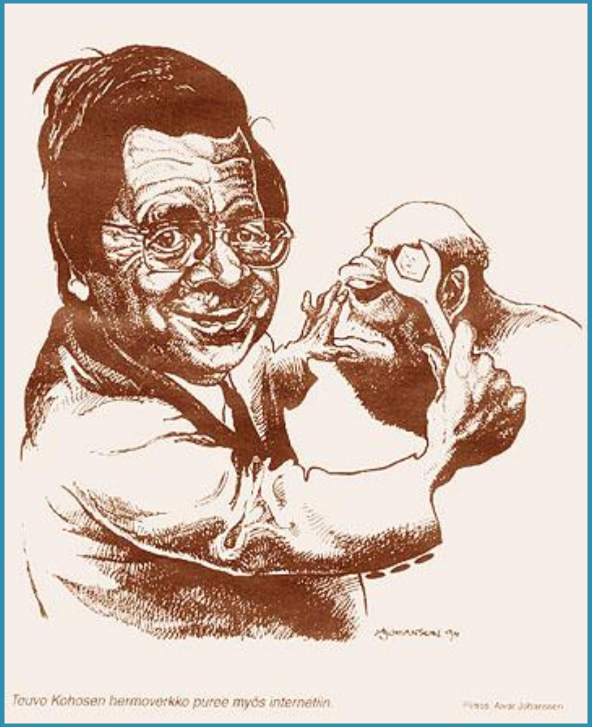
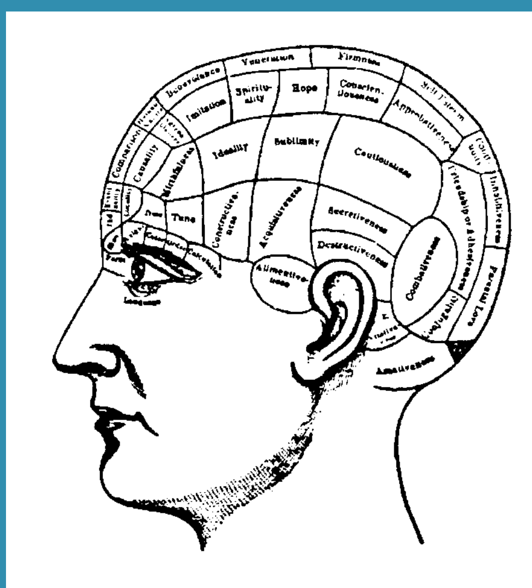
Αυτο-οργανούμενοι χάρτες

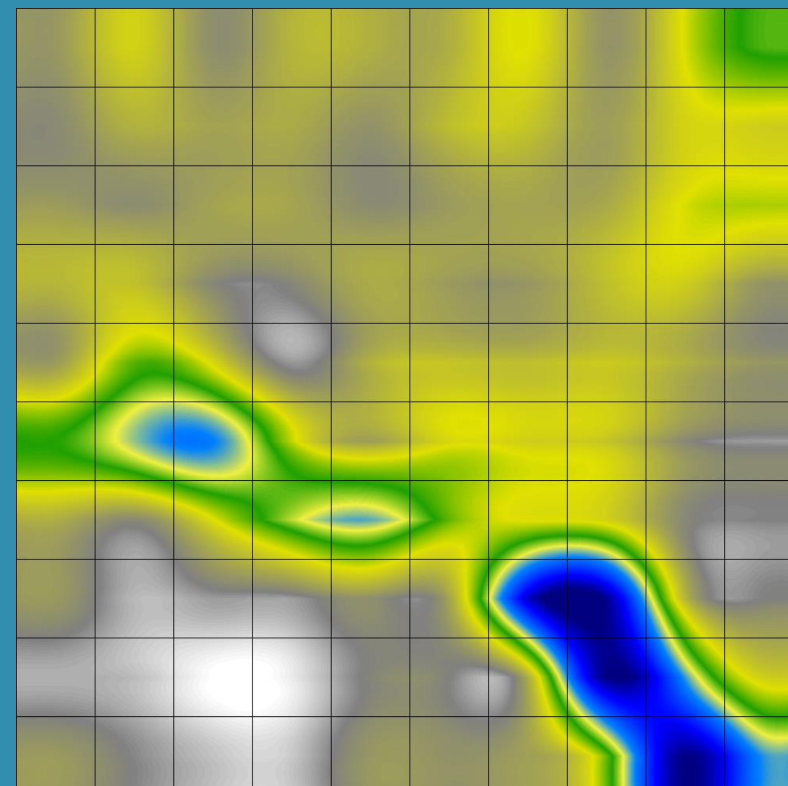
SOM



Αυτο-οργάνωση: βιολογικά πρότυπα

- Τοπικότητα λειτουργιών
- Γεωμετρική διάταξη νευρώνων



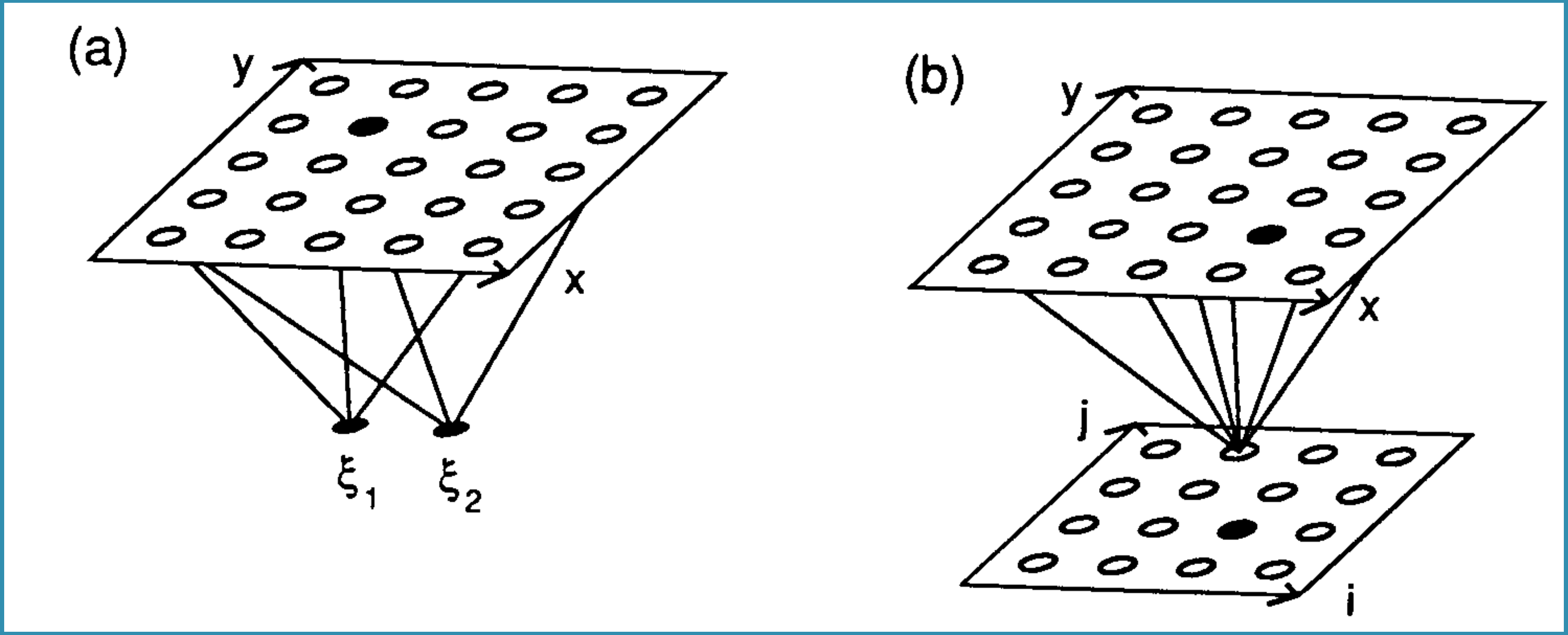


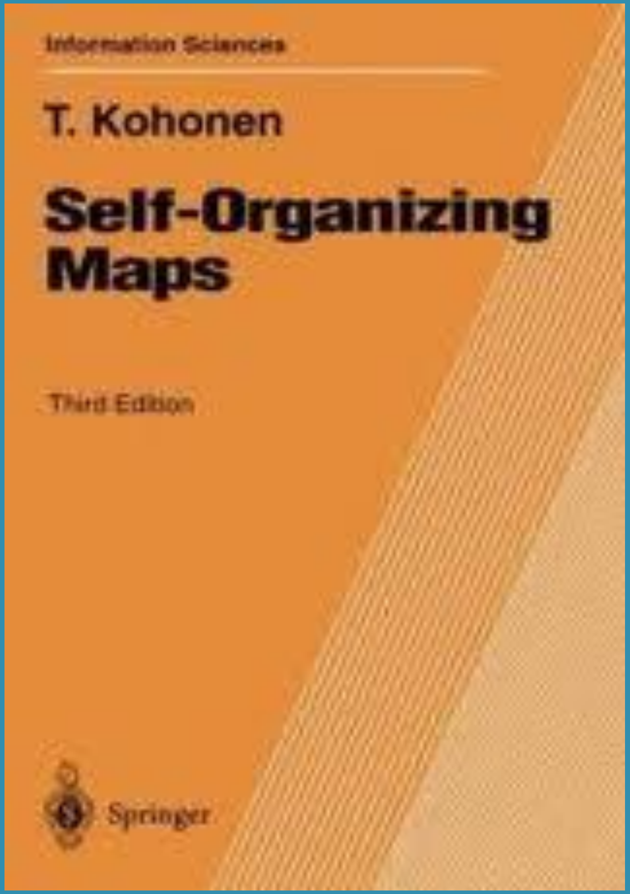
Υπολογιστικοί χάρτες

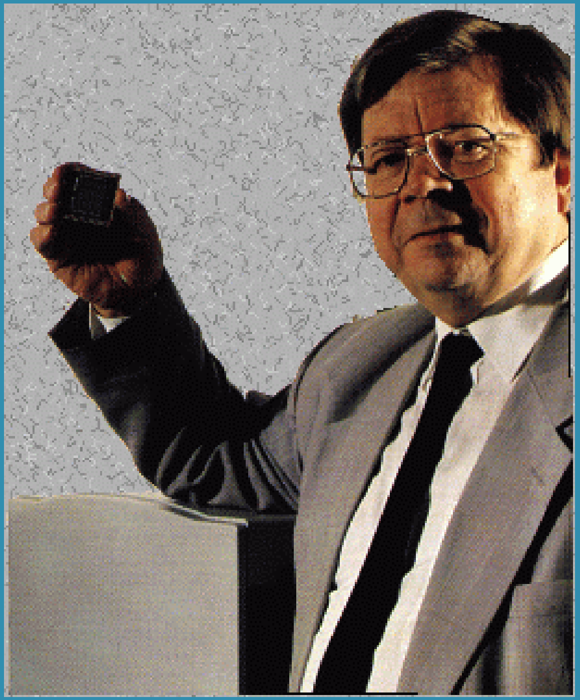
Τοπογραφικοί χάρτες Απεικόνιση χαρακτηριστικών

(a) Μοντέλο Kohonen
Self Organizing (Feature) Maps – SO(F)M

(b) Μοντέλο Willshaw και von der Malsburg







Teuvo Kohonen

1934-

Helsinki University of Technology

Δίκτυο SOM

- Η χωρική σχέση των νευρώνων αντικατοπτρίζει φυσικά χαρακτηριστικά της εισόδου (κατανομή πιθανότητας χώρου εισόδου).
- Διανυσματικός κβαντισμός εισόδου
- Φυσική διάταξη νευρώνων
- Διατήρηση τοπολογίας (order preservation): όμοια πρότυπα εισόδου απεικονίζονται σε γειτονικούς νευρώνες.
- Επεκτάσεις (μεταβλητός αριθμός νευρώνων)

Δίκτυο SOM: Εκπαίδευση

Φάση ανταγωνισμού

Νικητής: ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση

$$\min d_j = \left\| \vec{x} - \vec{w}_j \right\|$$

ή μέγιστο εσωτερικό γινόμενο

$$\max \ s_j = \vec{w}_j \vec{x}$$

Φάση συνεργασίας

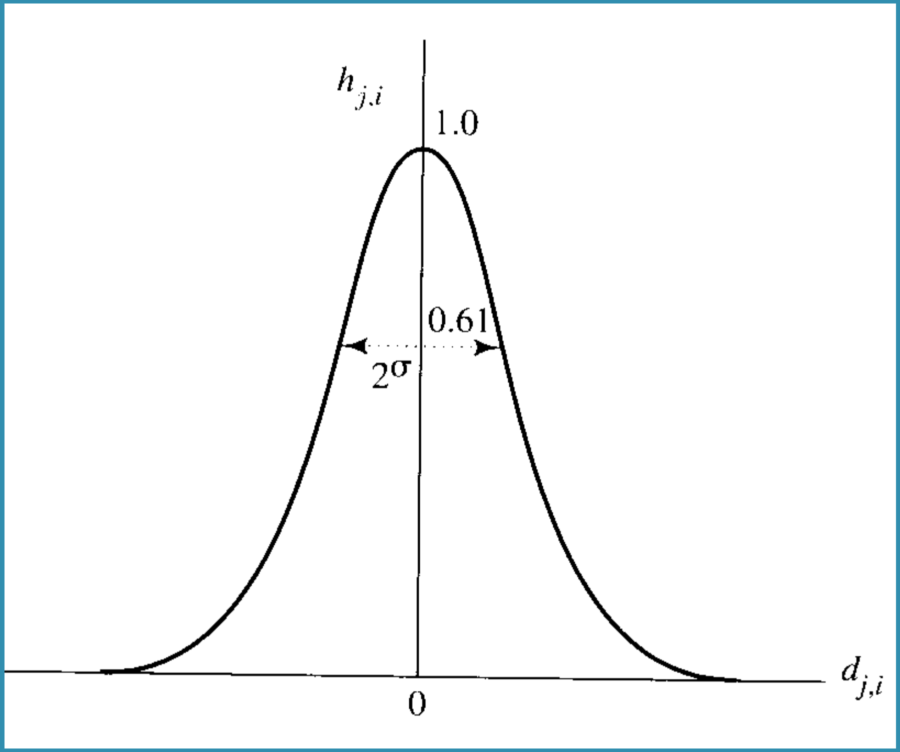
Καθορισμός τοπολογικής γειτονιάς

Φάση ανταμοιβής

Προσαρμογή βαρών νικήτριας γειτονιάς

Τοπολογική γειτονιά

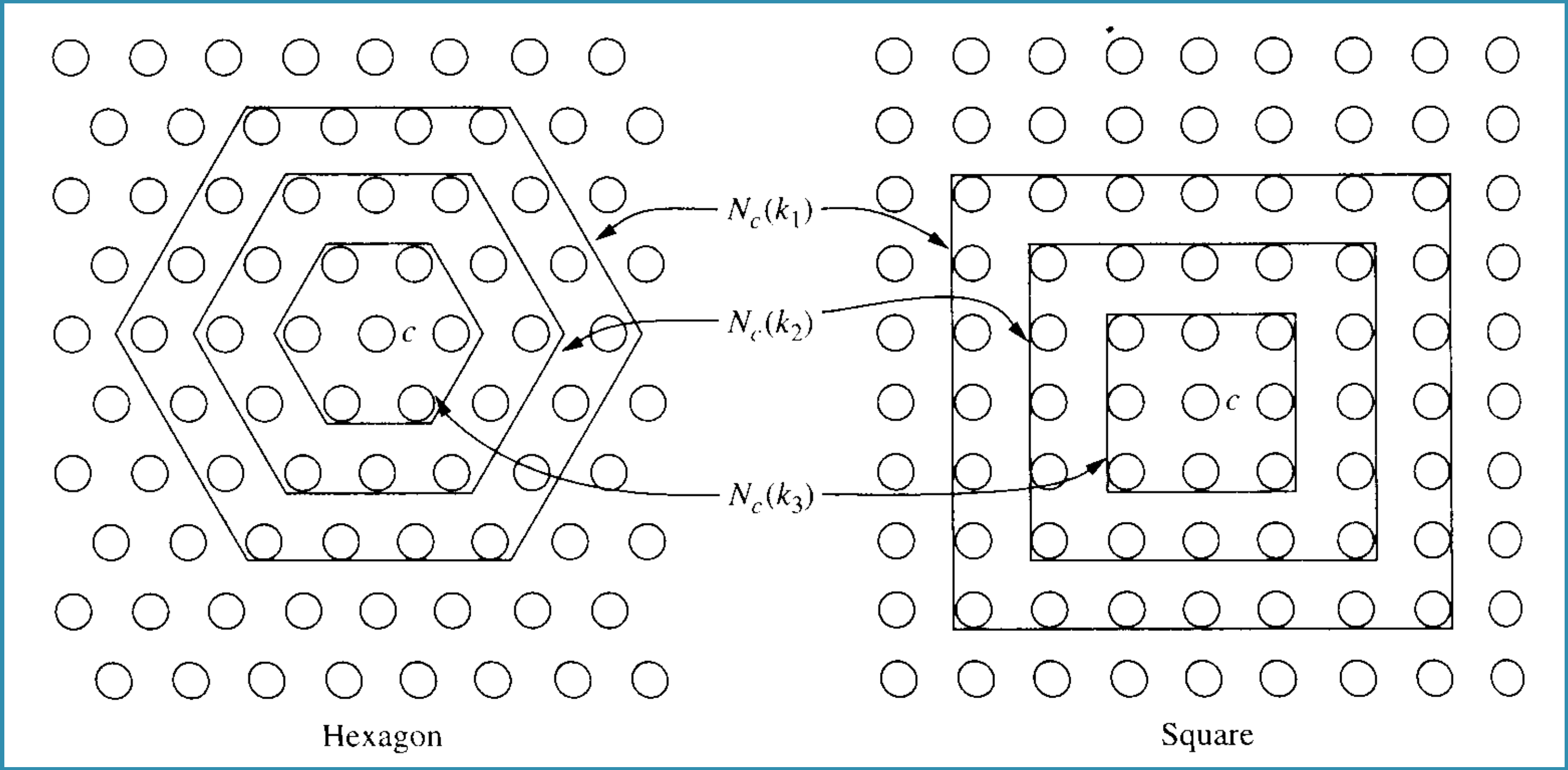
- Συμμετρική συνάρτηση γύρω από τον νικητή φθίνουσα με την απόσταση
- r_i, r_j: διανύσματα θέσης στο πλέγμα
- Παράμετρος πλάτους *σ(t)* φθίνουσα με τον χρόνο (εκθετική μείωση)



$$h_{j,i}(t) = \exp\left(-\left\| r_j - r_i \right\|^2 \Big/ 2\sigma^2(t) \right)$$

Τοπολογική γειτονιά

- Γεωμετρικός καθορισμός
- Κοινή αντιμετώπιση όλων των νευρώνων
- Μείωση με το χρόνο



Δίκτυο SOM: Εκπαίδευση

Φάση ανταμοιβής

$$\vec{w}_j^{(t+1)} = \vec{w}_j^{(t)} + \eta(t) h_{j,i}(t) \left[\vec{x} - \vec{w}_j^{(t)} \right], \quad \forall j$$

i : νικητής νευρώνας (x)

$$0 \leq \eta(t) \leq 1$$

Συντελεστής μάθησης φθίνων με το χρόνο (εκθετική μείωση)

Δίκτυο SOM

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους

$$E(\vec{w}) = \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j \sum_m M(m,i) h_{j,i} \left\| \vec{x}^{\,m} - \vec{w}_j \right\|^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j \sum_m \sum_k M(m,i) h_{j,i} \left(x_k^m - w_{kj} \right)^2$$

$$M(m,i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \text{ νικητής με είσοδο } \vec{x}^{\,m} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνάρτηση συμμετοχής ομάδας

Κάθοδος κλίσης: τοπικά ελάχιστα

$$\Delta \vec{w}_j = -\eta \frac{\partial E}{\partial \vec{w}_j} = \eta \sum_m \sum_i M(m,i) h_{j,i} \left(\vec{x}^{\,m} - \vec{w}_j \right)$$

Προσέγγιση αυξητικής μεταβολής

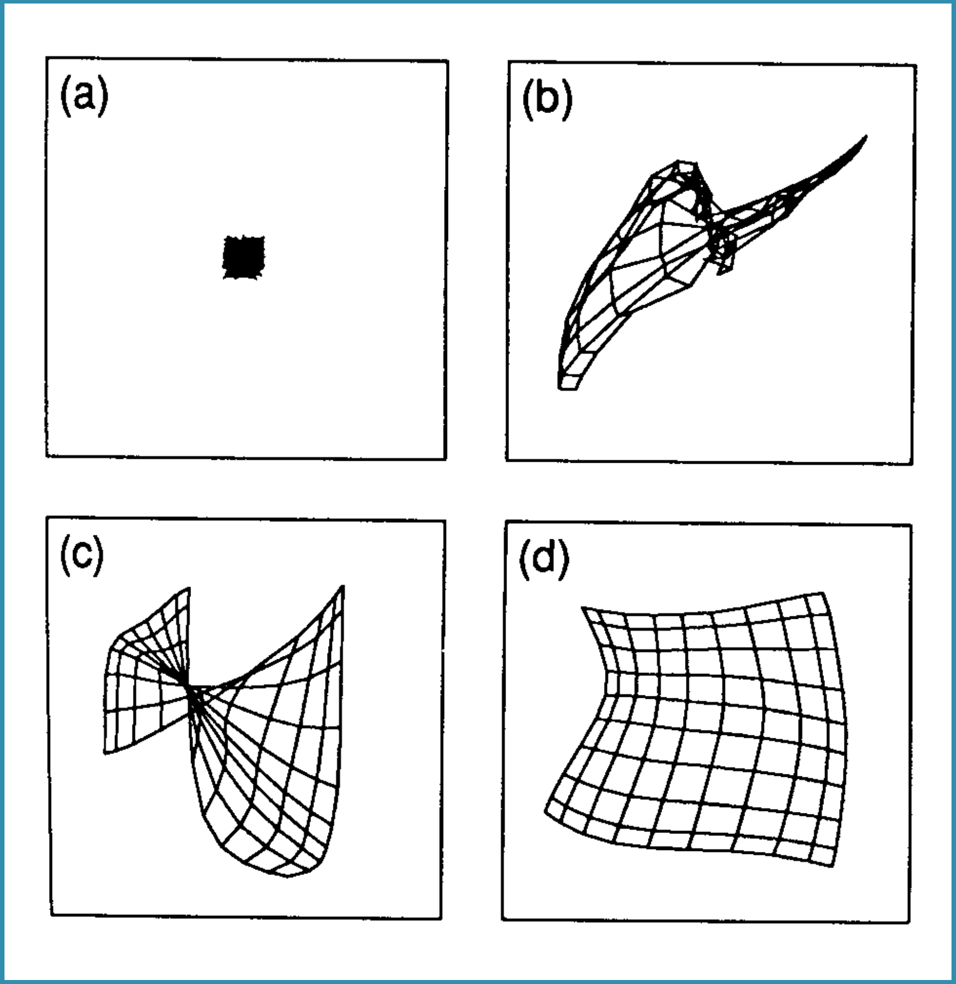
Δίκτυο SOM

Παράδειγμα

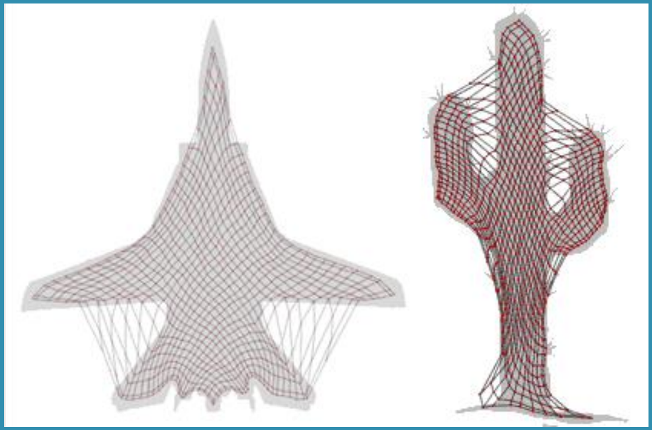
• Πλέγμα εξόδου 10 x 10

• Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα στο τετράγωνο

$\{0 \leq x_1 < 1,\ 0 \leq x_2 < 1\}$



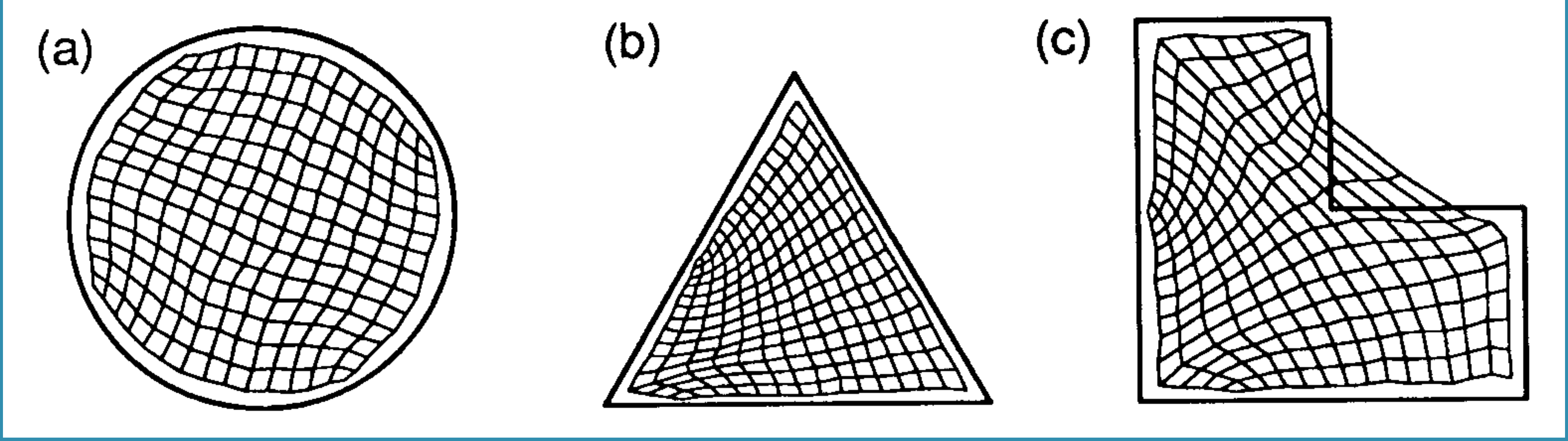
Δίκτυο SOM



Παράδειγμα

• Πλέγμα εξόδου 15 x 15

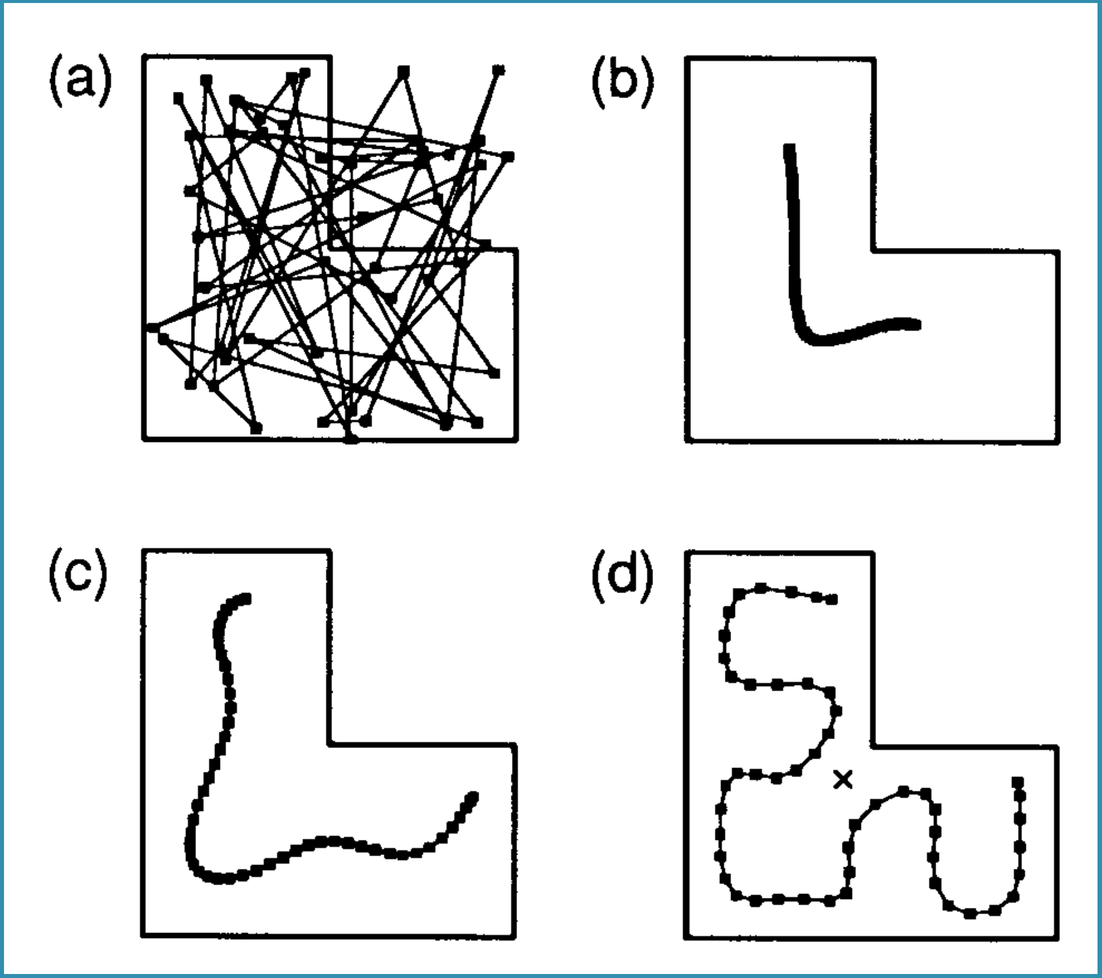
• Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κύκλο, τρίγωνο και περιοχή σχήματος L



Δίκτυο SOM

Παράδειγμα

- Μονοδιάστατη έξοδος 50 κόμβων
- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα σε περιοχή σχήματος L



➢*Μείωση διάστασης (dimensionality reduction)*

➢*Μερική διατήρηση τοπολογίας*

Δίκτυο SOM: Σύγκλιση

- Σημεία ισορροπίας - τοπικά ελάχιστα

$$\Delta\vec{w}_j = \eta \sum_m \sum_i M(m,i) h_{j,i} \left(\vec{x}^m - \vec{w}_j \right) = 0, \forall j$$

Δύσκολη επίλυση στη γενική περίπτωση

- Ομοιόμορφη κατανομή προτύπων

Μονοδιάστατο πλέγμα

- Διαδικασία σύγκλισης:

(i) Εκτύλιξη (untangling)

Συστροφές, στρεβλώσεις

(ii) Λεπτή προσαρμογή (fine tuning)

Δίκτυο SOM: Σύγκλιση

Μονοδιάστατος χώρος εισόδου σε μονοδιάστατο πλέγμα εξόδου

Κατάσταση ισορροπίας

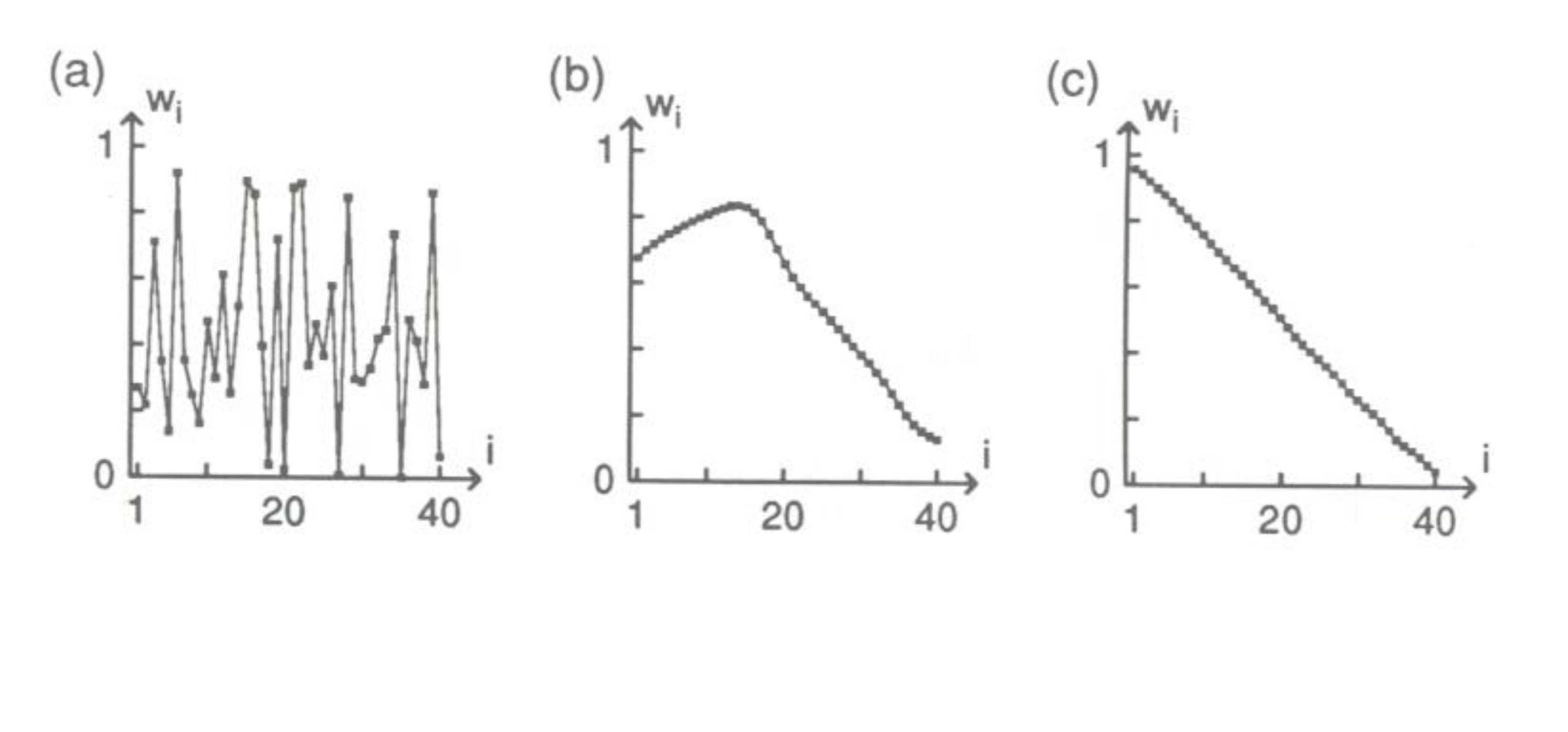
Πυκνότητα κόμβων εξόδου ≈ (Πυκνότητα πιθανότητας εισόδου)$^{2/3}$

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| \propto p(x)^{2/3}$$

z: χώρος πλέγματος

x: χώρος εισόδου

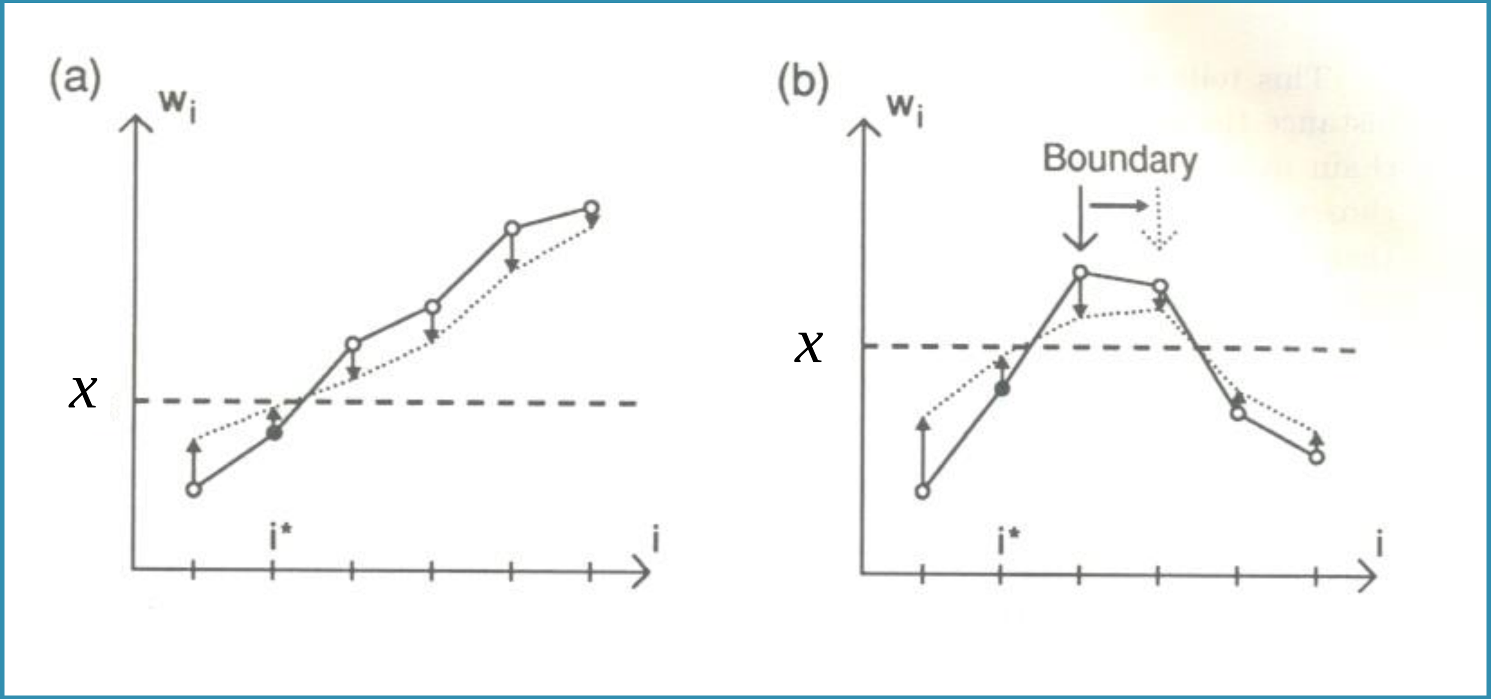
- Πλέγμα εξόδου 1 x 40
- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μονοδιάστατο διάστημα



Γραμμική διάταξη βαρών (αύξουσα ή φθίνουσα)

Μονοδιάστατο πλέγμα: Εκτύλιξη

(a) Κάθε μονότονη περιοχή βαρών παραμένει μονότονη μετά την ενημέρωση.
(b) Το όριο μεταξύ δύο μονότονων περιοχών μπορεί να μετακινηθεί κατά ένα βήμα (προς τη μία ή την άλλη πλευρά) ανά ενημέρωση.
(c) Τα όρια εξαφανίζονται στα άκρα. Δεν δημιουργούνται νέα όρια.



Μονοδιάστατο πλέγμα: μονότονη διάταξη βαρών

Ενημέρωση

$$w_j^{(t+1)} = w_j^{(t)} + \eta(t) h_{j,i}(t)\left[x - w_j^{(t)}\right], \quad \forall j$$

$$\left[w_j - x\right]^{(t+1)} = \left(1 - \eta(t) h_{j,i}(t)\right)\left[w_j - x\right]^{(t)}, \quad \forall j$$

$$i : \text{νικητής νευρώνας } (x)$$

Η κατακόρυφη απόσταση w_j-x πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα που πλησιάζει το 1 καθώς απομακρυνόμαστε από τον νικητή. Η μονότονη διάταξη δεν μεταβάλλεται.

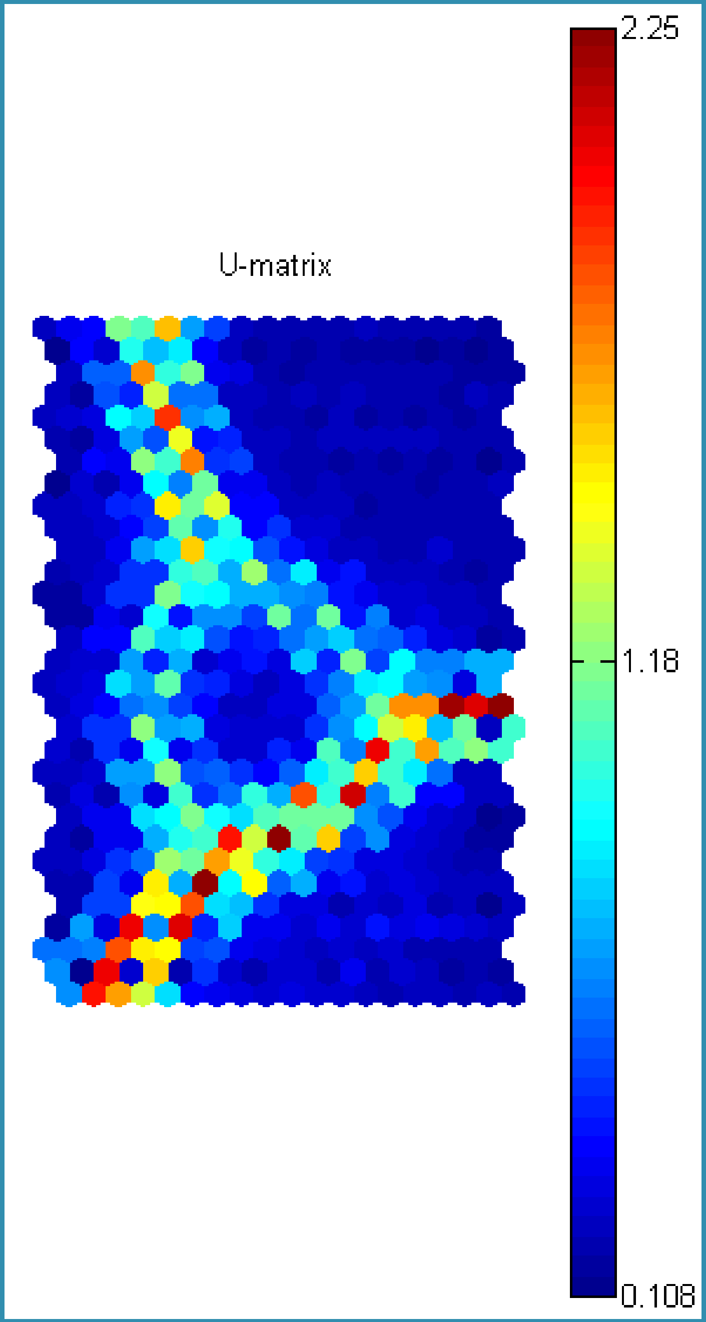
Μονοδιάστατο πλέγμα

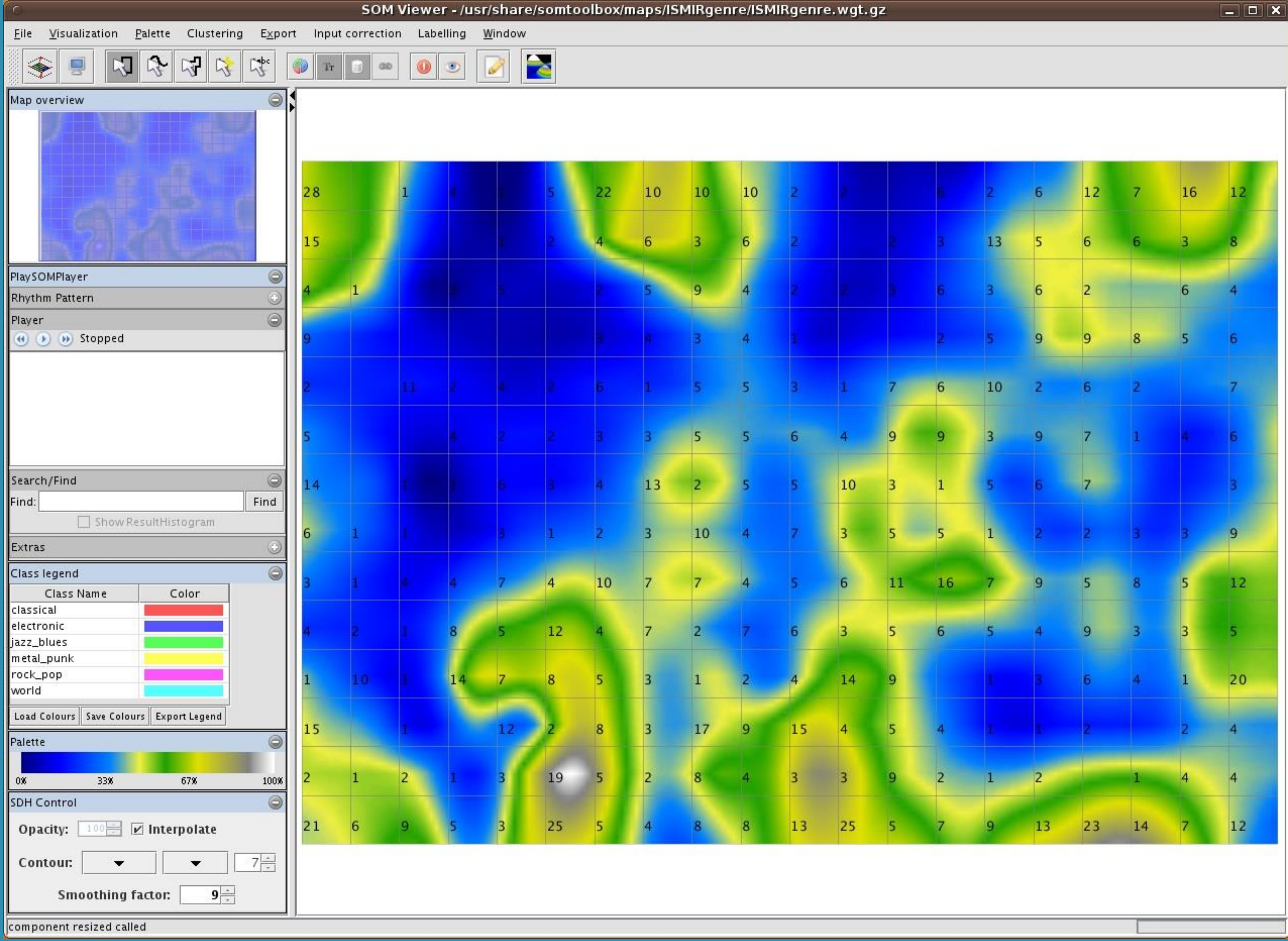
Χρόνος εκτύλιξης

Η «καμπή» μεταξύ δύο μονότονων περιοχών διαχέεται στο ένα από τα δύο άκρα.
Η κίνηση πραγματοποιείται όταν η είσοδος είναι κοντά στην καμπή (πιθανότητα τάξεως $1/N$ για N κόμβους) με ίση πιθανότητα προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση.
Τυχαίος περίπατος: $O(N^2)$ βήματα για μετακίνηση σε ένα άκρο.
Εκτύλιξη: $O(N^3)$ βήματα συνολικά.
Μπορεί να μειωθεί σε $O(N^2)$ αν η συνάρτηση γειτονιάς δεν είναι συμμετρική.

Αυτο-οργανούμενοι χάρτες

Unified distance matrix (U-matrix)





SOM Viewer - Java SOMToolbox

Vienna University of Technology

Δίκτυο SOM

- **Επεκτάσεις**
- **Παραδείγματα**

http://www.demogng.de