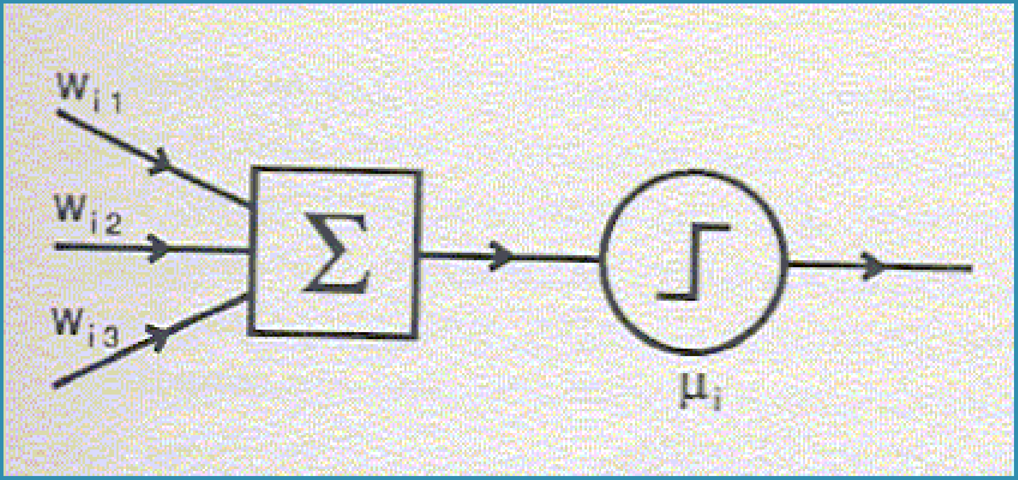
Αναδρομικά δίκτυα

Δίκτυο Hopfield

Αυτοσυσχετιστική μνήμη

Μονάδα λογικής κατωφλίου



McCulloch & Pitts (1943) - TLU

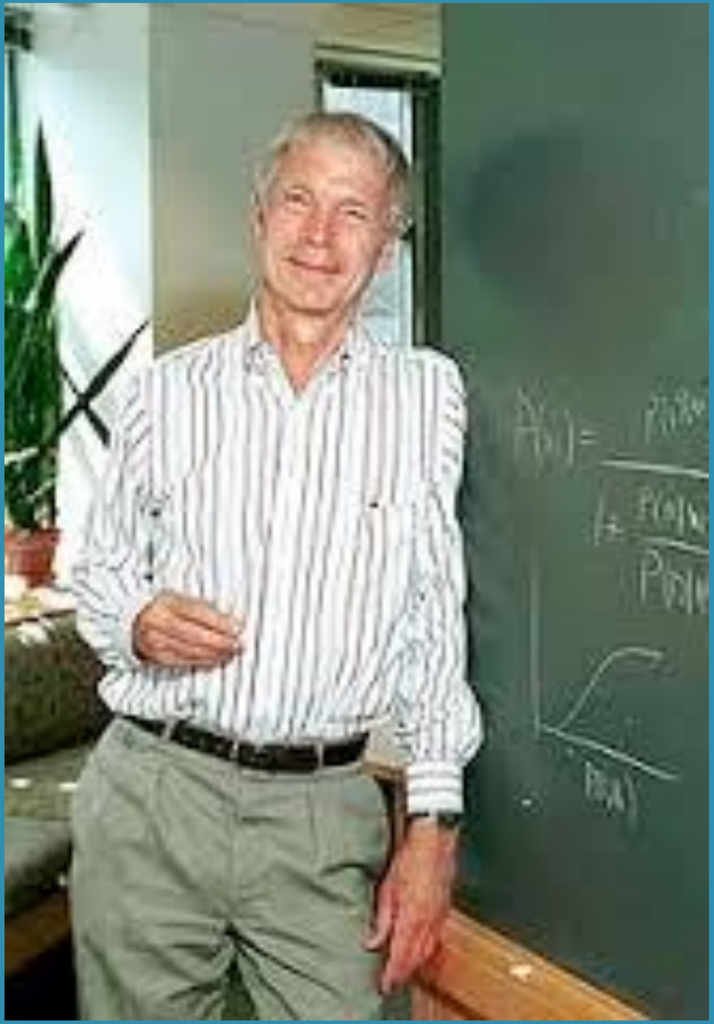
Rosenblatt (1962) - perceptron

Αναδρομικά δίκτυα

Δυναμικά συστήματα
Σύγκλιση και ευστάθεια
Μάθηση

Συσχετιστική μνήμη
Συνδυαστική βελτιστοποίηση

Η συμβολή της Φυσικής I

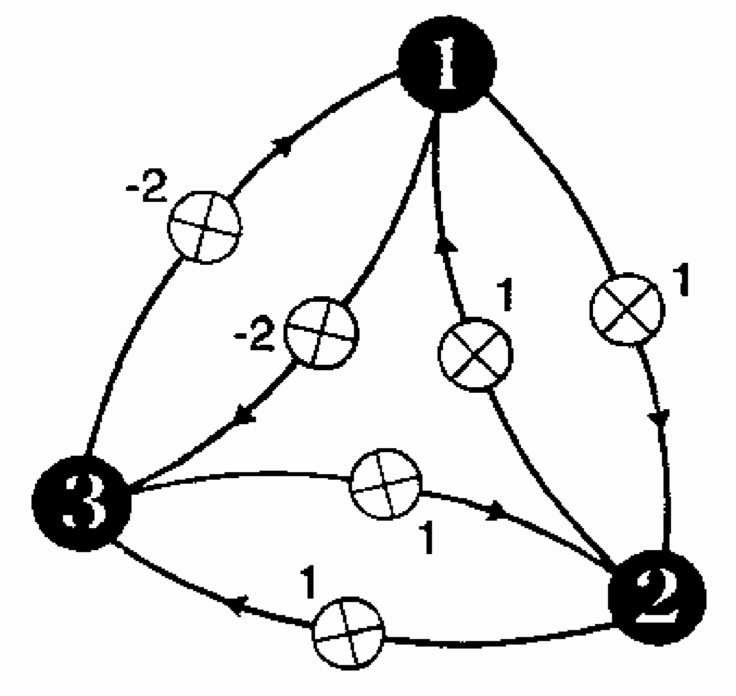


John J. Hopfield

1933-

Συμμετρικά Αναδρομικά δίκτυα
Δίκτυο Hopfield (1982)

- **Μονοστρωματική (single-layer)**
- **Αναδρομική (recurrent)**
  αρχιτεκτονική



$w_{ij}=w_{ji}$, $i,j=1,\ldots,N$

$w_{ii}=0$, $i=1,\ldots,N$

Διακριτό δίκτυο Hopfield

– Διακριτός χρόνος
– Δυαδικές / διπολικές τιμές κόμβων

Λειτουργία (Δυναμική συμπεριφορά)

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(t) + \theta_i$$

$$y_i(t+1) = f\left(u_i(t+1)\right)$$

f: step / signum

Ενημέρωση: ασύγχρονη
σύγχρονη

Αναλογικό (συνεχές) δίκτυο Hopfield

- Συνεχής χρόνος
- Συνεχείς τιμές κόμβων ($\in [0,1]$ ή $[-1,1]$)

Λειτουργία (Δυναμική συμπεριφορά)

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j - u_i + \theta_i$$

$$y_i = f(u_i)$$

f: sigmoid / tanh

Ευστάθεια – Διακριτό μοντέλο

Συνάρτηση ενέργειας (Lyapunov)

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N}\theta_i y_\mathrm{i}$$

Τοπικά ελάχιστα $\Rightarrow$ Ευσταθείς καταστάσεις

Η ευστάθεια είναι εγγυημένη για *συμμετρικά* δίκτυα ($w_{ij}=w_{ji}$, $i,j=1,\ldots,N$) με *ασύγχρονη* λειτουργία.

Απόδειξη ευστάθειας – Διακριτό μοντέλο

Διπολικές τιμές y_i

$$y_i' = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} y_j + \theta_i\right)$$

$$y_i' = y_i \Rightarrow \Delta E = E' - E = 0$$

$$y_i' = -y_i \Rightarrow \Delta E = -\sum_{j \neq i} w_{ij} y_i' y_j + \sum_{j \neq i} w_{ij} y_i y_j$$

$$- y_i' \vartheta_i + y_i \vartheta_i = 2 y_i \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} y_j + \vartheta_i\right) < 0$$

Ευστάθεια – Αναλογικό μοντέλο

Συνάρτηση ενέργειας (Lyapunov)

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{y_i} f^{-1}(y)dy - \sum_{i=1}^{N}\theta_i y_{\mathrm{i}}$$

Τοπικά ελάχιστα $\Rightarrow$ Ευσταθείς καταστάσεις

Η ευστάθεια είναι εγγυημένη για *συμμετρικά* δίκτυα ($w_{ij}=w_{ji}$, $i,j=1,\ldots,N$).

(Ειδική περίπτωση θεωρήματος Cohen-Grossberg)

Απόδειξη ευστάθειας – Αναλογικό μοντέλο

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j w_{ij}\frac{dy_i}{dt}y_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j w_{ij}y_i\frac{dy_j}{dt}$$

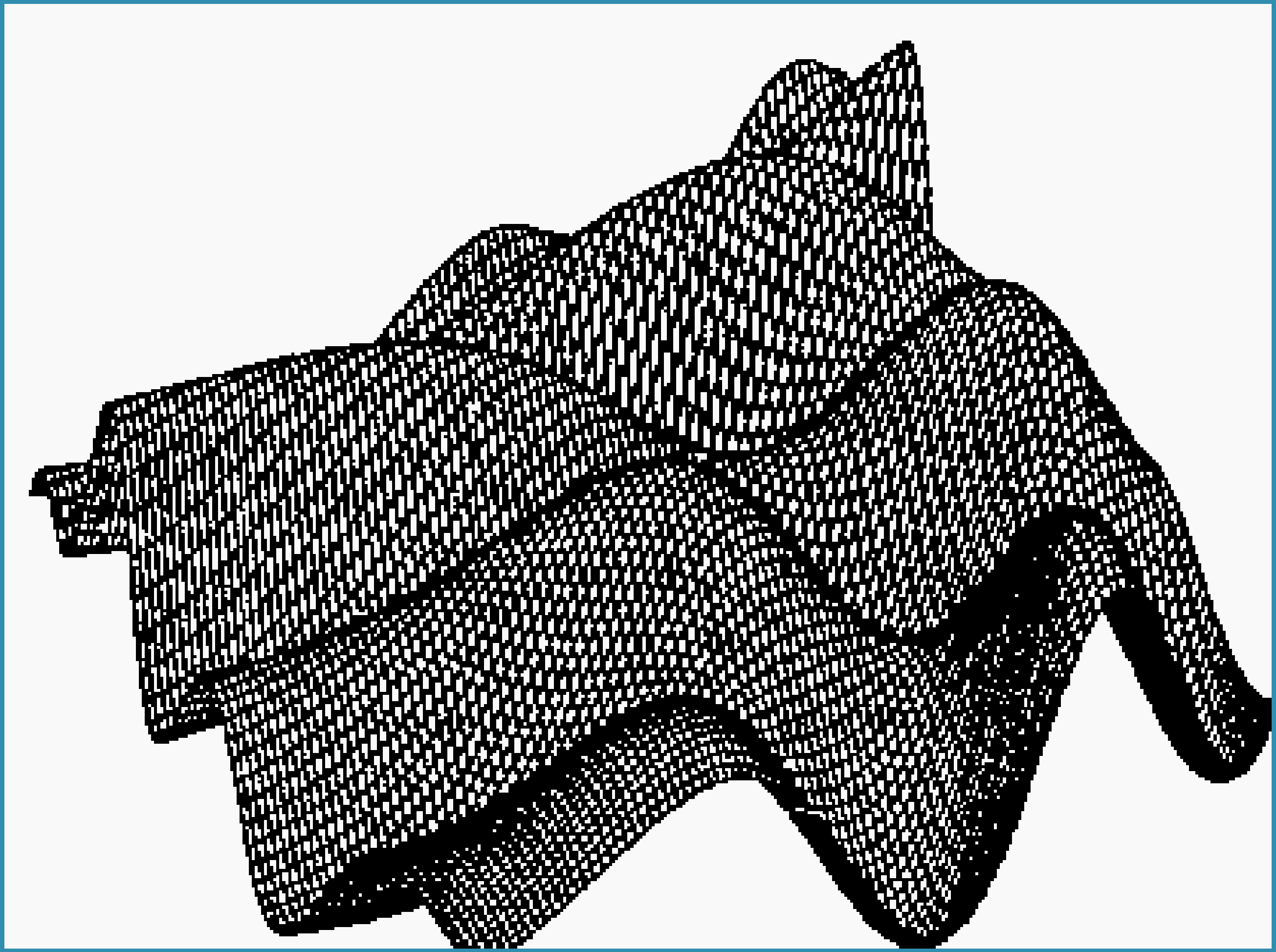
$$+\sum_i f^{-1}(y_i)\frac{dy_i}{dt} - \sum_i \frac{dy_i}{dt}\theta_i$$

$$= -\sum_i \frac{dy_i}{dt}\left(\sum_j w_{ij}y_j - u_i + \theta_i\right) = -\sum_i \frac{dy_i}{dt}\frac{du_i}{dt}$$

$$= -\sum_i f'(u_i)\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \leq 0$$

(μονοτονία της f)

Το τοπίο της ενέργειας



Συσχετιστικές μνήμες (Associative memories)

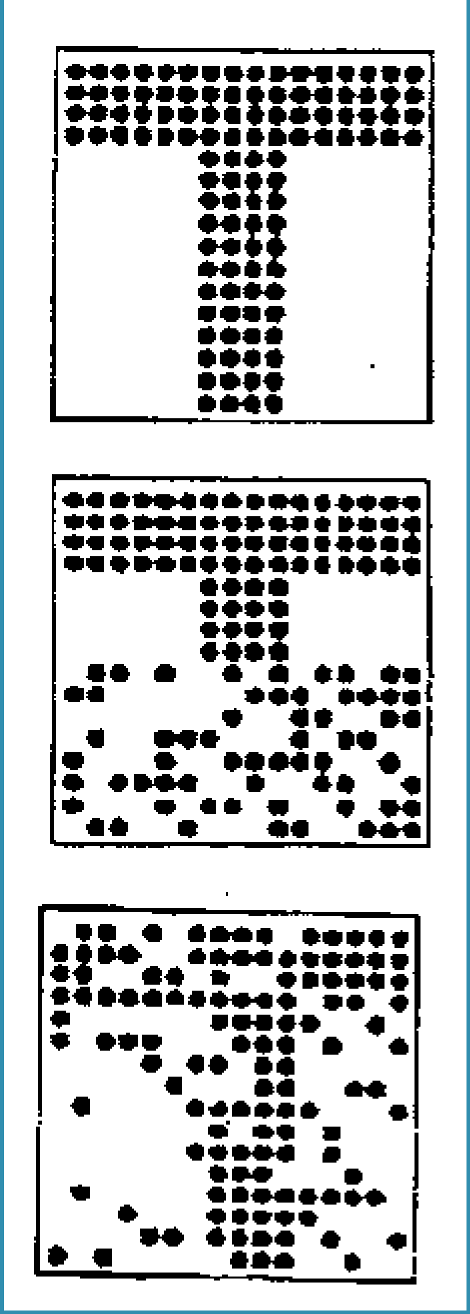
Κλειδί $\Rightarrow$ Ανάμνηση

- Αυτοσυσχετιστική ανάκληση
- Ετεροσυσχετιστική ανάκληση

Μη γραμμικά συσχετιστικά δίκτυα

- Δίκτυο Hopfield (J. Hopfield, 1982)
  Αυτοσυσχετιστική μνήμη
- Bidirectional Associative Memory – BAM (B. Kosko, 1988)
  Ετεροσυσχετιστική μνήμη

Αυτοσυσχετιστική μνήμη



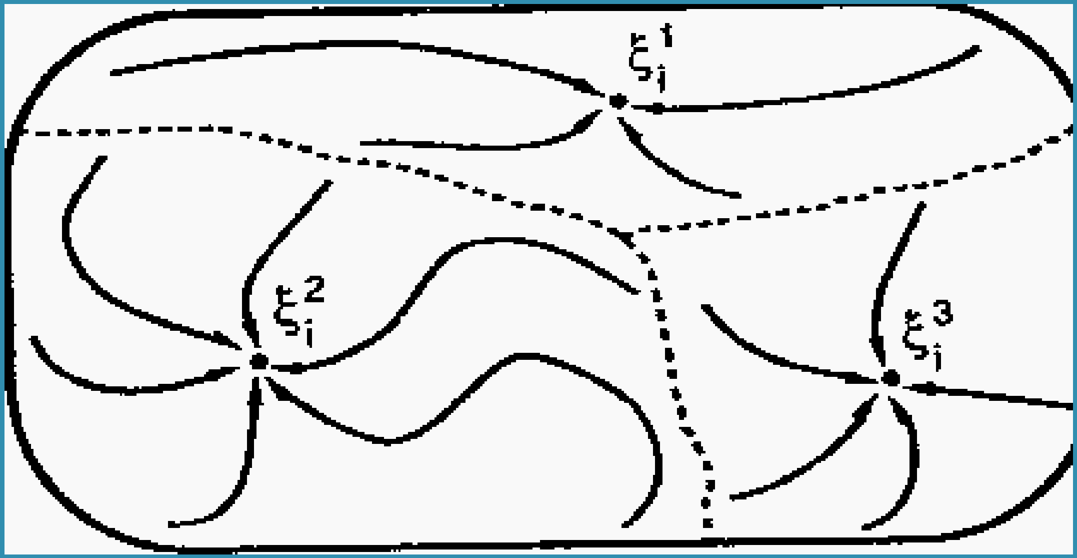
Ανάκληση με βάση το περιεχόμενο

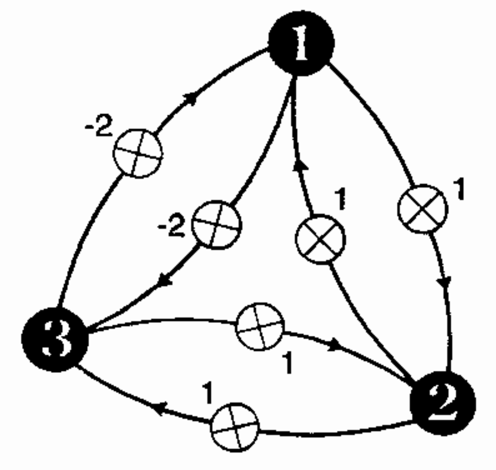
(Content-addressable memory)

Αυτοσυσχετιστική μνήμη

Δυναμική συμπεριφορά

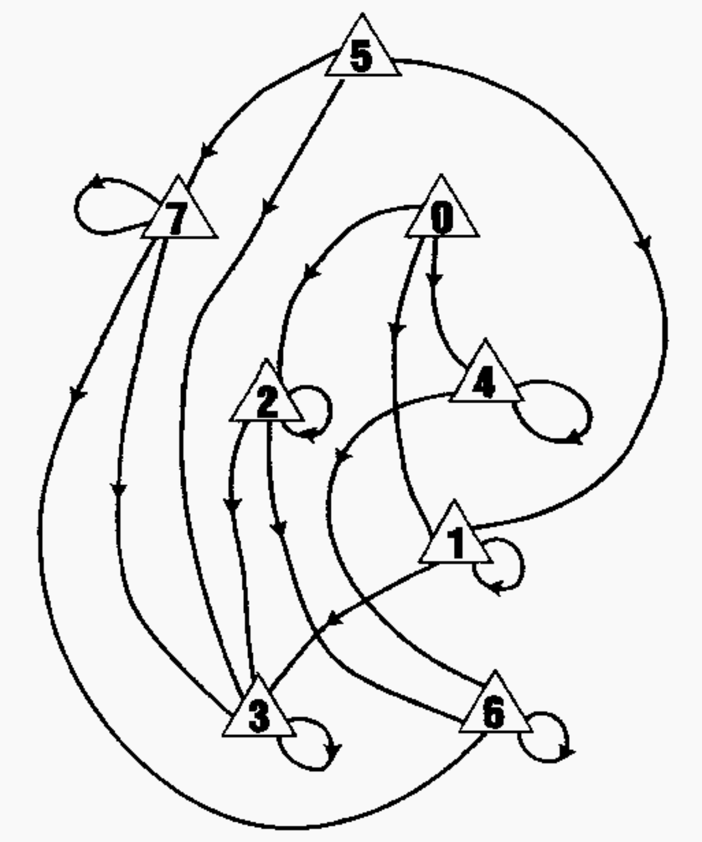
Διάταξη ελκυστών





Πίνακας / διάγραμμα δυνατών μεταβάσεων

Παράδειγμα με δυαδικές τιμές



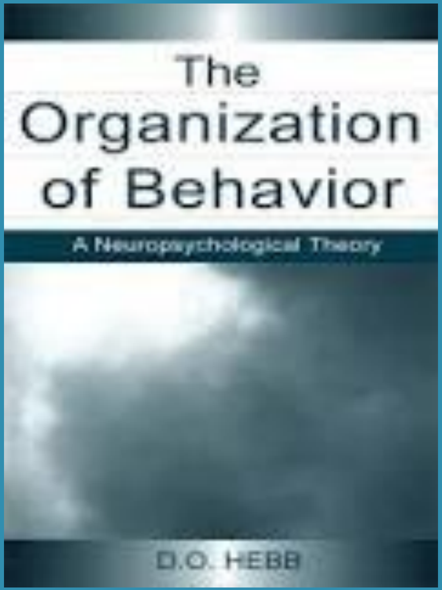
Κατάσταση				Νέα κατάσταση (μετά την ενεργοποίηση)		
Αριθμός	Διάνυσμα					
	x_1	x_2	x_3	Κόμβος 1	Κόμβος 2	Κόμβος 3
0	0	0	0	4	2	1
1	0	0	1	1	3	1
2	0	1	0	6	2	3
3	0	1	1	3	3	3
4	1	0	0	4	6	4
5	1	0	1	1	7	3
6	1	1	0	6	6	6
7	1	1	1	3	7	6

Η συμβολή της Ψυχολογίας

Donald O. Hebb
1904-1985

Το αξίωμα του Hebb (1949)

"When an axon of cell A is near enough to excite cell B and repeatedly or persistently takes part in firing it, some growth process or metabolic change takes place in one or both cells such that A's efficiency, as one of the cells firing B, is increased."



Χεμπιανή μάθηση

Με επίβλεψη (επιθυμητή έξοδος)

Γραμμικός συσχετιστής
(Linear associator)

Χωρίς επίβλεψη (πραγματική έξοδος)

Συσχετιστικά δίκτυα

Μάθηση

Αποθήκευση p N-διάστατων προτύπων ξ^k

Ο Χεμπιανός κανόνας (D. Hebb)

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P}(2\xi_i^k - 1)(2\xi_j^k - 1), \quad i, j = 1, \ldots, N$$

(δυαδικά πρότυπα)

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P}\xi_i^k \xi_j^k, \quad i, j = 1, \ldots, N$$

(διπολικά πρότυπα)

$$w_{ii} = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

Χεμπιανός κανόνας

Κατασκευή εξωτερικού γινομένου:

$$W = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P} \boldsymbol{\xi}^k \boldsymbol{\xi}^{k\,\mathrm{T}}$$

Αυξητικός (χωρίς μνήμη) – τοπικός κανόνας:

$$W[k] = W[k-1] + g(\boldsymbol{\xi}^k)$$

Υλοποίηση - Off-line

- On-line

$$\Delta w_{ij} = a\xi_i^k \xi_j^k, \quad 0 < a < 1$$

Μάθηση – Χεμπιανός κανόνας

Περίπτωση ενός προτύπου ξ

Συνθήκη ευστάθειας

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_j w_{ij}\xi_j\right) = \xi_i, \quad i = 1,\ldots,N$$

Ισχύει αν $\quad w_{ij} \propto \xi_i \xi_j$

Λειτουργία ελκυσμού αν η πλειψηφία των bits του αρχικού προτύπου είναι σωστά.

Περίπτωση πολλών προτύπων

Συνθήκη ευστάθειας για ένα πρότυπο ξ^m

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_j w_{ij}\xi_j^m\right) = \xi_i^m, \quad i = 1,\dots,N$$

$$\sum_j w_{ij}\xi_j^m = \frac{1}{N}\sum_j\sum_k \xi_i^k \xi_j^k \xi_j^m$$

Όρος διαφωνίας (crosstalk)

$$= \xi_i^m + \frac{1}{N}\sum_j\sum_{k\neq m} \xi_i^k \xi_j^k \xi_j^m =$$

$$= \xi_i^m (1 - C_i^m)$$

Χωρητικότητα

$$C_i^m = -\xi_i^m \frac{1}{N} \sum_j \sum_{k \neq m} \xi_i^k \xi_j^k \xi_j^m$$

Αν $C_i^m > 1$ το πρότυπο ξ^m μπορεί να είναι ασταθές.

Υποθέτουμε τυχαία πρότυπα με ίση πιθανότητα για τις τιμές +1 και -1, ανεξάρτητα για κάθε *k* και *j*.

Πιθανότητα ένα τυχαίο bit να είναι ασταθές:

$$p_{error} = \Pr(C_i^m > 1)$$

Κριτήριο επίδοσης:

Π.χ., $p_{error} < 0{,}01$

Χωρητικότητα

C_i^m : $1/N$ × άθροισμα NP τυχαίων αριθμών (+1 ή -1)

$C_i^m = 1/N\,(2x - NP)$, όπου x ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ½ και NP

Διωνυμική κατανομή (q,n)

Μέση τιμή: nq

Διασπορά: $nq(1-q)$

C_i^m : Μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = P/N$

Χωρητικότητα

Προσέγγιση με Γκαουσιανή κατανομή:

$$p_{error} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_1^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - erf(1/\sqrt{2\sigma^2})\right] = \frac{1}{2}\left[1 - erf(\sqrt{N/2P})\right]$$

$$\boxed{erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du}$$

Συνάρτηση σφάλματος

Χωρητικότητα:

Για $p_{error} < 0{,}01$

$P/N < 0{,}185$

Αυτοσυσχετιστική μνήμη: Μοντέλο Hopfield

Χωρητικότητα (Χεμπιανός κανόνας)

$P \leq 0,15N$ (Hopfield)

$P = O(N/logN)$ (McEliece et al.)

Επεκτάσεις

Εφαρμογές

Προσομοιωτής Δικτύου Hopfield

XHfN

http://www.borgelt.net/doc/hfnd/hfnd.html

European Center for Soft Computing