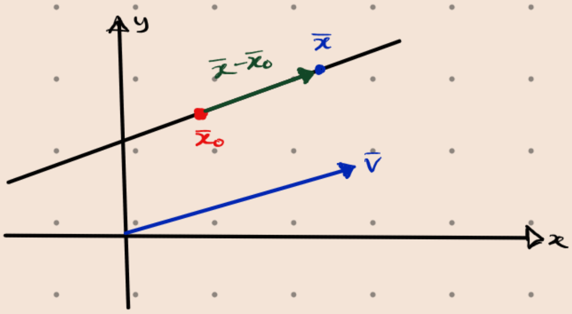
Seminarium 1

Vi har hittills sett att ifall vi är givna en punkt på en linje samt en riktning så kan vi bestämma linjen <u>parameterform</u> dvs vi kan hitta en fullständig beskrivning av linjen i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

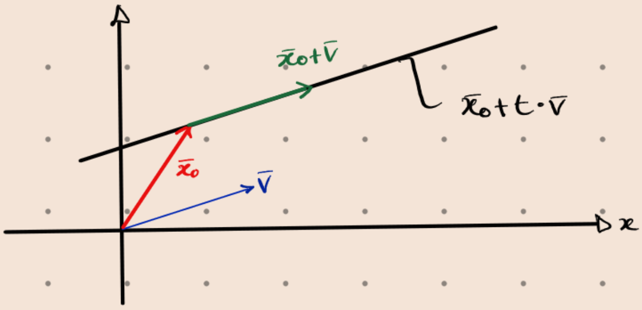


$$\bar{x}-\bar{x}_0 = k\bar{v}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + k\bar{v}$$

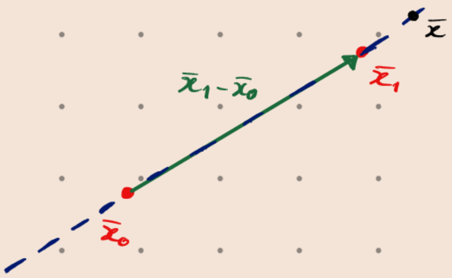
eller som i boken $\bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{v}$

$\Rightarrow$



$t \in (-\infty,\infty)$

Vi kan på liknande sätt definera en linje mellan två punkter!



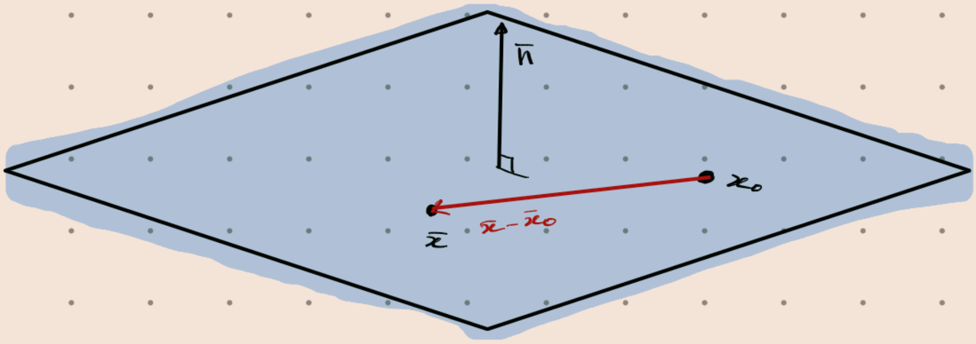
Linjen (den blå streckade linjen) är den vi vill ta fram.

$$(\bar{x}-\bar{x}_0) = t(\bar{x}_1-\bar{x}_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = (1-t)\bar{x}_0 + t\bar{x}_1}$$

Vad är det vi gör? Jo! Vi definerar någonslags "riktningsvektor" (ej normerad sådan) och sen säger vi att $(\bar{x}-\bar{x}_0)$ dvs vektorn som föds i $\bar{x}_0$ och lever inuti linjen är inget annat än någon konstant gånger (x_1-x_0) som är också en vektor som lever i linjen. Man säger att dessa vektorer är linjärt beroende.

Hur fungerar detta för plan?



Ett plan har en normalvektor, den pekar alltid vinkelrät mot planet.

(Dvs att två plan är parallella om de har parallella normalvektorer!)

Vektorn $(\bar{x}-\bar{x}_0)$ är då parallell med planet och därför vinkelrät mot $\bar{n}$. Det vill säga $(\bar{x}-\bar{x}_0)\cdot\bar{n}=0$

Låt då $\bar{n}=(a,b,c)$ $\Rightarrow$ Planetsekvation ges av $\boxed{(x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0}$

Seminarium 14-16

Variant 1:

Ett plan går genom punkten (2,1,3) och är parallell med planet P_1

$$x - 2y + z = 1$$

Bestäm planets ekvation. Ligger punkten (1,0,2) i planet?

Lösning:

1) Tolka P_1:s ekvation ; $x - 2y + z = 1$

Alla punkter $\bar{x} = (x, y, z)$ som uppfyller ekvationen ovan tillhör planet.

Notera att vi har sett att den generella lösningen till planets ekvation är inget annat än

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Vilket ger $ax + by + cz = \bar{n} \cdot \bar{x}_0 = d$ = konstant

Normalvektorn för planet är alltså $\bar{n} = (1, -2, 1)$

2) Hitta P_s, det vill säga det sökta planet.

Vi känner till en punkt i P_s nämligen (2,1,3) låt oss kalla denna för Q

$\overrightarrow{QO} = \vec{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

då vet vi även att $(\bar{x} - \bar{q}) \cdot \bar{n} = 0$ dvs

$$\begin{bmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x-2) - 2(y-1) + (z-3) = 0 \iff x - \cancel{2} - 2y + \cancel{2} + z - 3 = 0$

$\Rightarrow x - 2y + z = 3$

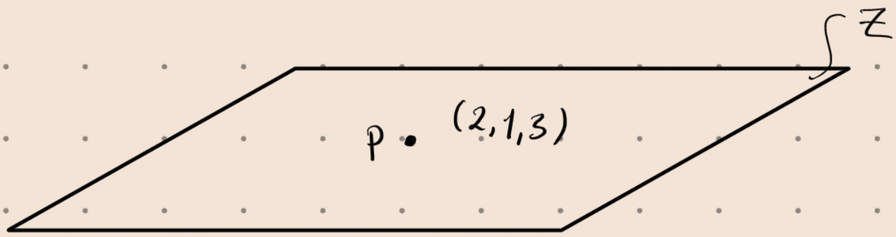
$\Rightarrow \boxed{x - 2y + z = 3}$ P_s :s ekvation

Nu är frågan tillhör (1,0,2) planet? Ja! eftersom

$1 - 0 + 2 = 3$

Alternativt (Dålig, ej allmän)

Variant 1:



Planet ligger parallellt med $x - 2y + z = 1$, testa att sätta in P i ekvationen, $2 - 2 + 3 \neq 1$, det funkar ju inte!

$2 - 2 + 3 = 3$

om $P \in Z \Rightarrow \quad p(x,y,z) = x - 2y + z = 3$

$p(2,1,3) = 2 - 2 + 3 = 3$ okej!

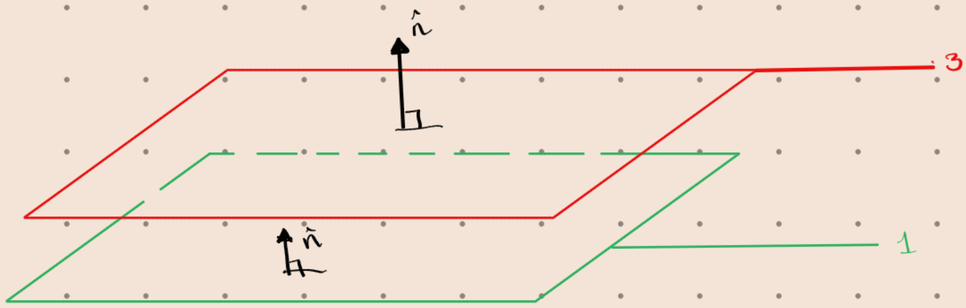
Planetsekvation: $x - 2y + z = 3$, $P(2,1,3) \in \mathbb{P}$

Frågan: Ligger punkten $(1,0,2)$ i planet?

$p(1,0,2) = 1 - 0 + 2 = 3$ okej!

punkten tillhör planet!

Vad har vi faktiskt gjort här?



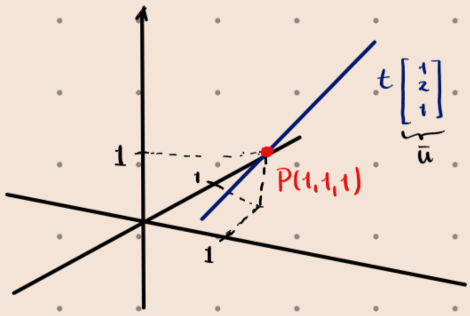
$p(x,y,z) = 0$, $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ exempelvis.

Variant 2 : Bestäm ekvationen för det plan som går igenom punkten $(2,1,3)$ och som är vinkelrät mot linjen $r(t) = (t+1, 2t+1, 2t+1)$. Ligger $(-4,1,0)$ i planet?

Lösning:

1) Bryt isär parametriseringen ; $r(t) = (t, 2t, t) + (1,1,1) = t(1,2,1) + (1,1,1)$

2) Identifiera riktningen ;



"Riktningen" är ju $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Nu vet vi vad normalen till planet är $\bar{n} = \bar{u}$, då $\bar{u}$ är alltid vinkelrät mot planet. Bestäm planetsekvation mha kända punkten $\bar{x}_0 = (2,1,3)$

Planets generella ekvation : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

insätt

$$\underset{1}{a}(x - \overset{2}{x_0}) + \underset{2}{b}(y - \overset{1}{y_0}) + \underset{2}{c}(z - \overset{3}{z_0}) = 0$$

$$x - 2 + 2(y-1) + 2z - 6 = 0 \iff x + 2y + 2z = 2 + 2 + 6 = 10$$

Planetsekvation är $\boxed{x + 2y + 2z = 10 \quad P_s}$

4) Ligger punkten $(-4,1,0)$ i P_s?

$-4 + 2 + 0 = -2 \neq 10$, Svar: Nej

Uppgift 4,3