

Seminarium 2

VAR1: Bestäm mängden av alla punkter som är gemensamma för de tre planen:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + 2z = 1 \\ \pi_2: x + 2y + 3z = 2 \\ \pi_3: 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Lösning

1) Skriv om på formen $A\bar{x} = \bar{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Skriv om systemet på totalmatrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow z \text{ är en fri-parameter} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \Rightarrow x = -z \\ y + z = 1 \Rightarrow y = -z + 1 \end{cases}$$

$z = t$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -z+1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: Alla punkter som är gemensamma för de tre planen ligger längs linjen $L(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

VAR2: Bestäm mängden av alla punkter som är gemensamma för de tre planen:

$$\pi_1: x + y + 2z = 1$$

$$\pi_2: 2x + 3y + 7z = 2$$

$$\pi_3: x + 2y + 5z = 1$$

Lösning:

1) Skriv om på formen $A\bar{x} = \bar{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Skriv om systemet på totalmatris form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow z$ är en fri parameter $\Rightarrow z = t$

$$\sim \begin{cases} x - z = 1 \Rightarrow x = z + 1 \\ y + 3z = 0 \Rightarrow y = -3z \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+1 \\ -3z \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: Alla punkter som är gemensamma för de tre planen ligger längst
linjen $L(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Diskussionsuppgifter

→ 4, 1 (2)

→ 4, 2 (3)

→ 4, 3 (1)

