Algebra Lineare, c.d.L. in Informatica, Esempio I compitino 2022

NON SI POSSONO UTILIZZARE CALCOLATRICI NÉ CONSULTARE LIBRI O APPUNTI

NOME E COGNOME: ______________________________

Numero di matricola : ______________________________

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE <u>SENZA IL PROCEDIMENTO</u>. OGNI RISPOSTA ESATTA VALE 3 PUNTI

1a) Si consideri al variare di $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema:

$$S_k : \quad \begin{cases} 2x - y = k \\ x - y - 3z = 0 \\ x + y + k^2 z = k. \end{cases}$$

Stabilire per quali $k \in \mathbf{R}$ il sistema S_k è compatibile e, se esistono, trovare le soluzioni quando $k = 1$.

1b) Si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $Span(v_1, v_2)$.

1c) Trovare una base per il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ definito da $U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} | x_1 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\}$

1d) Se per $t \in \mathbf{R}$, definiamo vettori di $\mathbf{R}^3$ mediante $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, dire per quali $t \in \mathbf{R}$ l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

2) Rispondere (con precisione) alle seguenti domande

2a) **(vale 3 punti)**
a) Dare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale.
b) Enunciare la formula di Grassmann

2b) **(vale 5 punti)**
a) Dire cosa vuol dire che vettori $v_1, \ldots, v_n$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti.

b) Siano v_1, v_2 vettori linearmente **indipendenti** e v_1, v_2, v_3 vettori linearmente **dipendenti** di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che v_3 si può scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2.

2c) **(vale 3 punti)** Enunciare il Teorema di struttura per i sistemi lineari.

3) RISPONDERE, MOTIVANDO E DANDO DETTAGLI DEL PROCEDIMENTO, ALLA SEGUENTE DOMANDA CHE VALE 10 PUNTI.

3a) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Trovare una base per lo spazio U generato dalle colonne di A e una base per lo spazio W delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Dire, motivando, se $\mathbf{R}^4 = U \oplus W$ oppure no.