FYS2140, 23.03.18

Hjemmeeksamen V18

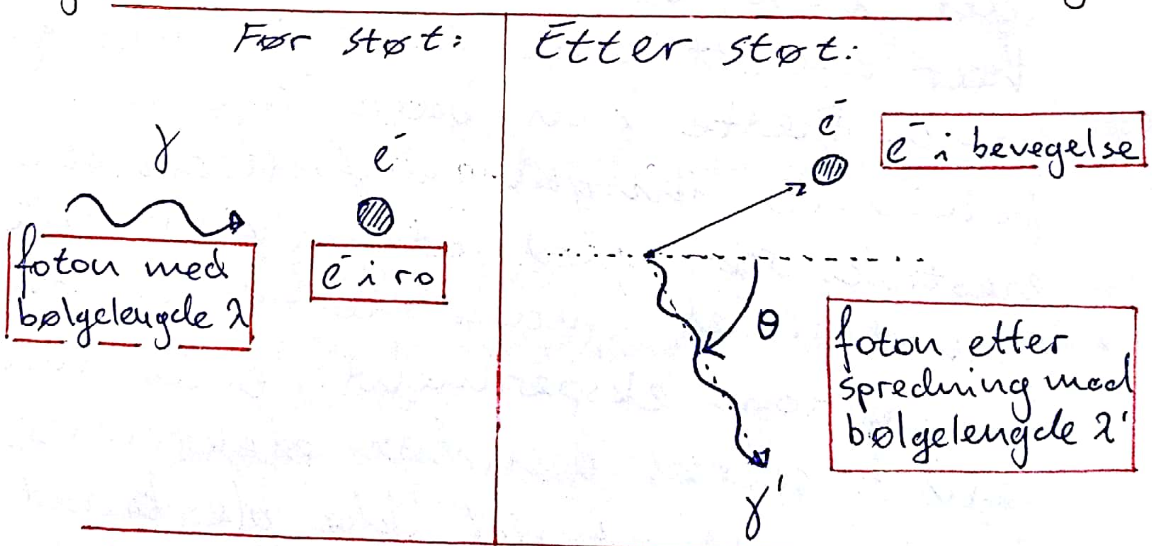
Kandidatnummer: 15194

Oppgave 1:

a1) Comptons formel er:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta), \quad (1)$$

der h er Planck's konstant, c er lyshastigheten, λ er bølgelengden til fotonet før støtet, λ' er bølgelengden til fotonet etter støtet, θ er vinkelen mellom innkommende fotonet og utgående fotonet, og m er massen til partikkelen fotonet støter bort i. Følgende er en skisse av fotonspredning:



Figur 1: Fotonspredning mot elektron.

Comptonbølgelengden $\lambda_c(m) = \frac{h}{mc}$ for et elektron finner vi ved å sette inn elektronmassen ~~for~~ m:

$$\lambda_{c,e} = \frac{h}{m_e c} \approx \underline{2.426 \times 10^{-12}\,\text{m}}$$

a2) For å beregne spredningsvinkelen θ, gitt bølgelengden før og etter støtet (henholdsvis λ og λ'), kan vi bruke Comptons formel (1):

$\lambda = 0.0709 nm$ $\lambda' = 0.0749 nm$ $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda_c}\right) \approx \underline{130.45^\circ}.$$

Av de fire grafene i figur 1 i oppgaveteksten, er denne vinkelen nermest grafen for $\theta = 135°$. Det var altså i denne vinkelen han målte $\lambda' = 0.0479 nm$.

a3) Første toppen til venstre i spektrene (der $\lambda' = \lambda$) kommer av at fotoner ikke har mistet noe energi etter spredning. Dette kan bare skje hvis fotonene inngår i fullstendig elastiske støt med atomkjernene i materialet (materialet er grafitt i Comptons eksperiment), eller med veldig sterkt bundne elektroner. Grunnen til at det ikke ble brukt synlig lys (lys med bølgelengde i intervallet $\lambda \in [400 nm, 700 nm]$) i dette eksperimentet er fordi det ville vært vanskelig å se en systematisk forskjell $\lambda' - \lambda$ i datasettet.

Til og med når spredningsvinkelen θ er maksimal ($\theta = \pi$), blir $\lambda' - \lambda$ veldig liten. Tar som eksempel $\lambda = 500\text{nm}$:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos(\pi))$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = 4.852 \cdot 10^{-12} \text{m}$$

Differansen mellom bølgelengdene er altså cirka 0.0049nm, som er utrolig vanskelig å måle med fotoner som har bølgelengde på 500nm.

b1) Finner først gjennomsnittlig energi:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T \, , \quad k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{m^2 kg}{s^2 K} \, , \quad T = 25^\circ C$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \times 10^{-23} \frac{m^2 kg}{s^2 K} \cdot 298.15 \text{K}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle \simeq \underline{\underline{6.172 \times 10^{-21}}} \text{J}$$

Finner så gjennomsnitts bevegelsesmengde:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \Rightarrow \langle p \rangle = \sqrt{2m \langle E \rangle} = \sqrt{3 m k_B T}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = \sqrt{3 m_n k_B T} \, , \quad m_n = \text{nøytronmassen} \simeq 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle \simeq \underline{\underline{4.53 \times 10^{-24}}} \, kg \frac{m}{s}$$

Får gjennomsnitts bølgelengde fra De Broglie:

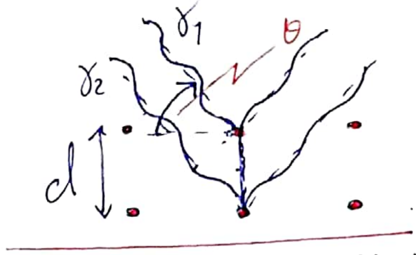
$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \langle \lambda \rangle = \frac{h}{\langle p \rangle} \, , \quad h = \text{Planck's konstant}$$

$$\Rightarrow \langle \lambda \rangle \simeq \frac{6.63 \cdot 10^{-34} m^2 \frac{kg}{s}}{4.53 \cdot 10^{-24} kg \frac{m}{s}} \simeq \underline{\underline{1.464 \, \text{Å}}}$$

b2) Betrakter nøytronene som bølger med $\lambda = 1.85 Å$. Da blir det størst intensitet når bølgene interfererer konstruktivt etter refleksjon. Dette kan beskrives matematisk som:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$



Figur 2: BraggDiffraksjon

Løser vi for θ, med $d = 2.82 Å$, får vi:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{2d}\right), \quad \lambda = 1.85 Å, \ d = 2.82 Å, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$n = 1 \Rightarrow \theta = 19.14°$$

Det området i vinkler som kreves for å filtrere ut bølgelengder med spredning mindre enn 10% kan vi beregne:

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} < 10\% \Rightarrow |\lambda' - \lambda| \leq 0.1\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda' \in [0.9\lambda, 1.1\lambda]$$

Setter inn disse grensene i θ uttrykket for å få vinkel området:

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad \theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{0.9 \cdot 1.85 Å}{2 \cdot 2.82 Å}\right) \approx 17.7°$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1.1 \cdot 1.85 Å}{2 \cdot 2.82 Å}\right) \approx 21.2°$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\theta \in [17.7°, 21.2°]}} \text{ for spredning under 10\%}$$

Oppgave 2:

a) Kan beregne normeringskonstanten ved å kreve at $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$:

$$\Psi(x,0) = A \cdot e^{-(x-x_0)^2/4a^2} \cdot e^{ikx}$$

$$|\Psi(x,0)|^2 = A^2 e^{-(x-x_0)^2/2a^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx = 1$$

Har formel 51. på side 155 i Rottmann formelsamlingen som sier:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-ac}{a}}}$$

I dette tilfellet kan vi løse integralet ved å sette $a = \frac{1}{2a^2}$, $b = \frac{-x_0}{2a^2}$ og $c = \frac{x_0^2}{2a^2}$. Da får vi at:

$$A^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2a^2}}}\; e^{\cancelto{0}{\left(\frac{\frac{x_0^2}{4a^4} - \frac{x_0^2}{4a^4}}{\frac{1}{2a^2}}\right)}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi a^2}} \Rightarrow \underline{\underline{A = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}}}$$

Plottet ligger nederst i pdf-filen.

Energien til partikkelen er gitt ved:

$\langle H \rangle = \langle K \rangle$ gitt at potensialet $V=0$...

Beregner $\langle K \rangle = \langle \psi | \hat{K} \psi \rangle$:

$$\langle K \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{K} \psi \, dx \text{, Setter inn } \hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \, dx, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hbar^2}{i^2} \cdot \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi \, dx$$

Dobbeltderiverer ψ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-(x-x_0)^2/4a^2} e^{ikx} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{(x-x_0)}{2a^2} e^{-(x-x_0)^2/4a^2} e^{ikx} + e^{-(x-x_0)^2/4a^2} ik e^{ikx} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi \left(-\frac{(x-x_0)}{2a^2} + ik \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x}(\psi) \cdot \left(ik - \frac{(x-x_0)}{2a^2} \right) + \left(-\frac{1}{2a^2} \cdot \psi \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \psi \left(ik - \frac{(x-x_0)}{2a^2} \right)^2 - \frac{\psi}{2a^2} = \psi \left(\left(ik - \frac{(x-x_0)}{2a^2} \right)^2 - \frac{1}{2a^2} \right)$$

Setter dette inn i integralet:

$$\langle K \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \left(\left(ik - \frac{(x-x_0)}{2a^2} \right)^2 - \frac{1}{2a^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2a^2} \left(-k^2 - 2ik \frac{(x-x_0)}{2a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^4} - \frac{1}{2a^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2a^2} \left(\frac{(x-x_0)^2 - 4ika^2(x-x_0) - 2a^2(2a^2k^2+1)}{4a^4} \right)$$

Spalter opp i tre integraler:

I: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx$

II: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} -4ika^2(x-x_0) e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx$

III: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} -2a^2(2a^2k^2+1) e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx$

Disse tre kan alle løses ved bruk av likninger 49) og 50) på side 155 i Rottmann's.

I: Benytter variabelskifte $u = (x - x_0)$:
$du = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{1}{2a^2}u^2} du$$

Formel 50) gir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{1}{2a^2}u^2} du = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = (2a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II: Ser at dette integralet er anti-symmetrisk rundt origo, og må derfor være lik null.

III: Variabelskifte $u = (x - x_0)$ gir:

$$-2a^2(2a^2k^2+1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a^2}u^2} du,$$ bruker formel 49):

$$= -2a^2(2a^2k^2+1)\sqrt{2a^2\pi}$$

Slår vi sammen resultatene får vi energien:

$$\langle K \rangle = \frac{-\hbar^2}{8a^4 m} A^2 \left((2a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2a^2(2a^2k^2+1)\sqrt{2a^2\pi}\right)$$

Setter inn $A = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ og får:

$$\langle K \rangle = \frac{-\hbar^2}{8a^4 m}\left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\pi a^3 - 2a^2(2a^2k^2+1)\sqrt{2a^2\pi}\right)$$

Innsetting av tall gir en energi på:

$$\underline{\underline{\langle K \rangle = 11.25\,\mathrm{MeV}}}$$

b)

Har potensialet gitt ved:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le x \le x_1 \\ V_0 & \text{for } x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{for } x_2 \le x \le \infty \end{cases}$$

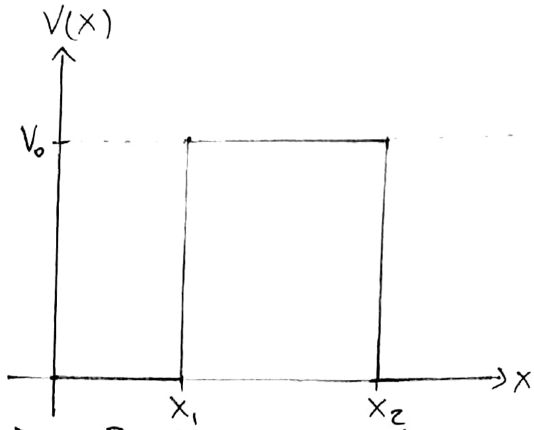


Fig 3: Skisse av V(x)

Løser TUSL for disse tre områdene:

$0 \leq x \leq x_1$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi$ $(V=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = -k^2\psi \;, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Generelle løsning:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$x_1 \leq x \leq x_2$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V_0\psi = E\psi$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = K^2\psi \;, \quad K = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

Generelle løsning:

$$\psi_2(x) = Ce^{Kx} + De^{-Kx}$$

$x_2 \leq x \leq \infty$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = -k^2\psi \;, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Generelle løsning:

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx} + \underbrace{G}_{\to 0}e^{-ikx}$$

Siden partikkelen kommer fra venstre, så kan vi ikke ha en bølge som beveger seg mot venstre på høyre side av potensialbarrieren. Setter derfor $G = 0$.

c) Bruker kontinuitetsargument i x_1 og x_2 for å beregne sammenhenger mellom koeffisientene A, B, C, D, E og F. Det vi til slutt vil finne er transmisjonskoeffisienten, her gitt ved:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

Krever at uttrykkene er kontinuerlige og at deres deriverte også er kontinuerlig:

- $\Psi_1(x_1) = \Psi_2(x_1) \Rightarrow \underline{Ae^{ikx_1} + Be^{-ikx_1} = Ce^{Kx_1} + De^{-Kx_1}}$ (2)

- $\Psi_2(x_2) = \Psi_3(x_2) \Rightarrow \underline{Ce^{Kx_2} + De^{-Kx_2} = Fe^{ikx_2}}$ (3)

- $\frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x_1) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x_1) \Rightarrow \underline{ikAe^{ikx_1} - ikBe^{-ikx_1} = KCe^{Kx_1} - KDe^{-Kx_1}}$ (4)

- $\frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x_2) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi_3(x_2) \Rightarrow \underline{KCe^{Kx_2} - KDe^{-Kx_2} = ikFe^{ikx_2}}$ (5)

Slår sammen (2) og (4), og slår sammen (3) og (5):

(2) og (4):

$$2:\ Be^{-ikx_1} = Ce^{Kx_1} + De^{-Kx_1} - Ae^{ikx_1}$$

$$4:\ Be^{-ikx_1} = Ae^{ikx_1} - \frac{K}{ik}\left(Ce^{Kx_1} - De^{-Kx_1}\right)$$

$$\Rightarrow Ce^{Kx_1} + De^{-Kx_1} - Ae^{ikx_1} = Ae^{ikx_1} - \frac{K}{ik}\left(Ce^{Kx_1} - De^{-Kx_1}\right)$$

$$\Rightarrow 2Ae^{ikx_1} = \left(1 - i\frac{K}{k}\right)Ce^{Kx_1} + \left(1 + i\frac{K}{k}\right)De^{-Kx_1} \quad (6)$$

(3) og (5):

$$3:\ De^{-Kx_2} = Fe^{ikx_2} - Ce^{Kx_2}$$

$$5:\ De^{-Kx_2} = \frac{1}{K}\left(KCe^{Kx_2} - ikFe^{ikx_2}\right)$$

$$\Rightarrow Fe^{ikx_2} - Ce^{Kx_2} = Ce^{Kx_2} - \frac{ik}{K}Fe^{ikx_2}$$

$$\Rightarrow 2Ce^{Kx_2} = Fe^{ikx_2}\left(1 + \frac{ik}{K}\right)$$

Skriver om x_2 til å være $x_2 = x_1 + \Delta x$:

$$\Rightarrow 2Ce^{K(x_1+\Delta x)} = Fe^{ik(x_1+\Delta x)}\left(1 + \frac{ik}{K}\right)$$

$$\Rightarrow 2Ce^{Kx_1} \cdot e^{K\Delta x} = Fe^{ik(x_1+\Delta x)}\left(1 + \frac{ik}{K}\right)$$

$$\Rightarrow Ce^{Kx_1} = \frac{1}{2}e^{-K\Delta x}Fe^{ikx_2}\left(1 + \frac{ik}{K}\right) \quad (7)$$

Kan finne sammenheng mellom D og F på samme måte via likninger (3) og (5):

(3) og (5):

$$3: \; Ce^{Kx_2} = Fe^{ikx_2} - De^{-Kx_2}$$

$$5: \; Ce^{Kx_2} = \frac{1}{K}\left(ikFe^{ikx_2} + KDe^{-Kx_2}\right)$$

$$\Rightarrow Fe^{ikx_2} - De^{-Kx_2} = \frac{1}{K}\left(ikFe^{ikx_2} + KDe^{-Kx_2}\right)$$

$$\Rightarrow 2De^{-Kx_2} = Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{K}\right)$$

Definerer $x_2 = x_1 + \Delta x$ på samme måte som før:

$$\Rightarrow 2De^{-K(x_1+\Delta x)} = Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{K}\right)$$

$$\Rightarrow 2De^{-Kx_1} \cdot e^{-K\Delta x} = Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{K}\right)$$

$$\Rightarrow De^{-Kx_1} = \frac{1}{2}e^{K\Delta x}Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{K}\right) \quad (8)$$

Setter likninger (7) og (8) inn i likning (6), det gir:

$$2Ae^{ikx_1} = \left(1 - \frac{iK}{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-K\Delta x}Fe^{ikx_2}\left(1 + \frac{ik}{K}\right)\right) + \left(1 + \frac{iK}{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{K\Delta x}Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{K}\right)\right).$$

$$\Rightarrow 2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(e^{-K\Delta x}\left(1 - \frac{iK}{k}\right)\left(1 + \frac{ik}{K}\right) + e^{K\Delta x}\left(1 + \frac{iK}{k}\right)\left(1 - \frac{ik}{K}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(e^{-K\Delta x}\left(2 + i\left(\frac{k^2-K^2}{kK}\right)\right) + e^{K\Delta x}\left(2 + i\left(\frac{K^2-k^2}{kK}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow 2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(2\left(e^{K\Delta x} + e^{-K\Delta x}\right) + i\left(\frac{K^2-k^2}{Kk}\right)\left(e^{K\Delta x} - e^{-K\Delta x}\right)\right)$$

Bruker definisjonene av sinh og cosh funksjonene for å skrive om til:

$$\Rightarrow 2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(4\cosh(K\Delta x) + 2i\left(\frac{K^2-k^2}{Kk}\right)\sinh(K\Delta x)\right)$$

Bruker at absoluttverdiene av komplekse eksponentene er lik 1 for å få:

$$\left|\frac{A}{F}\right| = \left|\cosh(K\Delta x) + i\left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)\sinh(K\Delta x)\right|$$

Her tar vi absoluttverdien av et kompleks tall $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, og opphøyer i andre på begge sider:

$$\Rightarrow \left|\frac{A}{F}\right|^2 = \cosh^2(K\Delta x) + \left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)^2 \sinh^2(K\Delta x)$$

Bruker sammenhengen $\cosh^2 = \sinh^2 + 1$:

$$\Rightarrow \left|\frac{A}{F}\right|^2 = \sinh^2(K\Delta x) + 1 + \left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)^2 \sinh^2(K\Delta x)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{A}{F}\right|^2 = 1 + \left(1 + \left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)^2\right) \sinh^2(K\Delta x)$$

Beregner nå parantesen $\left(1 + \left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)\right)$:

$$1 + \left(\frac{K^2-k^2}{2Kk}\right)^2 = 1 + \frac{K^4 - 2K^2k^2 + k^4}{4K^2k^2}$$

Skriver $1 = \frac{4K^2k^2}{4K^2k^2}$ og får:

$$\Rightarrow \frac{K^4 - 2K^2k^2 + k^4 + 4K^2k^2}{4K^2k^2} = \frac{(K^2+k^2)^2}{4K^2k^2}$$

Setter vi inn definisjonene til K og k:

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)^2}{4\cdot\left(\frac{2^2m^2(V_0-E)}{\hbar^4}\right)E} = \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}$$

Dette returnerer:

$$\left|\frac{A}{F}\right|^2 = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh(K\Delta x)$$

Setter inn for Kappa og bruker at $\tau = \left|\frac{F}{A}\right|^2$:

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)} \quad \square$$

d) Ja, den er størrelsesmessig forenlig med den store relative forskjellen mellom 232Thorium og 218Thorium fordi at hvis vi regner ut transmisjonskoeffisientene (antar at barrierene til 232Th og 218Th også har $V = V_0$ og bredde Δx som i 226Ra tilfellet), så får vi:

$$E_{\alpha,232Th} = 4.08\,MeV, \quad \tau_{1/2,232Th} = 1.4 \times 10^{19}\,år$$

$$\Rightarrow \quad T(4.08\,MeV) = 8.2 \times 10^{-36}$$

$$E_{\alpha,218Th} = 9.85\,MeV, \quad \tau_{1/2,218Th} = 1.0 \times 10^{-7}\,s$$

$$\Rightarrow \quad T(9.85\,MeV) = 6.2 \times 10^{-32}$$

Ser at når transmisjonskoeffisienten øker så skal også halveringstiden minke, som forventet. Plottet ligger nederst i pdf-filen.

e) Siden energien til α-partikkelen i 226Ra er lik 4.8MeV, kan vi beregne transmisjonskoeffisienten ved formelen vi fant i oppgave c):

$$V_0 = 34\,MeV, \quad \Delta x = 17\,fm, \quad m = 4.14 \times 10^{-8}\,\frac{eV}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad T(E = 4.8\,MeV) \approx \underline{\underline{2.52 \times 10^{-35}}}$$

For at partikkelen skal transmittere må den altså treffe veggen $\frac{1}{T} = 3.97 \times 10^{34}$ ganger.

Hvis partikkelen har en hastighet på $v = 0.073c$ inne i kjerne med radius $R = 7.3\,fm$, kan tiden det tar mellom hver transmisjonssjanse beskrives ved:

$$t = \frac{2R}{v} \approx 6.67 \times 10^{-22}\,s$$

Dette kan vi bruke sammen med antall treff det tar for transmisjon for å beregne teoretisk halveringstid:

$$\frac{2R}{v} \cdot \frac{1}{T} = \frac{t}{T} \approx 2.65 \times 10^{13}\,s = \underline{839252\,år}$$

Oppgitte halveringstid for 226Ra er $T_{1/2} = 1600\,år$. Det er altså mange feilkilder som ligger i antagelsene vi har gjort i utregningen.

f) Animasjonen viser sannsynlighetsfordelingen for posisjonen til partikkelen som er innestengt av potensialet V_0. Partikkelen beveger seg mot potensialbarrieren og møter på høy impedans. Dette gjør at mesteparten av bølgepakken blir reflektert og forblir innestengt i atomkjernen. Siden impedansen ikke er uendelig stor, så blir også noe av bølgen transmittert i animasjonen, men den er vanskelig å se siden sannsynligheten for å finne partikkelen på andre siden av barrieren er så liten i forhold til sannsynligheten inne i kjernen.

Legger også merke til at sannsynligheten til partikkelen inne i kjernen er skarpest ved $t=0$, og sprer seg mer jevnt over området fra $x=0$ til $x=x_1$ med tiden (posisjonen blir mindre skarp med tiden). Denne simulasjonen stemmer ganske bra overens med hva vi ville forvente for α-henfall.

g) Kvalitative forskjellen på potensialene er at potensial 1 er konstant i et område mens potensial 2 er som et felt radielt rundt kjernen. Potensial 2 er bedre fysisk beskrivelse av systemet på grunn av at α-partikkelen vil ha en ladning på +2e. Hvis 226Ra har netto null ladning i starten vil den ha ladning −2e etter henfallet. Denne ladningsforskjellen mellom 222Ra og α-partikkelen resulterer i en tiltrekkende kraft F, som kan beskrives ved Coulomb's lov:

$$F = k_e \frac{Z_\alpha Z_D}{x^2} \quad \begin{cases} Z_\alpha = \alpha\text{-ladning} \\ Z_D = 222\text{Ra-ladning} \\ k_e = \text{Coulomb konstant.} \end{cases}$$

Denne kraften (siden den er konservativ) skal kunne beskrives ved et potensial V, der $F = -\nabla V$. Siden den første deriverte av potensial 2 returnerer Coulombs lov så er potensial 2 bra fysisk beskrivelse. Forventer at transmisjonskoeffisienten for potensial 2 er større enn det vi fikk for potensial 1, med andre ord så burde partikkelen bruke kortere tid på å tunnellere ut av kjernen for potensial 2. Animasjonen av bølgefunksjonen som funksjon av posisjon og tid (med potensial 2 implimentert) er gansk**e** lik som for potensial 1, i og med at det er litt transmisjon og mye refleksjon. Ser igjen at skarpheten til posisjonen minker med tiden.

Plots for 2a), 2d), and animation snapshots for 2f)

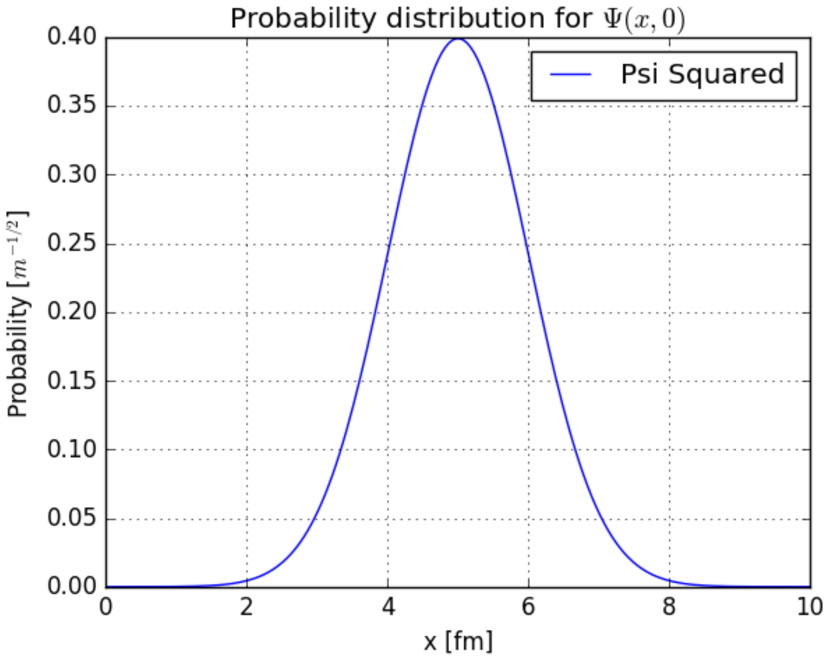


Figure 1: Plot of initial probability distribution

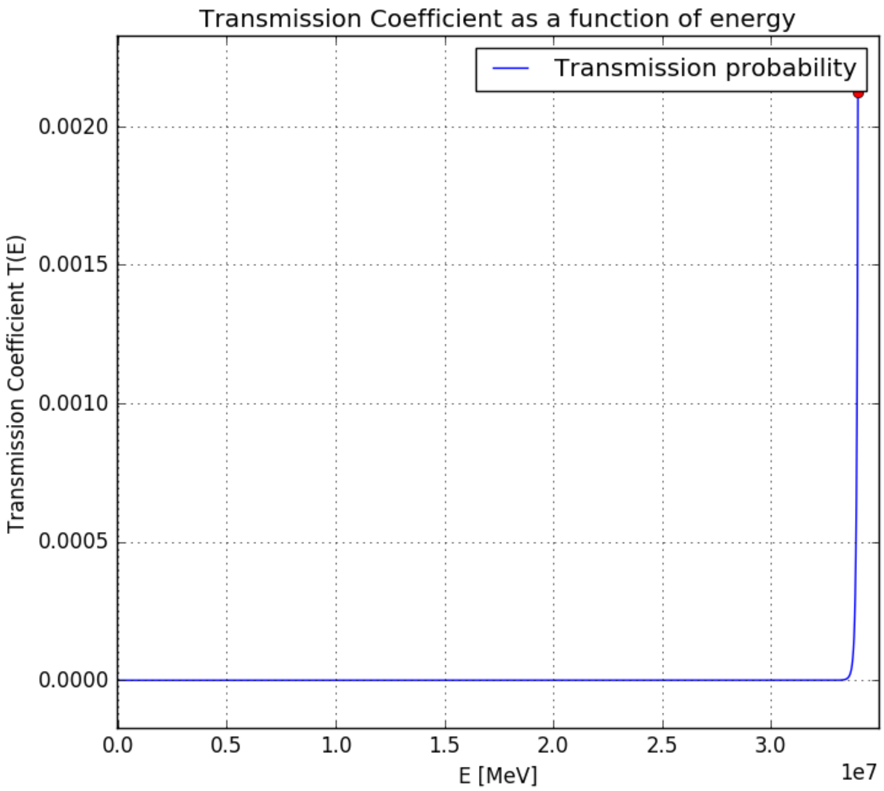


Figure 2: Plot of transmission coefficient as a function of energy

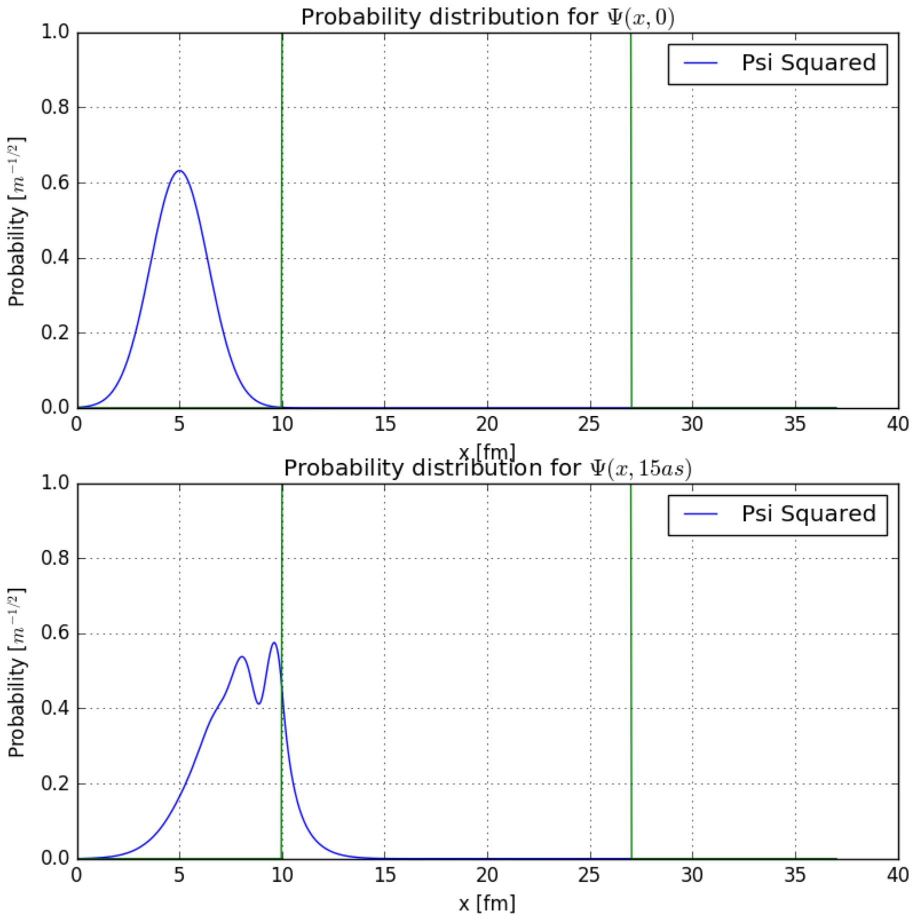


Figure 3: Plot of absolute value of wave function at times t=0 and t=15 attoseconds

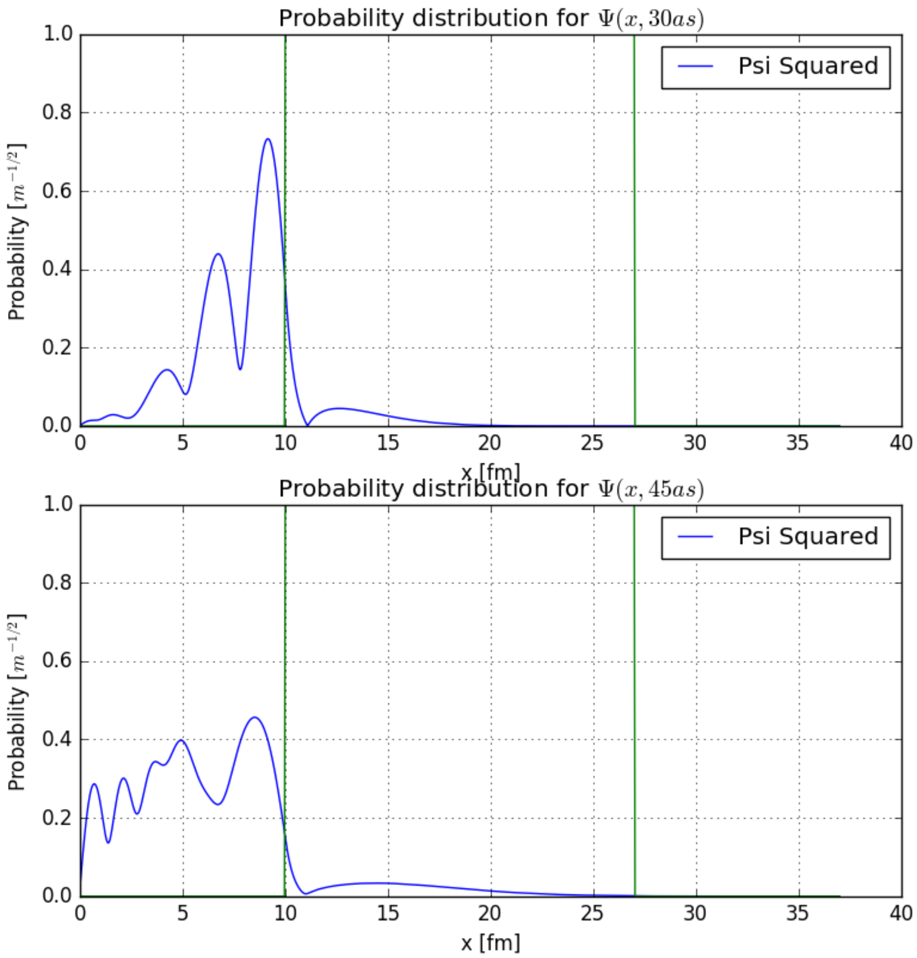


Figure 4: Plot of absolute value of wave function at times t=30 and t=45 attoseconds