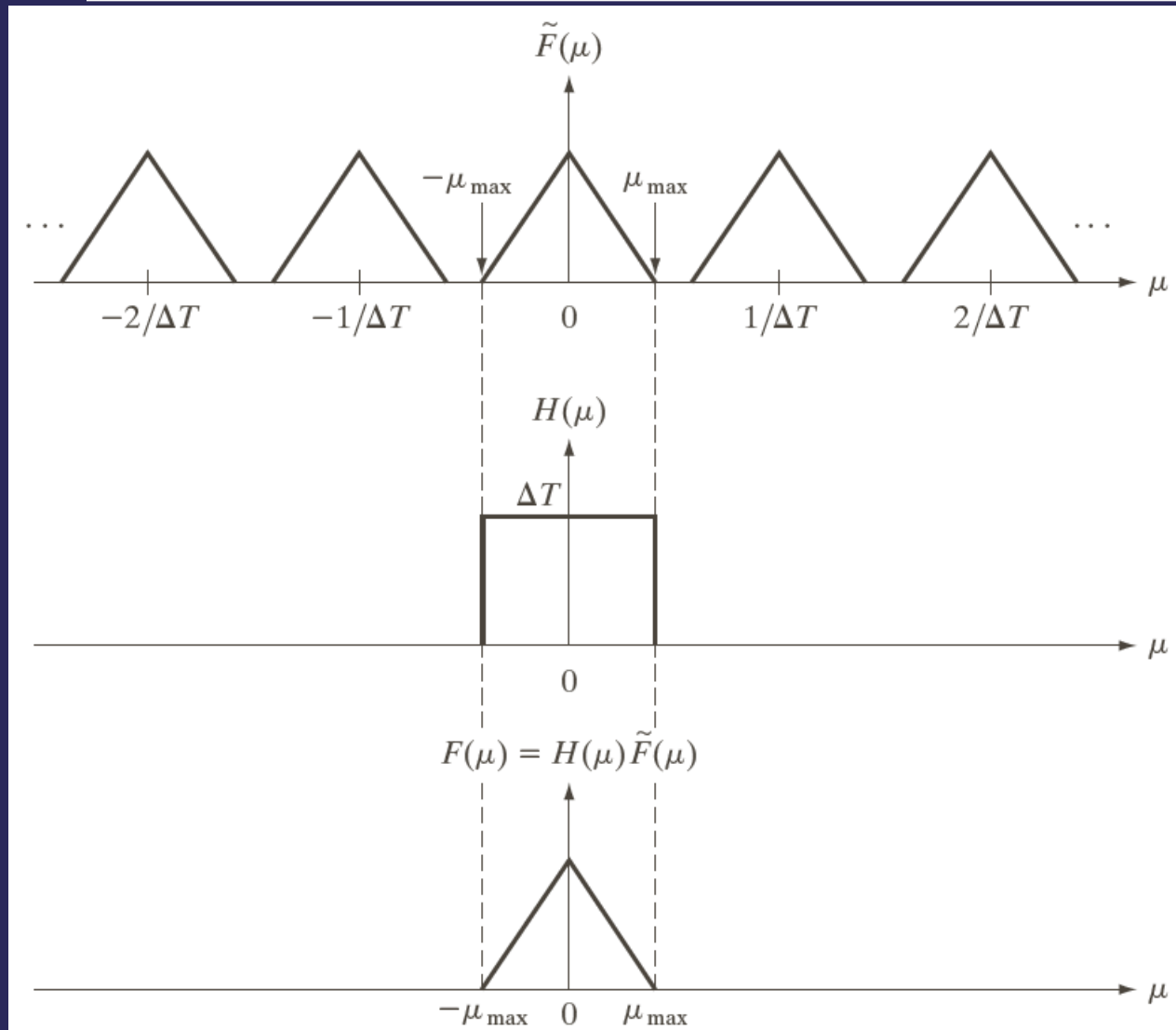
**FIGURE 4.7**

(a) Transform of a band-limited function.

(b) Transform resulting from critically sampling the same function.

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist)

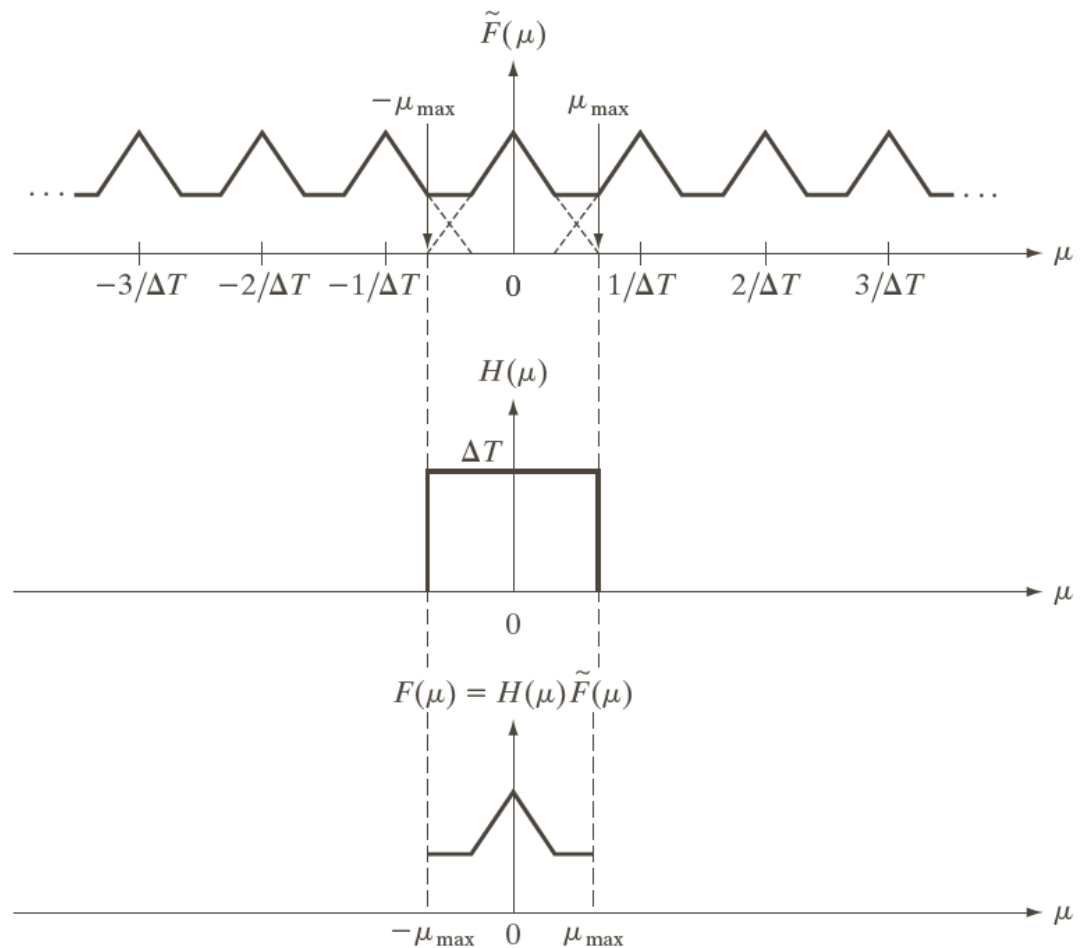


a  
b  
c

**FIGURE 4.8**  
Extracting one period of the transform of a band-limited function using an ideal lowpass filter.

# Aliasing

$$\frac{1}{\Delta T} < 2\mu_{\max}$$



a  
b  
c

**FIGURE 4.9** (a) Fourier transform of an under-sampled, band-limited function. (Interference from adjacent periods is shown dashed in this figure). (b) The same ideal lowpass filter used in Fig. 4.8(b). (c) The product of (a) and (b). The interference from adjacent periods results in aliasing that prevents perfect recovery of  $F(\mu)$  and, therefore, of the original, band-limited continuous function. Compare with Fig. 4.8.

# Aliasing

---



# Ανακατασκευή συνάρτησης από δείγματα

---

Χρειαζόμαστε φίλτρο  $H(\mu)$  για να απομονώσουμε μια περίοδο  $F(\mu)$  της  $\tilde{F}(\mu)$ :

$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$$

$H(\mu)$ : ιδανικό, χαμηλοπερατό φίλτρο

Συνάρτηση δειγματοληψίας:  $\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει το ανακατασκευασμένο σήμα:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \text{sinc}[(t - n\Delta T)/n\Delta T]$$

Στην πράξη, πεπερασμένο interpolation

- nearest-neighbor, bilinear, bicubic

# DFT (Discrete Fourier Transform) μιας μεταβλητής

---

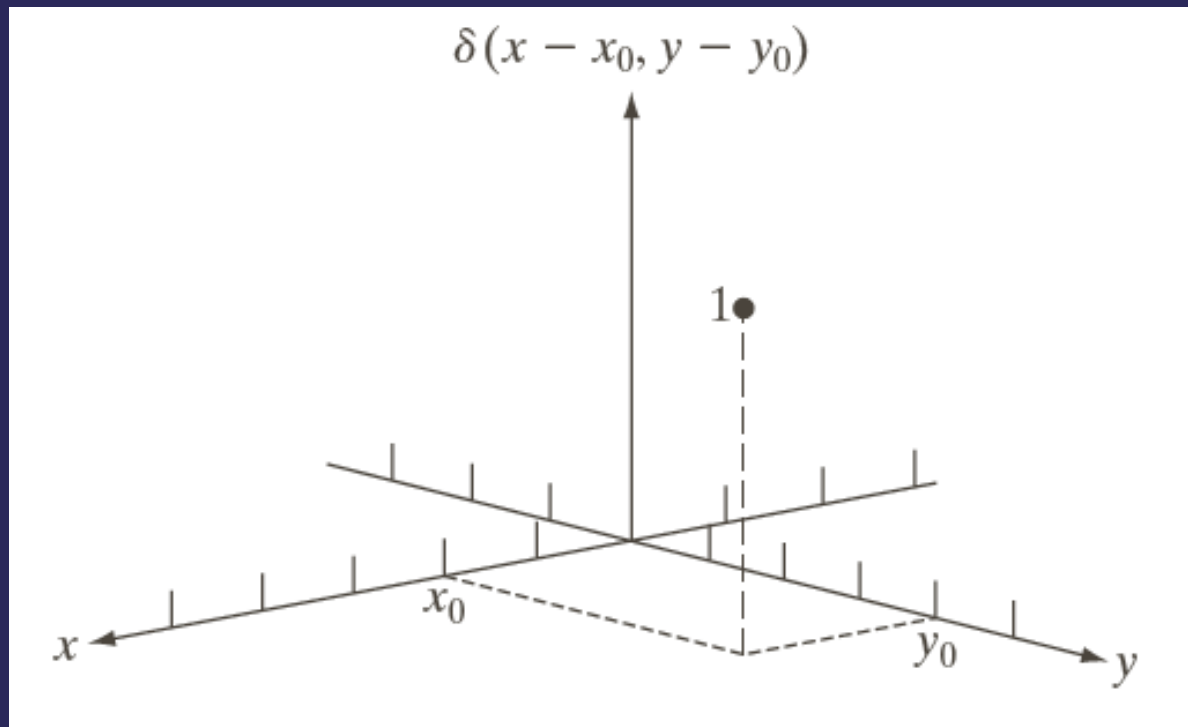
$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j 2\pi u x / M}, \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j 2\pi u x / M}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Διακριτό ισοδύναμο συνέλιξης

$$f(x) \circledast h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m) h(x-m), \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

# Συναρτήσεις 2 μεταβλητών

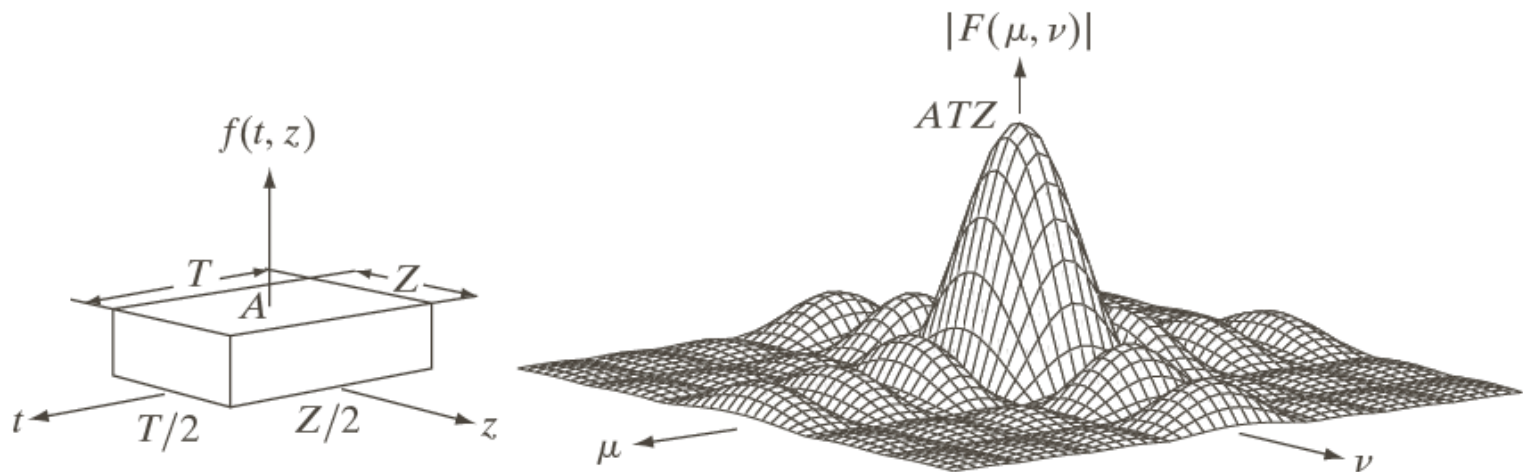


**FIGURE 4.12**  
Two-dimensional unit discrete impulse. Variables  $x$  and  $y$  are discrete, and  $\delta$  is zero everywhere except at coordinates  $(x_0, y_0)$ .

# 2D συνεχής μετασχηματισμός Fourier

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j 2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j 2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$



a b

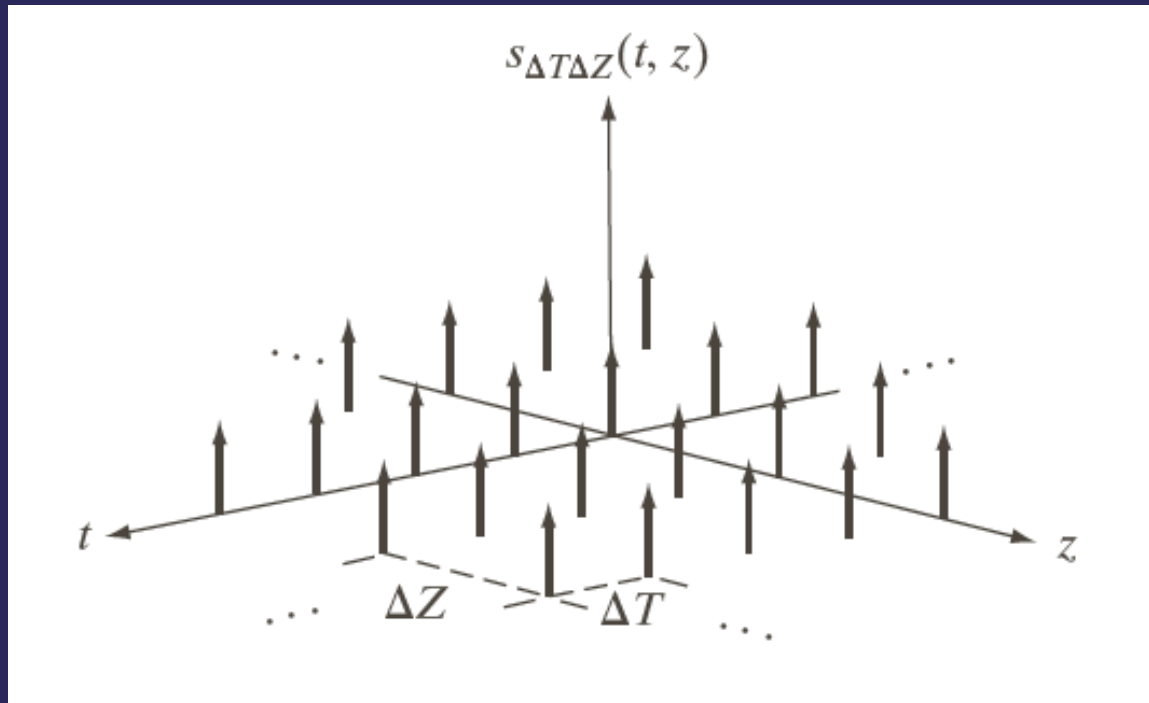
Θέσεις μηδενικών: αντιστρόφως ανάλογες των  $T$  και  $Z$

**FIGURE 4.13** (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the  $t$ -axis, so the spectrum is more “contracted” along the  $\mu$ -axis. Compare with Fig. 4.4.

# 2D δειγματοληψία

Συνάρτηση δειγματοληψίας:

$$s_{\Delta T \Delta Z} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$



## 2D - Θεώρημα δειγματοληψίας

---

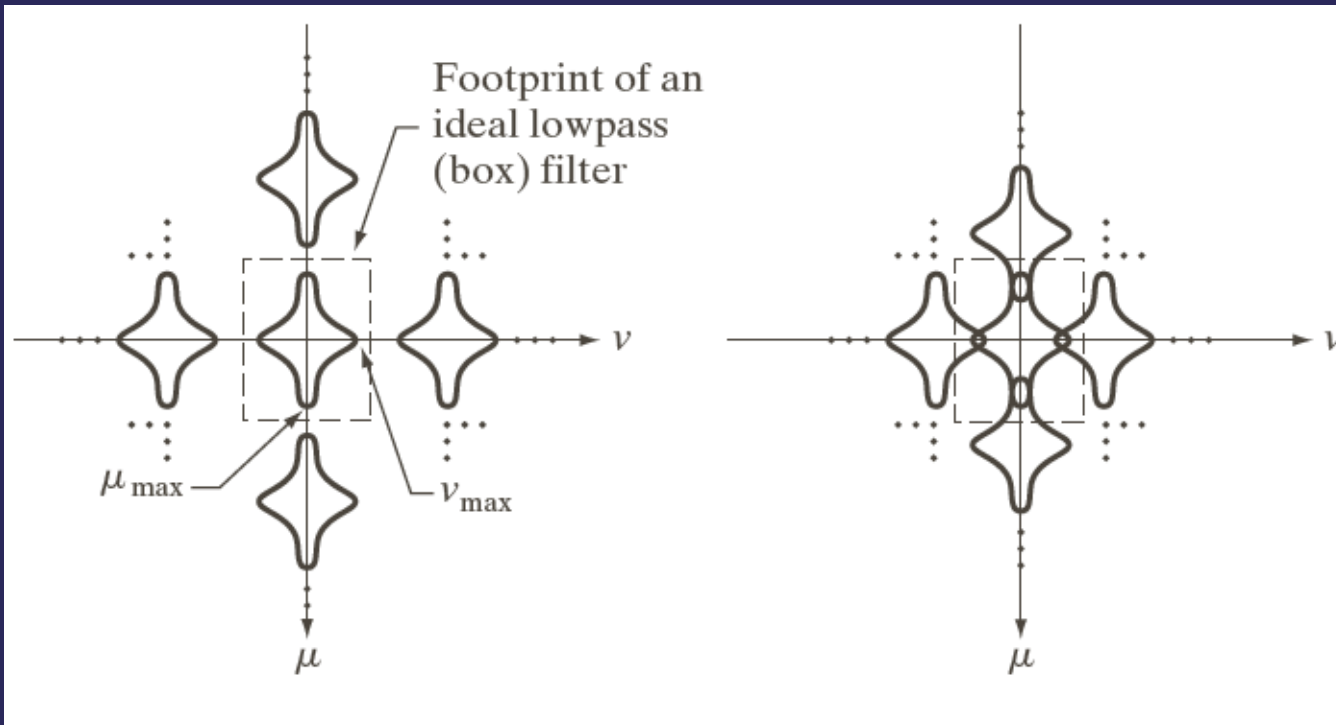
$f(t,z)$  band-limited, αν  $M.F. = 0$  έξω από μια τετράγωνη περιοχή που ορίζεται από τα διαστήματα  $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$  και  $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$

$$F(\mu, \nu) = 0, \quad \text{για } |\mu| \geq \mu_{\max} \text{ και } |\nu| \geq \nu_{\max}$$

Θεώρημα δειγματοληψίας (sampling theorem): η  $f(t,z)$  μπορεί να ανακατασκευαστεί χωρίς σφάλματα από τα δείγματά της αν

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{\max}$$

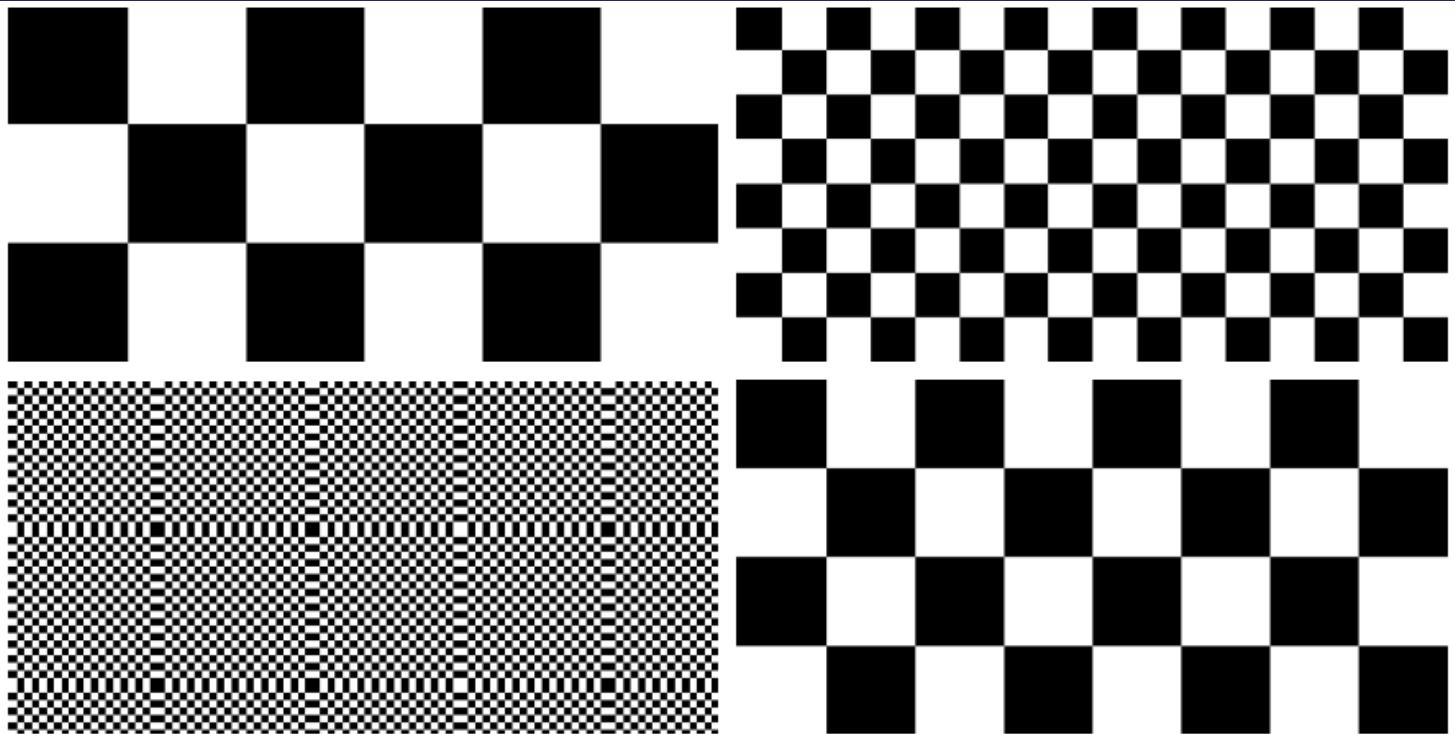
# Aliasing σε εικόνες



a b

**FIGURE 4.15**  
Two-dimensional  
Fourier transforms  
of (a) an over-  
sampled, and  
(b) under-sampled  
band-limited  
function.

# Aliasing σε εικόνες



a	b
c	d

**FIGURE 4.16** Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.



# Temporal aliasing

---

Σχετίζεται με τα χρονικά διαστήματα ανάμεσα στα frames μιας ακολουθίας εικόνων.

“Wagon Wheel” effect: τροχοί με ακτίνες κάποια στιγμή φαίνεται να περιστρέφονται αντίστροφα

Αυτό συμβαίνει γιατί ο ρυθμός λήψης των frames είναι χαμηλός σε σχέση με την ταχύτητα περιστροφής του τροχού στην ακολουθία των εικόνων.

# Παρεμβολή σε εικόνα και επαναδειγματοληψία

---

Ειδική περίπτωση nearest-neighbor interpolation που ταιριάζει με το over-sampling / under-sampling:

Μεγέθυνση (zooming) εικόνας με επανάληψη pixels (επανάληψη γραμμών και στηλών, π.χ. για διπλασιασμό του μεγέθους της εικόνας)

Σμίκρυνση (shrinking) εικόνας με διαγραφή γραμμών και στηλών (π.χ. υποδιπλασιασμός μεγέθους εικόνας)

Βασική διαφορά: η μεγέθυνση και η σμίκρυνση εφαρμόζονται σε ψηφιακές εικόνες

# Παρεμβολή σε εικόνα και επαναδειγματοληψία



a b c

**FIGURE 4.17** Illustration of aliasing on resampled images. (a) A digital image with negligible visual aliasing. (b) Result of resizing the image to 50% of its original size by pixel deletion. Aliasing is clearly visible. (c) Result of blurring the image in (a) with a  $3 \times 3$  averaging filter prior to resizing. The image is slightly more blurred than (b), but aliasing is not longer objectionable. (Original image courtesy of the Signal Compression Laboratory, University of California, Santa Barbara.)

# 2D DFT - IDFT

---

Έστω  $f(x,y)$  ψηφιακή εικόνα μεγέθους  $M \times N$ .

$$\text{DFT: } F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j 2\pi (ux / M + vy / N)}$$

για  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  και  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$\text{IDFT: } f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j 2\pi (ux / M + vy / N)}$$

για  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  και  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$

# Ιδιότητες 2D DFT

## Διαχωρίσιμη Ακολουθία

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \Leftrightarrow F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

Άρα 2D DFT: διαχωρίζεται σε 1D DFT  $\rightarrow$  υπολογισμός 2D DFT εφαρμόζοντας τον 1D DFT σε γραμμές και στήλες

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j 2\pi ux / M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j 2\pi vy / N} = \sum_{x=0}^{M-1} F(x,v) e^{-j 2\pi ux / M}$$

$$\text{όπου} \quad F(x,v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j 2\pi vy / N}$$

Πολυπλοκότητα 2D DFT: της τάξης των  $(MN)^2$  πολλαπλασιασμών και προσθέσεων

Πολυπλοκότητα υπολογισμού κατά γραμμές και στήλες (χρησιμοποιώντας τον 1D γρήγορο μετασχηματισμό Fourier - **FFT**):  $(MN)\log_2(MN)$

# Ιδιότητες 2D DFT

## Μετατόπιση

Μπορεί να αποδειχτεί, με αντικατάσταση στους τύπους των DFT-IDFT, ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες μετατόπισης:

$$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)}$$

Η μετατόπιση δεν έχει καμία επίδραση στο μέτρο (φάσμα) του  $F(u, v)$ .

## Περιστροφή

Χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = \omega\cos\phi, v = \omega\sin\phi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$

# Ιδιότητες 2D DFT

## Περιοδικότητα

Χρήσιμη στην υλοποίηση αλγορίθμων βασισμένων σε DFT

DFT-IDFT: απείρως περιοδικοί στις  $u$  και  $v$  διευθύνσεις

$$F(u, v) = F(u+k_1M, v) = F(u, v+k_2N) = F(u+k_1M, v+k_2N)$$

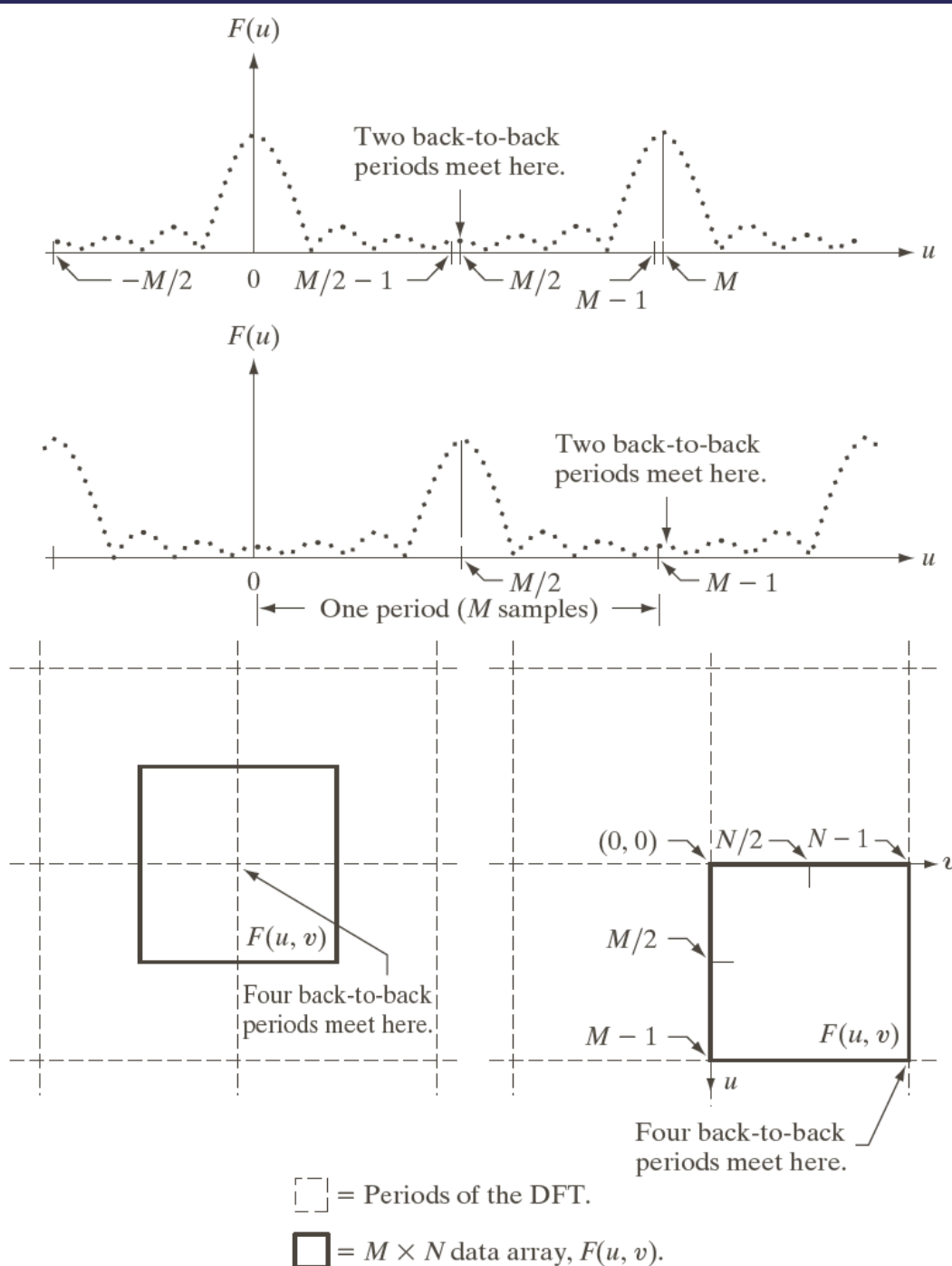
$$f(x, y) = f(x+k_1M, y) = f(x, y+k_2N) = f(x+k_1M, y+k_2N)$$

$$f(x)e^{j2\pi(u_0x/M)} \Leftrightarrow F(u-u_0)$$

$$u_0 = M/2 \Rightarrow e^{j2\pi(u_0x/M)} = e^{j\pi x} = (-1)^x \quad x \text{ ακέραιος}$$

$$f(x)(-1)^x \Leftrightarrow F(u-M/2) \quad F(0) \text{ στο κέντρο του } [0, M-1]$$

$$2D \Rightarrow f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2, v-N/2) \quad F(0,0) \text{ στο } (M/2, N/2)$$



**FIGURE 4.23**

Centering the Fourier transform. (a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods. (b) Shifted DFT obtained by multiplying  $f(x)$  by  $(-1)^x$  before computing  $F(u)$ . (c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the  $M \times N$  data array,  $F(u, v)$ , obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods. (d) A Shifted DFT obtained by multiplying  $f(x, y)$  by  $(-1)^{x+y}$  before computing  $F(u, v)$ . The data now contains one complete, centered period, as in (b).



# Ιδιότητες 2D DFT

---

Γραμμικότητα

$$\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \Leftrightarrow \alpha F_1(u, v) + \beta F_2(u, v)$$

2D Θεώρημα συνέλιξης

$$f(x, y) \circledast h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circledast H(u, v)$$

2D Θεώρημα συσχέτισης

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$$

$$f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

# Ιδιότητες 2D DFT

2D Θεώρημα συνέλιξης: η βάση του γραμμικού φιλτραρίσματος

DFT: εισάγει περιοδικότητα, η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη στον υπολογισμό της συνέλιξης

Συνέλιξη περιοδικών συναρτήσεων: περιοδική συνάρτηση

Κοντίνες περίοδοι  $\rightarrow$  interference  $\rightarrow$  wraparound error

Λύση: zero padding

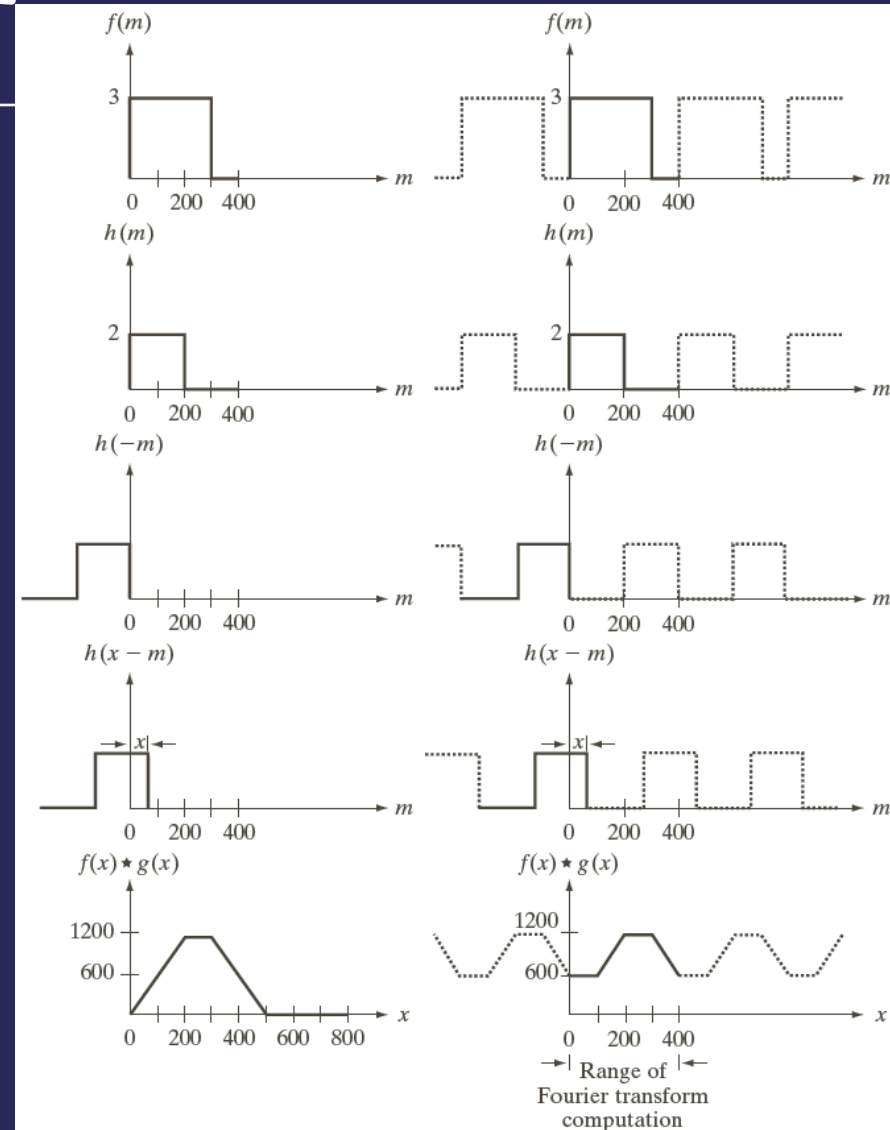
π.χ. Μήκος  $f(x)$ :  $A$ , μήκος  $h(x)$ :  $B$   
Προσάρτηση μηδενικών στις παραπάνω ακολουθίες, νέο μήκος  $P$

$$P \geq A + B - 1$$

2D: Μήκος  $f(x,y)$ :  $A \times B$ , μήκος  $h(x,y)$ :  $C \times D$ , νέο μήκος  $P \times Q$

$$P \geq A + C - 1$$

$$Q \geq B + D - 1$$



# Φάσμα και φάση

---

$$2D \text{ DFT: } F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$$

$$\text{Φάσμα (πλάτος): } |F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2}$$

$$\text{Γωνία φάσης: } \phi(u,v) = \arctan[ I(u,v)/R(u,v) ]$$

$$\text{Φάσμα ισχύος: } P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

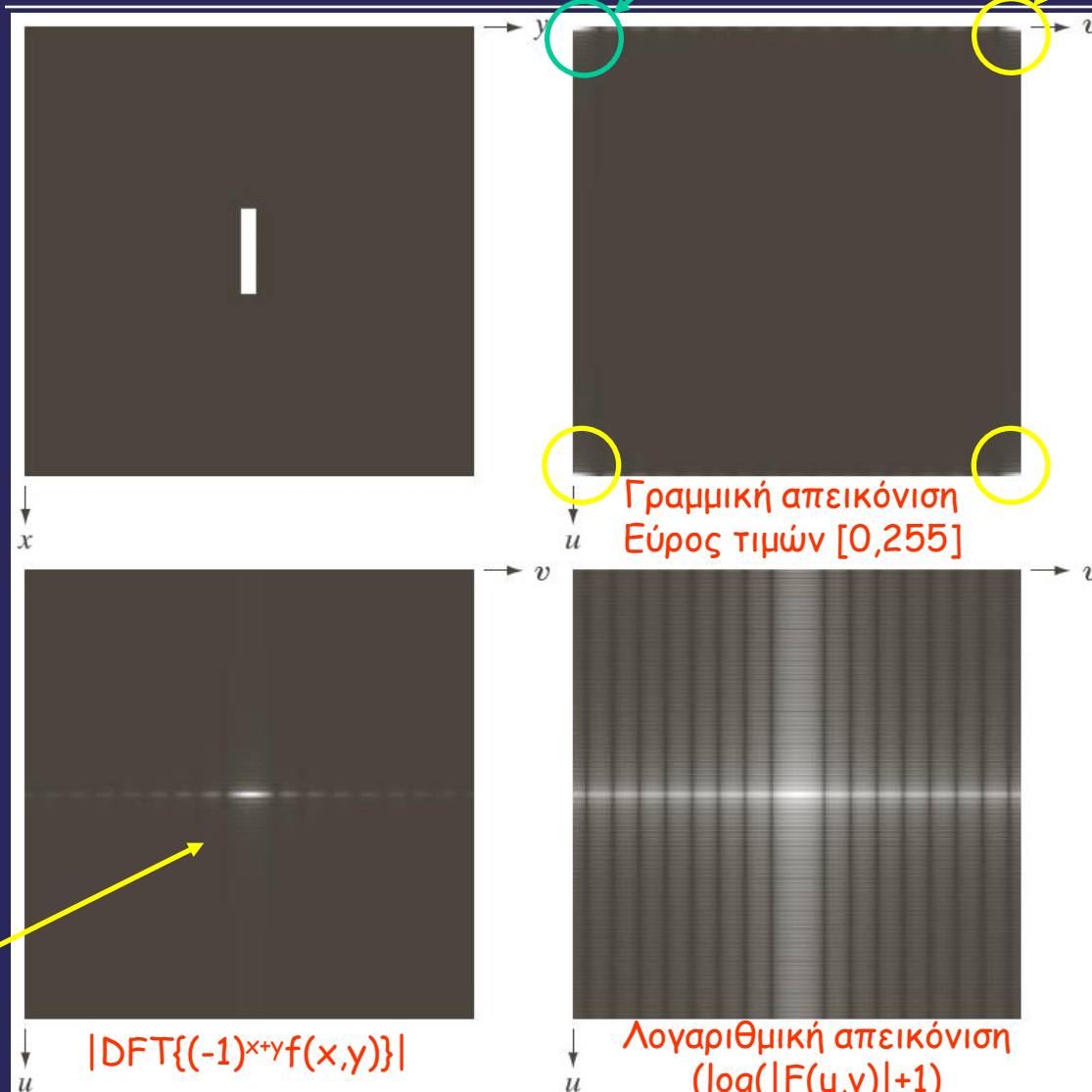
dc component:  $F(0,0)$  ανάλογο της μέσης τιμής της  $f(x,y)$ ,  
 $|F(0,0)|$ : το στοιχείο του φάσματος με τη μεγαλύτερη τιμή

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN \bar{f}(x,y)$$

# Φάσμα και φάση

Οι μεγαλύτερες τιμές

Επίσης μεγάλες τιμές εξαιτίας της περιοδικότητας



a	b
c	d

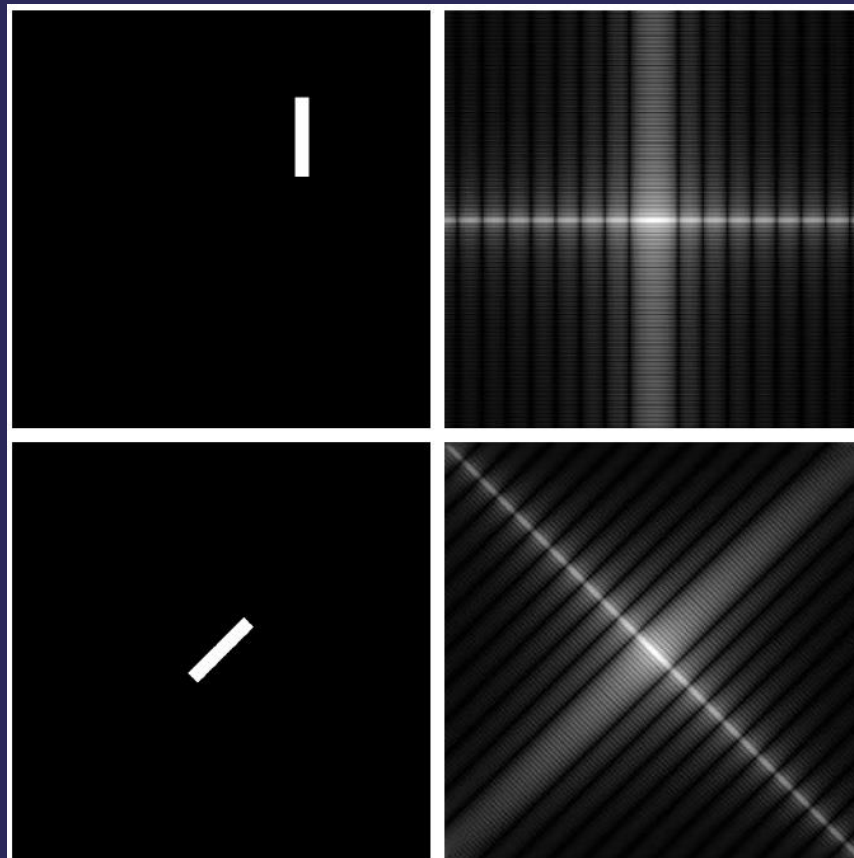
**FIGURE 4.24**

(a) Image. (b) Spectrum showing bright spots in the four corners. (c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

# Φάσμα και φάση

Το φάσμα μένει ανεπηρέαστο στη μετατόπιση της εικόνας.

Το φάσμα περιστρέφεται κατά την ίδια γωνία με τη περιστραμμένη εικόνα.



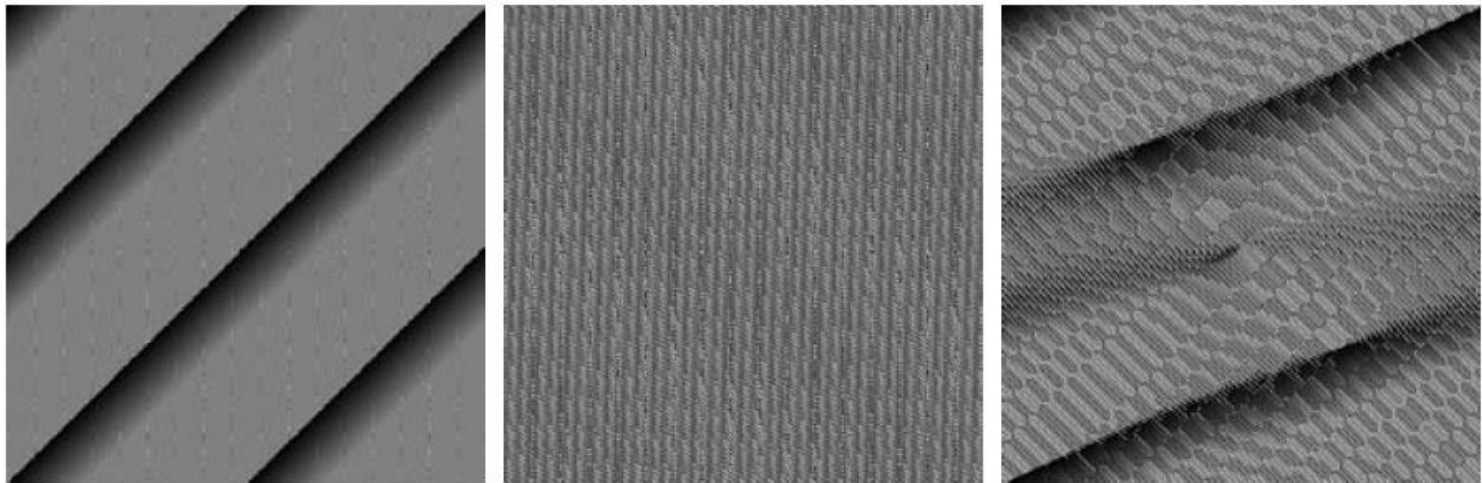
a	b
c	d

**FIGURE 4.25**  
(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

# Φάσμα και φάση

Μετατοπισμένη εικόνα → το φάσμα παραμένει ίδιο, άρα η φάση πρέπει να μεταβάλλεται

Η οπτική ανάλυση της φάσης παρέχει ελάχιστη διαισθητική πληροφορία.



a b c

**FIGURE 4.26** Phase angle array corresponding (a) to the image of the centered rectangle in Fig. 4.24(a), (b) to the translated image in Fig. 4.25(a), and (c) to the rotated image in Fig. 4.25(c).

# Φάσμα και φάση

---

**Στοιχεία φάσματος του DFT:** καθορίζουν το πλάτος των ημιτονοειδών που συνδυάζονται για να δημιουργήσουν την εικόνα

Σε κάθε συχνότητα, μεγάλο πλάτος σημαίνει μεγαλύτερη συμμετοχή του ημιτόνου αυτής της συχνότητας στην εικόνα και αντίστροφα.

Η συνεισφορά των **στοιχείων της φάσης** στην εικόνα είναι λιγότερο δια αισθητική, αλλά το ίδιο σημαντική.

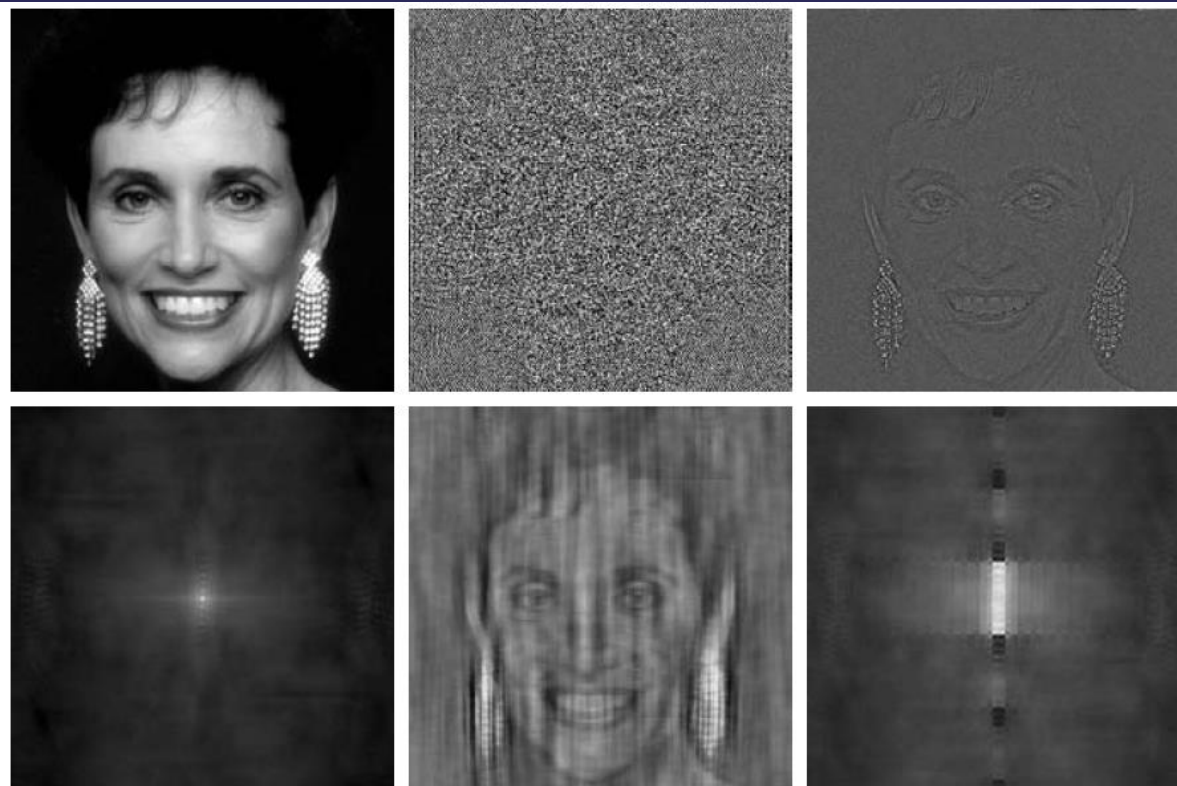
**Φάση:** μέτρο της απόστασης των ημιτονοειδών από την αρχή των συντεταγμένων

**Μέτρο DFT:** ένα array από στοιχεία του καθορίζουν τις εντάσεις (intensities) στην εικόνα

**Φάση:** ένα array από γωνίες, το οποίο φέρει πληροφορία για τη θέση των αντικειμένων στην εικόνα



# Φάσμα και φάση



a	b	c
d	e	f

**FIGURE 4.27** (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.



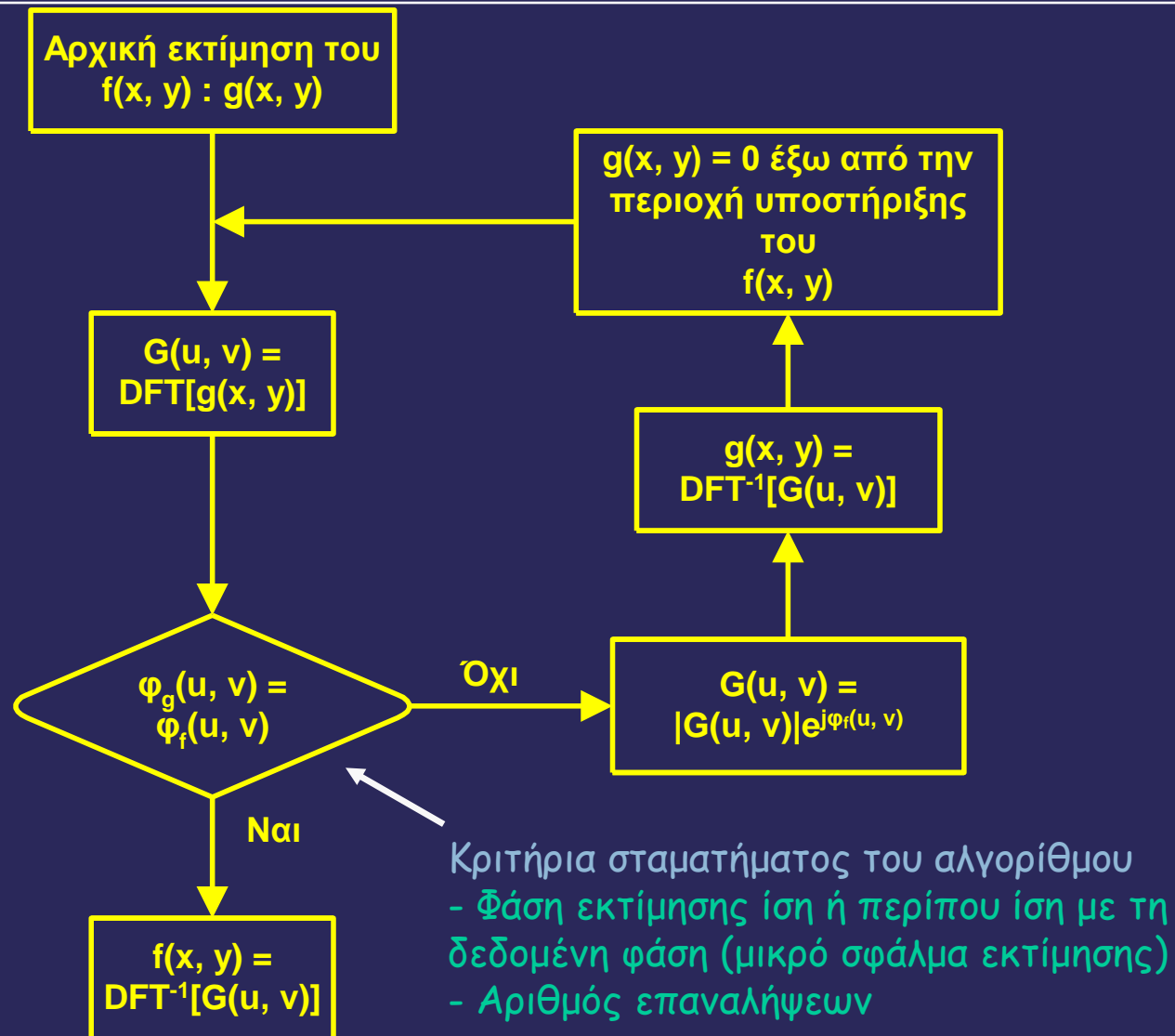
# Ανακατασκευή εικόνας από τη φάση

---

## Επαναληπτικός αλγόριθμος:

1. Αρχική εκτίμηση εικόνας: οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία με περιοχή υποστήριξης ίδια με αυτή της δεδομένης εικόνας
2. Υπολογισμός του DFT της αρχικής εκτίμησης της εικόνας (μετά από zero-padding)
3. Αν η φάση είναι ίση με τη φάση της δεδομένης εικόνας  $\rightarrow$  υπολογισμός IDFT, αλλιώς:
  - a. Αντικατάσταση της φάσης με τη φάση της δεδομένης εικόνας (το πλάτος του DFT παραμένει το ίδιο)
  - b. Υπολογισμός IDFT
  - c. Η ακολουθία που προκύπτει γίνεται μηδέν έξω από την περιοχή υποστήριξης και αποτελεί μια νέα εκτίμηση.
  - d. Επανάληψη του βήματος 2

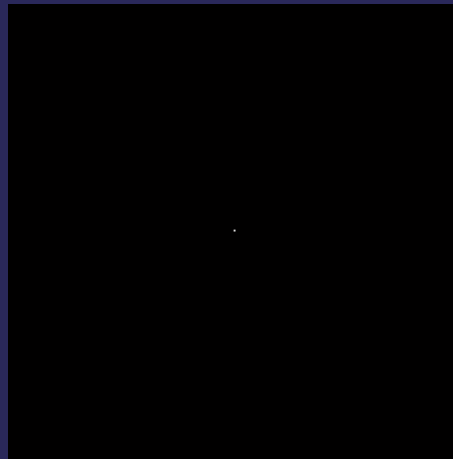
# Ανακατασκευή εικόνας από τη φάση



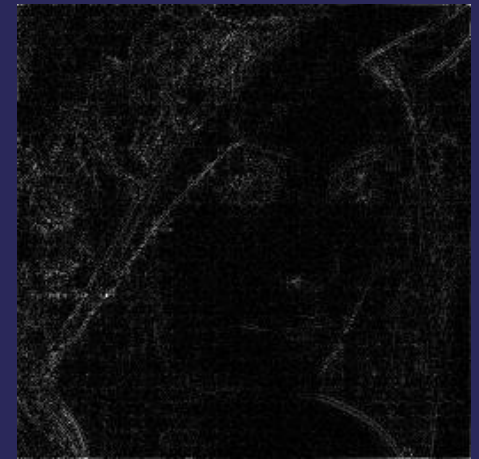
# Ανακατασκευή εικόνας από τη φάση



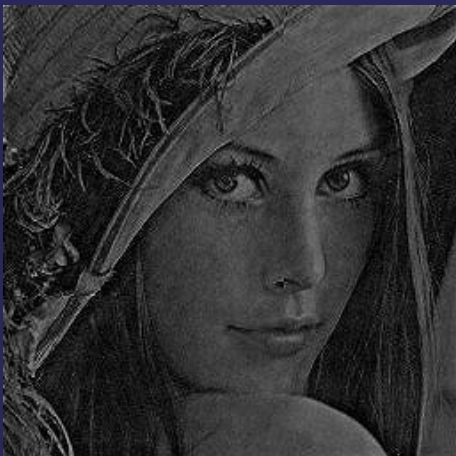
Αρχική Εικόνα, 256×256



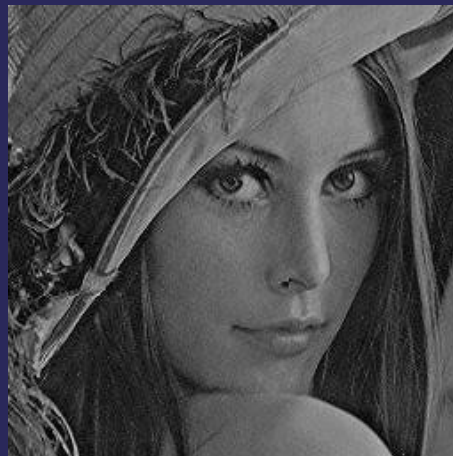
Αρχική Εκτίμηση,  
(128,128) = 255



Μετά από 1 επανάληψη



Μετά από 10 επαναλήψεις



Μετά από 50 επαναλήψεις



Μετά από 200  
επαναλήψεις

# Επιπλέον χαρακτηριστικά του πεδίου συχνοτήτων

---

Κάθε όρος του  $F(u,v)$  περιλαμβάνει όλες τις τιμές της  $f(x,y)$ , τροποποιημένες από τις τιμές των εκθετικών όρων

Αδύνατος ο άμεσος συσχετισμός στοιχείων της εικόνας και του μετασχηματισμού

Γενικοί ισχυρισμοί για τη σχέση κάποιων συχνοτικών στοιχείων με τα χωρικά χαρακτηριστικά της εικόνας

Η συχνότητα σχετίζεται άμεσα με το ρυθμό των μεταβολών στο χωρικό πεδίο.

Το πιο αργά μεταβαλλόμενο στοιχείο στη συχνότητα ( $u=v=0$ ) είναι ανάλογο με τη μέση τιμή της εικόνας.

Οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε αργές μεταβολές στις τιμές της έντασης της εικόνας (π.χ. ομαλές περιοχές)

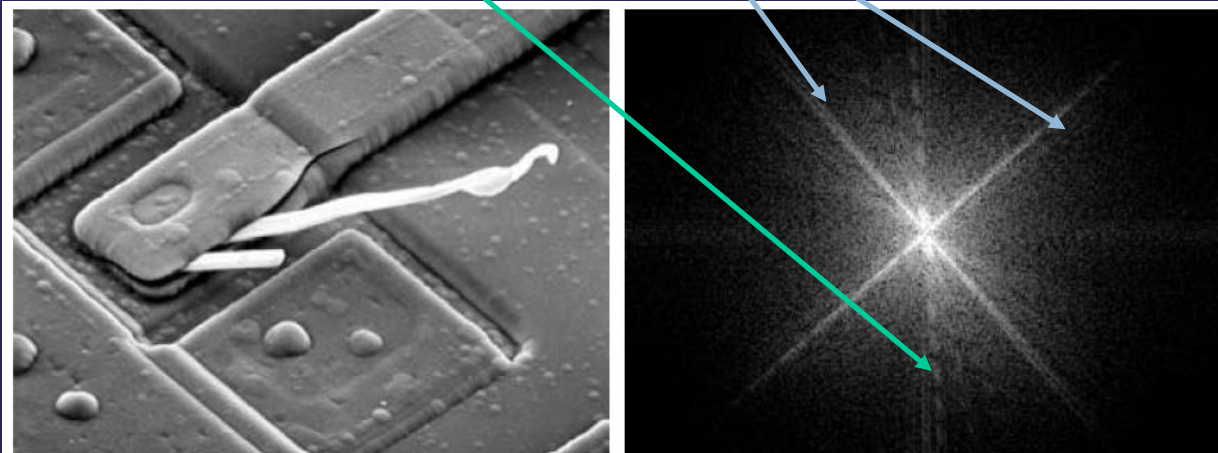
Οι υψηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε απότομες μεταβολές στην ένταση της εικόνας (π.χ. ακμές)

# Επιπλέον χαρακτηριστικά του πεδίου συχνοτήτων

Το φάσμα δίνει χρήσιμη πληροφορία για κάποια χοντρικά χαρακτηριστικά της εικόνας.

2 κυρίαρχα χαρακτηριστικά

- έντονες ακμές σε γωνίες  $\pm 45^\circ$
- λευκές γραμμές



a b

**FIGURE 4.29** (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

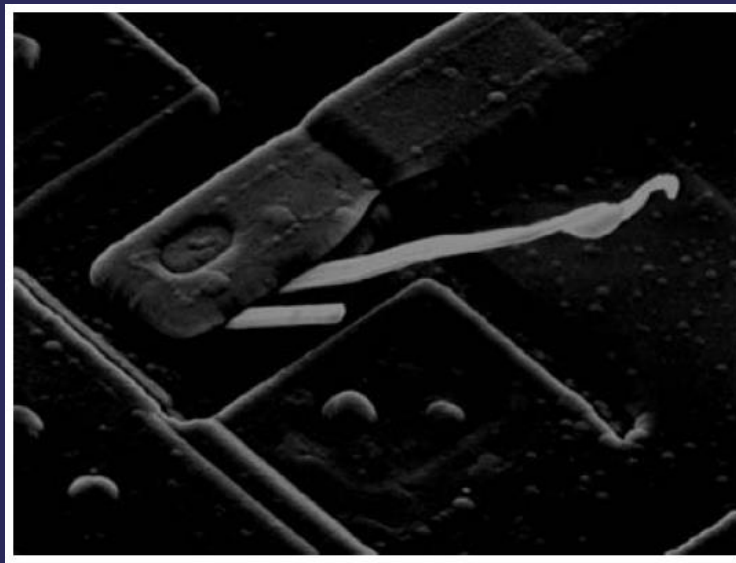
# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

$$g(x,y) = \text{IDFT}\{ H(u,v)F(u,v) \}$$

Μέγεθος  $g, H, F = M \times N$  μέγεθος αρχικής εικόνας  $f(x,y)$

Πολλαπλασιασμός σημείο προς σημείο

Καθορισμός φίλτρου  $H(u,v)$  ευκολότερος με συναρτήσεις συμμετρικές ως προς το κέντρο  $\rightarrow (-1)^{x+y}f(x,y)$  πριν τον υπολογισμό του  $F(u,v)$

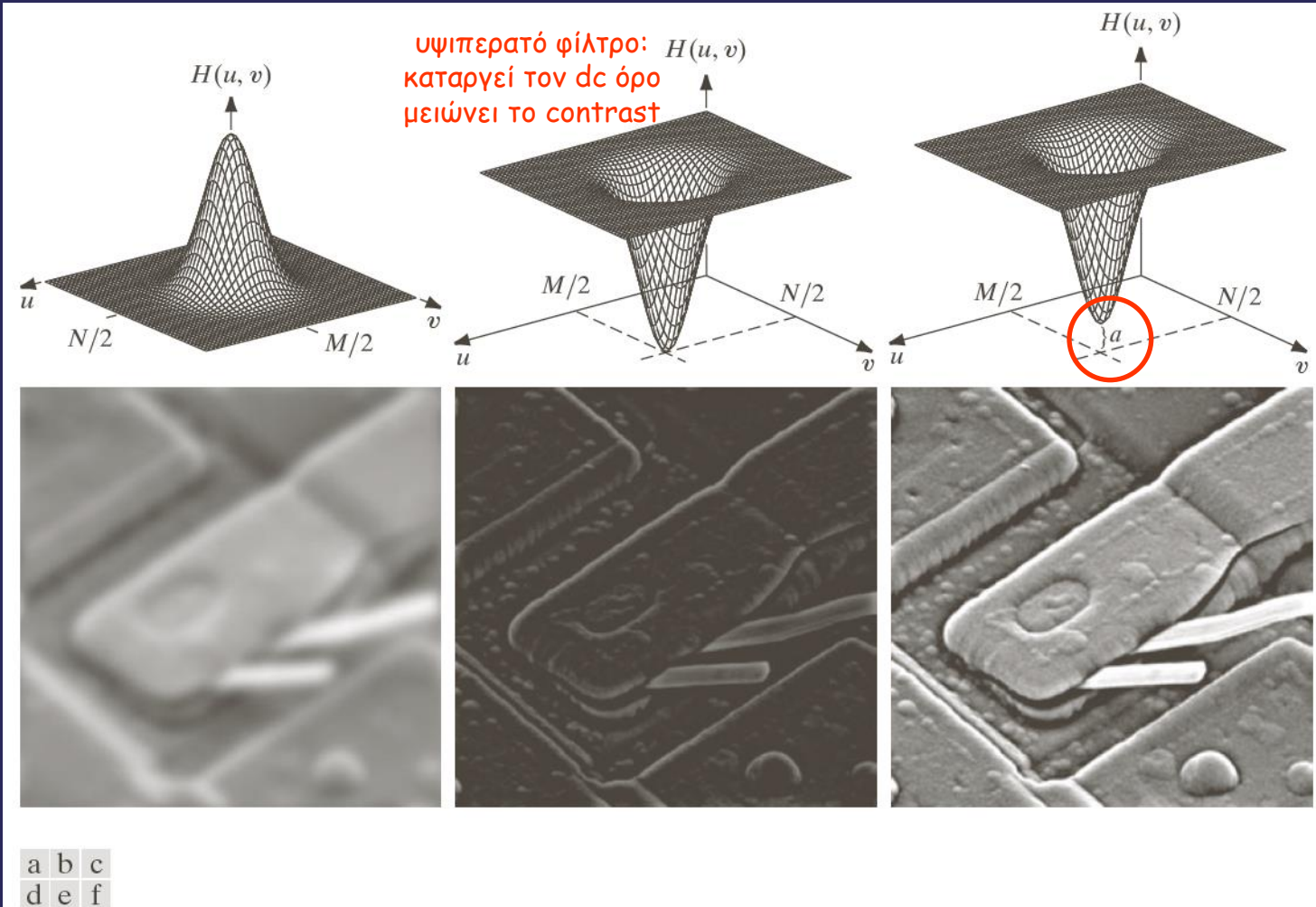


**FIGURE 4.30**

Result of filtering the image in Fig. 4.29(a) by setting to 0 the term  $F(M/2, N/2)$  in the Fourier transform.



# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

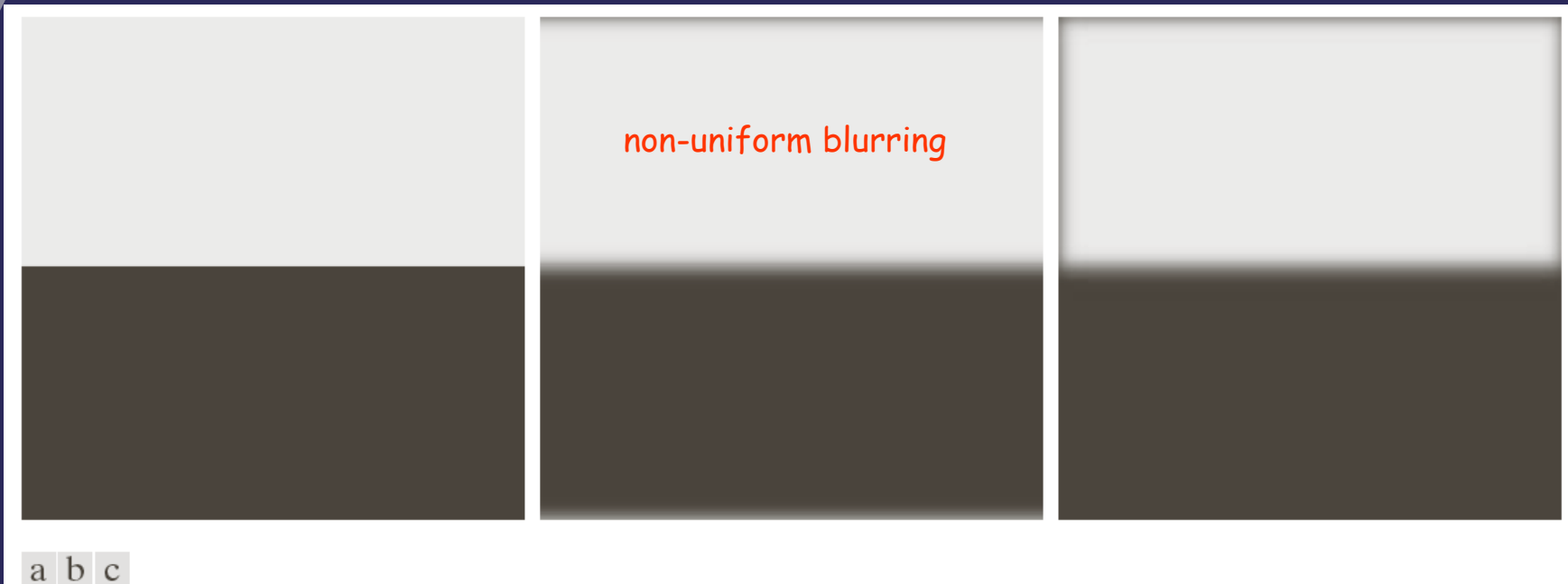


**FIGURE 4.31** Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used  $a = 0.85$  in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).

# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

Γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων  $\Leftrightarrow$  συνέλιξη στο χωρικό πεδίο

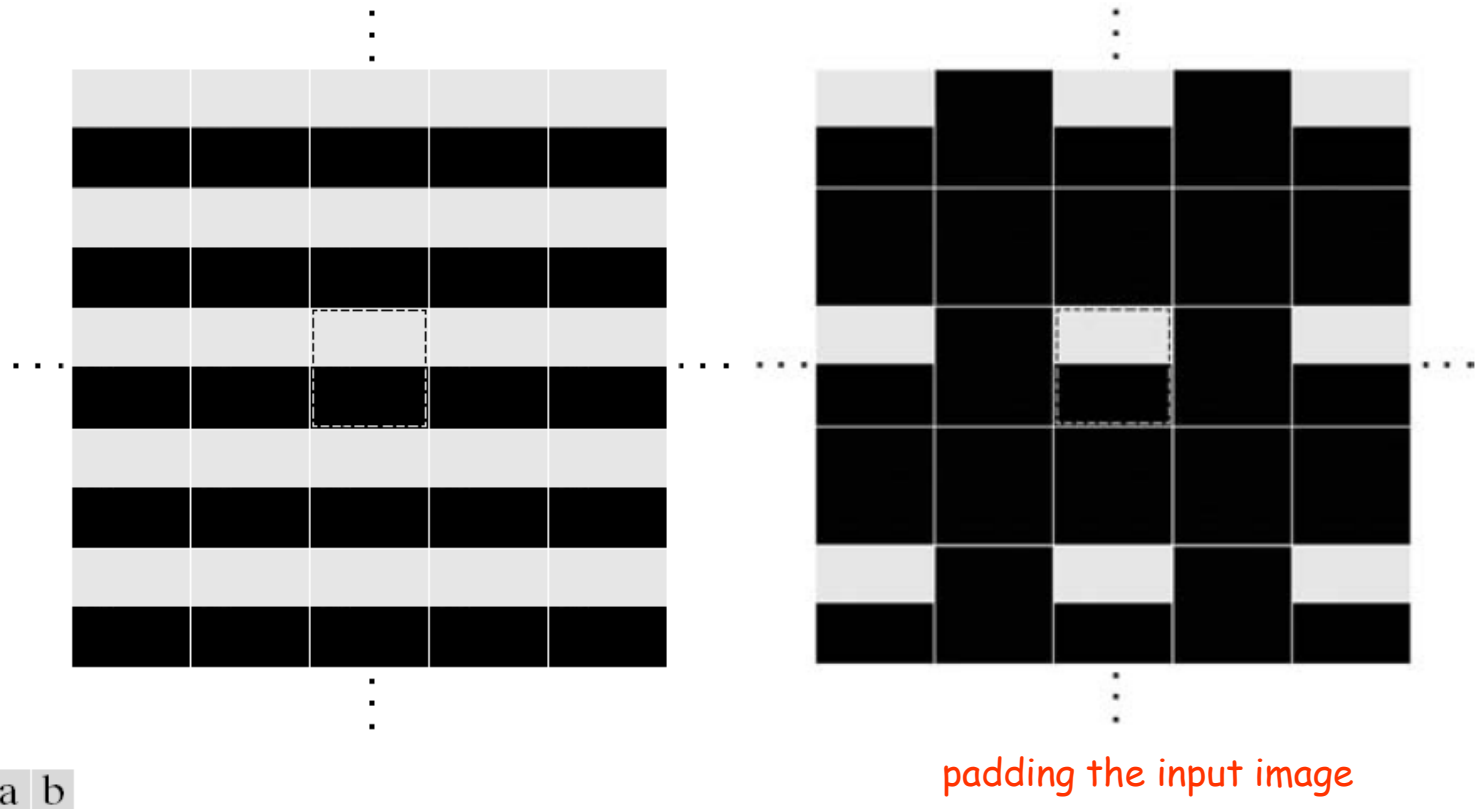
Αν δεν έχει γίνει zero-padding  $\Rightarrow$  wraparound error



**FIGURE 4.32** (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).



# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων



**FIGURE 4.33** 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

---

Καθορισμός φίλτρου στο χωρικό πεδίο / πεδίο συχνοτήτων

Padding στο χωρικό πεδίο -> ποια είναι η σχέση του χωρικού padding με τα φίλτρα που ορίζονται απευθείας στο πεδίο των συχνοτήτων;

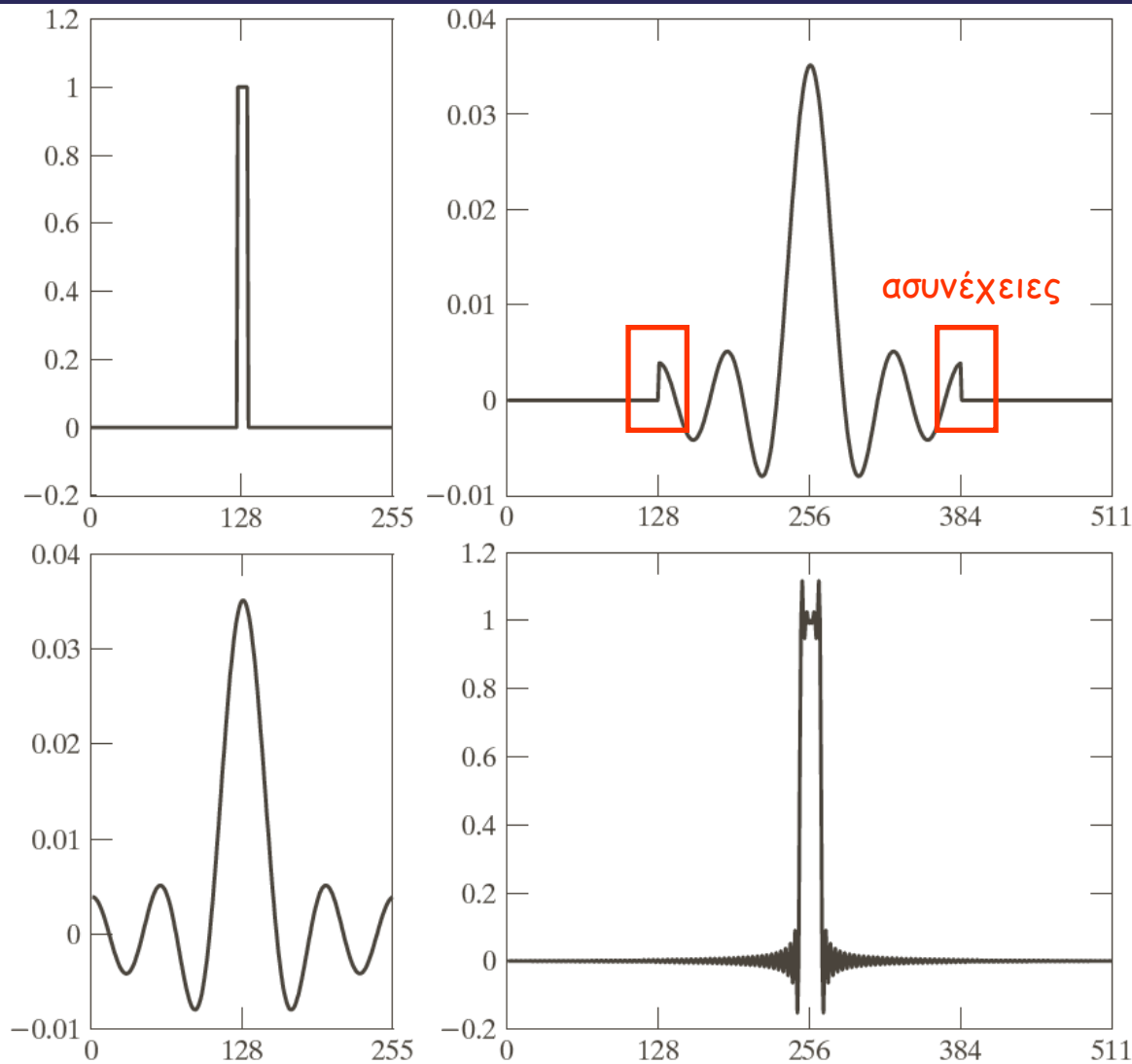
Τρόπος χειρισμού του padding ενός φίλτρου που ορίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων:

- Κατασκευή φίλτρου μεγέθους ίσου με την εικόνα
- IDFT φίλτρου -> ισοδύναμο φίλτρο στο χωρικό πεδίο
- Zero-padding
- DFT

Πρόβλημα: ασυνέχειες -> ringing

Λύση: κατασκευή φίλτρου στο πεδίο των συχνοτήτων, στις διαστάσεις της padded εικόνας (wraparound error περιορισμένο λόγω του διαχωρισμού που εξασφαλίζει το padding της εικόνας)

# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

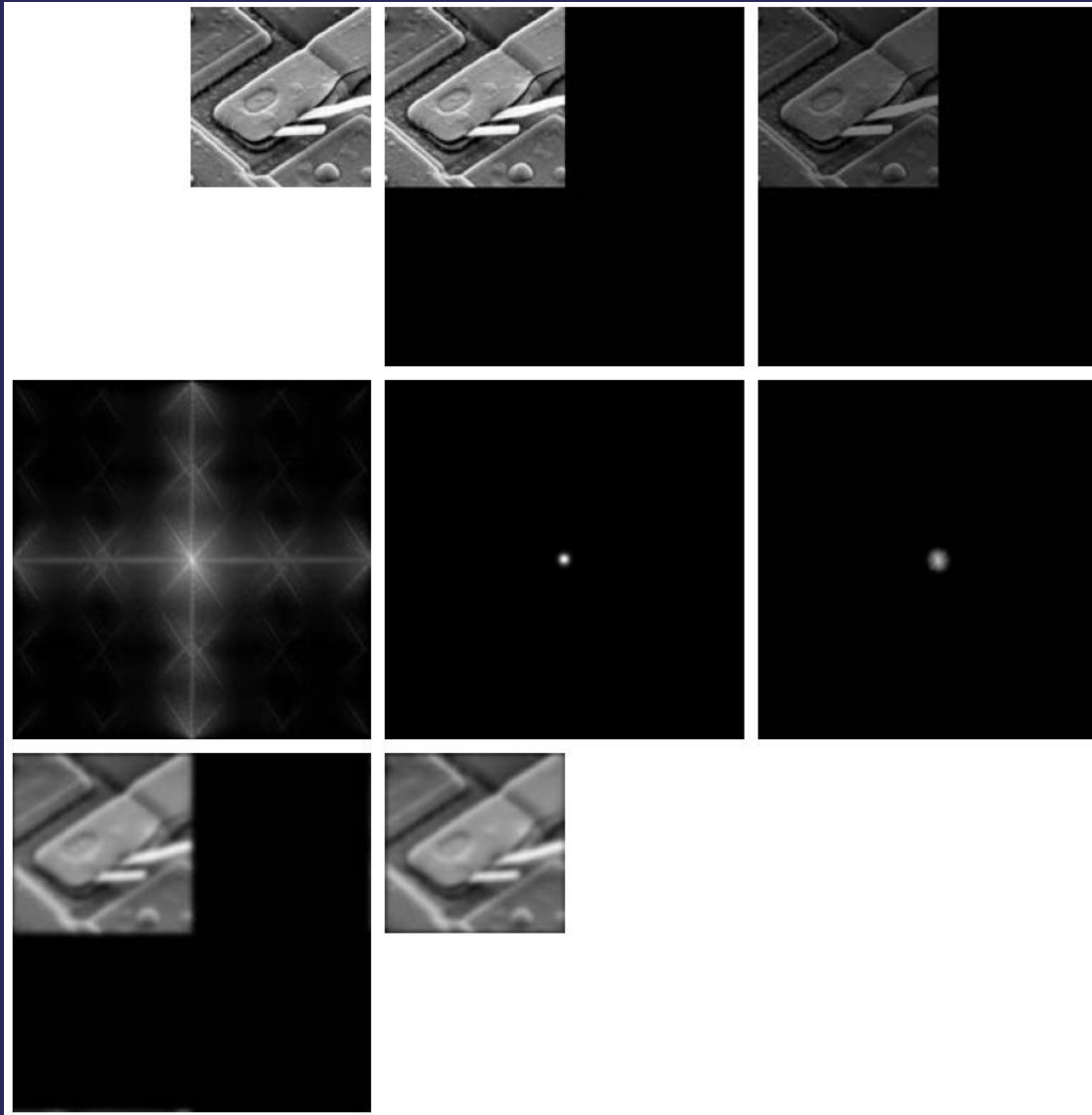


a c  
b d

**FIGURE 4.34**

(a) Original filter specified in the (centered) frequency domain. (b) Spatial representation obtained by computing the IDFT of (a). (c) Result of padding (b) to twice its length (note the discontinuities). (d) Corresponding filter in the frequency domain obtained by computing the DFT of (c). Note the ringing caused by the discontinuities in (c). (The curves appear continuous because the points were joined to simplify visual analysis.)

# Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων



a	b	c
d	e	f
g	h	

**FIGURE 4.36**

- (a) An  $M \times N$  image,  $f$ .  
 (b) Padded image,  $f_p$  of size  $P \times Q$ .  
 (c) Result of multiplying  $f_p$  by  $(-1)^{x+y}$ .  
 (d) Spectrum of  $F_p$ . (e) Centered Gaussian lowpass filter,  $H$ , of size  $P \times Q$ .  
 (f) Spectrum of the product  $HF_p$ .  
 (g)  $g_p$ , the product of  $(-1)^{x+y}$  and the real part of the IDFT of  $HF_p$ .  
 (h) Final result,  $g$ , obtained by cropping the first  $M$  rows and  $N$  columns of  $g_p$ .

# Φίλτρα εξομάλυνσης (smoothing)

---

Τρεις τύποι χαμηλοπερατών φίλτρων:

- Ιδανικό φίλτρο (sharp)
- Φίλτρο Butterworth (μετάβαση ανάμεσα στα δύο άκρα)
- Φίλτρο Gaussian (smooth)

Το φίλτρο Butterworth έχει μία παράμετρο που λέγεται τάξη του φίλτρου.

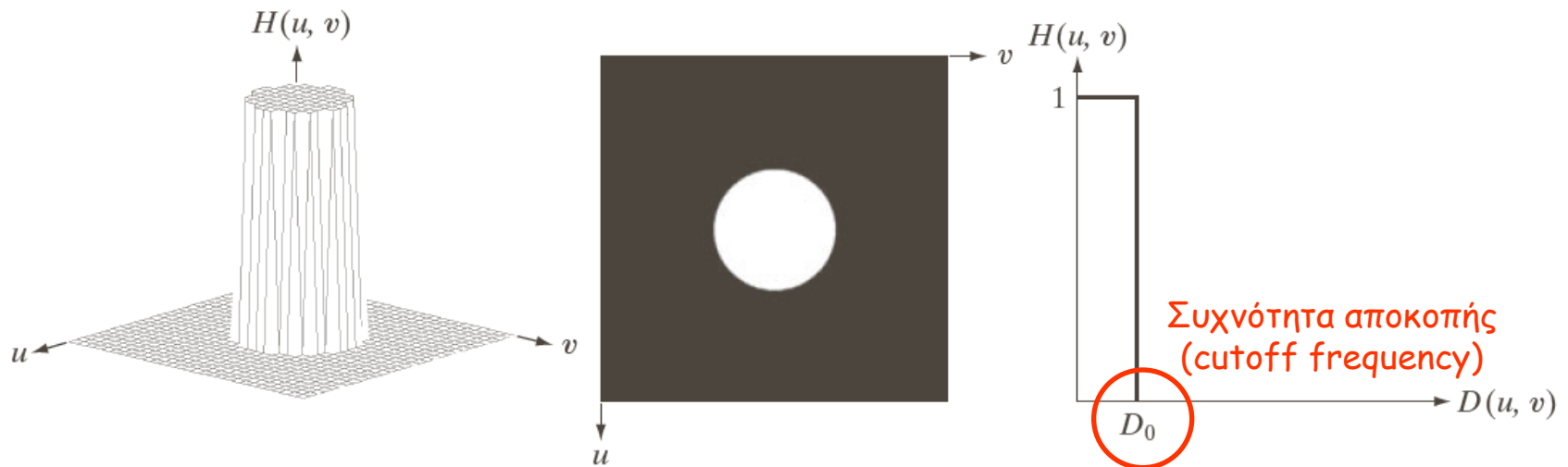
Υψηλή τάξη -> πλησιάζει το ιδανικό φίλτρο

Χαμηλή τάξη -> πλησιάζει το Gaussian φίλτρο

# Ideal Lowpass Filter (ILPF)

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

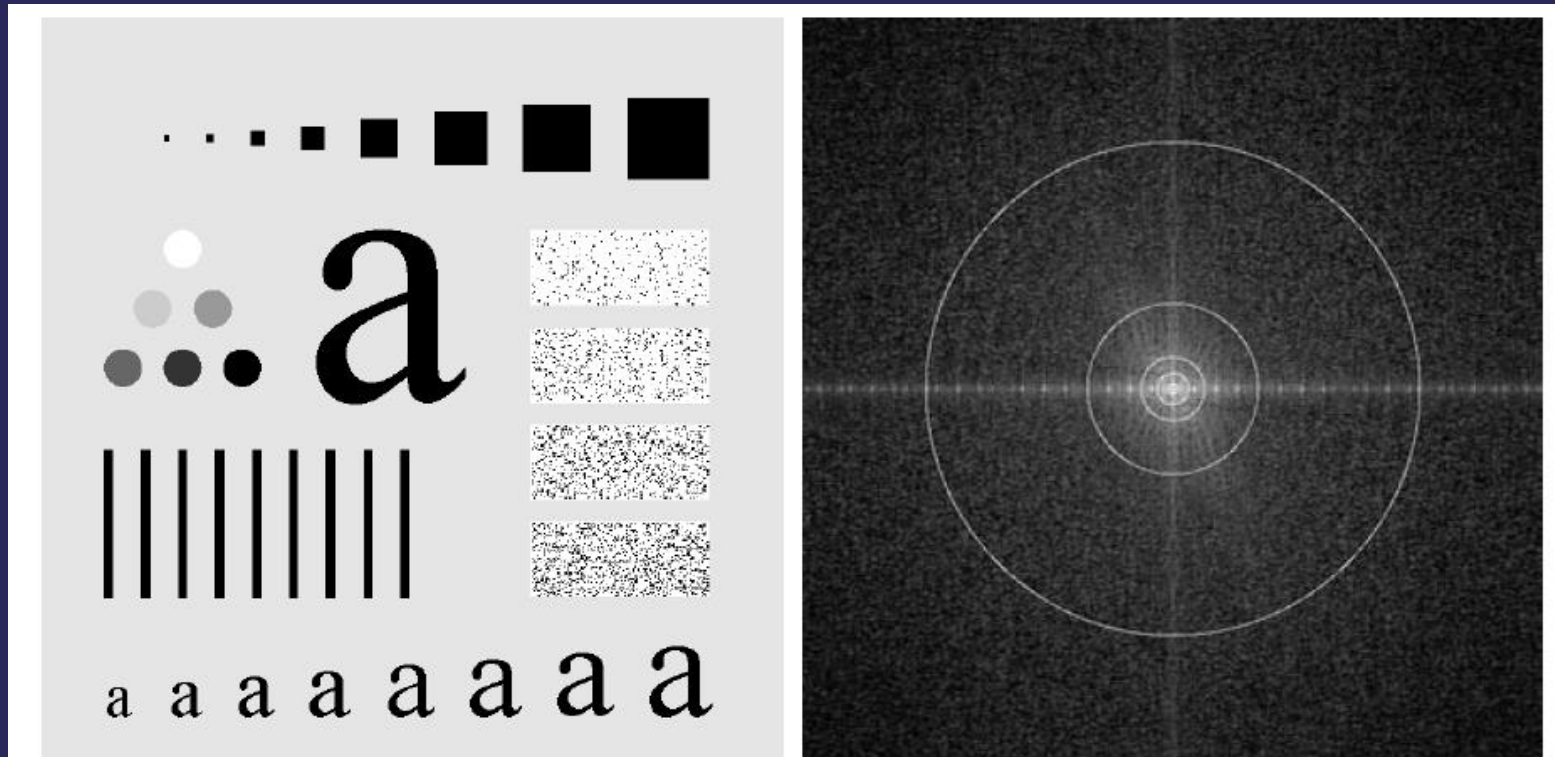
Όπου  $D(u,v) = [ (u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 ]^{1/2}$



a b c

**FIGURE 4.40** (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

# Ideal Lowpass Filter (ILPF)



a b

$$a = 100 \left[ \sum_u \sum_v P(u,v) / P_T \right]$$

$$\text{όπου } P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u,v)$$

**FIGURE 4.41** (a) Test pattern of size  $688 \times 688$  pixels, and (b) its Fourier spectrum. The spectrum is double the image size due to padding but is shown in half size so that it fits in the page. The superimposed circles have radii equal to 10, 30, 60, 160, and 460 with respect to the full-size spectrum image. These radii enclose 87.0, 93.1, 95.7, 97.8, and 99.2% of the padded image power, respectively.

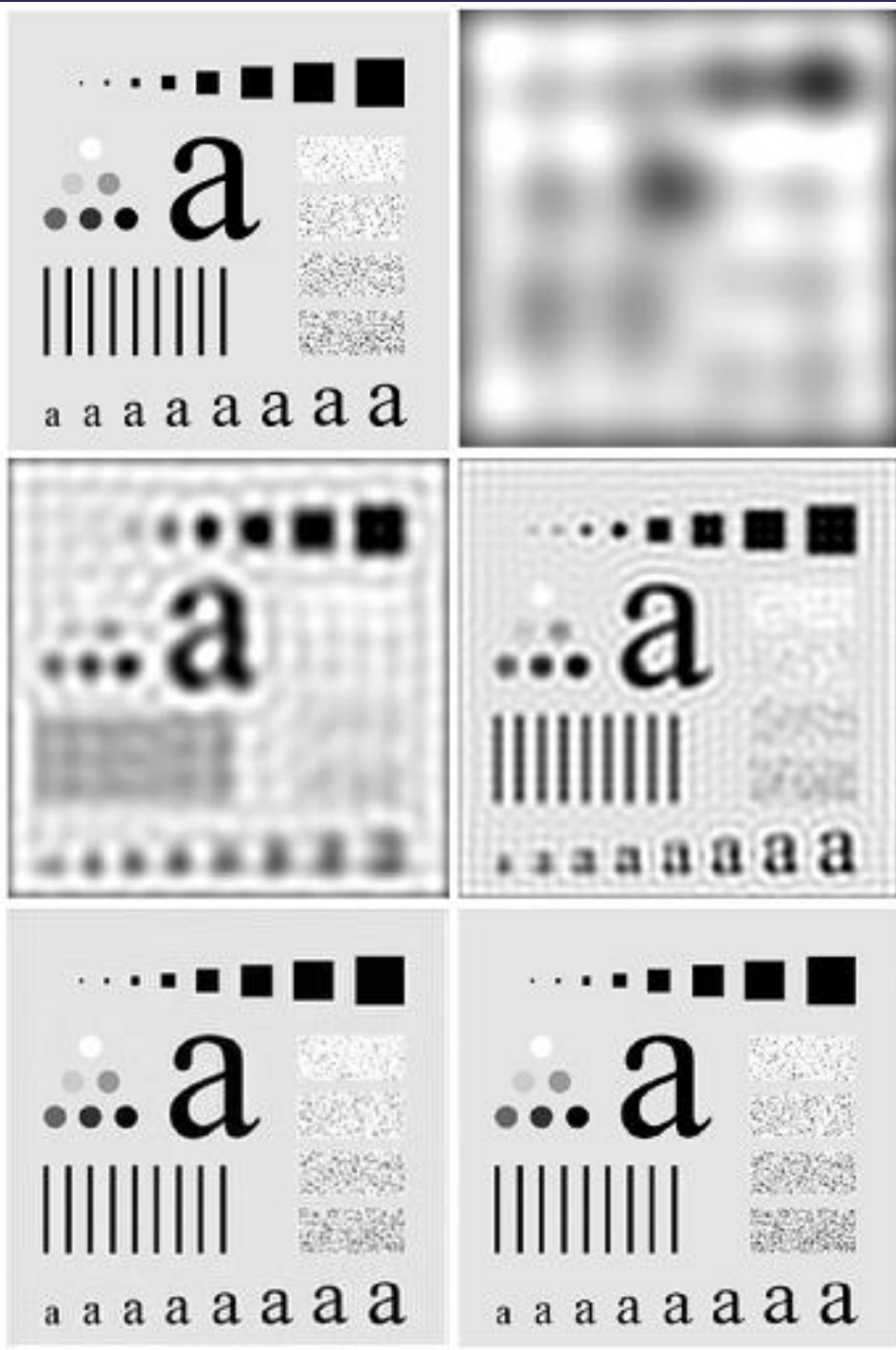
# Ideal Lowpass Filter (ILPF)

13, 6.9, 4.3, 2.2 και 0.8% της συνολικής ισχύος λείπει από τα φίλτρα

Η περισσότερη πληροφορία που αφορά τις λεπτομέρειες της εικόνας βρίσκεται στο 13% που λείπει.

Ringling το οποίο γίνεται πιο αμυδρό όσο λιγοστεύει η ισχύς που χάνεται από το φίλτρο (και αφορά τις υψηλές συχνότητες).

ILPF: όχι ιδιαίτερα πρακτικό, χρήσιμη η μελέτη της συμπεριφοράς του





# Ideal Lowpass Filter (ILPF)

Διαδικασία στο χωρικό πεδίο:

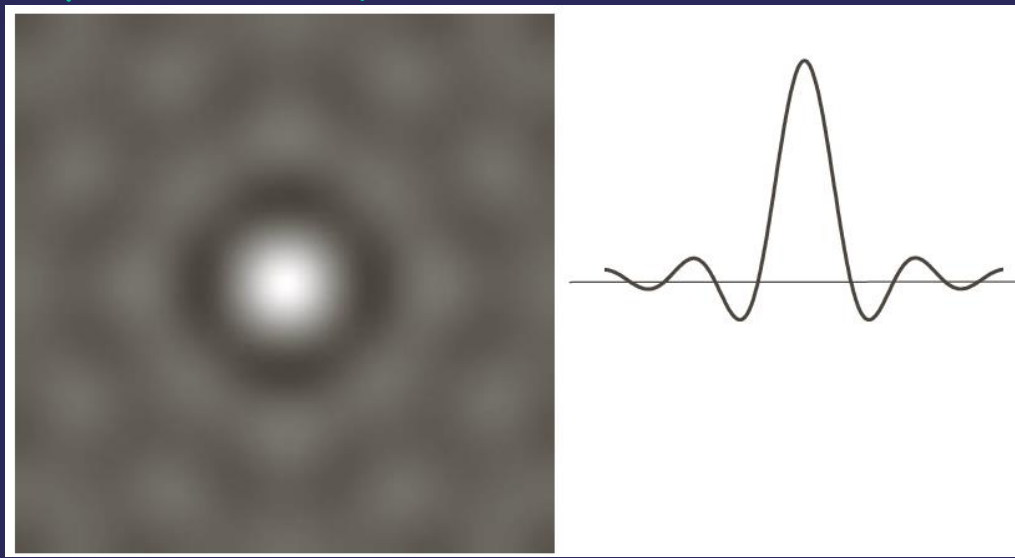
Pixel εικόνας: παλμός με ισχύ ανάλογη της τιμής της έντασης

Συνέλιξη με sinc: αντιγράφει τη sinc στη θέση του παλμού

Κεντρικός λοβός sinc: αιτία θαμπώματος

Μικρότεροι λοβοί: υπεύθυνοι για ringing

Εύρος sinc: ανάλογο της συχνότητας αποκοπής του φίλτρου. Όσο μεγαλύτερο είναι το  $D_0$ , τόσο περισσότερο η sinc μοιάζει με παλμό και δεν προκαλεί θόλωμα.



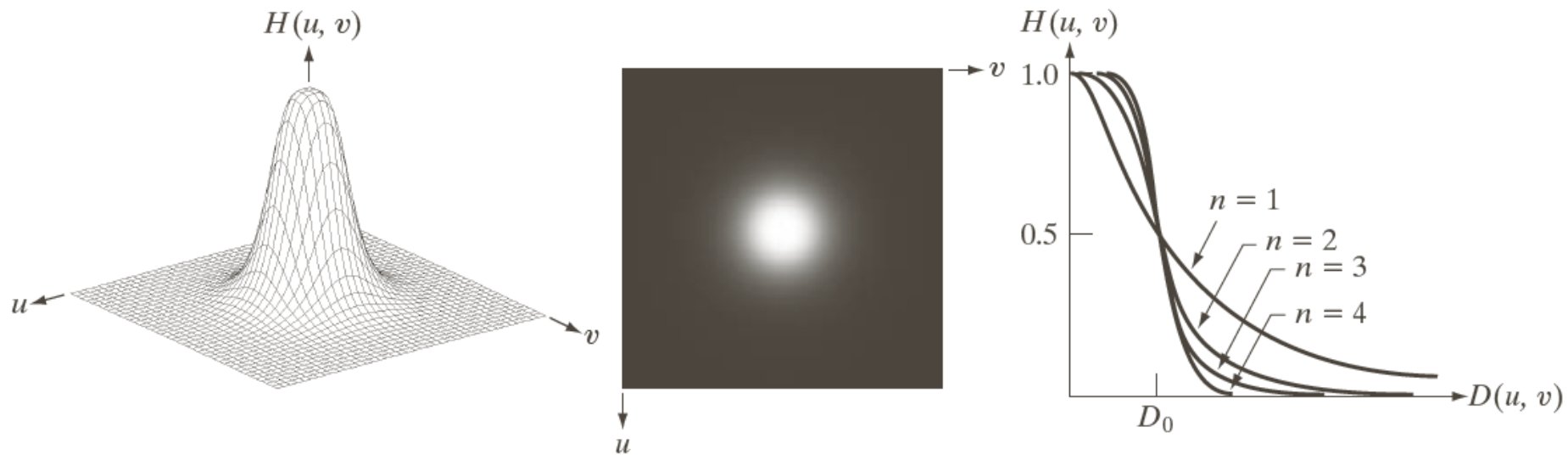
a b

**FIGURE 4.43**

(a) Representation in the spatial domain of an ILPF of radius 5 and size  $1000 \times 1000$ . (b) Intensity profile of a horizontal line passing through the center of the image.

# Butterworth Lowpass Filter (BLPF)

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$



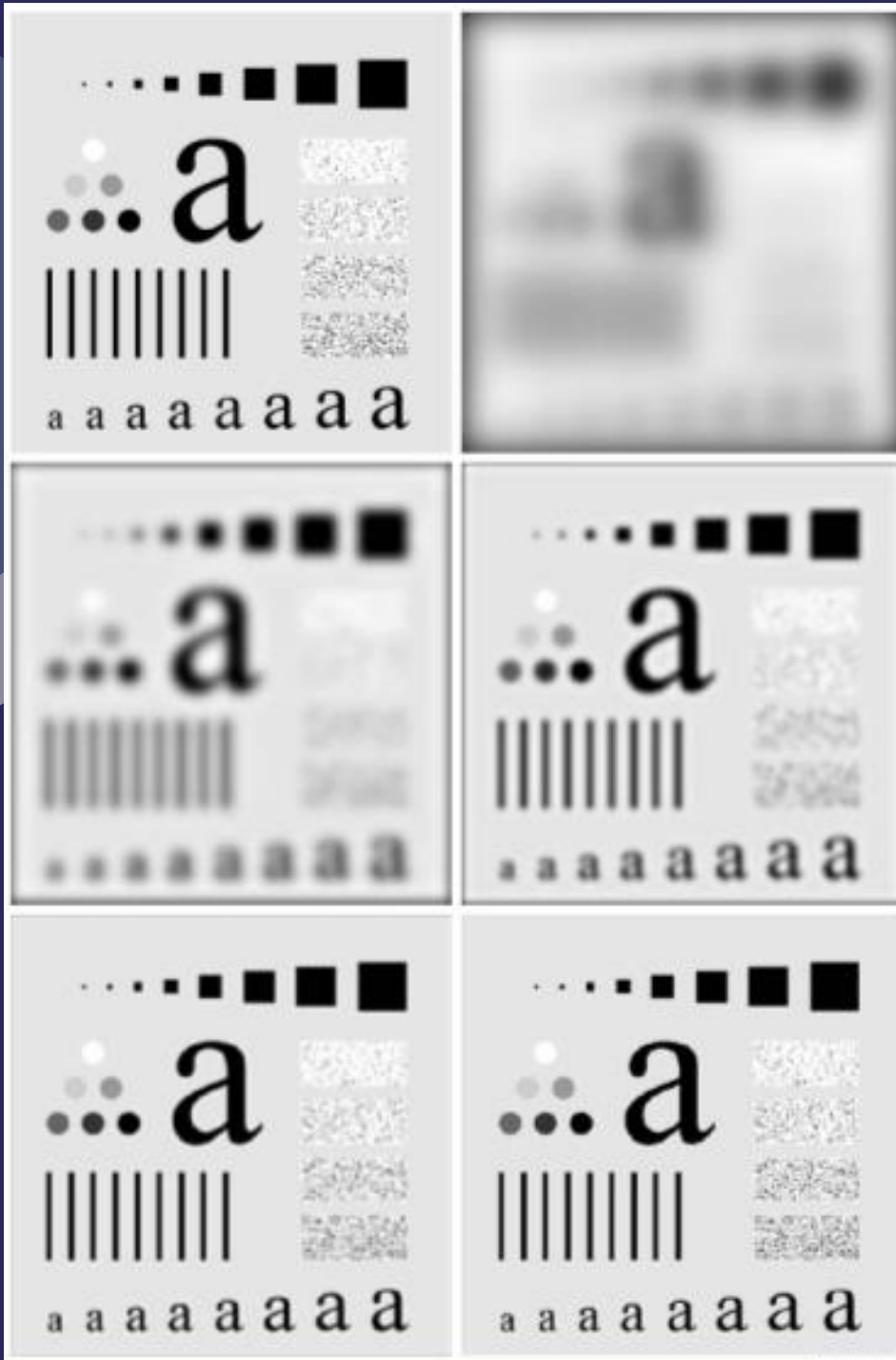
a b c

**FIGURE 4.44** (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

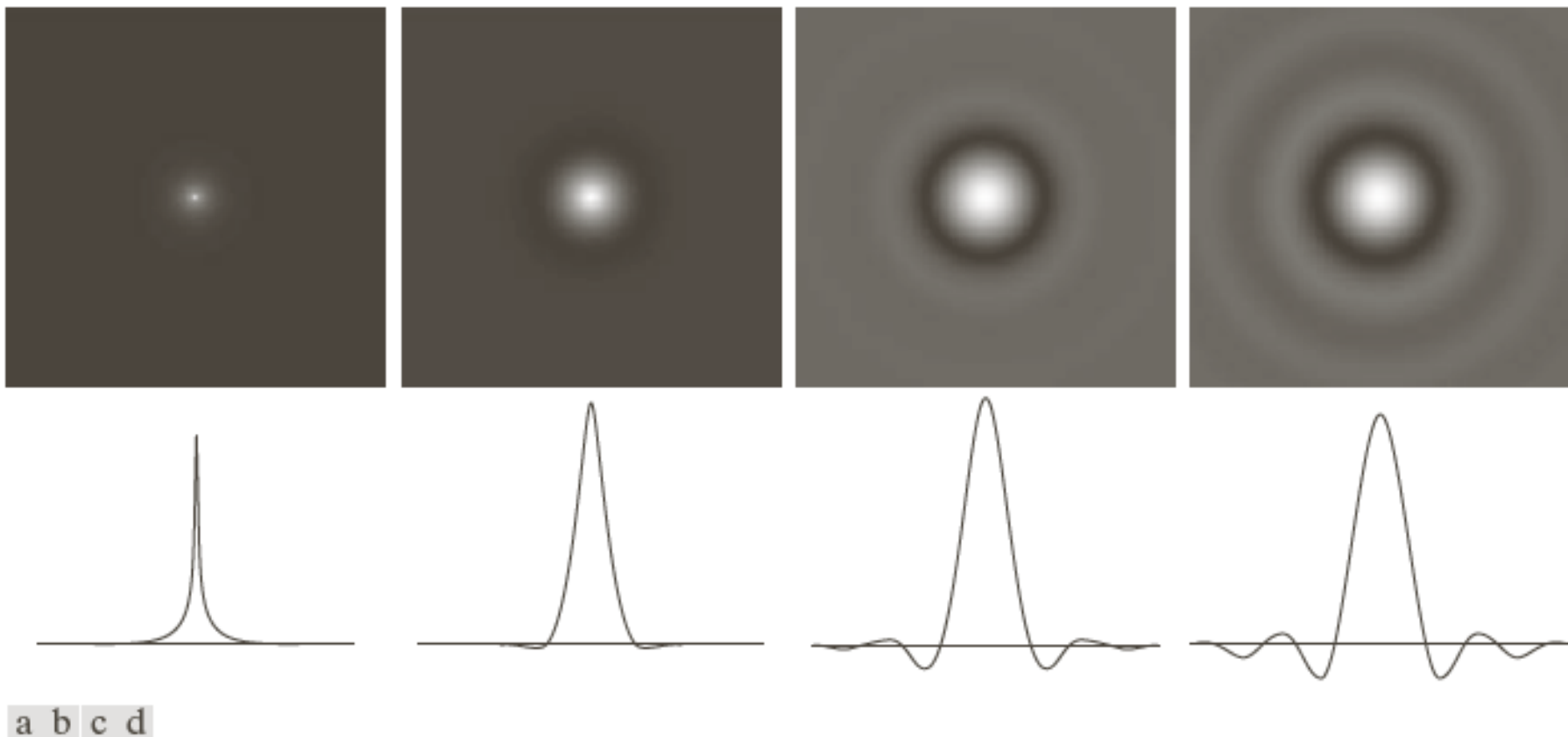
# Butterworth Lowpass Filter (BLPF)

Ομαλές μεταβάσεις στο θάμπωμα

Ringings: δεν είναι ορατό λόγω των ομαλών μεταβάσεων από τις χαμηλές στις υψηλές συχνότητες



# Butterworth Lowpass Filter (BLPF)

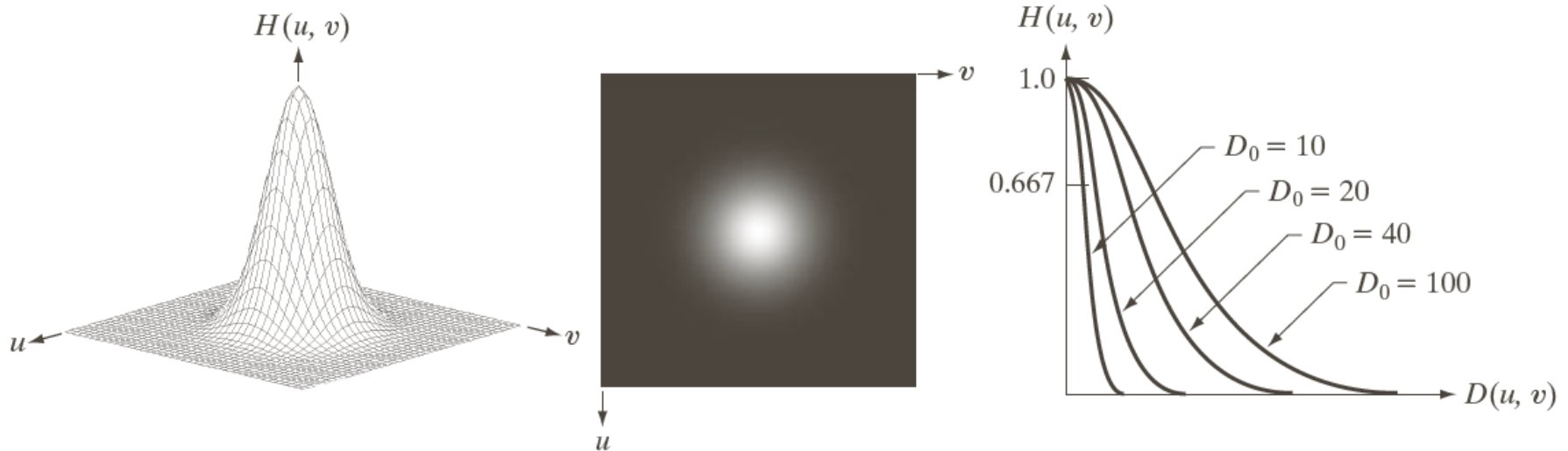


**FIGURE 4.46** (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is  $1000 \times 1000$  and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

# Gaussian Lowpass Filter (GLPF)

$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$  σ: μέτρο της απόστασης από το κέντρο

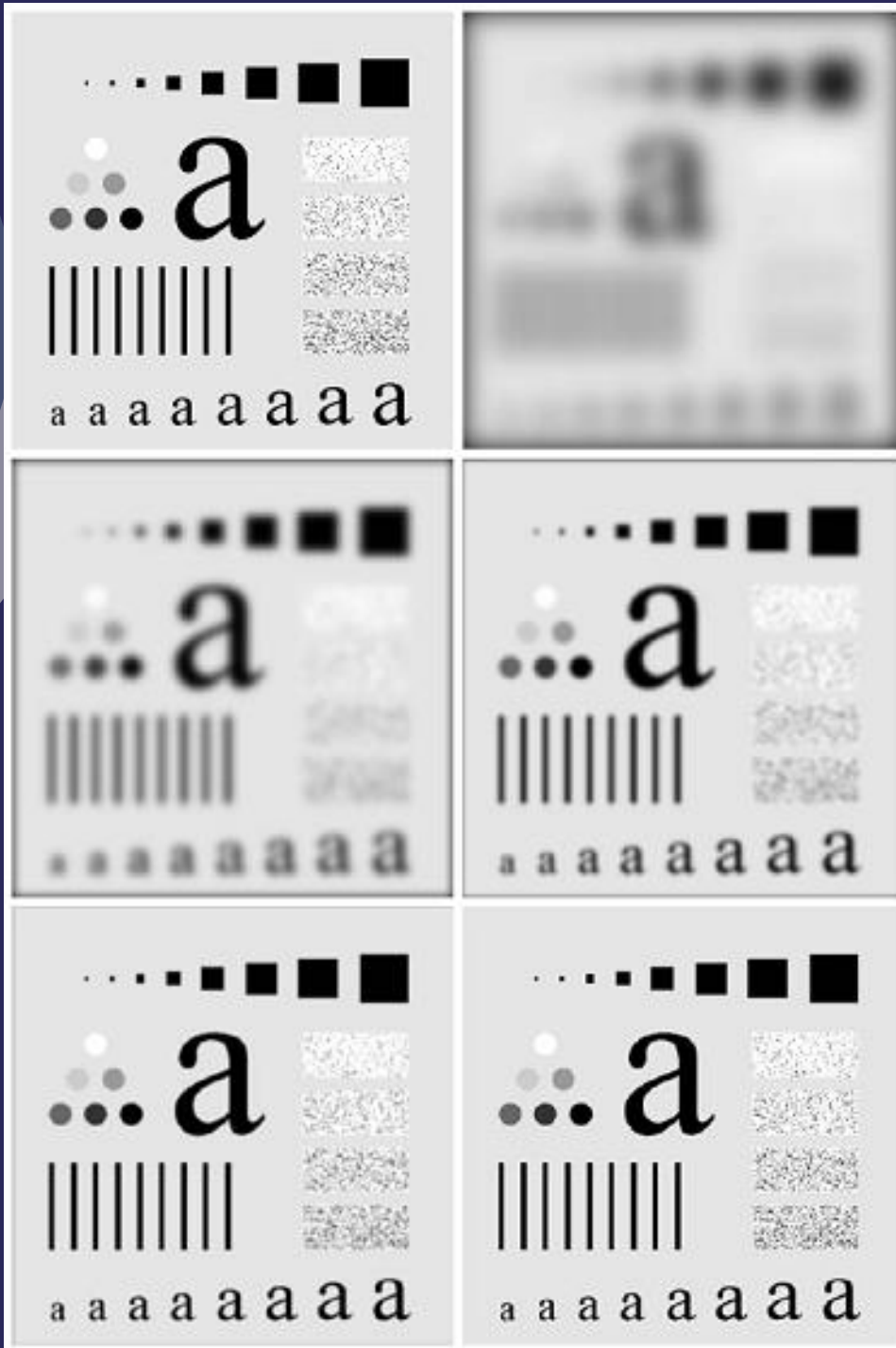
Για  $\sigma = D_0$ ,  $H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$



a b c

**FIGURE 4.47** (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of  $D_0$ .

# Gaussian Lowpass Filter (GLPF)

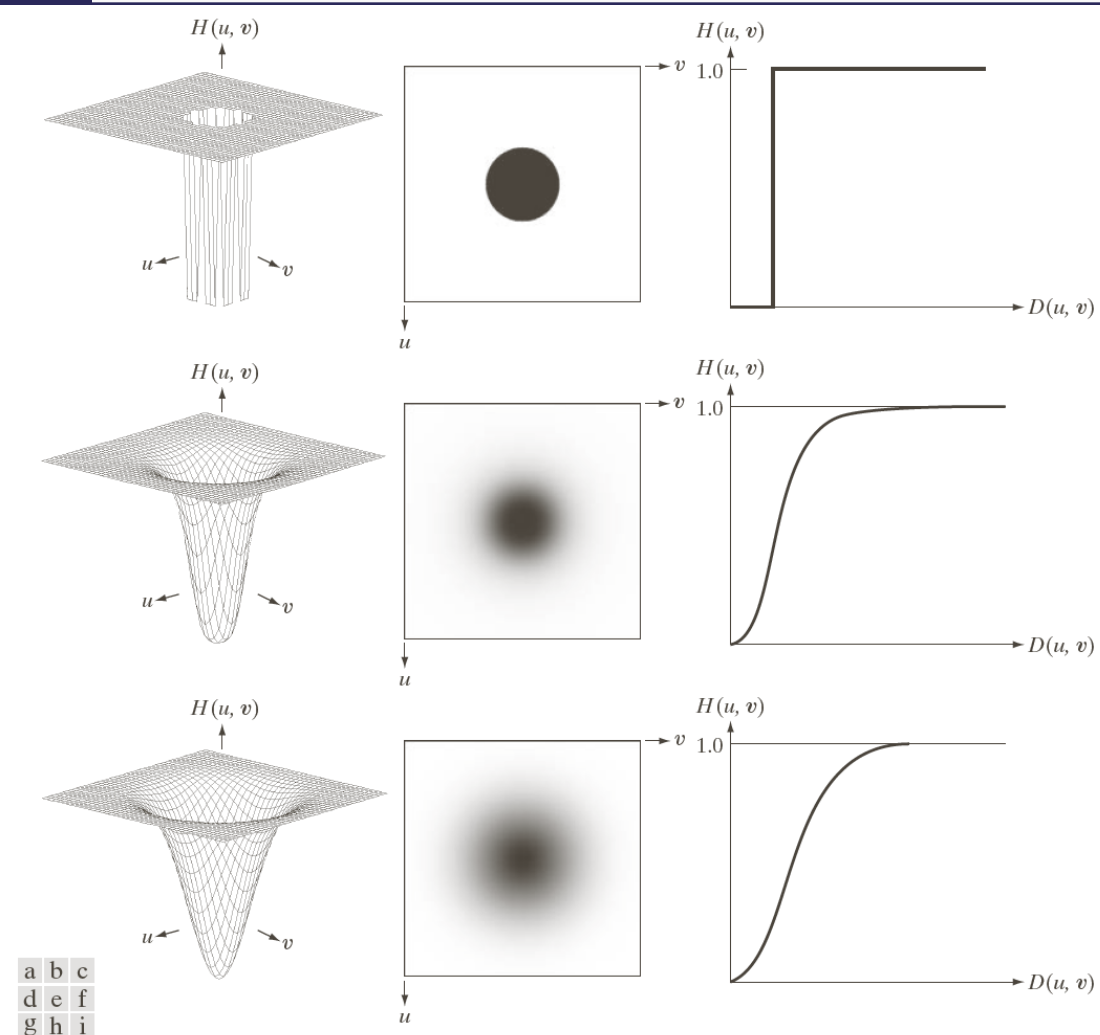


Αντίστοιχη συμπεριφορά με το Butterworth:

- ομαλές μεταβάσεις
- no ringing

Προκαλεί ελαφρώς λιγότερο θάμπωμα, λόγω της μορφής του.

# Φίλτρα όξυνσης (sharpening)

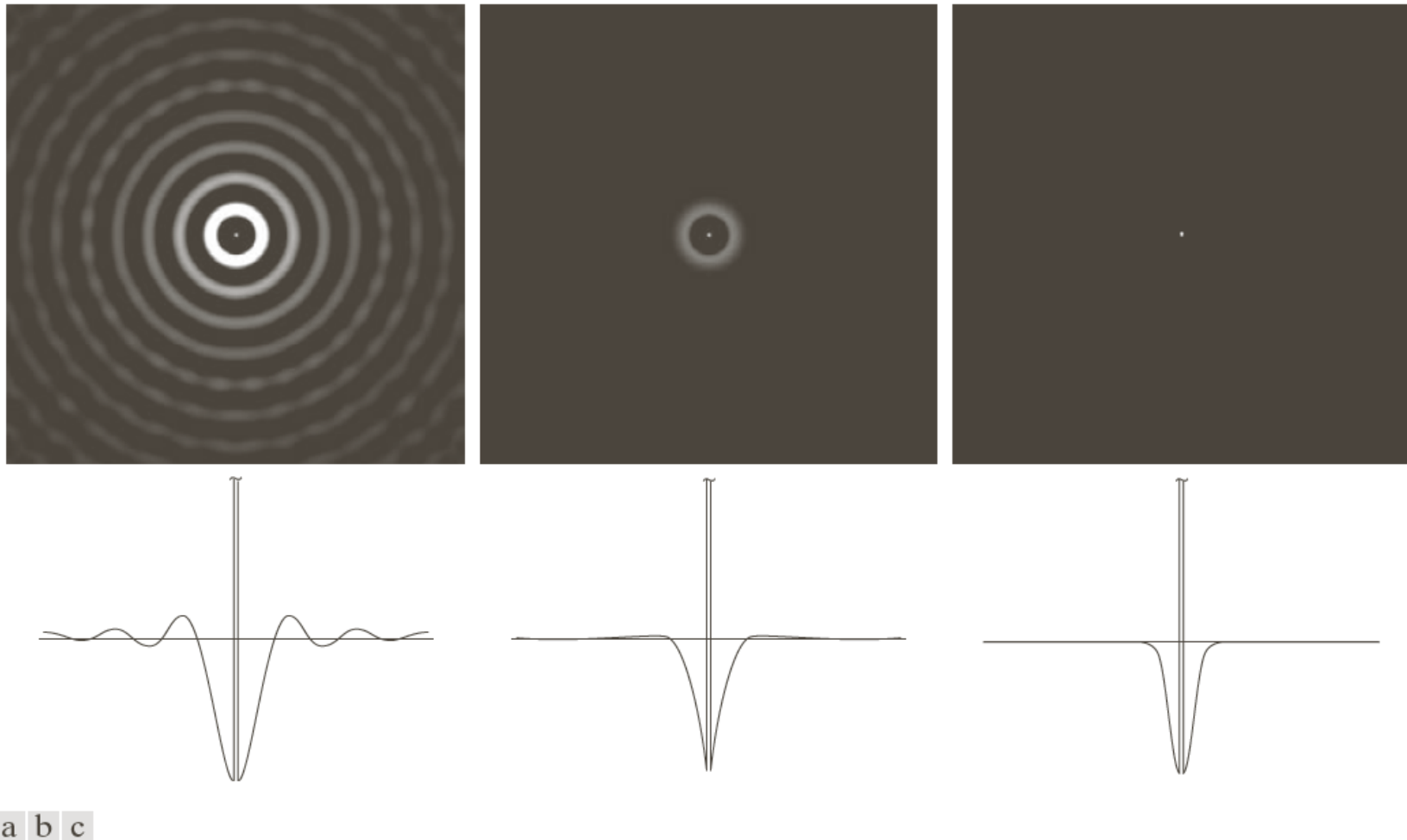


**FIGURE 4.52** Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

$$\begin{aligned} h_{HP}(x, y) &= F^{-1}[H_{HP}(u, v)] \\ &= F^{-1}[1 - H_{LP}(u, v)] \\ &= \delta(x, y) - h_{LP}(x, y) \end{aligned}$$

# Φίλτρα όξυνσης (sharpening)



**FIGURE 4.53** Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers.



# Ideal Highpass Filter (IHPF)

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$



a b c

**FIGURE 4.54** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using an IHPF with  $D_0 = 30, 60,$  and  $160$ .

Ringing -> distorted boundaries

# Butterworth Highpass Filter (BHPF)

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u,v)]^{2n}}$$



a b c

**FIGURE 4.55** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a BHPF of order 2 with  $D_0 = 30, 60,$  and  $160$ , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). These results are much smoother than those obtained with an IHPF.

# Gaussian Highpass Filter (GHPF)

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$



a b c

**FIGURE 4.56** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a GHPF with  $D_0 = 30, 60$ , and  $160$ , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). Compare with Figs. 4.54 and 4.55.

# Υψηπερατό φιλτράρισμα και κατωφλίωση για βελτίωση εικόνας

Πρόβλημα: μουντζούρες



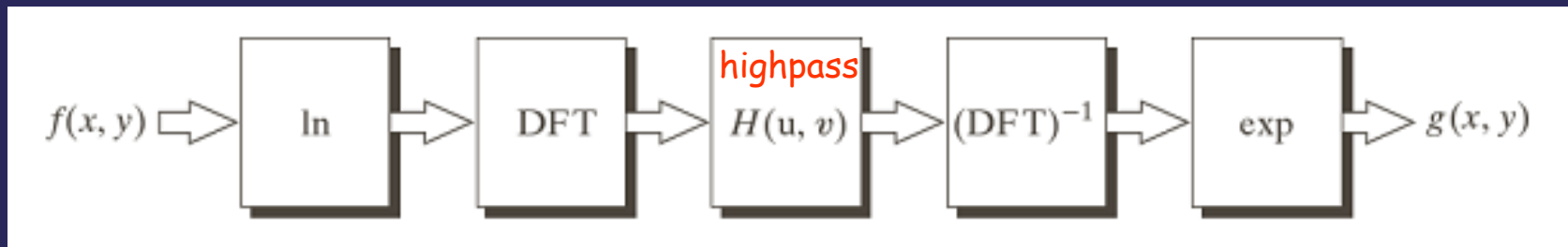
a b c

**FIGURE 4.57** (a) Thumb print. (b) Result of highpass filtering (a). (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of the U.S. National Institute of Standards and Technology.)

# Ομομορφικό φιλτράρισμα

Μια εικόνα  $f(x,y)$  μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο της φωτεινότητας (illumination) και της ανάκλασης (reflection):

$$f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$$



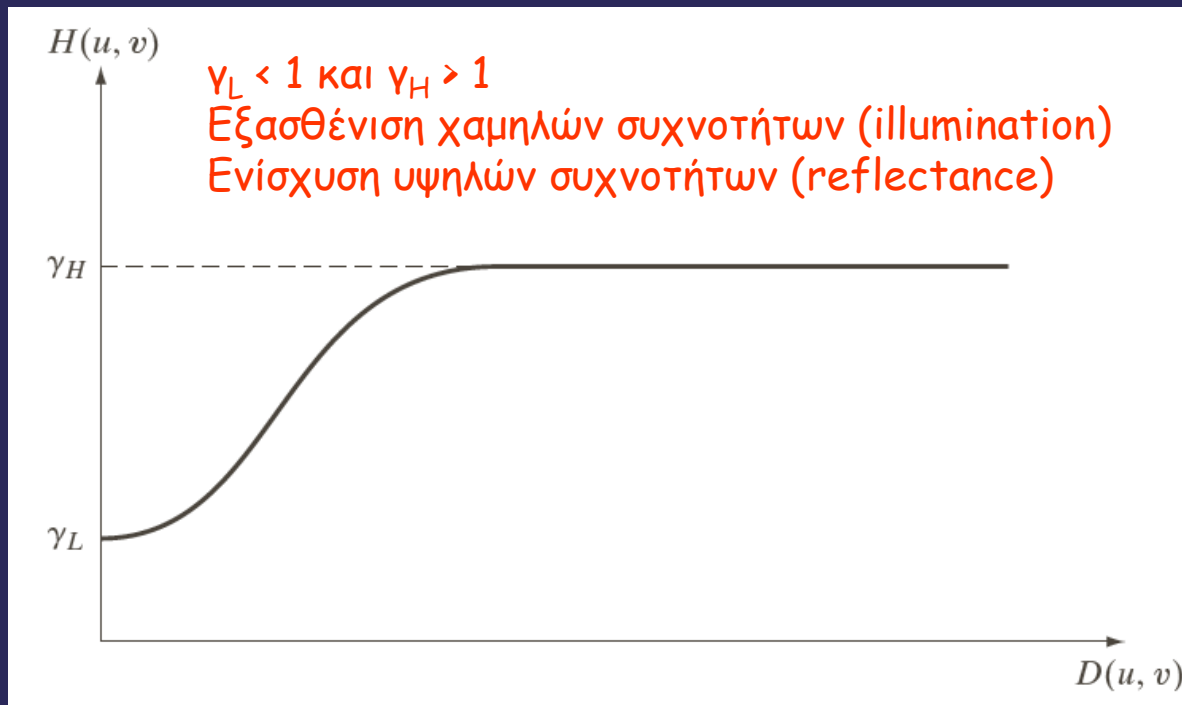
**Ομομορφικό φιλτράρισμα:** διαχωρισμός illumination και reflectance -> το φίλτρο μπορεί να επιδράσει ξεχωριστά σε αυτές τις συνιστώσες

-> ταυτόχρονη συμπίεση του εύρους τιμών της έντασης και βελτίωση του contrast

**Illumination:** αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση (αντιστοιχία με χαμηλές συχνότητες)

**Reflectance:** απότομες μεταβολές (αντίστοιχα με υψηλές συχνότητες)

# Ομομορφικό φιλτράρισμα

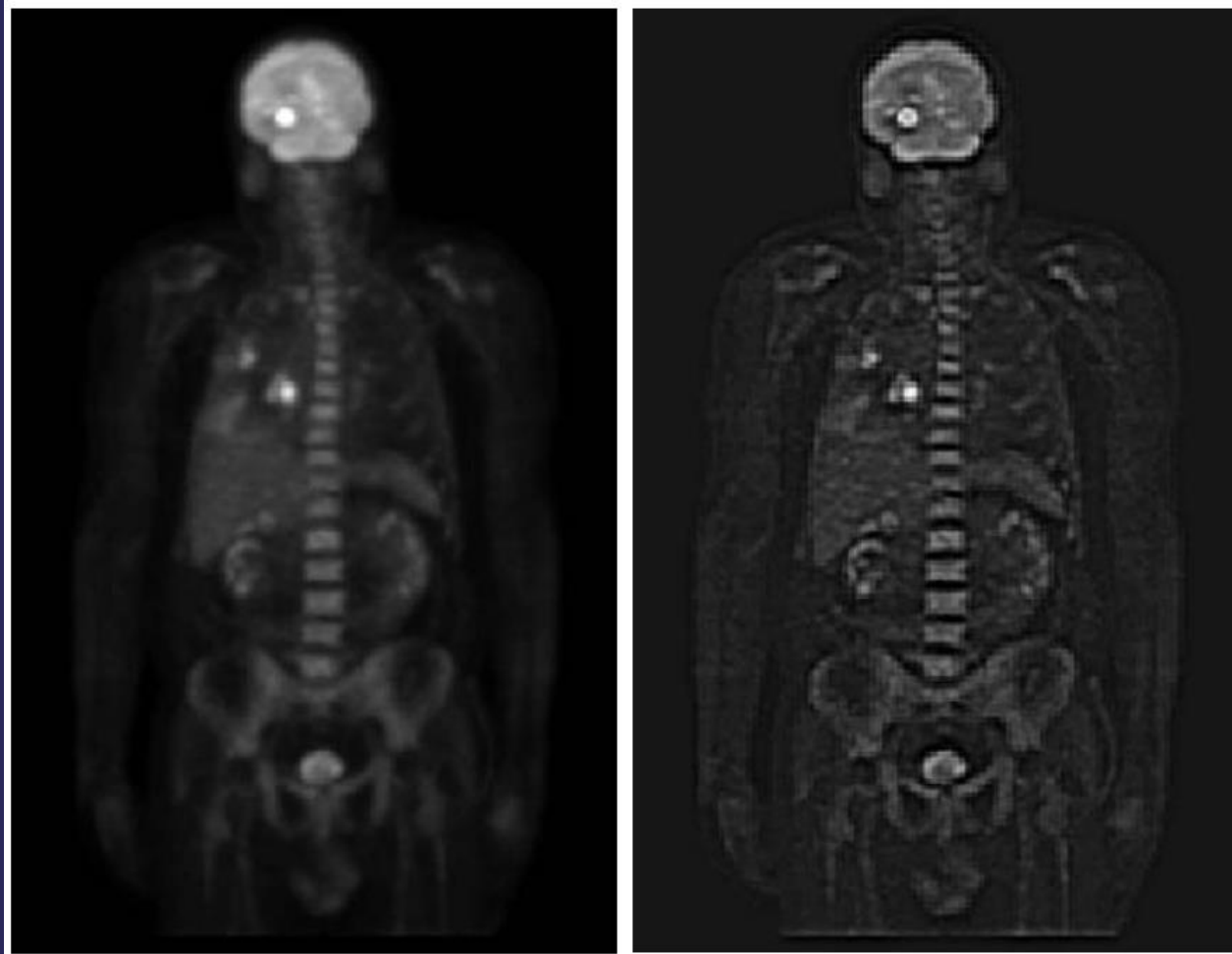


**FIGURE 4.61**  
Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and  $D(u, v)$  is the distance from the center.

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-c [D^2(u, v) / D_0^2]} \right] + \gamma_L$$

$c$ : ελέγχει την οξύτητα της συνάρτησης καθώς μεταπίπτει από  $\gamma_L$  σε  $\gamma_H$

# Ομομορφικό φιλτράρισμα



a b

**FIGURE 4.62**  
(a) Full body PET scan. (b) Image enhanced using homomorphic filtering. (Original image courtesy of Dr. Michael E. Casey, CTI PET Systems.)

$1162 \times 746$

$\gamma_L = 0.4, \gamma_H = 3$

$c = 5, D_0 = 20$