ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΤΕΧΝΗΤΑ
ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ
2008-2009

9$^{o}$ ΕΞΑΜΗΝΟ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧ. & ΜΗΧ. Η/Υ

# ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

# UNCONSTRAINED NON-LINEAR OPTIMIZATION

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ

min $F(x) \rightarrow F'(x) = 0$

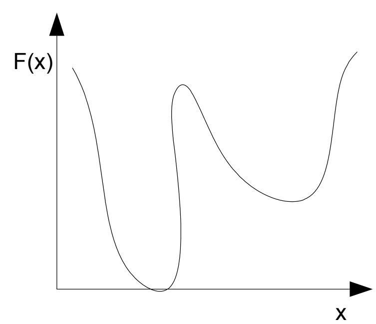
### ΛΥΣΗ

### Επαναληπτικές Τεχνικές

$$F: R^N \rightarrow R$$
$$x_o \in R^N$$

### Α) Μέθοδος του Newton

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa + s_\kappa^N$$




$$\underbrace{\nabla^2 F(x_\kappa)}_{Hessian} S_\kappa^N = -\lambda \nabla F(x_\kappa)$$

Σύγκλιση : Τετραγωνική

$$\left\| x_{\kappa+1} - x_* \right\| \leq \beta\gamma \left\| x_\kappa - x_* \right\|^2$$

όπου,

$F^{'}(x) = 0$

β,γ: όρια της 1ης / 2ης παραγώγου της F

εάν $H_c = \nabla^2 F(x_c)$ θετικά ορισμένη

τότε $\nabla F(x_c)^T s_c^N = -\left\{\nabla F(x_c)\right\}^T \left\{\nabla f(x_c)\right\} \langle 0$

Άρα $F(x_c + \delta s_c^N) \langle F(x_c)$

**B) Steepest Descent (βαθύτατης καθόδου)**

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - \lambda_\kappa \nabla F(x_\kappa)$$

Σύγκλιση : Γραμμική

$$\lim_{\kappa\to\infty} \sup \left\| \frac{x_{\kappa+1} - x_*}{x_\kappa - x_*} \right\| \leq C$$

$\left. \begin{matrix} e_{v\max} \\ e_{v\min} \end{matrix} \right|$ = $\begin{matrix} \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau\eta \\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\eta \end{matrix}$ ιδιοτιμή της $\nabla^2 F(x_\kappa)$

$$C = \left[ \frac{e_{v\max} - e_{v\min}}{e_{v\max} + e_{v\min}} \right]$$

If $e_{v\max} >> e_{v\min}$ $\quad C \approx 1$ Πολύ Αργή Σύγκλιση

$e_{v\max} \approx e_{v\min}$ Καλή Σύγκλιση

**Γ) Επεκτάσεις της Μεθόδου του Newton**

α) $H_\kappa = \nabla^2 F(x_\kappa) + \mu_\kappa I$

όπου $\mu_k=0$ αν $\nabla^2 F$ θετικά ορισμένη

$\mu_k>0$ αλλού

Λύση μέσω του Cholesky Decomposition

β) Backtracking πάνω στη Newton direction (Line Search)

γ) Προσδιορισμός περιοχής όπου εμπιστευόμαστε το τοπικά υπολογισμένο μοντέλο να αναπαραστήσει τη συνάρτηση (Trust Region).

**Δ) Quasi – Newton Τεχνικές**

Σύγκλιση : Υπερ- Γραμμική (super linear)

$\left| x_{\kappa+1} - x_* \right| \langle \ c_\kappa \left| x_\kappa - x_* \right|$ εξαρτώμενη από την τιμή του $c_k$

## Ε) Μη – Γραμμικά Ελάχιστα Τετράγωνα

Επίλυση Συστήματος μη Γραμμικών Εξισώσεων

**i) Gauss-Newton** ( γραμμικόποιηση γύρω από το $x_*$)

$$x_{\kappa=+1} = x_\kappa - (J^T J)^{-1} R(x_\kappa),$$

όπου

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\{R(x)\right\}^T R(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} r_i^2(x)$$

και $\nabla F(x) = J^T(x) R(x)$

$$\nabla^2 F(x) = J^T(x) J(x) + \underbrace{S(x)}$$

ο όρος β΄ βαθμού αγνοείται

Τοπικά τετραγωνική Σύγκλιση (αν $R(x_*)=0$)

Γραμμική (σε προβλήματα μικρής / μεσαίας μη γραμμικότητας)

Μη συγκλίνουσα τοπικά (σε έντονα μη γραμμικά προβλήματα)

**ii) Marquardt Levenberg**

Χρησιμοποιούμε τον πίνακα $J^T J + \mu I$ ως προσέγγιση του Hessian.