ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΣΑΦΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

Νευρωνικά Δίκτυα και Ευφυή Υπολογιστικά Συστήματα

Γιώργος Στάμου

Α. ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ – ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ

1. Στοιχεία θεωρίας ασαφών συνόλων

Έστω $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ ένα *κλασικό σύνολο*, δηλαδή μία συλλογή αντικειμένων την οποία θα ονομάζουμε *υπερσύνολο αναφοράς*. Ασαφές υποσύνολο A του X ορίζεται το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $A=\{(x,\mu_A(x)),\ x\in X\}$, όπου $\mu_A(x)$ μία συνάρτηση από το X στο $[0,1]$, η οποία ονομάζεται *συνάρτηση συμμετοχής* του ασαφούς υποσυνόλου A. Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(x)$ συμβολίζεται απλούστερα ως $A(x)$ και η τιμή της λέγεται *βαθμός συμμετοχής* του x στο σύνολο A.

Ασαφές δυναμοσύνολο, $\mathcal{F}(X)$, του υπερσυνόλου αναφοράς X, ονομάζεται το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X.

Δύο ασαφή σύνολα $A,B\in\mathcal{F}(X)$ θα λέγονται *ίσα* αν και μόνο αν $A(x)=B(x),\ \forall x\in X$.

Θα λέμε ότι το σύνολο A είναι *υποσύνολο* του B και θα σημειώνουμε $A\subseteq B$ αν και μόνο αν $A(x)\le B(x),\ \forall x\in X$. Αν $A\subseteq B$ και $A\ne B$, τότε το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B.

Μία οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X, θα λέγεται *ασαφής διαμέριση* $\mathcal{P}(X)$ *του* X, *τάξης* $n\in N$, και θα συμβολίζεται με $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ αν και μόνο αν

$$A_i\ne A_j,\ \forall i,j\in N_n\ (i\ne j) \qquad 0<\sum_{k=1}^{m}A_i(x_k)<m,\ \forall i\in N_n$$

Τα στοιχεία A_i, $i\in N_n$ της $\mathcal{A}$ θα λέγονται *κλάσεις* της ασαφούς διαμέρισης.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς επεκτείνονται οι τρεις βασικές πράξεις της θεωρίας συνόλων: το συμπλήρωμα, η τομή και η ένωση.

Το συμπλήρωμα $\overline{A}$ ενός ασαφούς συνόλου A δίνεται από τη σχέση $\overline{A}(x)=c(A(x))$ για κάθε $x \in X$. Η συνάρτηση c πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Οριακές συνθήκες: $c(0)=1$ και $c(1)=0$

Μονοτονία: $\forall a,b \in [0,1]$, $a \le b \Rightarrow c(a) \ge c(b)$

Συνέχεια: c συνεχής στο $[0,1]$

Εναγωγή: $\forall a \in [0,1]$ είναι $c(c(a))=a$

Το σύνηθες συμπλήρωμα δίνεται από τη σχέση $\overline{A}(x)=1-A(x)$, $\forall x \in X$.

Η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B ορίζεται ως $(A \cap B)(x)=t[A(x),B(x)]$, όπου t μία τριγωνική νόρμα (τ-νόρμα). Τ-νόρμα είναι μία συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:

Οριακή συνθήκη: $t(a,1)=a$

Μονοτονία: $\forall a,b,d \in [0,1]$ με $b \le d$ είναι $t(a,b) \le t(a,d)$

Αντιμεταθετικότητα: $\forall a,b \in [0,1]$ είναι $t(a,b)=t(b,a)$

Προσεταιριστικότητα: $\forall a,b,d \in [0,1]$ είναι $t(a,t(b,d))=t(t(a,b),d)$

Αν επιπλέον η t είναι συνεχής ονομάζεται *Αρχιμήδεια*.

Παραδείγματα τ-νορμών είναι τα εξής:

Συνήθης τομή: $t(a,b)=\min(a,b)$

Αλγεβρικό γινόμενο: $t(a,b)=ab$

Φραγμένη διαφορά: $t(a,b)=\max(0,a+b-1)$

Συνάρτηση Hamacher: $t(a,b)=\dfrac{ab}{r+(1-r)(a+b-ab)}$

Με τη βοήθεια της τ-νόρμας ορίζεται το *καρτεσιανό γινόμενο* $A=A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, n ασαφών υποσυνόλων του X, ως ασαφές υποσύνολο του συνόλου $X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ από τη σχέση:

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_n)=t[A_1(x_1),A_2(x_2),\ldots,A_n(x_n)] \tag{1}$$

με $x_i \in X_i$, $i \in N_n$.

Η ασαφής ένωση δύο ασαφών συνόλων ορίζεται αντίστοιχα με την ασαφή τομή από μία σ-νόρμα, μία συνάρτηση δηλαδή που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Οριακή συνθήκη: $u(a,0)=a$

Μονοτονία: $\forall a,b,d \in [0,1]$ με $b \le d$ είναι $u(a,b) \le u(a,d)$

Αντιμεταθετικότητα: $\forall a,b \in [0,1]$ είναι $u(a,b)=u(b,a)$

Προσεταιριστικότητα: $\forall a,b,d \in [0,1]$ είναι $u(a,u(b,d))=u(u(a,b),d)$

Παραδείγματα σ-νορμών είναι τα εξής:

Συνήθης ένωση: $u(a,b)=\max(a,b)$

Αλγεβρικό άθροισμα: $u(a,b)=a+b-ab$

Φραγμένο άθροισμα: $u(a,b)=\min(1,a+b)$

Οι πράξεις συμπληρώματος, τομής και ένωσης είναι ιδιαίτερα σημαντικές διότι θεμελιώνουν την *ασαφή λογική*. Κάθε ασαφές δυναμοσύνολο $\mathcal{F}(X)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας *σύνδεσμος*, στον οποίο η τ-νόρμα παίζει το ρόλο της τομής του συνδέσμου, ενώ η σ-νόρμα παίζει το ρόλο της ένωσης. Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι από τις πράξεις ασαφούς συμπληρώματος, τομής και ένωσης, οι συνήθεις έχουν κάποια χαρακτηριστικά που τις καθιστούν ιδιαίτερα σημαντικές. Για παράδειγμα, η συνήθης τομή παράγει το μεγαλύτερο ασαφές σύνολο που μπορεί να παραχθεί από πράξη τομής ασαφών συνόλων, ενώ η συνήθης ένωση το μικρότερο ασαφές σύνολο που μπορεί να παραχθεί από πράξη ένωσης ασαφών συνόλων. Διαισθητικά, θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η συνήθης τομή είναι η «χαλαρότερη» τομή που υπάρχει ενώ η συνήθης ένωση είναι η «αυστηρότερη» ένωση που υπάρχει. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι για τις συνήθεις πράξεις ο παραπάνω σύνδεσμος ικανοποιεί τις ιδιότητες του κλασικού συνδέσμου Boolean (Boolean άλγεβρας). Σύνδεσμοι που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες αναφέρονται ως *σύνδεσμοι De Morgan* ή *άλγεβρες De Morgan*.

Μία άλλη σημαντική πράξη, με εφαρμογή στα ασαφή συστήματα είναι η *ασαφής συνεπαγωγή*. Η πράξη αυτή αποδίδει μία τιμή αληθείας στο γεγονός $A \Rightarrow B$, όταν είναι γνωστές οι τιμές αληθείας των γεγονότων *A* και *B*. Είναι επέκταση της κλασικής συνεπαγωγής, αφού αποτιμά τις υποθετικές προτάσεις της μορφής “αν *A* τότε *B*”, που χρησιμοποιούνται στους συλλογιστικούς κανόνες. Γενικά, η ασαφής συνεπαγωγή είναι μία συνάρτηση της μορφής $\sigma:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$. Στην κλασική λογική υποστηρίζεται από την πράξη $\sigma(a,b)=\bar{a}\vee b$. Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή στην ασαφή λογική, επιλέγεται η πράξη $\sigma(a,b)=u(c(a),b)$, όπου *u,c* μία ασαφής ένωση και ένα ασαφές συμπλήρωμα, αντίστοιχα. Εναλλακτικά, η ασαφής συνεπαγωγή μπορεί να οριστεί και από τη σχέση $\sigma_t(a,b)=\sup\{x\in[0,1]: t(a,x)\le b\}$ όπου *t* μία τ-νόρμα.

2. Ασαφείς σχέσεις

Έστω $X_1, X_2,\ldots, X_d$ κλασικά σύνολα. *Ασαφής σχέση* $R: X_1\times X_2\times\ldots\times X_d\to[0,1]$ ορισμένη στα $X_1, X_2,\ldots, X_d$ είναι κάθε ασαφές υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των $X_1\times X_2\times\ldots\times X_d$.

Ο βαθμός συμμετοχής κάθε διανύσματος $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in X_1\times X_2\times\ldots\times X_d$ στην ασαφή σχέση *R*, παριστάνει το βαθμό στον οποίο τα $x_1,x_2,\ldots,x_d$ *σχετίζονται* ή αλλιώς *συνδέονται* μεταξύ τους με βάση την *R*. Η αναπαράσταση των ασαφών σχέσεων γίνεται μέσω συναρτησιακών τύπων στην περίπτωση που η σχέση είναι συνεχής, ή μέσω πινάκων $\mathbf{R}=[r_{ij}]$ στην περίπτωση που η σχέση είναι διακριτή. Οι βασικές πράξεις που ορίζονται μεταξύ των ασαφών σχέσεων είναι η *αντιστροφή* και η *σύνθεση*.

Θα λέμε *αντίστροφη σχέση* της $R(X,Y)$, την ασαφή σχέση $R^{-1}(Y,X)$ με τύπο $R^{-1}(y,x)=R(x,y)$ για όλα τα $x\in X$ και $y\in Y$. Ο πίνακας συμμετοχής ο οποίος αναπαριστά την R^{-1} είναι ο ανάστροφος (γραμμές$\leftrightarrow$ στήλες) του *R*.

Η $\sup-t$ *σύνθεση* $R: X\times Z\to[0,1]$ δύο ασαφών σχέσεων $R_1: X\times Y\to[0,1]$ και $R_2: Y\times Z\to[0,1]$ ορίζεται από την εξίσωση

$$R(x,z)=\left[R_1\circ^t R_2\right](x,z)=\sup_{y\in Y} t\left[R_1(x,y),R_2(y,z)\right]$$

όπου *t* μία τ-νόρμα. Μέσω της πράξης της σύνθεσης συνδέουμε την πληροφορία για τη συσχέτιση των *X* και *Y* και τη συσχέτιση των *Y* και *Z* και εξάγουμε πληροφορία για τη συσχέτιση των *X* και *Z*.

2.3. Ασαφής συλλογιστική

Η βάση στην οποία στηρίζεται η εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων είναι η συλλογιστική. Η ασαφής λογική ασχολείται με την αυτόματη συλλογιστική σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Για το σκοπό αυτό, θεμελιώνεται η δομή και η μαθηματική αναπαράσταση ενός ασαφούς γεγονότος με τον ορισμό των ασαφών συνόλων και καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζουμε τα γεγονότα για να παράγουμε λογικές προτάσεις ή σχέσεις και συνεπώς συμπεράσματα.

Οι συνήθεις διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων που κυρίως χρησιμοποιούνται στα συστήματα κανόνων που έχουν ως βάση την Προτασιακή Λογική, στηρίζονται στον κανόνα συλλογιστικής *modus ponens* (MP). Ο modus ponens παράγει συμπεράσματα από ένα σύνολο υποθέσεων σύμφωνα με το λογικό σχήμα $\left((A\Rightarrow B)\wedge A\right)\Rightarrow B$, όπου *A* και *B* συγκεκριμένα γεγονότα. Η ερμηνεία του είναι η εξής: αν το γεγονός *A* συνεπάγεται το γεγονός *B* και επιπλέον έχουμε ότι ισχύει το γεγονός *A*, τότε εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει το γεγονός *B*. Σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας τα γεγονότα ισχύουν σε κάποιο βαθμό, χαρακτηρίζονται δηλαδή από ασάφεια. Ο κανόνας modus ponens επεκτείνεται τότε στο *γενικευμένο modus ponens* (generalised modus ponens-GMP) ο οποίος συντάσσεται ως $(A\Rightarrow B)\wedge A'\Rightarrow B'$ με την εξής ερμηνεία: αν το γεγονός *A* συνεπάγεται το γεγονός *B* και έχουμε ως υπόθεση ότι ισχύει το *A* σε κάποιο βαθμό, τότε θα ισχύει και το *B* σε κάποιο βαθμό. Ο βαθμός στον οποίο το *B πληρείται*, όπως λέγεται, εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο το *A* πληρείται και από το είδος της συνεπαγωγής που εφαρμόζουμε. Η πράξη της ασαφούς συνεπαγωγής στην ουσία υλοποιεί (υποστηρίζει) μαθηματικά τη λογική σχέση της μορφής $A\Rightarrow B$, όταν τα *A* και *B* είναι ασαφή γεγονότα. Το σχήμα που προτείνεται στη θεωρία των ασαφών συστημάτων για την εξαγωγή του γεγονότος B', το οποίο είναι ένα ασαφές σύνολο, από τα γεγονότα *A, B* και A' τα οποία επίσης είναι ασαφή σύνολα (τα *A* και A' ορισμένα στο χώρο *X* των υποθέσεων και τα *B*, B' στο χώρο *Y* των συμπερασμάτων), περιγράφεται από τη σχέση (συνθετικός κανόνας του Zadeh):

$$B'(y)=\sup_{x\in X} t\left[A'(x),\sigma(A(x),B(y))\right] \tag{2}$$

όπου $x\in X$, $y\in Y$, t είναι μία τ-νόρμα και σ μία πράξη ασαφούς συνεπαγωγής. Η επιλογή της συνάρτησης που θα υλοποιεί τη συνεπαγωγή είναι, λοιπόν, καθοριστική για την ασαφή συλλογιστική με βάση τον modus ponens, συνεπώς η επιλογή της καθορίζει τη συμπεριφορά του συστήματος. Ένα από τα κυριότερα κριτήρια που έχουν δοθεί στη βιβλιογραφία και χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της παραπάνω επιλογής, είναι το κριτήριο της *ανάκλησης* (recall). Μαθηματικά, το κριτήριο διατυπώνεται από τη σχέση:

$$B(y) = \sup_{x \in X} t\left[A(x), \sigma(A(x), B(y))\right] \tag{3}$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις δίνουμε στο κριτήριο την εξής ερμηνεία: η ασαφής συνεπαγωγή σ πρέπει να είναι τέτοια ώστε όταν η υπόθεση πληρείται *ακριβώς*, τότε να λαμβάνουμε το συμπέρασμα του κανόνα $A \Rightarrow B$, δηλαδή το *B*. Η απαίτηση είναι εύλογη, αφού το μόνο που κάνει είναι να εξασφαλίζει ότι όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα, η συλλογιστική θα ταυτίζεται με τους κανόνες και τα συμπεράσματα της κλασικής λογικής, θα αποτελεί, λοιπόν, *επέκταση* της κλασικής λογικής.

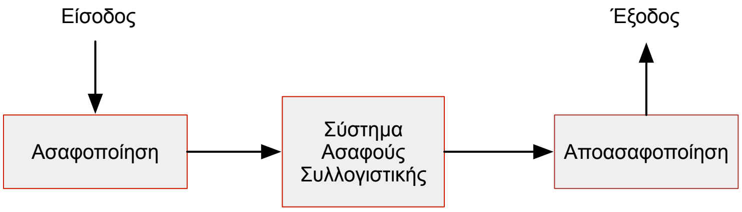
2.4. Μοντελοποίηση συστημάτων με χρήση ασαφούς συλλογιστικής

Ένα σύστημα απεικονίζει το χώρο εισόδου X στο χώρο εξόδου Y μέσω μίας συνάρτησης $f : X \to Y$. Για να καθοριστεί η απεικόνιση πρέπει να είναι γνωστή η f, η οποία καθορίζεται συνήθως με δύο *αναλυτικά* ή *προσεγγιστικά*. Η μαθηματική ντετερμινιστική μοντελοποίηση καταλήγει μέσω της αναλυτικής περιγραφής των χαρακτηριστικών του συστήματος στην πλήρη και ακριβή περιγραφή μέσω του τύπου της f. Στα περισσότερα πραγματικά συστήματα, όμως, η αναλυτική περιγραφή είναι εξαιρετικά δύσκολη, ακόμα και αν γίνουν αρκετές παραδοχές. Για το λόγο αυτό πολλές φορές χρησιμοποιείται η προσεγγιστική περιγραφή, η κατασκευή δηλαδή ενός προσεγγιστικού μοντέλου, με βάση στατιστική ανάλυση δεδομένων εισόδου-εξόδου. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις στις οποίες είναι δύσκολο να συγκεντρωθούν τα δεδομένα αυτά, μέσω οργανωμένης δειγματοληψίας. Μπορεί, όμως να είναι δυνατόν να περιγραφεί εμπειρικά η συσχέτιση του χώρου της εισόδου με το χώρο της εξόδου μέσω *γλωσσικών κανόνων* (για παράδειγμα ΑΝ Η ΠΙΕΣΗ ΕΙΝΑΙ ΥΨΗΛΗ ΚΑΙ Η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΑΝΕΒΑΙΝΕΙ ΑΝΟΙΞΕ ΓΡΗΓΟΡΑ ΤΗ ΒΑΛΒΙΔΑ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ). Η γνώση αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με χρήση των ασαφών συστημάτων. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτή η αναπαράσταση.

Η δομή της μοντελοποίησης συστημάτων με βάση την ασαφή συλλογιστική φαίνεται στο Σχήμα 1. Η είσοδος στο σύστημα είναι ένα στοιχείο x_o του *X*. Μέσω της διαδικασίας της *ασαφοποίησης* (fuzzification) η τιμή αυτή μετατρέπεται σε ένα ασαφές υποσύνολο $A' \in \mathcal{F}(X)$. Η μετατροπή αυτή γίνεται με διάφορες μεθόδους. Συνήθως θέτουμε $A'(x_o) = 1$ και $A'(x) = 0$ για κάθε $x \neq x_o$ (singleton ασαφοποίηση). Στη συνέχεια, ακολουθείται μία διαδικασία εξαγωγής ασαφούς συμπεράσματος (όπως αυτές που αναλύθηκαν προηγούμενα) και παράγεται ένα ασαφές συμπέρασμα $B' \in \mathcal{F}(Y)$. Το συμπέρασμα αυτό μετατρέπεται σε μία τιμή $y \in Y$ μέσω της διαδικασίας της *αποασαφοποίησης* (defuzzification). Η συνηθέστερη μέθοδος αποασαφοποίησης είναι η μέθοδος του *κέντρου βάρους* (center of gravity). Κατά τη μέθοδο αυτή έχουμε:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{m} B'(y_j) y_j}{\sum_{j=1}^{m} B'(y_j)} \tag{4}$$

Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στην εξαγωγή ασαφούς συμπεράσματος, τη μοντελοποίηση δηλαδή των συστημάτων ασαφούς συλλογιστικής.



Σχήμα 1. *Μοντελοποίηση συστημάτων με χρήση ασαφούς συλλογιστικής*

Έστω $X_1, X_2, ..., X_d$ (με πληθικότητες $|X_i| = m_i$, $i = 1,2,...,d$) και $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ πεπερασμένα κλασικά σύνολα. Ένα ασαφές σύστημα (ΑΣ) είναι μία απεικόνιση των ασαφών συνόλων που ορίζονται στα $X_1, X_2, ..., X_d$ (είσοδος) στα ασαφή σύνολα που ορίζονται στο Y (έξοδος). Κάθε ΑΣ αναπαρίσταται μέσω μίας συνάρτησης $F: \mathcal{F}(X_1)\times\mathcal{F}(X_2)\times\cdots\times\mathcal{F}(X_d)\to\mathcal{F}(Y)$ που περιγράφει τη σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου. Για κάθε διάνυσμα εισόδου $(A_1, A_2, ..., A_d)$ με $A_i \in \mathcal{F}(X_i)$, $i \in N_d$, η απόκριση του ΑΣ είναι ένα ασαφές σύνολο B ορισμένο στο Y, για το οποίο $B = F(A_1, A_2, ..., A_d)$.

Έστω $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, ..., \mathcal{A}^{(d)}$ ασαφείς διαμερίσεις των $X_1, X_1, ..., X_d$, αντίστοιχα, με τάξεις $|\mathcal{A}^{(i)}| = n_i$, $i = 1,2,...,d$ και $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_s\}$ ασαφής διαμέριση του Y.

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε ένα παράδειγμα ορισμού μίας ασαφούς διαμέρισης. Η ασαφής διαμέριση εκφράζει τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος με πέντε βασικούς γλωσσικούς όρους (ασαφή υποσύνολα του $X = [0,100]$) ΠΟΛΥ ΧΑΜΗΛΗ, ΧΑΜΗΛΗ, ΜΕΣΗ, ΥΨΗΛΗ, ΠΟΛΥ ΥΨΗΛΗ. Κάθε ένας από τους πέντε βασικούς γλωσσικούς όρους, αντιστοιχεί σε ένα από τα πέντε ασαφή σύνολα A_1, A_2,…, A_5. Οι ασαφείς αριθμοί, οι συναρτήσεις συμμετοχής των οποίων έχουν τραπεζοειδή μορφή, καλύπτουν το διάστημα [0,100] (το πεδίο ορισμού της βασικής μεταβλητής *θερμοκρασία*). Για μία τιμή, ας πούμε 57.5°C, από μία μέτρηση, θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η θερμοκρασία αυτή είναι ΜΕΤΡΙΑ κατά 2.14 και ΥΨΗΛΗ κατά 7.9.

Εφόσον τα στοιχεία των $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, ..., \mathcal{A}^{(d)}$ και τα στοιχεία της $\mathcal{B}$, ως ασαφή σύνολα, μπορούν να έχουν ένα γλωσσικό-σημασιολογικό περιεχόμενο, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν γλωσσικοί, εμπειρικοί, ευρετικοί κανόνες για να περιγραφεί η σχέση εισόδου-εξόδου. Συνδυάζοντας τους κανόνες αυτούς με το γενικευμένο modus ponens, παίρνουμε το μοντέλο πολυ-υποθετικής προσεγγιστικής συλλογιστικής:

<u>ΚΑΝΟΝΑΣ 1</u>:

ΑΝ a_1 ΕΙΝΑΙ $A_1^{(1)}$ ΚΑΙ a_2 ΕΙΝΑΙ $A_1^{(2)}$ ΚΑΙ … ΚΑΙ a_d ΕΙΝΑΙ $A_1^{(d)}$ ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_1

<u>ΚΑΝΟΝΑΣ 2</u>:

ΑΝ a_1 ΕΙΝΑΙ $A_2^{(1)}$ ΚΑΙ a_2 ΕΙΝΑΙ $A_2^{(2)}$ ΚΑΙ … ΚΑΙ a_d ΕΙΝΑΙ $A_2^{(d)}$ ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_2

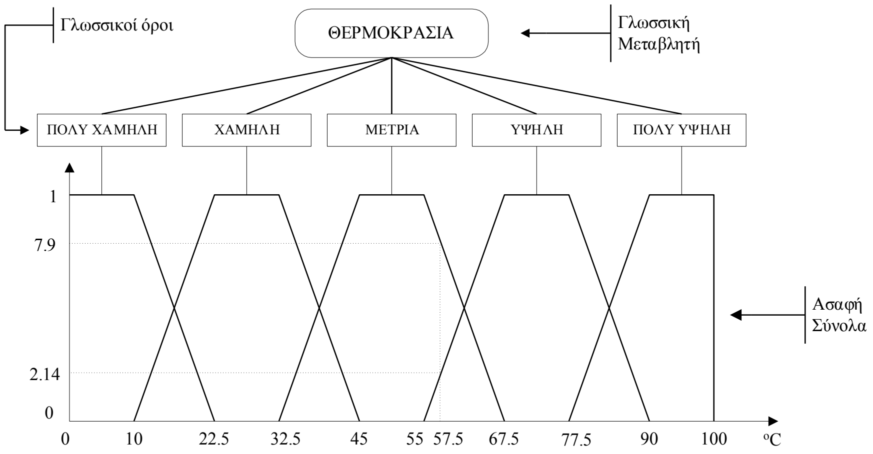
………………………………………………..………………………………

ΚΑΝΟΝΑΣ n:

ΑΝ a_1 ΕΙΝΑΙ $A_n^{(1)}$ ΚΑΙ a_2 ΕΙΝΑΙ $A_n^{(2)}$ ΚΑΙ … ΚΑΙ a_d ΕΙΝΑΙ $A_n^{(d)}$ ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_n

ΥΠΟΘΕΣΗ: a_1 ΕΙΝΑΙ A_1 ΚΑΙ a_2 ΕΙΝΑΙ A_2 ΚΑΙ … ΚΑΙ a_d ΕΙΝΑΙ A_d

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: b ΕΙΝΑΙ B



Σχήμα 2. *Ορισμός ασαφούς διαμέρισης και γλωσσικών όρων*

Το ΑΣ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία απεικόνιση F: $\mathcal{F}(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d) \to \mathcal{F}(Y)$ ή F: $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, όπου $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$ (με $|X| = m = \prod_{i=1}^{d} m_i$). Η ασαφής διαμέριση $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ του X ορίζεται από την (1) και η τάξη της είναι $n = \prod_{i=1}^{d} n_i$. Με τον τρόπο αυτό, το μοντέλο της πολυ-υποθετικής προσεγγιστικής συλλογιστικής απλουστεύεται στο:

ΚΑΝΟΝΑΣ 1: ΑΝ a ΕΙΝΑΙ A_1 ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_1

ΚΑΝΟΝΑΣ 2: ΑΝ a ΕΙΝΑΙ A_2 ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_2

……………………………………………………

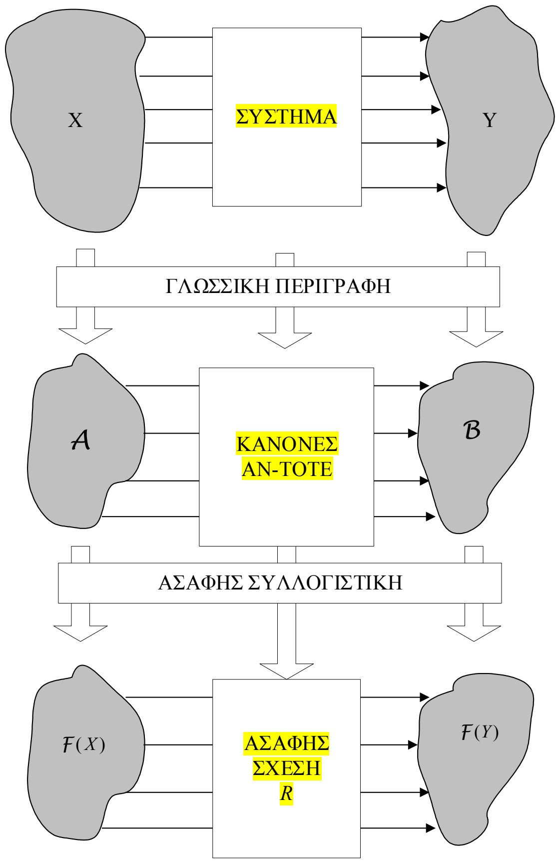
ΚΑΝΟΝΑΣ n: ΑΝ a ΕΙΝΑΙ A_n ΤΟΤΕ b ΕΙΝΑΙ B_n

ΥΠΟΘΕΣΗ: a ΕΙΝΑΙ A

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: b ΕΙΝΑΙ B

Για να εκφραστεί αριθμητικά το παραπάνω λογικό σχήμα και συνεπώς να αναπαρασταθεί η σχέση των X και Y, χρησιμοποιούνται οι ασαφείς σχέσεις και η sup-t σύνθεση των ασαφών σχέσεων. Έστω R μία ασαφής σχέση ορισμένη στο $X \times Y$, δηλαδή $R : X \times Y \to [0,1]$ και έστω $\mathbf{R}_{m \times k}$ η αναπαράστασή της με πίνακα. Κάθε είσοδος A, η οποία είναι ένα ασαφές υποσύνολο του X, αναπαρίσταται από το διάνυσμα $\mathbf{a} = [A(x_1)\ A(x_2)\ \cdots\ A(x_m)]$. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος $\mathbf{b} = [B(y_1)\ B(y_2)\ \cdots\ B(y_k)]$ του ασαφούς συστήματος, δίνεται από τη σχέση $\mathbf{b} = F(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \circ^t \mathbf{R}$. Το πρόβλημα το οποίο προκύπτει είναι η εύρεση της ασαφούς σχέσης R, δηλαδή του πίνακα

R, ο οποίος αναπαριστά τη γνώση για το σύστημα. Η μέθοδος που συνήθως χρησιμοποιείται είναι η χρήση των ασαφών συνεπαγωγών για την αναπαράσταση κάθε κανόνα $A_i \to B_i,\ i \in N_n$ και η απαίτηση για την ταυτόχρονη ισχύ όλων των κανόνων. Η μοντελοποίηση συστημάτων με βάση την προσεγγιστική συλλογιστική φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3. Συστήματα ασαφούς συλλογιστικής

Μία απλοποιημένη μέθοδος που επιλύει το σχήμα της πολυ-υποθετικής προσεγγιστικής συλλογιστικής που αναλύσαμε προηγούμενα είναι αυτή της *παρεμβολής*. Η ιδέα είναι ότι συγκρίνεται η είσοδος με τις κλάσεις της ασαφούς διαμέρισης $\mathcal{A}$ και όσο “μοιάζει” με κάθε μία από αυτές, τόσο η έξοδος πρέπει να “μοιάζει” με τις αντίστοιχες κλάσεις της ασαφούς διαμέρισης $\mathcal{B}$. Η υλοποίηση της μεθόδου της παρεμβολής ολοκληρώνεται με τα παρακάτω βήματα.

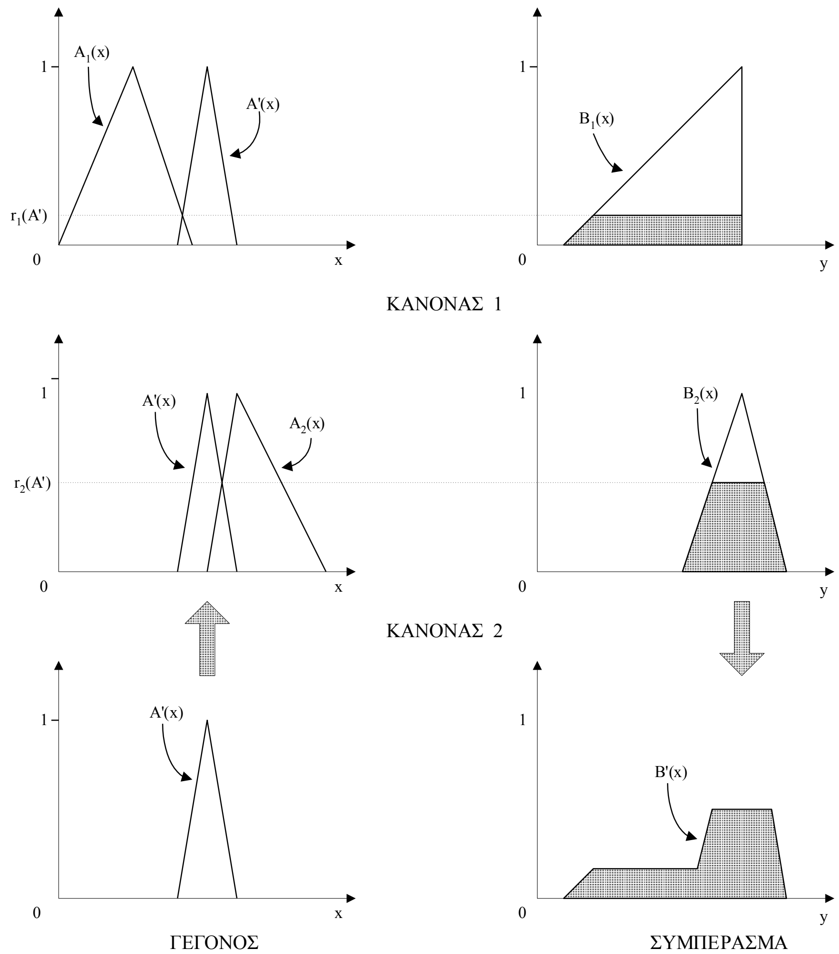
ΒΗΜΑ 1. Υπολογίζουμε τους βαθμούς συνάφειας $r_i(A')$ ($i \in N_n$) μεταξύ της εισόδου και της κάθε κλάσης A_i, της διαμέρισης $\mathcal{A}$, του πεδίου ορισμού X της εισόδου, από τη σχέση:

$$r_i(A') = \sup_{j \in N_m} t[A'(x_j), A_i(x_j)]. \tag{5}$$

ΒΗΜΑ 2. Υπολογίζουμε την έξοδο B' από τη σχέση:

$$B'(y_j) = \sup_{i \in N_n} t[r_i(A'), B_i(x_j)],\ \ \forall j \in N_k. \tag{6}$$

Στο Σχήμα 4 φαίνεται ένα παράδειγμα εξαγωγής ασαφούς συμπεράσματος με τη μέθοδο της παρεμβολής.



Σχήμα 4. *Εξαγωγή συμπεράσματος με τη μέθοδο της παρεμβολής*

Μία άλλη μέθοδος εξαγωγής ασαφούς συμπεράσματος έχει προταθεί από τους Sugeno και Takagi. Η μέθοδος αυτή επιλύει ένα παραλλαγμένο σχήμα της πολυ-υποθετικής συλλογιστικής, στο οποίο μόνο στο τμήμα των υποθέσεων εμπλέκονται ασαφή σύνολα. Ο *i* κανόνας του σχήματος γίνεται:

ΑΝ a_1 ΕΙΝΑΙ $A_n^{(1)}$ ΚΑΙ a_2 ΕΙΝΑΙ $A_n^{(2)}$ ΚΑΙ…ΚΑΙ a_d ΕΙΝΑΙ $A_n^{(d)}$ ΤΟΤΕ $b = f_i(x_1, x_2, ..., x_d)$

όπου f_i μία συνάρτηση των εισόδων (πριν την ασαφοποίηση). Το συμπέρασμα *b* δίνεται από τη σχέση:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i f_i(x_1, x_2, ..., x_d)}{\sum_{i=1}^{n} r_i} \tag{7}$$

όπου r_i οι βαθμοί συνάφειας που υπολογίζονται όπως στη μέθοδο παρεμβολής (σχέση 5). Προφανώς, δεν είναι απαραίτητη η διαδικασία της αποασαφοποίησης.

ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μία *κλασική σχέση* αναπαριστά μία απεικόνιση ενός συνόλου σε ένα άλλο σύνολο (δυαδική σχέση). Στη γενική περίπτωση, αναπαριστά την ύπαρξη ή την απουσία μιας *αντιστοίχισης* ή *διασύνδεσης* ή *συσχέτισης* μεταξύ των στοιχείων δύο ή περισσότερων συνόλων. Η ιδέα αυτή μπορεί να επεκταθεί ώστε η σχέση να αναπαριστά το βαθμό της συσχέτισης μεταξύ των στοιχείων. Οι *βαθμοί συσχέτισης* μπορούν να εκφραστούν από τους *βαθμούς συμμετοχής στη σχέση* όπως ακριβώς οι βαθμοί συμμετοχής στο σύνολο απεικονίζουν το κατά πόσο ανήκει ένα στοιχείο σε ένα σύνολο.

Μία κλασική σχέση ορισμένη στα σύνολα $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού συνόλου $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Ένας συνήθης τρόπος παράστασης μίας τέτοιας σχέσης είναι μέσω της χαρακτηριστικής της συνάρτησης. Αν συμβολίσουμε με *R* μία τέτοια σχέση και με $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τη χαρακτηριστική της συνάρτηση θα είναι

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \langle \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n} \rangle \in R \\ 0 & \langle \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n} \rangle \notin R \end{cases}$$

Αν τα $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι πεπερασμένα, τότε η σχέση μπορεί να παρασταθεί και με ένα n-διάστατο πίνακα συμμετοχής $\mathrm{R} = [r_{i_1, i_2, \dots, i_n}]$ όπου $i_1, i_2, \dots, i_n$ οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων $X_1, X_2, \dots, X_n$ αντίστοιχα. Στα στοιχεία του πίνακα απεικονίζονται οι τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ορίζονται και οι ασαφείς σχέσεις, μόνο που η χαρακτηριστική συνάρτηση επεκτείνεται στη συνάρτηση συμμετοχής και έτσι τα στοιχεία του πίνακα μπορούν να παίρνουν τιμές από ολόκληρο το κλειστό διάστημα [0,1]. Από τις ασαφείς σχέσεις μας ενδιαφέρουν κυρίως οι δυαδικές, οι σχέσεις δηλαδή που ορίζονται μεταξύ δύο συνόλων. Η σημασία τους είναι μεγάλη, διότι μπορούν να θεωρηθούν γενικευμένες μαθηματικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με δυαδικές σχέσεις, ορισμένες σε δύο πεπερασμένα υπερσύνολα αναφοράς *X*, *Y*. Η παράσταση της σχέσης, τότε, γίνεται με ένα πίνακα $\mathrm{R} = [r_{xy}]$, όπου $r_{xy} = R(x, y)$.

Οι βασικότερες πράξεις που ορίζονται στις ασαφείς σχέσεις είναι η αντιστροφή και η σύνθεση (ακριβώς όπως και στις μαθηματικές συναρτήσεις).

Ονομάζουμε *αντίστροφη* μίας σχέσης $R(X, Y)$ και τη συμβολίζουμε με $R^{-1}(Y, X)$, μία σχέση πάνω στο $Y \times X$ ορισμένη από την

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y)$$

για όλα τα $x \in X$ και $y \in Y$. Ο πίνακας συμμετοχής $\mathrm{R}^{-1} = [r_{yx}^{-1}]$ ο οποίος την αναπαριστά είναι ο *ανάστροφος* (γραμμές $\leftrightarrow$ στήλες) του πίνακα R που αναπαριστά την $R(X, Y)$.

Έστω δύο δυαδικές σχέσεις $P(X,Y)$ και $Q(Y,Z)$ με κοινό το σύνολο *Y*. Η *σύνθεση* μεταξύ των δύο σχέσεων θα συμβολίζεται με $P(X,Y)\circ Q(Y,Z)$ και θα είναι μία δυαδική σχέση $R(X,Z)$, πάνω στο $X\times Z$, ορισμένη από την

$$R(x,z)=[P\circ Q](x,z)=\underset{y\in Y}{u}\, i\big[P(x,y),Q(y,z)\big]$$

για όλα τα $x\in X$ και $y\in Y$, όπου *u* και *i* πράξεις ένωσης και τομής, αντίστοιχα.

Η σύνθεση η οποία στηρίζεται στην επιλογή της συνήθους ένωσης και συνήθους τομής, λέγεται και *συνήθης σύνθεση* ή *max-min σύνθεση*. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό με χρήση πίνακα έχουμε

$$[r_{ij}]=[p_{ik}]\circ[q_{ik}]$$

ή πιο απλά, για τη max-min σύνθεση

$$r_{ij}=\max_k \min(p_{ik},q_{kj})$$

Παρατηρούμε ότι η πράξη της σύνθεσης διατηρεί το μηχανιστικό μέρος της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων, μόνο που το γινόμενο αντικαθίσταται γενικά με την τομή και το άθροισμα με την ένωση (μην ξεχνάμε ότι το γινόμενο είναι ένα είδος τομής και το άθροισμα ένα είδος ένωσης).

Η επόμενη εξίσωση πινάκων δείχνει τη χρήση της προηγούμενης εξίσωσης για την παραγωγή της συνήθους σύνθεσης δύο δυαδικών ασαφών σχέσεων από τις συναρτήσεις συμμετοχής τους:

$$\begin{bmatrix} .3 & .5 & .8 \\ 0 & .7 & 1 \\ .4 & .6 & .5 \end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} .9 & .5 & .7 & .7 \\ .3 & .2 & 0 & .9 \\ 1 & 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .8 & .3 & .5 & .5 \\ 1 & .2 & .5 & .7 \\ .5 & .4 & .5 & .6 \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα,

$$.8(=r_{11})=\max\big[\min(p_{11},q_{11}),\min(p_{12},q_{21}),\min(p_{13},q_{31})\big]$$
$$\max\big[\min(.3,.9),\min(.5,.3),\min(.8,1)\big]$$

$$.4(=r_{32})=\max\big[\min(p_{31},q_{12}),\min(p_{32},q_{22}),\min(p_{33},q_{32})\big]$$
$$\max\big[\min(.4,.5),\min(.6,.2),\min(.5,0)\big]$$

Μία ασαφής δυαδική σχέση $R(X,X)$ θα λέγεται *ανακλαστική*, αν και μόνο αν

$$R(x,x)=1,\ \forall x\in X,$$

συμμετρική, αν και μόνο αν

$$R(x,y)=R(y,x),\ \forall x,y\in X$$

και *max-min μεταβατική* αν και μόνο αν

$$R(x,z)\geq R(x,y)\circ R(y,z),\ \forall x,y,z\in X.$$

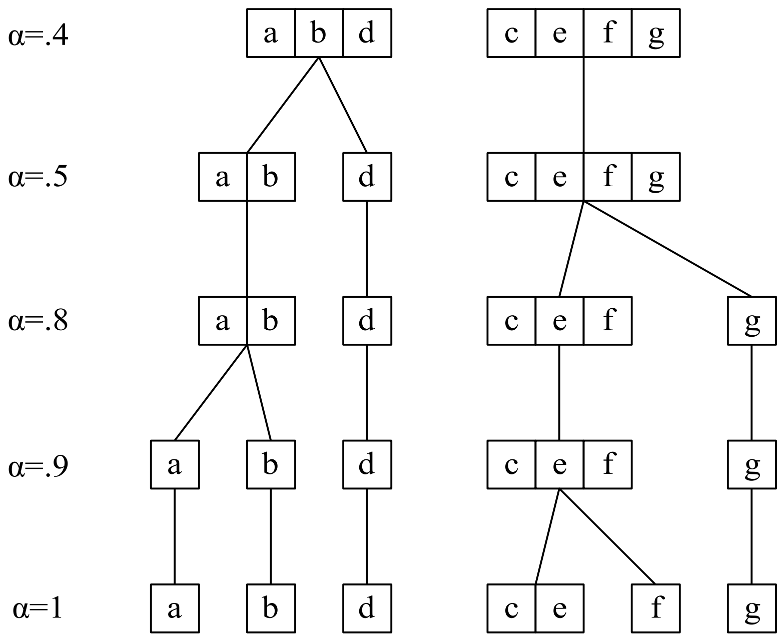
Μία ασαφής δυαδική σχέση με τις τρεις παραπάνω ιδιότητες θα λέγεται σχέση *ισοδυναμίας* (αν έχει μόνο την ανακλαστική και τη συμμετρική λέγεται σχέση *ομοιότητας*).

Εφοδιάζοντας ένα σύνολο X με μία ασαφή σχέση ισοδυναμίας, το διαμερίζουμε σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Τα στοιχεία της κάθε κλάσης είναι σε κάποιο βαθμό ισοδύναμα μεταξύ τους. Από κάθε σχέση ισοδυναμίας μπορούν να προκύψουν πολλές διαμερίσεις του συνόλου X, ανάλογα με τον βαθμό στον οποίο θέλουμε να είναι ισοδύναμα τα στοιχεία της κάθε κλάσης.

Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα τη σχέση $R(X,X)$, όπου $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, με

$$R(x,y)=\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{array}\begin{bmatrix} 1 & .8 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0\\ .8 & 1 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & .9 & .5\\ .4 & .4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & .9 & .5\\ 0 & 0 & .9 & 0 & .9 & 1 & .5\\ 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & .5 & 1 \end{bmatrix}$$

Η σχέση αυτή είναι προφανώς μία ασαφής σχέση ισοδυναμίας στο X. Οι τιμές που λαμβάνουν τα στοιχεία της σχέσης ανήκουν στο σύνολο $\{0,.4,.5,.8,.9,1\}$. Συνεπώς, από τη σχέση παράγονται πέντε ασαφείς διαμερίσεις οι οποίες φαίνονται στο δέντρο διαμέρισης του σχήματος 3.



Σχήμα 3: Διαμερίσεις του συνόλου *X* που προκύπτουν από την ασαφή σχέση.

Β. ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Η ταξινόμηση είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της αναγνώρισης προτύπων. Δεδομένου ενός συνόλου δεδομένων, X, το πρόβλημα της ταξινόμησης του X έγκειται στη διαμέρισή του σε κλάσεις και στην εύρεση κέντρων που χαρακτηρίζουν τις κλάσεις αυτές. Η ασαφής ταξινόμηση, έχει ως αντικείμενο την εύρεση μίας ασαφούς διαμέρισης του X, μέσω της οποίας ορίζουμε στο X κλάσεις, τα στοιχεία των οποίων παρουσιάζουν σε κάποιο βαθμό, κάποια ομοιότητα. Αυτό επιτυγχάνεται με δύο βασικές μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος, η *μέθοδος ταξινόμησης των ασαφών c-μέσων* στηρίζεται στις ασαφείς διαμερίσεις. Η δεύτερη, η *βασισμένη στις ασαφείς σχέσεις ισοδυναμίας ιεραρχική μέθοδος ταξινόμησης*, στηρίζεται στην ασαφή διαμέριση μέσω μίας ασαφούς σχέσης ισοδυναμίας. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις δύο αυτές μεθόδους.

Μέθοδος ταξινόμησης ασαφών c-μέσων

Έστω $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ένα σύνολο δεδομένων. Ασαφής c-διαμέριση του X είναι κάθε οικογένεια ασαφών υποσυνόλων του X, $P = \{A_1, A_2, ..., A_c\}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{i=1}^{c} A_i(x_k) = 1$$

για κάθε $k \in N_n$ και τη σχέση

$$0 < \sum_{k=1}^{n} A_i(x_k) < n$$

για κάθε $i \in N_c$, όπου c ένας θετικός ακέραιος.

Δεδομένου ενός συνόλου δεδομένων $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$, όπου το $\mathbf{x}_k$ είναι γενικά ένα διάνυσμα της μορφής

$$\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kp}) \in \mathbf{R}^p$$

για κάθε $k \in N_n$, το πρόβλημα της ασαφούς ταξινόμησης έγκειται στην εύρεση της κατάλληλης ασαφούς διαμέρισης και των αντίστοιχων κέντρων των κλάσεων της, μέσω των οποίων είναι δυνατή η αναπαράσταση της δομής των δεδομένων. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός κριτηρίου, το οποίο εκφράζει τη γενική ιδέα ότι οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων είναι πιο ισχυρές όταν τα στοιχεία ανήκουν στην ίδια κλάση. Το κριτήριο αυτό διατυπώνεται με την εισαγωγή του *δείκτη επίδοσης*, ο οποίος εξαρτάται από τα κέντρα, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_c$, των κλάσεων, τα οποία υπολογίζονται από τη σχέση

$$\mathbf{v}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} [A_i(\mathbf{x}_k)]^m \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^{n} [A_i(\mathbf{x}_k)]^m} \tag{1}$$

για κάθε $i \in N_c$, όπου $m > 1$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που ελέγχει την επίδραση των συναρτήσεων συμμετοχής.

Ο δείκτης επίδοσης, $J_m(P)$, της ασαφούς διαμέρισης P, υπολογίζεται από τη σχέση

$$J_m(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}[A_i(\mathbf{x}_k)]^m \left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i\right\|^2 \tag{2}$$

όπου $\|\circ\|$ μία τύπου εσωτερικού γινομένου νόρμα του χώρου $\mathbf{R}^p$ και $\left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i\right\|^2$ παριστάνει την απόσταση μεταξύ των $\mathbf{x}_k$ και $\mathbf{v}_i$. Όπως φαίνεται από τη σχέση (2), όσο μικρότερος είναι ο δείκτης επίδοσης, τόσο καλύτερη είναι η ασαφής διαμέριση. Επομένως, το πρόβλημα της ασαφούς ταξινόμησης ασαφών c-μέσων είναι η εύρεση της ασαφούς διαμέρισης που ελαχιστοποιεί το δείκτη επίδοσης που δίνεται από τη σχέση (πρόβλημα βελτιστοποίησης). Ο αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα αναπτύχθηκε από τον Bezdek το 1981 και έχει ως εξής (θεωρούνται δεδομένα, ο αριθμός των κλάσεων και η τιμή του m):

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε $t=0$. Επέλεξε μία αρχική τυχαία ασαφή διαμέριση $P^{(0)}$.

ΒΗΜΑ 2: Υπολόγισε τα c κέντρα των κλάσεων $\mathbf{v}_1^{(t)}, \mathbf{v}_2^{(t)}, \ldots, \mathbf{v}_c^{(t)}$ από τη σχέση (1) για την ασαφή ασαφή ψευδοδιαμέριση $P^{(t)}$ και τη δοσμένη τιμή του m.

ΒΗΜΑ 3: Ανανέωσε το $P^{(t+1)}$ ως εξής: για κάθε $\mathbf{x}_k \in X$, αν $\left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i^{(t)}\right\|^2 > 0$ για κάθε $i \in N_c$, τότε όρισε

$$A_i^{(t+1)}(\mathbf{x}_k) = \left[\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{\left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i^{(t)}\right\|^2}{\left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_j^{(t)}\right\|^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]^{-1};$$

αν $\left\|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_i^{(t)}\right\|^2 = 0$ για κάποιο $i \in I \subseteq N_c$, τότε όρισε τα $A_i^{(t+1)}(\mathbf{x}_k)$ για κάθε $i \in I$ από οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i \in I} A_i^{(t+1)}(\mathbf{x}_k) = 1,$$

και όρισε $A_i^{(t+1)}(\mathbf{x}_k) = 0$ για κάθε $i \in N_c - I$.

ΒΗΜΑ 4: Αν $\left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right| \le \varepsilon$, σταμάτησε; αλλιώς αύξησε το t και συνέχισε από το δεύτερο βήμα.

Στο Βήμα 4, με $\left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right|$ συμβολίζουμε την απόσταση των $P^{(t+1)}$ και $P^{(t)}$ στο χώρο $\mathbf{R}^{n \times c}$. Θα μπορούσε για παράδειγμα να δίνεται από τη σχέση

$$\left|P^{(t+1)} - P^{(t)}\right| = \max_{i \in N_c, k \in N_n}\left|A_i^{(t+1)}(\mathbf{x}_k) - A_i^{(t)}(\mathbf{x}_k)\right|.$$

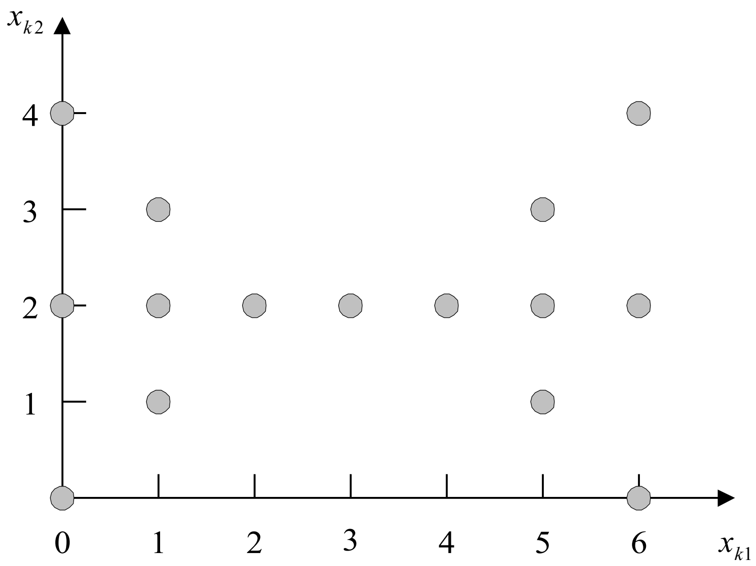
Η τιμή της παραμέτρου m επιλέγεται ως εξής: για $m \to 1$ ο αλγόριθμος πλησιάζει το κλασικά αποτελέσματα, ενώ όσο μεγαλώνει το m, μεγαλώνει και η ασάφεια (η επικάλυψη των ασαφών συνόλων της ασαφούς διαμέρισης). Έχει αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει για κάθε $m \in (1, \infty)$.

Παράδειγμα 1.

Θεωρούμε το σύνολο δεδομένων X το οποίο αποτελείται από 15 σημεία του χώρου $\mathcal{R}^2$:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
x_{k_1}	0	0	0	1	1	1	2	3	4	5	5	5	6	6	6
x_{k_2}	0	2	4	1	2	3	2	2	2	1	2	3	0	2	4

Τα δεδομένα φαίνονται επίσης στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Δεδομένα παραδείγματος 1.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε τα δεδομένα σε δύο κλάσεις, δηλαδή να προσδιορίσουμε μία ασαφή 2-διαμέριση του χώρου των δεδομένων. Θέτουμε $m = 1.25$ και $\varepsilon = 0.01$. Επίσης, ως νόρμα $\|\cdot\|$ θεωρούμε την Ευκλείδεια απόσταση. Ξεκινώντας από μία τυχαία ασαφή ψευδοδιαμέριση

$\mathcal{P}^{(o)} = \{A_1, A_2\}$ με

$A_1 = .854/x_1 + \cdots + .854/x_{15}$

$A_1 = .146/x_1 + \cdots + .146/x_{15}$

ο αλγόριθμος τελειώνει όταν $t = 6$.

Η ασαφής ψευδοδιαμέριση που υπολογίζεται είναι η εξής:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A_1(x_k)$	.99	1	.99	1	1	1	.99	.47	.01	0	0	0	.01	0	.01
$A_2(x_k)$	.01	0	.01	0	0	0	.01	.53	.99	1	1	1	.99	1	.99

Τα κέντρα των κλάσεων είναι τα:

$v_1 = (0.88,2) \quad v_2 = (5.14,2)$

Μέθοδος ταξινόμησης βασισμένη στις ασαφείς σχέσεις

Το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου των ασαφών c-μέσων που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο είναι ότι θεωρεί γνωστό τον αριθμό των κλάσεων που θα προσδιοριστούν. Σε περιπτώσεις προβλημάτων, όπου η υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική χρησιμοποιείται μία μέθοδος βασισμένη στις ασαφείς σχέσεις.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα κάθε ασαφής σχέση ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική και max-min μεταβατική) παράγει μία ασαφή διαμέριση από τις α-τομές της. Το πρόβλημα της ασαφούς ταξινόμησης μπορεί να θεωρηθεί σαν το πρόβλημα της εύρεσης μίας ασαφούς σχέσης ισοδυναμίας των προς ταξινόμηση δεδομένων. Η ασαφής σχέση ισοδυναμίας αυτή είναι δύσκολο να υπολογιστεί άμεσα. Στις περισσότερες περιπτώσεις υπολογίζεται αρχικά μία σχέση συμβατότητας (ανακλαστική και συμμετρική) εφοδιάζοντας το σύνολο των δεδομένων με μία συνάρτηση απόστασης και στη συνέχεια η σχέση ισοδυναμίας υπολογίζεται ως το μεταβατικό κλείσιμο της σχέσης συμβατότητας αυτής.

Έστω X ένα σύνολο δεδομένων (μία συλλογή από διανύσματα του χώρου $\mathcal{R}^p$). Μία σχέση συμβατότητας ορίζεται στο X, εφοδιάζοντας το με μία συνάρτηση απόστασης (έστω ότι ανήκει στην κλάση Minkowski), από την εξίσωση

$$R(x_i, x_k) = 1 - \delta\left(\sum_{j=1}^{p} \left|x_{ij} - x_{kj}\right|^q\right)^{1/q} \tag{3}$$

για κάθε $x_i, x_k \in X$, με $q \in \mathcal{R}^+$. Η δ είναι μία σταθερά που εξασφαλίζει ότι $R(x_i, x_k) \in [0,1]$. Συνήθως λαμβάνεται ως η αντίστροφη τιμή της μέγιστης απόστασης στο X.

Γενικά, η εξίσωση (3) ορίζει μία σχέση συμβατότητας η οποία δεν είναι πάντα και σχέση ισοδυναμίας. Για την εύρεση του μεταβατικού κλεισίματος της R χρησιμοποιείται η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Έστω R μία σχέση συμβατότητας σε ένα σύνολο X με πληθικότητα $|x| = n$. Τότε, το max-min μεταβατικό κλείσιμο της R είναι η σχέση $R^{(n-1)}$.

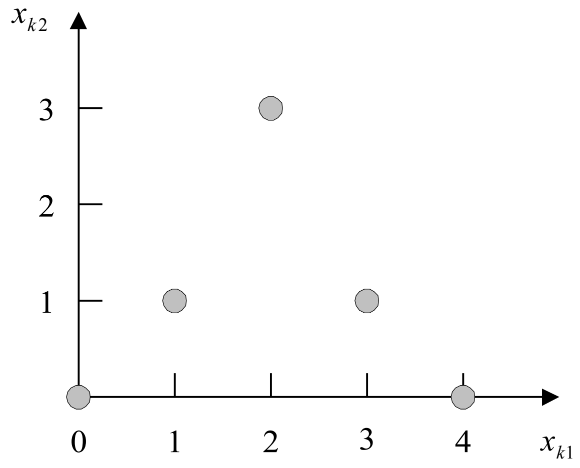
Θα εξηγήσουμε τη μέθοδο με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.

Έστω το σύνολο δεδομένων X (σημείων του R^2)

k	1	2	3	4	5
x_{k_1}	0	1	2	3	4
x_{k_2}	0	1	3	1	0

Τα δεδομένα φαίνονται στο Σχήμα 5. Για να δούμε την επίδραση της παραμέτρου q θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις όπου $q = 1$ και $q = 2$.



Σχήμα 5: Δεδομένα παραδείγματος 2.

Στην περίπτωση όπου $q = 2$ η (1) αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια απόσταση. Πρώτα υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς δ στην (1). Αφού η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των σημείων είναι 4 (μεταξύ του x_1 και του x_5) έχουμε $\delta = 1/4 = .25$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα στοιχεία της σχέσης *R*. Για παράδειγμα

$$R(x_1, x_3) = 1 - 0.25(2^2 + 3^2)^{0.5} = 0.1$$

Έτσι βρίσκουμε

$$R = \begin{bmatrix} 1 & .65 & .1 & .21 & 0 \\ .65 & 1 & .44 & .5 & .21 \\ .1 & .44 & 1 & .44 & .1 \\ .21 & .5 & .44 & 1 & .65 \\ 0 & .21 & .1 & .65 & 1 \end{bmatrix}$$

Η σχέση αυτή δεν είναι max-min μεταβατική. Το μεταβατικό κλείσιμο της δίνεται από τη σχέση

$$R_T = \begin{bmatrix} 1 & .65 & .44 & .5 & .5 \\ .65 & 1 & .44 & .5 & .5 \\ .44 & .44 & 1 & .44 & .44 \\ .5 & .5 & .44 & 1 & .65 \\ .5 & .5 & .44 & .65 & 1 \end{bmatrix}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε τέσσερεις διαφορετικές διαμερίσεις (από τις α-τομές της)

$$a \in [0, .44]: \ \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}\}$$

$$a \in [.44, .5]: \ \{\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3\}\}$$

$$a \in [.5, .65]: \ \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$$

$$a \in [.65, .1]: \ \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}\}$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με την οπτική εικόνα των δεδομένων και αυτό οφείλεται στην εκλογή της Ευκλείδειας απόστασης.

Ας επαναλάβουμε τη διαδικασία για $q = 1$ (απόσταση Hamming).

Η μεγαλύτερη απόσταση που παρατηρείται είναι 5 (μεταξύ των x_1, x_3 και των x_3, x_5), επομένως είναι $\delta = 1/5 = 0.2$. Η σχέση συμβατότητας υπολογίζεται όπως προηγούμενα και δίνεται από τη σχέση

$$R = \begin{bmatrix} 1 & .6 & 0 & .2 & .2 \\ .6 & 1 & .4 & .6 & .2 \\ 0 & .4 & .1 & .4 & 0 \\ .2 & .6 & .4 & 1 & .6 \\ .2 & .2 & 0 & .6 & 1 \end{bmatrix}$$

Το μεταβατικό κλείσιμο της είναι η σχέση

$$R_T = \begin{bmatrix} 1 & .6 & .4 & .6 & .6 \\ .6 & 1 & .4 & .6 & .6 \\ .4 & .4 & 1 & .4 & .4 \\ .6 & .6 & .4 & 1 & .6 \\ .6 & .6 & .4 & .6 & 1 \end{bmatrix}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε τρεις διαφορετικές διαμερίσεις

$a \in [0,.4]$: $\{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}\}$

$a \in [.4,.6]$: $\{\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3\}\}$

$a \in [.6,.1]$: $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}\}$

Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με την προηγούμενη περίπτωση (Ευκλείδεια απόσταση), με μόνη διαφορά την αδυναμία διαχωρισμού των κλάσεων , $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στις ιδιότητες της απόστασης Hamming.

Ασαφής αναγνώριση προτύπων

Η ασαφής αναγνώριση προτύπων αποτελεί επέκταση της κλασικής αναγνώρισης προτύπων. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν διαφορές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στην ασαφοποίηση υπαρχόντων κλασικών αλγορίθμων. Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε δύο μεθόδους που στηρίζονται στη γενίκευση κλασικών αλγορίθμων σημαντικής-σημασιολογικής αναγνώρισης προτύπων. Με παρόμοιο τρόπο γενικεύονται και οι αλγόριθμοι συντακτικής αναγνώρισης.

Στην περίπτωση των σημασιολογικών αλγορίθμων, κάθε κλάση προτύπων χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο παραδειγματικών προτύπων τα οποία αποθηκεύονται ατο σύστημα αναγνώρισης. Κάθε πρότυπο καταχωρείται ως ένα σύνολο χαρακτηριστικών. Κάθε άγνωστο πρότυπο που πρέπει να αναγνωριστεί συγκρίνεται με τα αποθηκευμένα παραδειγματικά πρότυπα και ταξινομείται σε μία κλάση προτύπων αν ταιριάζει με κάποιο από τα παραδειγματικά πρότυπα της κλάσης αυτής. Χρησιμοποιοιώντας μεθόδους ασαφούς λογικής και ασαφών συνόλων, αρκεί να καταχωρήσουμε ένα παραδειγματικό πρότυπο για κάθε κλάση. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε δύο μεθόδους. Η πρώτη στηρίζεται στην περιγραφή της συνάρτησης συμμετοχής του ασαφούς συνόλου που εκφράζει το βαθμό συμμετοχής σε κάθε κλάση, με αναλυτικές μεθόδους (με τη βοήθεια μαθηματικής συνάρτησης). Η δεύτερη στηρίζεται στη μελέτη και τα συμπεράσματα της θεωρίας των ασαφών συστημάτων και ειδικότερα των ασαφών σχεσιακών εξισώσεων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε *n* κλάσεις προτύπων που συμβολίζονται με τους φυσικούς αριθμούς από 1 εως *n*. Κάθε είσοδος $\mathbf{u}$ παριστάνεται ως

$$\mathbf{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_p\right)$$

όπου u_i είναι οι σχετικές με το i χαρακτηριστικό του προτύπου, μετρήσεις ($i \in N_p$).

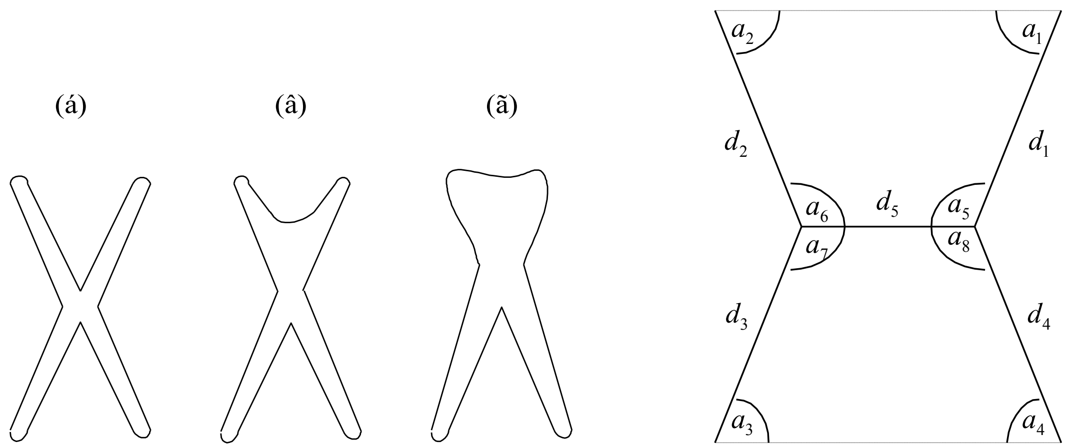
Για την ταξινόμηση του $\mathbf{u}$ σε κάποια κλάση συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά του με τα χαρακτηριστικά του παραδειγματικού προτύπου της κλάσης αυτής και παίρνουμε ένα βαθμό συμβατότητας $A_k(\mathbf{u}),\ k \in N$. Το $\mathbf{u}$ ταξινομείται στην κλάση, στην οποία παρουσιάζει το μεγαλύτερο βαθμό συμβατότητας, δηλαδή τη μέγιστη τιμή του $A_k(\mathbf{u})$. Για τον υπολογισμό των $A_k(\mathbf{u})$ έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι. Θα αναπτύξουμε μία από αυτές με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 3.

Έστω ότι θέλουμε να κατατάξουμε τα χρωμοσώματα ανάλογα με τη μορφή τους σε τρεις κατηγορίες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Κάθε χρωμόσωμα χαρακτηρίζεται από 13 χαρακτηριστικά (γωνίες και αποστάσεις), μέσω των οποίων μπορούμε να διαχωρίσουμε τις κλάσεις.

Έτσι,

$$\mathbf{u} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_8, d_1, d_2, \ldots, d_5\right)$$



Σχήμα 6: Εικόνες χρωμοσωμάτων και μοντέλο συμμετρικού χρωμοσώματος

(α) μεσοκεντρικά (β) υπομεσοκεντρικά (γ) ακροκεντρικά

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις συμμετοχής που αντιστοιχούν σε κάθε κλάση χρωμοσωμάτων (μεσοκεντρικά, υπομεσοκεντρικά, ακροκεντρικά), ορίζουμε το ασαφές σύνολο S των συμμετρικών χρωμοσωμάτων ως εξής:

$$S(\mathbf{u}) = 1 - \frac{1}{720^o} \sum_{i=1}^{4} |a_{2i-1} - a_{2i}|$$

Τα τρία ασαφή σύνολα ορίζονται με βάση αυτό ως

$$M(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \left[1 - \frac{|d_1 - d_4| + |d_2 - d_3|}{d_T} \right]$$

$$SM(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \left[1 - \frac{d_{SM}}{2d_T} \right]$$

$$AC(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \left[1 - \frac{d_{AC}}{4d_T} \right]$$

όπου $M(\mathbf{u})$, $SM(\mathbf{u})$, $AC(\mathbf{u})$ οι συναρτήσεις συμμετοχής των μεσοκεντρικών, υπομεσοκεντρικών και ακροκεντρικών χρωμοσωμάτων αντίστοιχα, με

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$$

$$d_{SM} = \min\left(|d_1 - 2d_4| + |d_2 - 3d_3| + |2d_1 - d_4| + |2d_2 - d_3|\right)$$

$$d_{AC} = \min\left(|d_1 - 4d_4| + |d_2 - 4d_3| + |4d_1 - d_4| + |4d_2 - d_3|\right)$$

Κάθε χρωμόσωμα μπορεί έτσι να ταξινομηθεί σαν περίπου μεσοκεντρικό, περίπου υπομεσοκεντρικό, περίπου ακροκεντρικό υπολογίζοντας το βαθμό συμμετοχής του στα σύνολα M, SM, AC. Η κατηγορία στην οποία τελικά ταξινομείται είναι εκείνη για την οποία παρουσιάζει το μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής, αν βέβαια αυτός είναι αρκετά μεγάλος. Αν δεν είναι αρκετά μεγάλος, τότε θεωρούμε ότι δεν ανήκει σε καμία κλάση. Αν παρουσιάζει τον ίδιο βαθμό συμμετοχής για περισσότερες από μία κλάσεις τότε η ταξινόμηση στηρίζεται σε προτεραιότητες που αποδίδονται σε κάθε κλάση.

Με τον τρόπο που αναπτύσσεται στο παράδειγμα 3 βλέπουμε πώς μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τη γεωμετρική ομοιότητα στο διάστημα $[0,1]$. Η μέθοδος παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα, όπως π.χ. το ότι δεν είναι ευαίσθητη στην περιστροφή, μεγέθυνση, σμίκρυνση κλπ.

Μία άλλη προσέγγιση της σημασιολογικής ασαφούς αναγνώρισης προτύπων έγκειται στην ασαφοποίηση των χαρακτηριστικών των προτύπων, στη θεώρηση τους, δηλαδή, ως ασαφείς μεταβλητές.

Έστω $\mathcal{P}_i$, $i \in N_p$ ασαφείς διαμερίσεις, οι οποίες ορίζονται στο πεδίο ορισμού X_i των χαρακτηριστικών. Κάθε στοιχείο των συνόλων $\mathcal{P}_i$ έχει ένα γλωσσικό περιεχόμενο που περιγράφει το χαρακτηριστικό (π.χ. "ΜΙΚΡΗ ΓΩΝΙΑ", "ΜΕΓΑΛΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ" κλπ. Ο συνδυασμός των γλωσσικών όρων για κάθε χαρακτηριστικό (π.χ. "ΜΙΚΡΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΜΕΓΑΛΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΑΙ …") δίνει περιγραφές των παραδειγματικών προτύπων. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζονται *n* ασαφή συστήματα, ένα για κάθε κλάση, τα οποία παριστάνονται με τη βοήθεια *n* *p*-διάστατων ασαφών σχέσεων $R_1,\ldots,R_p\left(X_1\times\cdots\times X_p\to[0,1]\right)$. Ο βαθμός συμβατότητας του κάθε προς ταξινόμηση προτύπου με το i παραδειγματικό πρότυπο που χαρακτηρίζει την κλάση i, δίνεται από τη σχέση

$$A_i(\mathbf{u})=\mathbf{u}\circ R_i,\ i\in N_p$$

όπου $\circ$ η σύνθεση max-min.

Το πρότυπο ταξινομείται, όπως και προηγούμενα, στην κλάση που παρουσιάζει το μεγαλύτερο βαθμό συμβατότητας, αν αυτός είναι αρκετά μεγάλος.

Βιβλιογραφία

1. Dubois, D and H. Prade [1988], Possibility Theory. Plenum Press, New York.
2. Jang, J. S. R. [1992], “Self-learning fuzzy controllers based on temporal back propagation”, IEEE Trans. on Neural Networks, 3 (5), pp. 714-723.
3. Klir, J. and Bo Yuan [1995], Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall.
4. Kosko, B. [1992], Neural networks and fuzzy systems: a dynamical approach to machine intelligence, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
5. Lin, C-T and C.S. Lee [1991], Neural-Network-Based Fuzzy Logic Control and Decision System, IEEE Transaction on Computers, 40(12), pp. 1320-1336.
6. Lin, C-T and C.S. Lee [1995], Neural fuzzy systems: A neuro-fuzzy synergism to intelligent systems, Prentice Hall PTR, New Jersey.
7. Marks R. ed. [1994], Fuzzy logic technology and applications, IEEE Technology Series, USA.
8. Pedrycz, W. [1995], “Fuzzy Sets Engineering”, CRC Press, USA.
9. Zimmermann, H. J. [1996], Fuzzy Set Theory and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston.