Ερώτηση

1. Δίνεται το μητρώο T =[1,2,3,4;0,1,2,3;0,0,1,2;0,0,0,1] . Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$e_1^\top T^{-1}e_2 = -2,\ e_1^\top T^{-1}e_3 = 1,\ e_1^\top T^{-1}e_4 = 0.$$

Πραγματοποιώντας τους ελάχιστους δυνατούς υπολογισμούς και με βάση όσα γνωρίζετε από τη θεωρία, να υπολογίστε τις τιμές του $S = T^{-1}$ και να τις συμπληρώσετε παρακάτω. Υπόδειξη: Μην επιχειρήσετε (δεν χρειάζεται και είναι δαπανηρό) να προβείτε στην αντιστροφή του T μέσω LU ή Gauss.

ΣΥΝΟΨΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

Το T είναι άνω τριγωνικό Toeplitz, επομένως βάσει της θεωρίας , το ίδιο θα ισχύει και για το $S = T^{-1}$. Από τις δοθείσες σχέσεις, τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του S εκτός από το στοιχείο της κυρίας διαγωνίου είναι γνωστά. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε το $e_1^\top T^{-1}e_1$, . Αυτό είναι ιδιαίτερα εύκολο λόγω της δομής του T και του δεξιού μέλους.
Με λίγη σκέψη προκύπτει ότι

$$S = [1, -2, 1, 0; 0, 1, -2, 1; 0, 0, 1, -2; 0, 0, 0, 1]$$

2. Δίνεται το αντιστρέψιμο και συμμετρικό θετικά ορισμένο τετραγωνικό μητρώο A και μας ενδιαφέρει η επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Χρησιμοποιούμε Arnoldi και κατασκευάζουμε βάση ορθοκανονικών διανυσμάτων $\{v_1, v_2, v_3\}$, όπου $v_1 = b/\|b\|_2$, για τον υπόχωρο Krylov $K_3(A, b)$ και θέτουμε $V = [v_1, v_2, v_3]$. Σε ποια θέση (ή ποιες θέσεις) θα έχει τιμή 0 το μητρώο $H = V^\top AV$ και γιατί;

ΣΥΝΟΨΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ: Εδώ αξιοποιούμε το ότι το μητρώο Η θα είναι άνω Hessenberg (γιατι;) αλλά λόγω συμμετρίας του Α και συμμετρικό, άρα το Η θα είναι τριδιαγώνιο.

3. Με μέθοδο ορθογώνιας προβολής Krylov (την FOM), θέλουμε να υπολογίσουμε προσέγγιση της λύσης του $n \times n$ συμμετρικού τετραγωνικού γραμμικού συστήματος παραπάνω όταν $b = \text{eye}(n,1)$. Θέτουμε ως αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$, διαβάστε την παρακάτω πρόταση που αφορά στην πρώτη προσέγγιση $\tilde{x}$ του x με βάση τα προηγούμενα V, H και συμπληρώστε αν είναι ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ με σύντομη εξήγηση.

Η προσέγγιση $\tilde{x}$ είναι το γινόμενο του V_m με την πρώτη στήλη του αντιστρόφου του H.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΣΩΣΤΟ. Ειδικότερα, η προσέγγιση θα είναι το $\tilde{x} = V(V^\top AV)^{-1}V^\top b = \|b\|_2 V(V^\top AV)^{-1}e_1 = VH^{-1}e_1$ καθώς για το δοθέν b ισχύει ότι $\|b\|_2 = 1$.

Ερώτηση Δίνεται το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων $\frac{d}{dt}u(t) = -Au(t), u(0) = g$, όπου A είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο και το g γνωστό διάνυσμα. Θέλουμε να προσεγγίσουμε το $u(h)$ για μικρό h. Με βάση το γνωστό τύπο για την αναλυτική λύση του παραπάνω προβλήματος, να μαυρίσετε το κουτάκι της μοναδικής από τις παρακάτω εκφράσεις που δεν είναι προσέγγιση του $u(h)$. Ως συνήθως, I είναι το ταυτοτικό μητρώο.

☐ $(I - Ah/2)(I + Ah/2)^{-1}g$ ☐ $(I + Ah + A^2h^2/2)^{-1}g$ ■ $(I - Ah + A^2h^2/2)^{-1}g$
☐ $(I + Ah)^{-1}g$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Από τη θεωρία, η ακριβής λύση είναι το διάνυσμα $u(h) = e^{-Ah}g$. Επομένως, επιλέγουμε το ένα από τα παραπάνω που δεν αντιστοιχεί σε προσέγγιση του εν λόγω διανύσματος. Στην περίπτωσή μας, το $(I - Ah + A^2h^2/2)^{-1}$ το αντίστροφο των πρώτων τριών όρων της σειράς Taylor για το e^{-Ah}. Επομένως ο τύπος δεν προσεγγίζει το $e^{-Ah}g$ (προσεγγίζει όμως το $e^{Ah}g$.)

Ερώτηση : Δίνεται ο 3-mode τανυστής A διαστάσεων $1 \times 2 \times 3$ με στοιχεία

$$A(:,:,1) = (0 \quad -4)$$

$$A(:,:,2) = (2 \quad 2)$$

$$A(:,:,3) = (-7 \quad -4)$$

Δίνεται και το μητρώο

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Να συμπληρώσετε παρακάτω τις διαστάσεις του τανυστή P που προκύπτει απο το τροπικό γινόμενο, $P = A \times_3 B$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το μητρώο $P_{(3)} = A_{(3)}$ θα είναι $2 \times \cancel{3 \times 3 \times}(1 \times 2)$ και επομένως οι διαστάσεις του P θα είναι $1 \times 2 \times 2$

2. Να υπολογίσετε το P(1,:,1) και να γράψετε ακριβώς το αποτέλεσμα ανάλογα με τη μορφή του (αν είναι διάνυσμα, προσοχή να έχει το σωστό προσανατολισμό ως στήλη ή γραμμή).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Θα ισχύει ότι $P_{(3)} = A_{(3)} = \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ επομένως $P(1,:,1) = \begin{pmatrix} -11.00 \\ -8.00 \end{pmatrix}$

Ερώτηση Δίνονται οι εντολές:

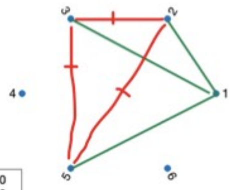
```
A=toeplitz([2,  -1,   0],[2,1,1])  ;  I=eye(4);
C=kron(kron(A,I),kron(I,A)); disp([size(C), trace(C)])
```

Να γράψετε τις τιμές που θα εκτυπωθούν.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το μητρώοA είναι τετραγωνικό 3×3 και το ταυτοτικό 4×4. Το γινόμενο Kroneker επιστρέφει μητρώο με διαστάσεις το γινόμενο των διαστάσεων των δοθέντων μητρώων. Επομένως το πλήθος γραμμών και στηλών του C (δηλαδή οι δύο τιμές που επιστρέφει η εντολή size) θα είναι $144 = (4 \times 3) \times (4 \times 3)$. Η διαγώνιος του μητρώου είναι σε όλες τις θέσεις 4. Αυτό οφείλεται στο ότι η διαγώνιος του A είναι 2, η διαγώνιος των $A \otimes I$ και $I \otimes A$ είναι επίσης 2 και η διαγώνιος του $(A \otimes I) \otimes (I \otimes A)$ είναι 4. Το μητρώο είναι 144×144, επομένως $\text{trace}(C) = 4 \times 144 = 576$. Επομένως η απάντηση που εκτυπώνεται είναι 144 144 576

Ε. ΓΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

Ερώτηση Κάτω αριστερά στο σχήμα δίνεται το συμμετρικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$. Στο υπόλοιπο σχήμα, δίνονται οι αριθμημένες κορυφές του γραφήματος του μητρώου.



34	5	5	0	3	0
5	26	0	0	0	0
5	0	26	0	0	0
0	0	0	21	0	0
3	0	0	0	24	0
0	0	0	0	0	21

1. Συμπληρώστε το παραπάνω γράφημα με (μη κατευθυνόμενες) ακμές, παραλείποντας τους αυτοβρόχους, ώστε το σχήμα να περιέχει το γράφημα του μητρώου (πλην αυτοβρόχων).

1. Συμπληρώστε το παραπάνω γράφημα με (μη κατευθυνόμενες) ακμές, παραλείποντας τους αυτοβρόχους, ώστε το σχήμα να περιέχει το γράφημα του μητρώου (πλην αυτοβρόχων).

2. Συμπληρώσετε τον πίνακα με τα στοιχεία της αναπαράστασης CSC του A (PTR είναι ο πίνακας των pointers της αραιής αναπαράστασης). Προσοχή: Κάθε υποπίνακας δίνεται με ακριβώς 20 θέσεις (στήλες). Εσείς ξεκινάτε από την πρώτη στήλη, και αφήνετε κενές όσες από τις τελευταίες θέσεις δεν χρειαστούν.

VAL	34	5	5	3	5	26	5	26	21	3	24	21
ROWIDX	1	2	3	5	1	2	1	3	4	1	5	6
COLPTR	1	5	7	9	10	12	13					

3. Έστω R=chol(A). Χωρίς να υπολογίσετε το R, βρείτε σε ποιές θέσεις αυτό θα περιέχει μη μηδενικές τιμές αποκλειστικά με πράξεις επί του γραφήματος (π.χ. προσθήκη ακμών με διαφορετική διαγράμμιση). Με βάση αυτό, ξαναγράψτε και συμπληρώστε τον πίνακα παρακάτω με την αραιή αναπαράσταση του A συμπεριλαμβάνοντας στο VAL τις θέσεις που θα χρειαστούν για να αποθηκευτεί το fill-in (γέμισμα), δηλ. τα νέα μη μηδενικά στοιχεία που θα περιλαμβάνει το μητρώο $R^\top + R$ (μπορεί να μην δημιουργείται και κανένα). Αρχικοποιείστε τις θέσεις αυτές με 0. Τέλος, συμπληρώστε και τις αντίστοιχες τιμές των IDX, PTR.

Το μητρώο είναι 6×6, επομένως σύμφωνα με όσα έχουμε δείξει στις διαλέξεις, για κάθε βήμα $i = 1, ..., 5$ της απαλοιφής, σημειώνουμε τις κορυφές $i+1, ..., n$ με τις οποίες συνδέεται η i με ακμή (i, j), διαγράφουμε αυτές τις ακμές και εισάγουμε νέες ακμές ώστε οι κορυφές που γειτονεύουν με την i να δημιουργούν κλίκα. Στο τέλος της διαδικασίας, οι νέες ακμές (i, j) θα αντιστοιχούν στις θέσεις του fill-in. Σημειώνουμε τις θέσεις αυτές και γράφουμε την νέα αραιή αναπαράσταση, ενθέτοντας μηδενικά στις θέσεις του VAL και προσαρμόζοντας τις τιμές των πινάκων IDX και PTR.

VAL	34	5	5	3	5	26	0	0	5	0	26	0	21	3	0	0	24	21
ROWIDX	1	2	3	5	1	2	3	5	1	2	3	5	4	1	2	3	5	6
COLPTR	1	5	9	13	14	17	18											

Ερώτηση Δίνονται διαγώνιο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, u, v \in \mathbb{R}^n$ και η έκφραση $s = v^\top(A + uv^\top)^{-1}u$ όπου τα u, v περιέχουν τυχαίες τιμές (π.χ. από random(n,1)), το $A + uv^\top$ είναι αντιστρέψιμο και όλες οι τιμές στη διαγώνιο του A είναι μη μηδενικές.

1. Αν γράψουμε τις εντολές MATLAB `s= (A+u*v')\u; s= v'*s;` για τον υπολογισμό του και υποθέσουμε ότι το υπολογιστικό κόστος $\Omega = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$, ποιός θα είναι ο ακριβής μη μηδενικός συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου; (π.χ. αν το κόστος είναι $5n^2 + 5n + 10$ τότε να απαντήσετε $\beta = 5$.) Για το υποερώτημα θεωρούμε ότι δεν αναγνωρίζονται η ειδική δομή και τιμές κάθε μητρώου και διανύσματος εισόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το κυρίαρχο κόστος οφείλεται στην επίλυση του $(A + uv^\top)x = u$ που υλοποιείται από την ανάποδη κάθετο στη MATLAB. Δεδομένου ότι το μητρώο $A+uv^\top$ είναι πυκνό, το κόστος αντιστοιχεί στη χρήση της LU που ως γνωστόν είναι $2/3n^3$ και άρα α $= 2/3$.

Απλοποιήστε τα παραπάνω λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα και τη δομή τους ώστε να επιτευχθεί μαθηματικά ισοδύναμος υπολογισμός του s με όσο μπορείτε μικρότερο Ω. Συμπληρώστε στο πλαίσιο τις αντίστοιχες εντολές MATLAB (η τελευταία εντολή είναι η ανάθεση στο s.) Όπως πριν, να υπολογίσετε και να αναφέρετε το συντελεστή του νέου μεγιστοβάθμιου όρου στο νέο Ω.

ΣΥΝΟΨΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ Είναι $\gamma = 3$. Βάσει του τύπου Sherman-Morrison,

$$s = v^\top(A^{-1} + A^{-1}u(1 - v^\top A^{-1}u)^{-1}v^\top A^{-1})u$$

και με λίγη περαιτέρω επεξεργασία (που πρέπει να πραγματοποιήσετε και να εξηγήσετε) προκύπτει ότι

το κυρίαρχο κόστος είναι $\Omega = 3n$.

```
% Οι εντολές είναι

t = v'*(u./diag(A))
s = t+t^2/(1-t)
```

3. Να γράψετε ένα σύνθετο μητρώο $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ με στοιχεία (μπλοκ μητρώα, διανύσματα ή βαθμωτούς) που εξαρτώνται από τα A, u, v και συνδυασμούς και συναρτήσεις τους ώστε το s της εκφώνησης να είναι συμπλήρωμα Schur ως προς κάποιο στοιχείο του B.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $B = \begin{pmatrix} -(A + uv^\top) & v^\top \\ u & 0 \end{pmatrix}$

Ερώτηση

Στον παρακάτω πλαίσιο παρατίθενται εντολές (εντολή αρχικοποίησης του p και κώδικας συνάρτησης powcode). Οι εντολές είναι ελλειπείς και πρέπει να συμπληρώσετε όπου υπάρχουν αποσιωπητικά με ό,τι είναι απαραίτητο για να επιστρέφεται στο s η τιμή που αντιστοιχεί στην μαθηματική έκφραση

$$A^nb + 2A^{n-1}b + \cdots + (n-1)A^2b + nAb + b.$$

Θεωρούμε ότι το A είναι τετραγωνικό και το b συμβατής διάστασης και ότι έχουν αρχικοποιηθεί. Προσοχή: Δεν χρειάζονται επιπλέον εντολές, απλά συμπληρώνετε ό,τι λείπει επάνω στα αποσιωπητικά “......”. Εννοείται ότι δεν μπορείτε να καλέσετε την polyvalm.

```
p = [1:n,1];  s = powcode(p,A,b);
όπου

function [s] = powcode(p,A,b)
m = length(p) ;s=p(1)*b;
for  j=2:m
     s = A*s+p(j)*b
end
```