Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής & Υπολογιστών

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΕΥΦΥΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Άσκηση 1

Το ασαφές σύνολο A έχει συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(x) = \mu_{bell}(x,a,b,c) = [1+|(x-c)/a|^{2b}]^{-1}$. Να δειχθεί ότι το κλασικό ασαφές συμπλήρωμα του A περιγράφεται από την συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{\neg A}(x) = \mu_{bell}(x,a,-b,c)$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τους παρακάτω τελεστές ασαφούς συμπληρώματος που έχουν προταθεί από τους Sugeno και Yager, αντίστοιχα:

(α) $N_s(a) = (1-a) / (1+sa),\ s>-1$ (β) $N_w(a) = (1-a^w)^{1/w},\ w>0$

όπου a παριστάνει την τιμή μιας συνάρτησης συμμετοχής και s, w παράμετροι. Να δειχθεί ότι οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν την ιδιότητα της *ενέλιξης (involution)*:

$$N(N(a)) = a$$

Άσκηση 3

Έστω A, B δύο ασαφή υποσύνολα του υπερσυνόλου αναφοράς U. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$$

όπου $|\cdot|$ η πληθικότητα του ασαφούς υποσυνόλου και $\cap, \cup$ η κλασική ασαφής τομή και η κλασική ασαφής ένωση, αντίστοιχα. Ως πληθικότητα ενός ασαφούς συνόλου ορίζουμε το άθροισμα (ολοκλήρωμα) των τιμών της συνάρτησης συμμετοχής για όλα τα στοιχεία του υπερσυνόλου αναφοράς.

Άσκηση 4

Έστω τα ασαφή σύνολα A, B, C, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $X = [0,10]$ των πραγματικών αριθμών, με αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς:

$$A(x) = \frac{x}{x+2},\ B(x) = 2^{-x},\ C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)^2}.$$

Να υπολογιστούν οι αναλυτικοί τύποι και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις συμμετοχής των παρακάτω συνόλων:

α) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

β) $A \cup B, A \cup C, B \cup C$

γ) $A\cap B, A\cap C, B\cap C$

δ) $A\cap \bar{C}, \overline{B\cap C}, \overline{A\cup C}$

Άσκηση 5

Αν συμβολίσουμε με *N* τον κλασικό τελεστή ασαφούς συμπληρώματος, και με *T*, *S* τους κλασικούς ασαφείς τελεστές τομής και ένωσης, αντίστοιχα, να δειχθεί ότι ικανοποιούνται οι νόμοι του DeMorgan:

$$T(a,b) = N(S(N(a),N(b)))$$
$$S(a,b) = N(T(N(a),N(b)))$$

όπου *a, b* παριστάνουν τιμές συναρτήσεων συμμετοχής.

Άσκηση 6

Οι διαμορφωτές $en(a)=a^{3/2}$ και $ex(a)=a^4$, όπου *a* παριστάνει την τιμή μιας συνάρτησης συμμετοχής, εκφράζουν τους προσδιορισμούς *«αρκετά»* και *«υπερβολικά»*, αντίστοιχα. Θεωρούμε τις γλωσσικές τιμές *κοντός* και *ψηλός* που ορίζονται αντίστοιχα $\mu_{κοντός}=\mu_{bell}(x,15,3,160)$ και $\mu_{ψηλός}=\mu_g(x,190,15)$, όπου $\mu_{bell}(x,a,b,c)=[1+|(x-c)/a|^{2b}]^{-1}$ η κωδωνοειδής και $\mu_g(x,c,\sigma)=\exp[-1/2((x-c)/\sigma)^2]$ η γκαουσιανή συνάρτηση. Να προσδιοριστούν με χρήση των παραπάνω διαμορφωτών και των κλασικών ασαφών τελεστών και να παρασταθούν γραφικά κατά προσέγγιση οι συναρτήσεις συμμετοχής που αντιστοιχούν στις γλωσσικές τιμές: α) *κοντός ή όχι αρκετά ψηλός,* β) *κοντός αλλά όχι υπερβολικά κοντός.*

Απάντηση

α) $$\max\left\{\frac{1}{1+\left|\frac{x-160}{15}\right|^6}, 1-\left(e^{-\frac{(x-190)^2}{2\cdot 15^2}}\right)^{3/2}\right\}$$

β) $$\min\left\{\frac{1}{1+\left|\frac{x-160}{15}\right|^6}, 1-\left(\frac{1}{1+\left|\frac{x-160}{15}\right|^6}\right)^4\right\}$$

Άσκηση 7

Έστω τα ασαφή σύνολα A, B που ορίζονται στο διάστημα $[0,10]$ με συναρτήσεις συμμετοχής που δίνονται από τις σχέσεις:

$$A(x) = \begin{cases} (x-2)/3, & 2\le x\le 5 \\ (8-x)/3, & 5< x\le 8 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} (x-3)/3, & 3\le x\le 6 \\ (9-x)/3, & 6< x\le 9 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν τα συμπληρώματά τους, η τομή τους και η ένωσή τους, με χρήση των κλασικών ασαφών τελεστών. Ισχύει η σχέση $A \subseteq B$;

Άσκηση 8

Έστω $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ το *υπερσύνολο αναφοράς*. Μία οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X, θα λέγεται *ασαφής διαμέριση* $\mathcal{P}^n(X)$ του X, *τάξης* n ($n \in N$), και θα συμβολίζεται με $\mathcal{A}^n = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ αν και μόνο αν

$$A_i \neq A_j,\ \forall i, j \in N_n\ (i \neq j) \qquad 0 < \sum_{k=1}^{m} A_i(x_k) < m,\ \forall i \in N_n$$

Τα στοιχεία A_i, $i \in N_n$ της $\mathcal{A}^n$ θα λέγονται *κλάσεις* της ασαφούς διαμέρισης.

Έστω $U = \{1,2,..,10\}$ το σύνολο των βαθμολογιών σε ένα διαγώνισμα. Να οριστεί και να σχεδιαστεί μία ασαφής διαμέριση, τάξης 3, του συνόλου αυτού.

1. Να υπολογιστεί η πληθικότητα της κάθε κλάσης (ασαφούς υποσυνόλου) της διαμέρισης.
2. Για κάθε κλάση, να υπολογιστεί το κλασικό ασαφές συμπλήρωμά της.
3. Να υπολογιστούν η κλασική ασαφής τομή και η κλασική ασαφής ένωση των κλάσεων μεταξύ τους.

Απάντηση

Ορισμός κλάσεων διαμέρισης:

$A_1 = [1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 0.7 \quad 0.5 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ (ΧΑΜΗΛΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ)

$A_2 = [0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.5 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]$ (ΜΕΣΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ)

$A_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.8 \quad 1 \quad 1]$ (ΥΨΗΛΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ)

Πληθικότητα A_1 : $|A_1| = 1+1+0.9+0.7+0.5+0.3+0.1+0+0+0 = 4.5$

Συμπλήρωμα: $\overline{A_1} = [0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 0.9 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

$A_1 \cap A_2 = [0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$A_1 \cup A_2 = [1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 0.7 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]$

Άσκηση 9

Η *ασάφεια* ενός συνόλου Α μπορεί να εκφραστεί ως η εγγύτητα των τιμών της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_A(x)$ στην τιμή 0,5. Συνεπώς, ένα μέτρο ασάφειας θα είναι η ποσότητα $F_A=\int f_A(x)dx$, όπου

$f_A(x)= \mu_A(x)$ για $\mu_A(x)\leq 0,5$ και $f_A(x)= 1-\mu_A(x)$ αλλιώς.

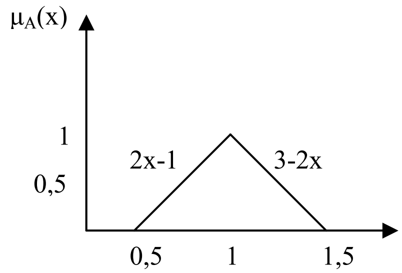
Θεωρούμε τα σύνολα Α και Β με συναρτήσεις συμμετοχής αντίστοιχα

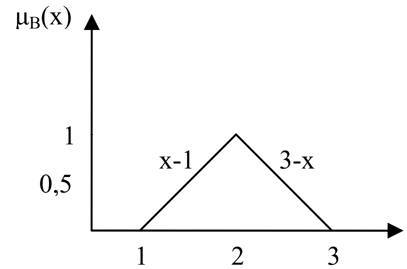
$\mu_A(x)=1-2|x-1|$ για $|x-1|\leq 0,5$ $\qquad$ $\mu_B(x)=1-|x-2|$ για $|x-2|\leq 1$

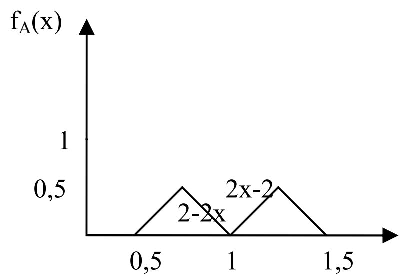
0 αλλιώς $\qquad$ 0 αλλιώς

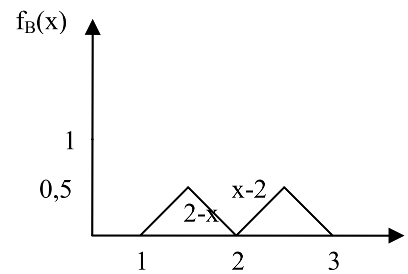
Ποιό από τα δύο σύνολα είναι πιο ασαφές;

Απάντηση









F_A=0,25

F_B=0,5

Άσκηση 10

Έστω οι επόμενοι κανόνες:

(1) Αν *X* είναι A_1, τότε *Y* είναι B_1

(2) Αν *X* είναι A_2, τότε *Y* είναι B_2

όπου A_j και B_i ασαφή σύνολα ($j=1,2$) που δίνονται από τις σχέσεις:

$A_1 = 1/x_1 + .9/x_2 + .1/x_3$, $A_2 = .9/x_1 + 1/x_2 + .2/x_3$

$B_1 = 1/y_1 + .2/y_2$, $B_2 = .2/y_1 + .9/y_2$

Έστω ότι δίνεται το γεγονός *X* είναι A', όπου:

$A' = .8/x_1 + .9/x_2 + .1/x_3$

Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της παρεμβολής για να υπολογίσετε το συμπέρασμα B'.