

FYS2130 Prosjektoppgave

Kandidatnummer 15326

May 6, 2018

Oppgave 1

Programmet som inkluderer alle oppgave simuleringer ligger under Appendix 2. Følgende er faseromkurven produsert av simulasjonen:

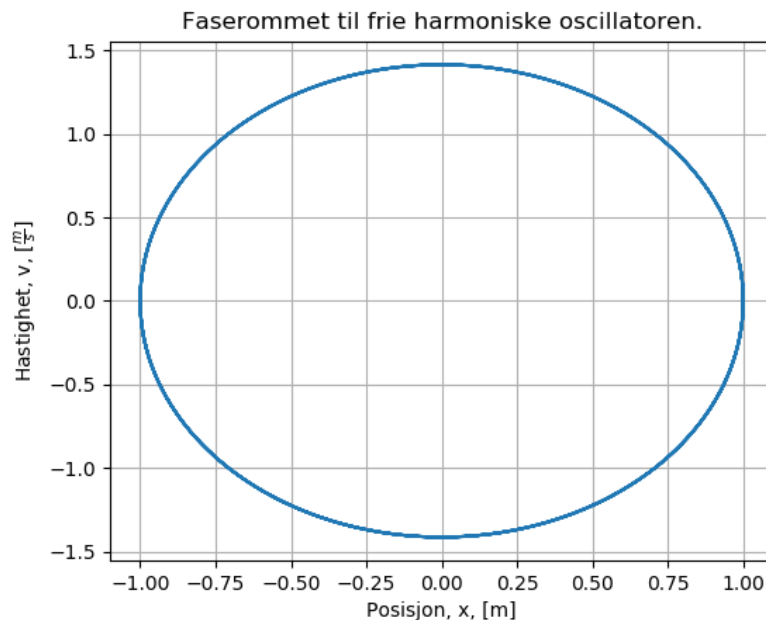


Figure 1: Faserommet til harmoniske oscillatoren med $m = 0.5\text{kg}$ og $k = 1\frac{\text{N}}{\text{m}}$

Nei det er ikke mulig å generere en bane i faserommet som ikke er ellipse/sirkel for en fri harmonisk oscillator beskrevet ved likningen:

$$m\ddot{x} + bx = 0$$

Dette er fordi at energien er bevart og det er ingen påtrykt kraft som endrer på potensielle (utslaget på x-aksen) eller kinetiske (utslaget på y-aksen) energien. Summen av kinetiske energien $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ og potensielle energien $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ holdes altså konstant, og må ha form i faserommet som enten er elliptisk eller sirkulær (avhengig av konstantene m og k).

Banen i faserommet står vinkelrett på x-aksen fordi at når utslaget x går mot maksimal posisjon så går hastigheten mot null. Hastigheten minker mot null og øker igjen etterpå på en symmetrisk måte i faserommet. Det samme gjelder for y-aksen siden systemet vil ha maksimal hastighet i likevekten ($x = 0\text{m}$). Dette skjer også symmetrisk i faserommet.

Systemet beveger seg med klokken. Dette kan man tenke seg fram til ved å se på initialbetingelsene

$x(0) = 1\text{ m}$ og $v(0) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; massen begynner i 1 meters utstrekning og fjærkraften trekker den tilbake mot likevekt (hastighet i negativ x -retning). Det er umulig å generere bane som går motsatt retning siden objektet vil aldri få en positiv hastighet når den er i et ekstremalpunkt $x = 1\text{ m}$. Hastigheten vil alltid gå mot motsatt fortegn av posisjonen.

Oppgave 2

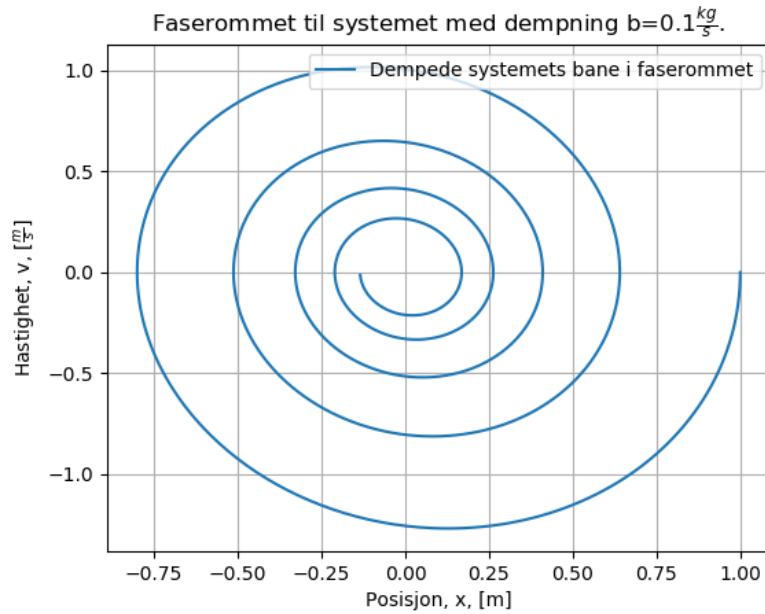


Figure 2: Faserommet til systemet med en dempningsfaktor $b = 0.1\frac{\text{kg}}{\text{s}}$

Banen i faserommet går nå mot null fordi at en ikke-konservativ friksjonskraft fjerner energi fra systemet. Etterhvert vil all energi fjernes fra systemet og massen vil stå stille i likevekten $x = 0\text{ m}$ (punktet $(0, 0)$ i faserommet).

Banen står vinkelrett på x -aksen men ikke på y -aksen. Dette er fordi at objektet fremdeles er i maksimalt utslag (symmetrisk) når hastigheten er lik null, men maksimale hastigheten er ikke nødvendigvis ved likevekten. Maksimale hastigheten (terminalhastigheten) er nå litt før likevekten. Denne terminalhastigheten er der friksjonskraften kansellerer ut fjærkraften. Dette betyr at objektet ikke blir akselerert lenger og hastigheten er i et maximum/minimum.

Punktet $(x, v) = (0, 0)$ i faserommet er en attraktor fordi at banen nærmer seg dette punktet når $t \rightarrow \infty$. Denne attraktoren er 0 dimensjonal siden den er beskrevet ved et punkt i faserommet. Kurven i faserommet til oppgave 1 har ikke en attraktor fordi energien er bevart. Faseromkurven fra oppgave 1 blir hverken tiltrukket eller frastøtet, dvs er statisk og er ikke en attraktor.

Oppgave 3

For å løse differensiallikning må vi først finne homogene og partielle løsningene av systemet. For å finne partielle løsningen gjetter vi på en løsning på formen:

$$x(t) = A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)$$

Dobbeltderivasjon av dette uttrykket gir:

$$\ddot{x} = -\omega_D^2 A\cos(\omega_D t) - \omega_D^2 B\sin(\omega_D t) = -\omega_D^2 x$$

Dette setter vi inn i opprinnelige uttrykket:

$$m\ddot{x} + kx = F_D \cos(\omega_D t)$$

$$\Rightarrow m(-\omega_D^2 x) + kx = F_D \cos(\omega_D t)$$

Løser deretter for x og benytter sammenhengen $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$-\omega_D^2 x + \frac{k}{m} x = \frac{F_D}{m} \cos(\omega_D t)$$

$$x(-\omega_D^2 + \omega_0^2) = \frac{F_D}{m} \cos(\omega_D t)$$

Dette returnerer partikulære løsningen for x:

$$x_p = \frac{F_D}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} \cos(\omega_D t)$$

Deretter finner vi homogene løsningen:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Bruker igjen sammenhengen $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow x_h = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$$

Kombinerer vi den homogene med den partikulære løsningen får vi generelle løsningsuttrykket:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_D \cos(\omega_D t)}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} + C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$$

Dette er generelle løsningen for systemet. For å finne spesielle løsningen til systemet kan man bruke initialbetingelser $x_0 = 2m$ og $\dot{x}_0 = 0 \frac{m}{s}$. Dette gir oss to likninger med to ukjente C og D:

$$\frac{F_D \cos(\omega_D \cdot 0)}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} + C \cos(\omega_0 \cdot 0) + D \sin(\omega_0 \cdot 0) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{F_D}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} + C = 2$$

$$\Rightarrow C = 2 - \frac{F_D}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)}$$

Løser nå for D ved å derivere uttrykket og sette lik null (pga initialbetingelsen $\dot{x}(0) = 0$):

$$\dot{x}(t) = \frac{-\omega_D F_D \sin(\omega_D t)}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} - \omega_0 C \sin(\omega_0 t) + \omega_0 D \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = \omega_0 D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Spesielle løsningen for differensiallikningen (med initialbetingelser $x_0 = 2m$ og $\dot{x}_0 = 0 \frac{m}{s}$) er altså:

$$x(t) = \frac{F_D \cos(\omega_D t)}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} + (2 - \frac{F_D}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)}) \cos(\omega_0 t)$$

Skriver denne om til et delvis produkt ved å løse opp parantesen:

$$x(t) = \frac{F_D}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)} (\cos(\omega_D t) - \cos(\omega_0 t)) + 2 \cos(\omega_0 t)$$

Bruker cosinus regelen:

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Der $\alpha = \omega_D t$ og $\beta = \omega_0 t$. Dette gir:

$$x(t) = 2\cos(\omega_0 t) - 2\frac{F_D \sin\left(\frac{(\omega_D + \omega_0)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_D - \omega_0)t}{2}\right)}{m(\omega_0^2 - \omega_D^2)}$$

Dette er endelige spesialtilfelle delvis produkt av sinus funksjoner med ekstra cosinus ledd uttrykket for $x(t)$. En s  nn løsning kan vi tolke som en sjevning av funksjonen $x(t)$ når ω_D og ω_0 er veldig like. Det vil si at amplitudene interfererer konstruktivt n  r frekvensene er like og interfererer destruktivt n  r sjevfrekvensen $\Delta\omega = \omega_D - \omega_0 = \pi$ er frekvensene ikke i fase og sinusproduktet går mot null. Legger merke til at både telleren og nevneren går mot null når $\omega_D^2 \rightarrow \omega_0^2$. I følge L'Hopitals regel så går denne brøken mot:

$$\omega_D^2 \rightarrow \omega_0^2 \Rightarrow x(t) = 2\cos(\omega_0 t) - \frac{F_D}{m}\sin(\omega_0 t)$$

Følgende er denne funksjonen plottet i 20 sekunder:

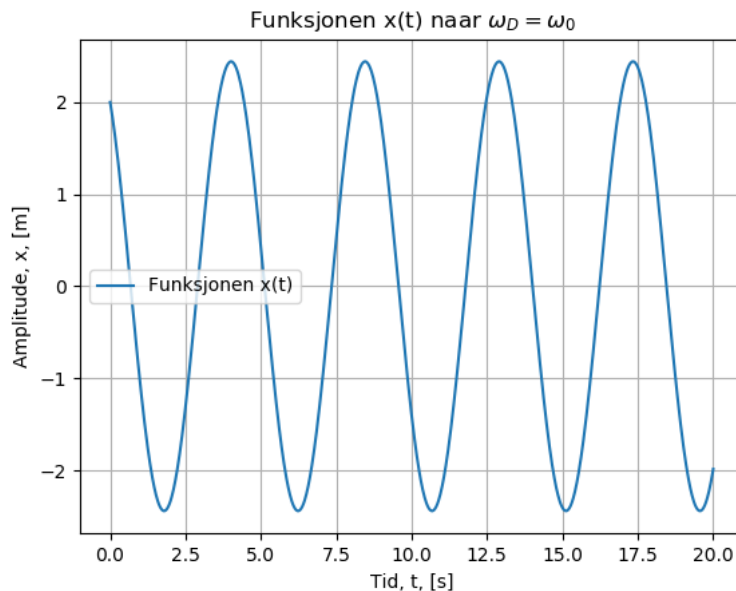


Figure 3: Utslag mot tid grafen til systemet der kraften er påtrykt med frekvens $\omega_D = \omega_0$. Simulasjonen varte i 20 sekunder.

Oppgave 4

Følgende er plottene produsert av programmet med begge frekvensene:

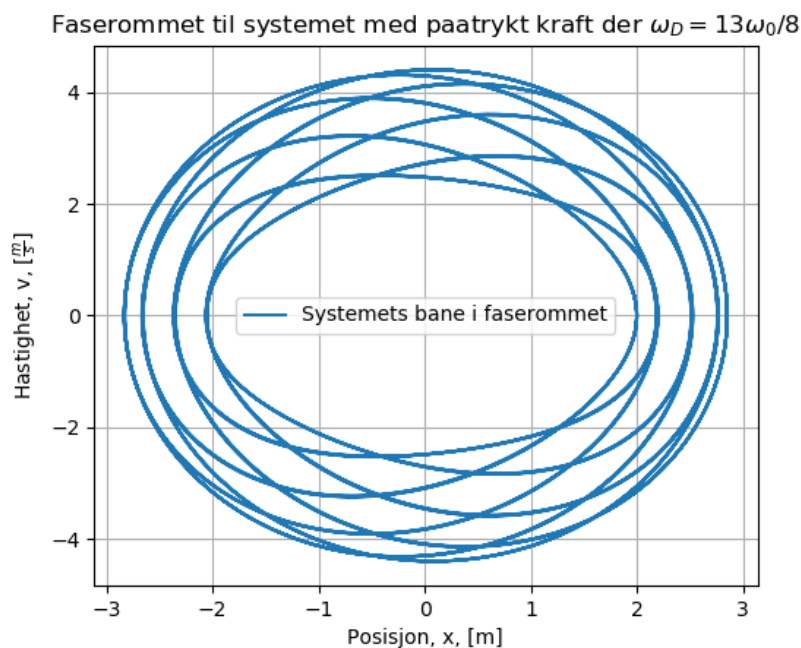


Figure 4: Faserommet til systemet der kraften er påtrykt med frekvens $\omega_D = \frac{13\omega_0}{8}$. Simulasjonen varte i 200 sekunder.

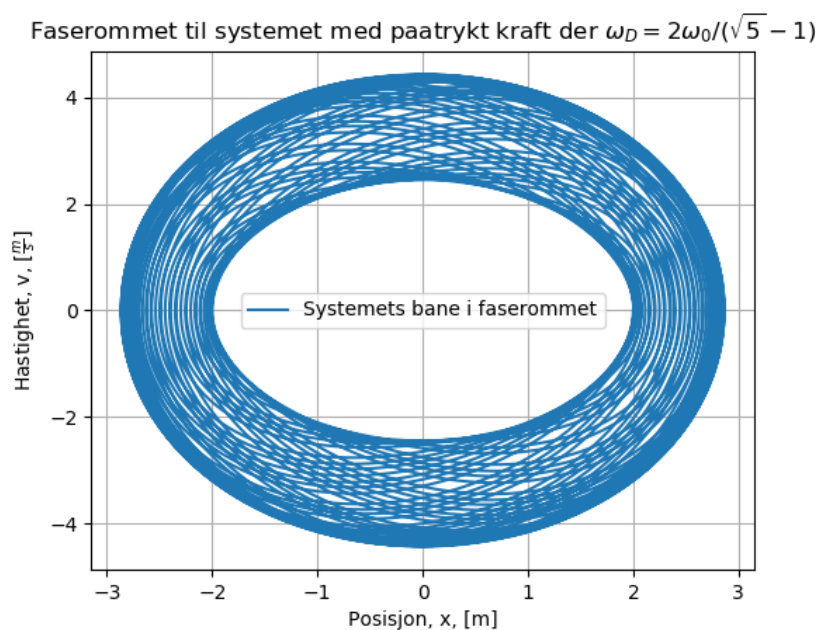


Figure 5: Faserommet til systemet der kraften er påtrykt med frekvens $\omega_D = \frac{2\omega_0}{(\sqrt{5}-1)}$. Simulasjonen varte i 200 sekunder.

Ja, bevegelsen vil gjenta seg etterhvert i tilfellet $\omega_D = \frac{13\omega_0}{8}$. Dette kan man se ut i fra faserom plottene på måten den overlapper seg selv når tida går, i tillegg til at $\frac{\omega_D}{\omega_0}$ er rasjonal.

$\frac{\omega_D}{\omega_0}$ må være rasjonal for at bevegelsen skal være periodisk. I tilfellet $\omega_D = \frac{2\omega_0}{\sqrt{5}-1}$ så er ikke bevegelsen

periodisk siden $\sqrt{5}$ gjør brøken irrasjonal.

Oppgave 5

Følgende er noen plotter produsert av programmet med to ulike initialbetingelser.

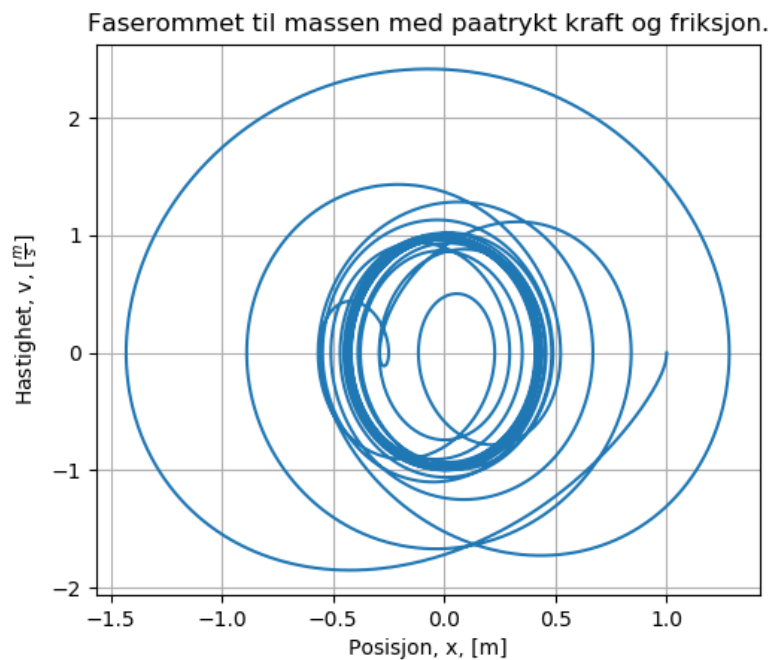


Figure 6: Faserombane for de første 100s med initialbetingelser $x_0 = 1m$ og $v_0 = 0\frac{m}{s}$

Denne ser ut som å ha en én-dimensjonal attraktor ellipse i midten av plottet siden linjene blir tykkere rundt der når den utvikler seg med tiden.

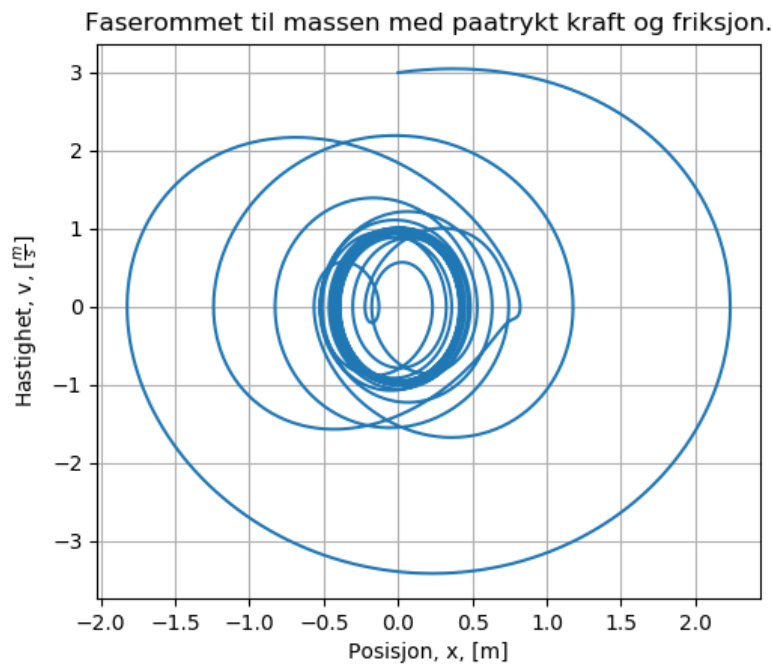


Figure 7: Faserombane for de første 100s med initialbetingelse $x_0 = 0\text{ m}$ og $v_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Samme gjelder for denne. Dette plottet har også en klar ellipse attraktor i midten av plottet som faserom kurven nærmer seg. Dette kan vi sjekke ved å plote de siste punktene for mange ulike initialbetingelser:

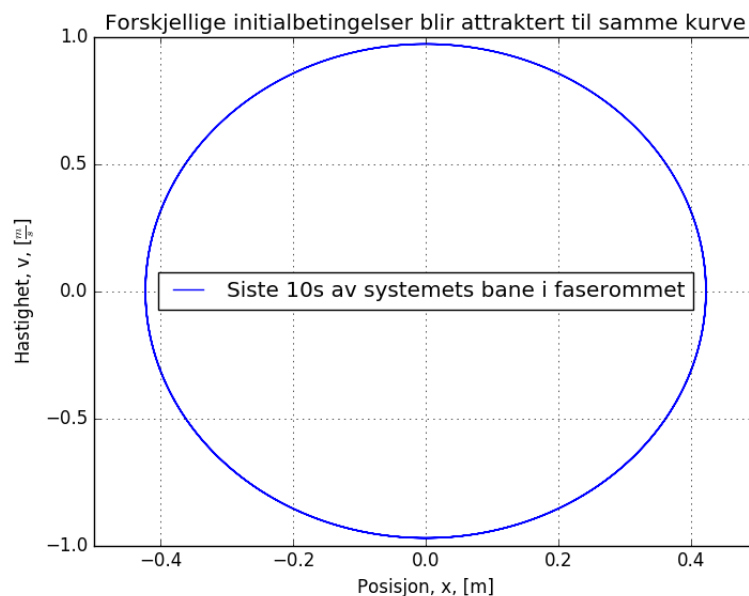


Figure 8: Mange ulike initialbetingelser plottet for de siste 10s landet etterhvert på denne 1 dimensjonale attraktoren.

Likheter mellom disse plottene og plottene for oppgave 2 og 4 er at figurer 5 og 6 ligner på en kombinasjon av fenomenene beskrevet i figurer 3 og 2. På grunn av friksjonskraften bv , så trekkes energi ut av systemet og systemet begynner å nærme seg origo i faserommet, men den påtrykte kraften

gir systemet mer energi. Dette gjør at systemet nærmer seg (blir tiltrukket av attraktor)en likevekt der energien er tilnærmet konstant (friksjon fjerner like mye energi som kraften tilfører), som man kan se på ellipsene i figurer 5,6 og 7.

Oppgave 6

Følgende er plottene produsert av programmet:

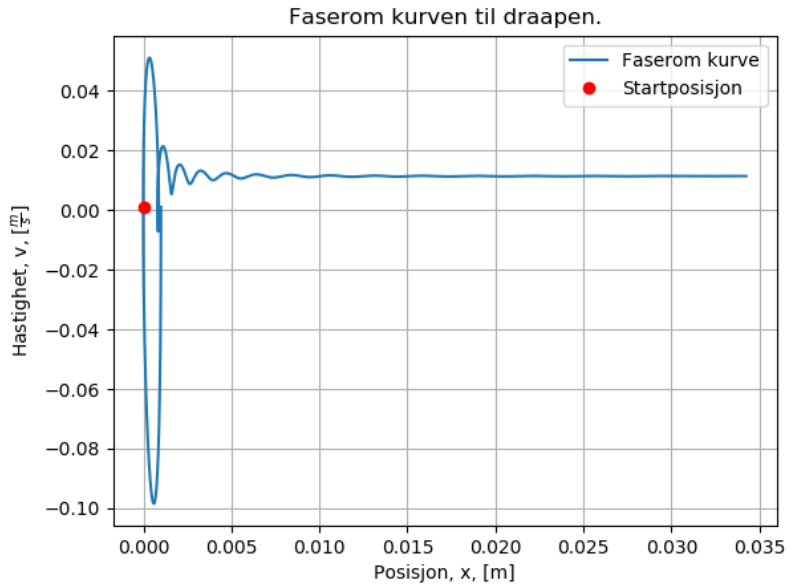


Figure 9: Faserommet til dråpen.

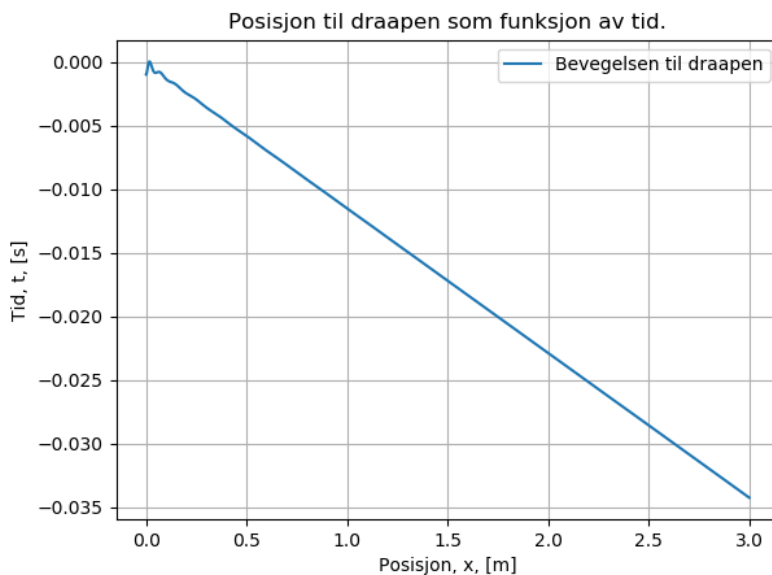


Figure 10: Posisjonen til dråpen plottet mot tiden.

Bevegelsen til dråpen er interessant siden den beveger seg sinusoidalt i begynnelsen men oscillasjonen blir dempet slik at den kun beveger seg lineært nedover. Denne lineære bevegelsen betyr at par-

tikkelen har nådd terminalhastigheten sin der kreftene kansellerer hverandre ut og hastigheten er konstant. Denne bevegelsen er ikke særlig realistisk fordi det ser ut som partikkelen begynner med å bevege seg oppover mot toppen av strømmingen (uvanlig) og man forventer at partikkelen vil ha en bane som er litt mer parabel aktig (som med fallende ball, for eksempel) før den når terminalhastigheten sin.

Oppgave 7

Følgende er plottene produsert av programmet:

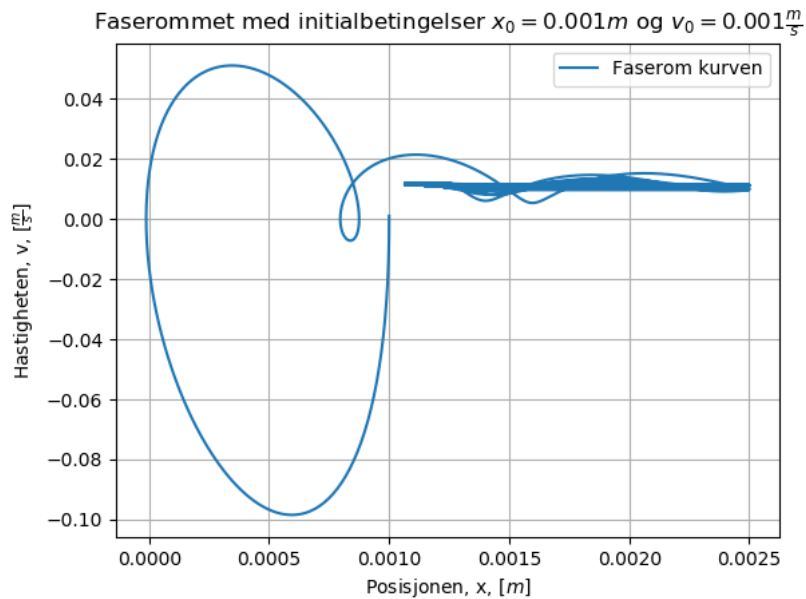


Figure 11: Faserommet til vannet ved kranen. Her er initialbetingelsene lik $x_0 = 0.001m$ og $v_0 = 0.001 \frac{m}{s}$

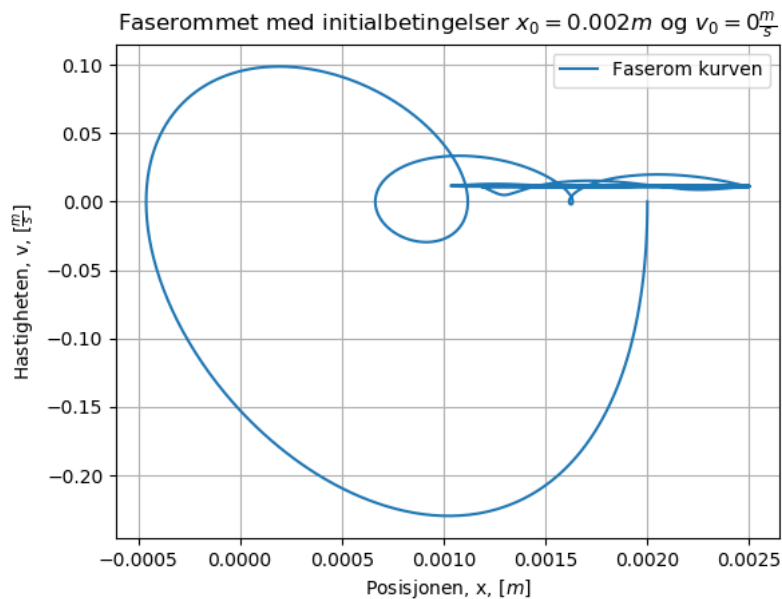


Figure 12: Faserommet til vannet ved kranen. Her er initialbetingelsene forskjellige og lik $x_0 = 0.002m$ og $v_0 = 0 \frac{m}{s}$

Ut i fra disse to faserommene (med forskjellige initialbetingelser) kan man se en klar én-dimensjonal attraktor kurve som begge faserommene beveger seg mot. Dette er ikke ulikt det vi fant i oppgave 4 i og med at partikkelen etterhvert vil stabilisere seg på attraktoren og bevege seg periodisk gjennom faserommet. Bevegelsen her er også ikke ulik den vi fant i oppgave 2 siden mye av kinetiske og potensielle energien er fjernet før stabilisering. For å se bedre attraktoren så plotter vi noen av de siste punktene (på samme måte som gjort i figur 7) med forskjellige initialbetingelser for å se bedre på attraktorformen:

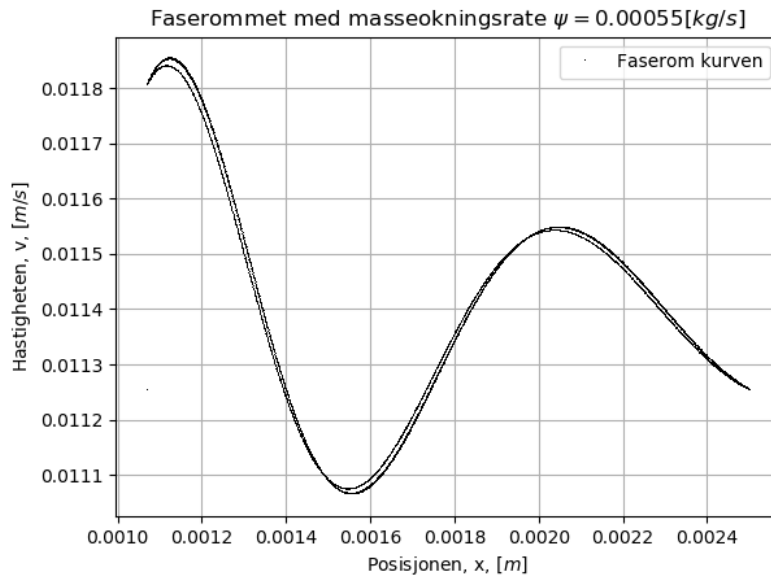


Figure 13: Attraktoren til vannet ved kranen med masseøkingsrate $\psi = 0.00055 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

For mange ulike initialbetingelser fikk siste 55,000 punktene samme to faseromkurver. Dette tyder på to én-dimensjonale attraktorlinjer i faserommet. Dersom man minker Δt så blir det kun én attraktor mellom disse to men denne figuren sleit pc-en veldig med å lagre. Det er altså noen usikkerheter her med $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$ men denne er veldig grei å kjøre med (spesielt for neste oppgave).

Oppgave 8

Følgene er plottet produsert av programmet:

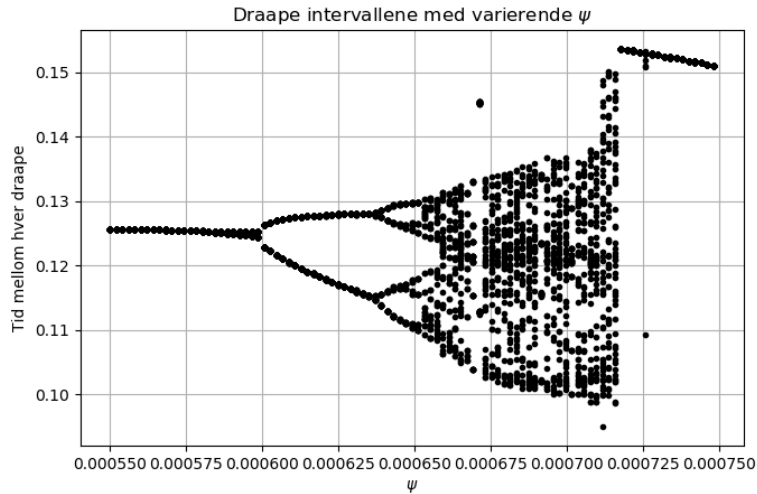


Figure 14: Tiden mellom hver dråpe i [s] som funksjon av masseøkingsraten $\psi [\frac{kg}{s}]$

Ut i fra denne figuren ser man at dråpe raten har en konstant frekvens i begynnelsen, og blir deretter beskrevet av en superposisjon av to frekvenser rundt $\psi = 0.000625 \frac{kg}{s}$. Deretter blir frekvensene som til sammen beskriver dråpene doblet hver gang, og går eksponensielt mot et veldig kaotisk system. Det er noe interessant som skjer ved $\psi = 0.000717 \frac{kg}{s}$, der frekvensen til dråpene kan bli beskrevet ved noen få frekvenser igjen. Antall punkter for hver ψ representerer antall attraktorkurver i faserommet. Dette kan illustreres ved å se på faserommet for én bestemt ψ :

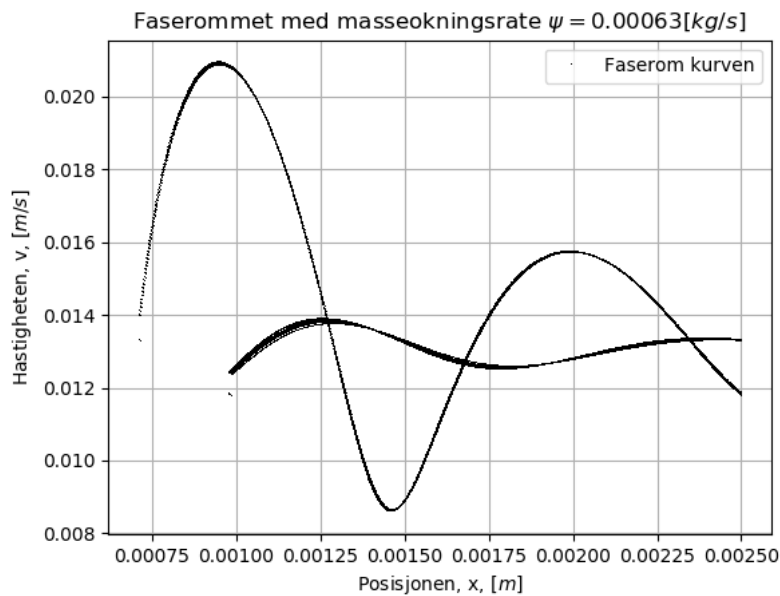


Figure 15: Faseromkurven for 55,000 siste punktene med masseøkingsraten $\psi = 0.00063 \frac{kg}{s}$

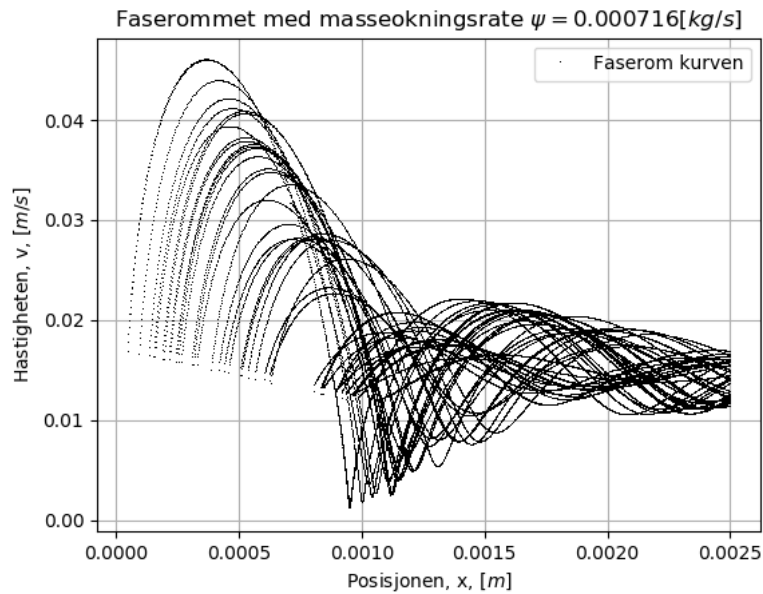


Figure 16: Faseromkurven for 55,000 siste punktene med masseøkingsraten $\psi = 0.000716 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

Figur 14 viser to klare attraktorkurver som simulasjonen gikk mot. Dette ble sjekket for mange ulike initialbetingelser. I figur 15 så var ψ bestemt slik at det var mest mulig kaos. Det er altså veldig mange ulike attraktorkurver som systemet går mot (akkurat som det er mange punkter for samme ψ i figur 13). Dette er likefør systemet stabiliserer seg med én eller to attraktorer igjen.

En figur som i oppgave 13 har man sett i populasjonsutvikling av arter og andre typer eksponensielle reaksjoner som fission av uranium i en atombombe. Denne typen fordeling ligner veldig på kaos etterhvert siden det blir så vanskelig å finne mønstre rundt $\psi \approx 0.000675 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

Oppgave 9

Følgende er en figur fra en eksperimental rapport funnet på European Journal of Physics:

Figure 2. A section of the bifurcation diagram of the logistic map. The graph shows the asymptotic behaviour of x_n for values of μ between 2.94 and 4.

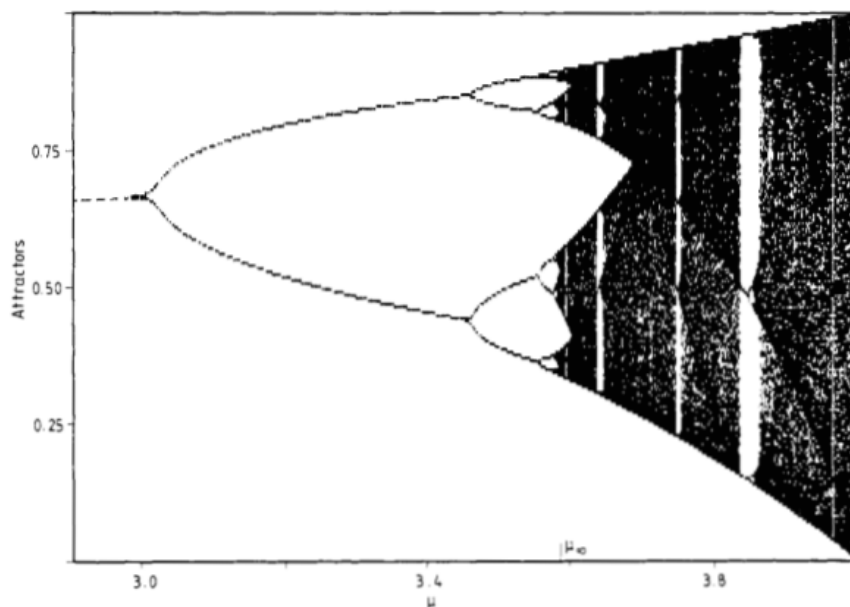


Figure 17: En utvikling av tidene mellom hver vanddråpe når man øker stigningsraten til massen. Dataen var samlet eksperimentelt av (H. N. Nunez Yepez, A. L. Salas Brito, C. A. Vargas and L. A. Vicente, 1989). Se appendix 1 for referanse.

Figur 16 viser resultater fra eksperiment (av H. N. Nunez Yepez, A. L. Salas Brito, C. A. Vargas and L. A. Vicente, 1989) der dataen samlet ble plottet på samme måte som vår simulasjon gjorde. Denne figuren ligner veldig på den vi fikk med ett unntak; simulasjonen fra oppgave 8 stabiliserte seg etter hvert som illustrert i figur 13, men denne vitenskapelige artikkelen hadde ingen slik stabilisering. Deres eksperimentelle data ble mer og mer kaotisk og det er usikkert om det faktiske eksperimentelle datasettet også stabiliserer seg, eller om dette bare er karakteristisk til vår simulasjonsmodell.

Følgende er figur fra modellstudie (av Thomas Schmidt og Marco Marhl 1997) der en simulasjon ble brukt for å generere data:

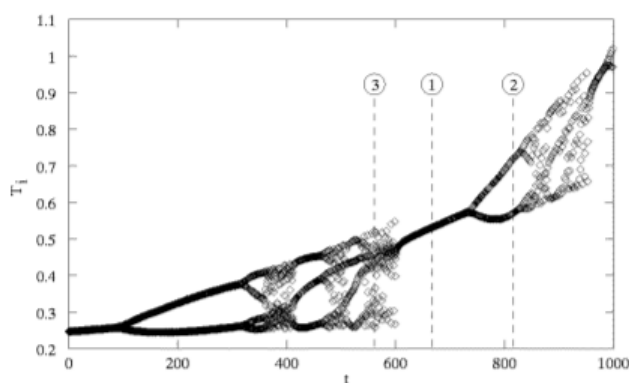


Figure 8. Feigenbaum diagram obtained by varying the water afflux and thus the time from 0 to 1000. Three cases are labelled: water dripping with one frequency (1), with two frequencies (2) and chaotic behaviour (3).

Figure 18: En utvikling av tidene mellom hver vanddråpe når man øker stigningsraten til massen. Dataen var generert i en simulasjon av (Thomas Schmidt og Marco Marhl 1997). Se appendix 1 for referanse.

Denne simulasjonsmodellen ser ut som å stabilisere seg som i figur 13, og så splitte seg igjen på lignende kaotisk måte. Vi prøver å kjøre for litt flere ψ for å se om vår simulasjonsmodell oppfører seg likt og fikk følgende resultat:

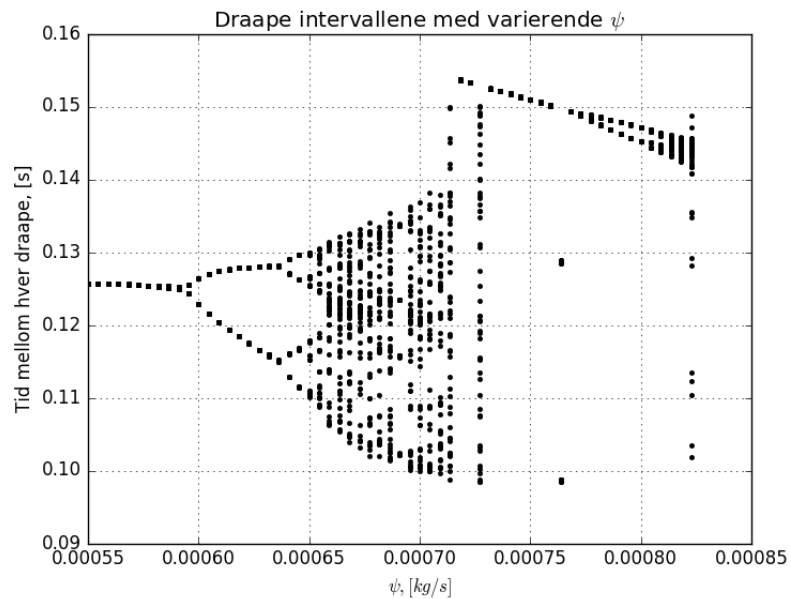


Figure 19: En utvikling av tidene mellom hver vandråpe når man øker stigningsraten til massen. Dataen var generert i en simulasjon (se appendix 2).

Merker at etter at den har stabilisert seg så begynner den å dele seg opp igjen på samme måte som i simulasjonen til (Thomas Schmidt og Marco Marhl, 1997).

Appendix 1: Referanser

Figur 16 Cited: H. N. Nunez Yepez, A. L. Salas Brito, C. A. Vargas and L. A. Vicente, 1989, Chaos in a dripping faucet, *European Journal of Physics* Report 10-99,

Source: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/10/2/005/meta> (4. mai 2018)

Figur 17 Cited: Thomas Schmidt, Marko Marhl, A simple mathematical model of a dripping tap, *Koroska* Report c. 160,

Source: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.862.460&rep=rep1&type=pdf> (3. mai 2018)

Appendix 2: Program kode

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numba import jit
#Viktig aa kommentere ut riktig akselerasjonsuttrykk
#for den oppgaven som skal kjøres. Samme gjelder for
#noen konstanter og initialbetingelser for oppgaver
#1, 2, 4, og 5. Oppgaver 6, 7 og 8 har egne sub-koder
#som maa kommenteres ut for aa kjore.
def f(x, v, t):
    ##### Akselerasjoner til hver av oppgavene#####
    a=-k*x/m #Oppgave 1
    #a=-k*x/m-b*v/m #Oppgave 2
    #a=-k*x/m-FD*np.cos(omegaD*t)/float(m) #Oppgave 4
    #a=-k*x/m-b*v/m-FD*np.cos(omegaD*t)/float(m) #Oppgave 5
    #a=-k*x/m-(b+psi)*v/m+g #Oppgaver 6, 7 og 8
    return a
def diffEq(xNow,vNow,tNow):
    aNow = f(xNow,vNow,tNow)
    return aNow
def rk(xStart,vStart,tStart):
    #####RK4#####
    a1 = diffEq(xStart,vStart,tStart)
    v1 = vStart
    xHalf1 = xStart + v1 * dt/2.0
    vHalf1 = vStart + a1 * dt/2.0
    a2 = diffEq(xHalf1,vHalf1,tStart+dt/2.0)
    v2 = vHalf1
    xHalf2 = xStart + v2 * dt/2.0
    vHalf2 = vStart + a2 * dt/2.0
    a3 = diffEq(xHalf2,vHalf2,tStart+dt/2.0)
    v3 = vHalf2
    xEnd = xStart + v3 * dt
    vEnd = vStart + a3 * dt
    a4 = diffEq(xEnd,vEnd,tStart + dt)
    v4 = vEnd
    aMiddle = 1.0/6.0 * (a1 + 2*a2 + 2*a3 + a4)
    vMiddle = 1.0/6.0 * (v1 + 2*v2 + 2*v3 + v4)
    xEnd = xStart + vMiddle * dt
    vEnd = vStart + aMiddle * dt
    return xEnd, vEnd
#####
#
#####Oppgaver 1, 2, 4, 5#####
m=0.5 #kg
k=1 #N/m
b=0.1 #kg/s
dt=1e-2 #s

T=20 #Oppgave 1 og 2
#T=200 #Oppgave 4
#T=100 #Oppgave 5

####Verdier for oppgave 4 og 5####
FD=0.7 #N
omega0=np.sqrt(k/m) #Hz
omegaD=13*omega0/8 #Hz
#omegaD=2*omega0/(np.sqrt(5)-1)
#####

N=int(T/dt)
x=np.zeros(N)
v=np.zeros(N)
t=np.linspace(0,T,N)
x[0]=1 #Oppgave 1 og 2
#x[0]=2 #Oppgave 4 og 5
v[0]=0 #m/s

for i in range(N-1):
    #Runge Kutta
    x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
```



```

plt.plot(x, v, label="Siste 10s av systemets bane i faserommet")
plt.xlabel(" Posisjon , x, [m]")
plt.ylabel(" Hastighet , v, [ $\frac{m}{s}$ ])")
plt.title(" Forskjellige initialbetingelser blir attraktert til samme kurve")
plt.grid()
plt.legend(loc="best")
plt.show()
#####
#-----#
#####Oppgave 6#####
"""
T=3 #s
dt=1e-4 #s
N=int(T/dt)
m=np.zeros(N)
m[0]=0.00001 #kg
k=0.475 #N/m
b=0.001 #kg/s #Oppgave 2
psi=0.00055 #kg/s
g=9.81 #m/s**2
x=np.zeros(N)
v=np.zeros(N)
t=np.linspace(0,T,N)
x[0]=0.001
v[0]=0.001
for i in range(N-1):
    m=m[i]
    x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
    m[i+1]+=m[i]+psi*dt

plt.plot(x, v, label="Faserom kurve")
plt.plot(t[0],x[0],"ro", label="Startposisjon")
plt.xlabel(" Posisjon , x, [m]")
plt.ylabel(" Hastighet , v, [ $\frac{m}{s}$ ])")
plt.title("Faserom kurven til draapen.")
plt.grid()
plt.legend()
plt.figure()
plt.plot(t,-x, label="Bevegelsen til draapen")
plt.xlabel(" Posisjon , x, [m]")
plt.ylabel("Tid, t, [s]")
plt.title(" Posisjon til draapen som funksjon av tid.")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
"""
#####
#-----#
#####Oppgave 7#####
"""
T=20 #s
dt=1e-5 #s
N=int(T/dt)
m=np.zeros(N)
m[0]=0.00001 #kg
k=0.475 #N/m
b=0.001 #kg/s
g=9.81 #m/s**2
xc=0.0025 #m
alpha=50 #s/m
rho=1000 #kg/m**3
x=np.zeros(N)
v=np.zeros(N)
t=np.linspace(0,T,N)
x[0]=0.001
v[0]=0.001

#psi=0.000716 #kg/s
#psi=0.00063
psi=0.00055
droptime=[]
for i in range(N-1):
    if x[i]<=xc:

```

```

    m=m_[i]
    x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
    m_[i+1]=m_[i]+psi*dt
else:
    droptime.append(i*dt)
    x[i]=np.cbrt(3*(alpha*m_[i]*v[i])**4/(4*np.pi*rho*m_[i]**3))
    m=m_[i]
    x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
    m_[i+1]=alpha*m_[i]*v[i]
    m_[i+1]=m_[i]+psi*dt

plt.plot(x,v, "k", label="Faserom kurven")
plt.grid()
plt.legend()
plt.title("Faserommet med masseokningsrate  $\psi=0.00055$  [kg/s]")
plt.xlabel("Posisjonen , x, [m]")
plt.ylabel("Hastigheten , v, [m/s]")
plt.show()
"""
#####
#
#####Oppgave 8#####
"""
T=20          #s
dt=1e-4       #s
N=int(T/dt)
m=np.zeros(N)
m[0]=0.00001  #kg
k=0.475       #N/m
b=0.001       #kg/s
g=9.81        #m/s**2
xc=0.0025     #m
alpha=50      #s/m
rho=1000      #kg/m**3
x=np.zeros(N)
v=np.zeros(N)
t=np.linspace(0,T,N)
x[0]=0.001    #m
v[0]=0.001    #m/s

psimin=0.00055
psimax=0.00075
psiN=100
psi=np.linspace(psimin,psimax,psiN)
psitime=np.zeros(psiN)
time_between=np.zeros(psiN)

for j in range(psiN-1):
    psi=psi_[j]
    droptime=[]
    m=np.zeros(N)
    m[0]=0.00001 #kg
    for i in range(N-1):
        if x[i]<=xc:
            m=m_[i]
            x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
            m_[i+1]=m_[i]+psi*dt
        else:
            droptime.append(i*dt)
            x[i]=np.cbrt(3*(alpha*m_[i]*v[i])**4/(4*np.pi*rho*m_[i]**3))
            m=m_[i]
            x[i+1], v[i+1] = rk(x[i], v[i], t[i])
            m_[i+1]=alpha*m_[i]*v[i]
            m_[i+1]=m_[i]+psi*dt
    time_between=np.diff(droptime[-21:])
    if int(len(time_between))!=20:
        plt.grid()
        plt.title("Draape intervallene med varierende  $\psi$ ")
        plt.xlabel(" $\psi$ , [kg/s]")
        plt.ylabel("Tid mellom hver draape, [s]")
        plt.show()
    else:
        print(len(time_between))

```

```

plt.plot([psi]*20, time_between, "k.")

plt.grid()
plt.title("Draape intervallene med varierende  $\psi$ ")
plt.xlabel(" $\psi$ , [kg/s]")
plt.ylabel("Tid mellom hver draape, [s]")
plt.show()
"""
#####

```

Listing 1: Kode til alle simulasjoner i prosjektoppgaven.