ΜΥΕ037 Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας
Χειμερινό εξάμηνο 2018-2019

Σειρά Ασκήσεων 2

Μπουρλή Στυλιανή, ΑΜ: 2774

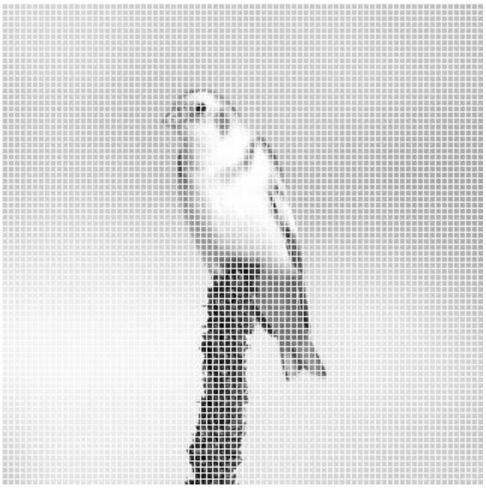
ΆΣΚΗΣΗ 1

<u>Κώδικας</u>

```
%diavazw thn eikona
Image = imread('BIRD_CAGE.jpg');
%pairnw ton 2d dft ths eikonas
F = fft2(Image);
%pairnw to metro tou dft
FA=abs(F);
%to emfanizw
figure
imagesc(FA); colormap(gray)
%pairnw to logarithmo tou metrou
L = log(FA+eps);
%to emfanizw
figure
imagesc(L); colormap(gray);
%kentrarw ton dft
F2=fftshift(F);
%pairnw to metro tou kentrarismenou dft
FA=abs(F2);
%to emfanizw
figure
imagesc(FA); colormap(gray)
%pairnw to logarithmo tou metrou
L = log(FA+eps);
%to emfanizw
figure
imagesc(L); colormap(gray);
```

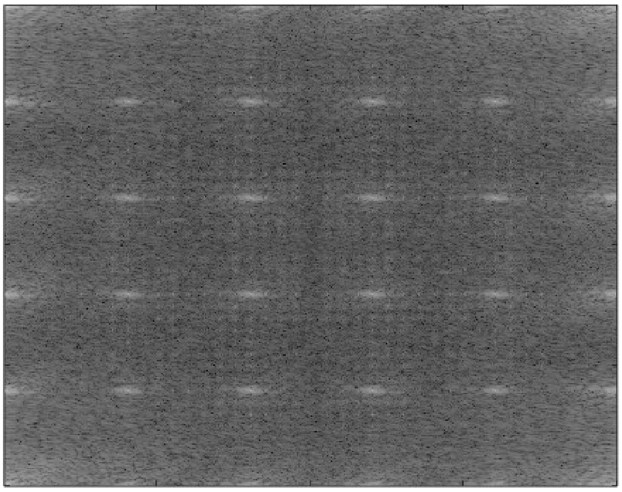
Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις

Αρχική εικόνα



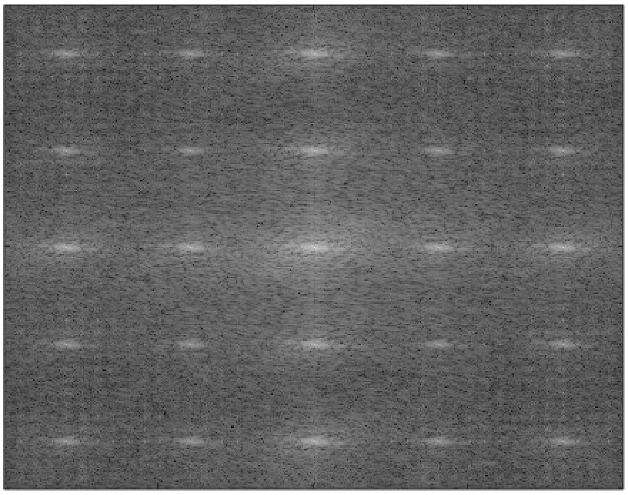
Εικόνα που προκύπτει από το μέτρο του DFT

Εικόνα που προκύπτει από το λογάριθμο του μέτρου



Εικόνα που προκύπτει από το μέτρο του DFT, μετά το κεντράρισμα

Εικόνα που προκύπτει από το λογάριθμο του μέτρου, μετά το κεντράρισμα



Παρατηρώ ότι αρχικά στην εικόνα που προέκυψε από το μέτρο του DFT υπάρχει ένα λευκό σημαδάκι πάνω αριστερά. Επίσης, στην εικόνα του λογαρίθμου υπάρχουν φωτεινές περιοχές στις άκρες της εικόνας και φωτεινές περιοχές που σχηματίζουν ένα μοτίβο, που οφείλεται στις λευκές γραμμές και στήλες στην αρχική εικόνα. Μετά το κεντράρισμα του DFT ,στην εικόνα του μέτρου, το λευκό σημάδι βρίσκεται πλέον στο κέντρο της εικόνας. Τέλος, στην εικόνα από το λογάριθμο το μοτίβο με τις λευκές περιοχές εξακολουθεί να υπάρχει, όμως οι φωτεινές περιοχές έχουν μεταφερθεί από τις άκρες στο κέντρο της εικόνας και σχηματίζουν ένα σταυρό.

ΆΣΚΗΣΗ 2

α)

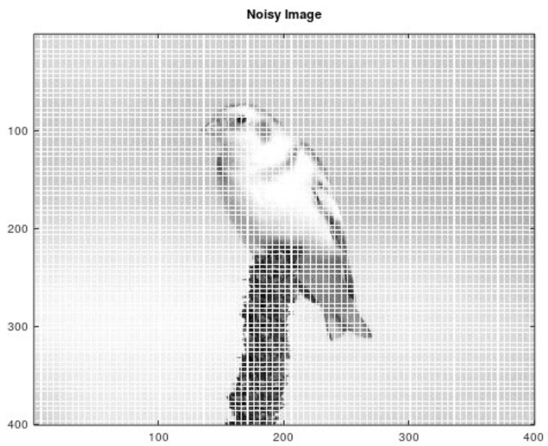
Κώδικας

```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')

% Plot the logarithm of the magnitude
LA1=log10(aA1+1);
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
%n1=180;
%n2=221;
%m1=180;
%m2=221;
%
%MM=ones(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
n1=180;
n2=220;
m1=180;
m2=220;
%
MM=zeros(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=1;
```

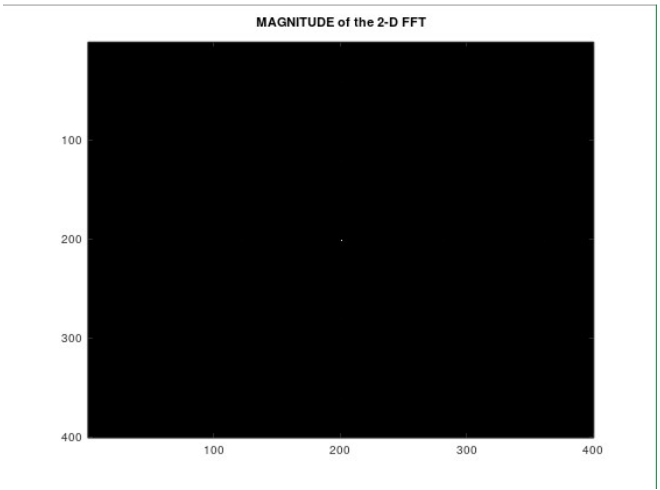
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

<u>Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις</u>

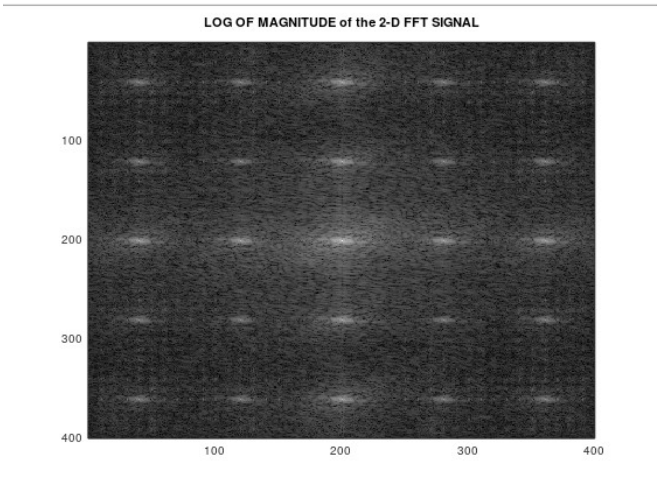
Αρχική εικόνα



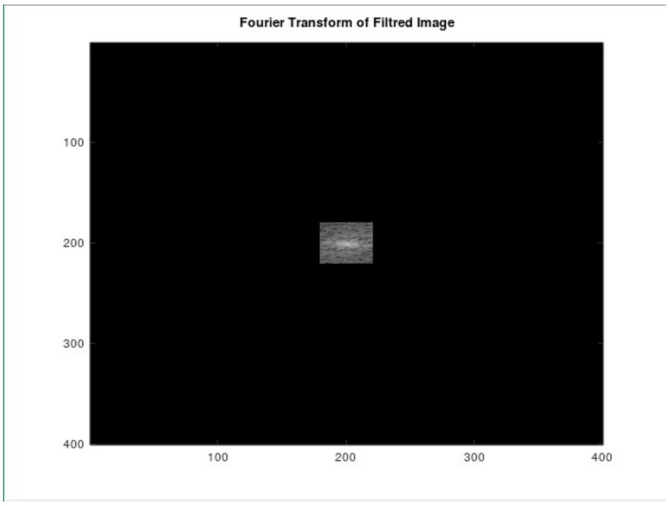
Κεντραρισμένος DFT αρχικής εικόνας



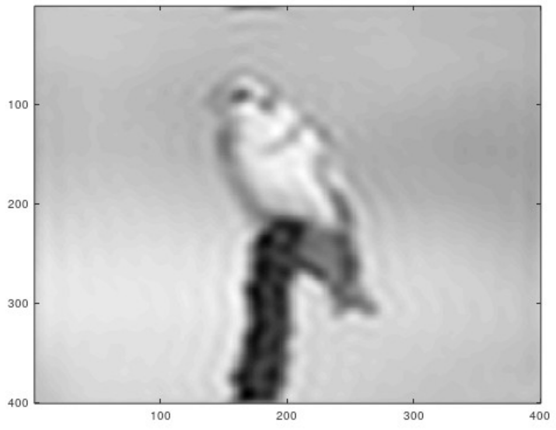
Λογάριθμος του μέτρου του DFT
της αρχικής εικόνας



Μετά την εφαρμογή Low_pass filter στο κέντρο
του DFT



Τελική εικόνα



Παρατηρώ ότι με τη χρήση low-pass φίλτρου στο κέντρο του DFT της εικόνας, διατηρείται μόνο αυτή η κεντρική περιοχή φωτεινή στο λογάριθμο του μέτρου της εικόνας, ενώ όλες οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη θόλωση της αρχικής εικόνας και την αφαίρεση των λευκών γραμμών και στηλών. Η θόλωση οφείλεται στην πολύ λευκή περιοχή στο κέντρο της εικόνας. Τέλος, υπάρχει το φαινόμενο των δακτυλίων για το οποίο οφείλονται τα πολλά λευκά σημεία γύρω από την κεντρική λευκή περιοχή.

β)

Κώδικας

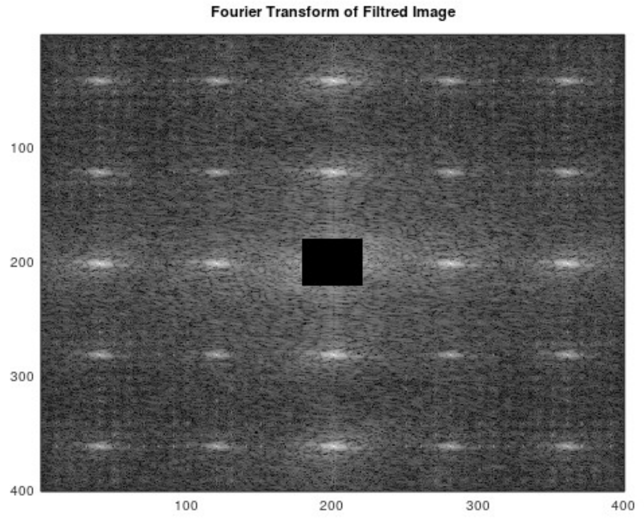
```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')

% Plot the logarithm of the magnitude
LA1=log10(aA1+1);
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
n1=180;
```

```
n2=220;
m1=180;
m2=220;
%
MM=ones(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
%n1=180;
%n2=220;
%m1=180;
%m2=220;
%
%MM=zeros(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

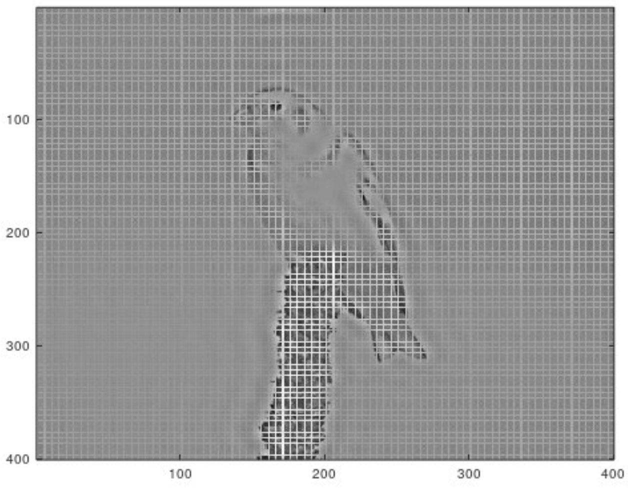
Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις

Η αρχική εικόνα, η εικόνα του κεντραρισμένου DFT και του λογάριθμου του μέτρου του DFT είναι ίδια με το ερώτημα α.

Μετά την εφαρμογή High_pass filter



Τελική εικόνα



Παρατηρώ ότι μετά την εφαρμογή του high-pass φίλτρου στο κέντρο του DFT της εικόνας, η κεντρική αυτή περιοχή έχει μηδενιστεί και έχουν διατηρηθεί φωτεινές μόνο οι περιοχές γύρω από αυτήν. Επειδή όμως αυτές οι περιοχές εκφράζουν κυρίως πληροφορία για το μοτίβο των άσπρων γραμμών και στηλών, και όχι τόσο για το πουλί, στην τελική εικόνα εμφανίζονται κυρίως αυτές, ενώ η υπόλοιπη πληροφορία της εικόνας έχει σχεδόν σβηστεί.

γ)

<u>Κώδικας</u>

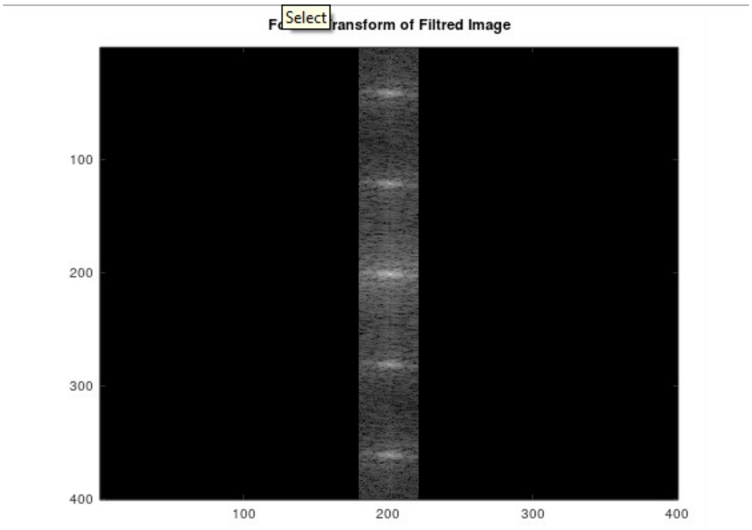
```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')

% Plot the logarithm of the magnitude
```

```
LA1=log10(aA1+1);
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
%n1=180;
%n2=220;
%m1=180;
%m2=220;
%
%MM=ones(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
n1=180;
n2=220;
m1=1;
m2=400;
%
MM=zeros(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

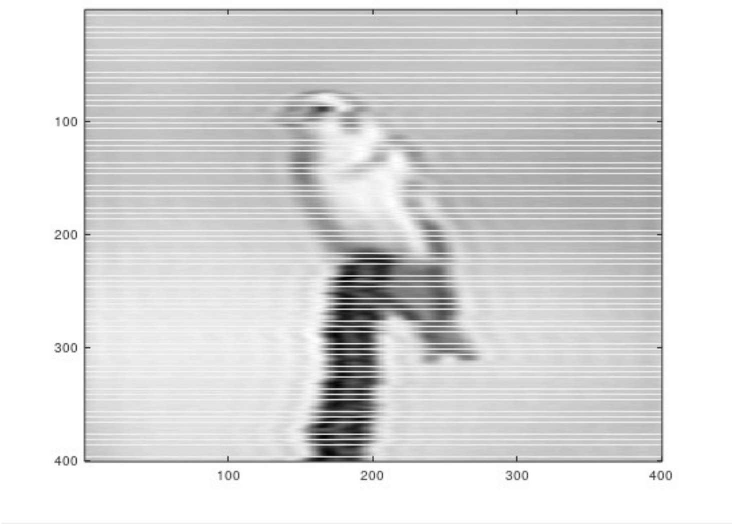
Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις

Η αρχική εικόνα, η εικόνα του κεντραρισμένου DFT και του λογάριθμου του μέτρου του DFT είναι ίδια με το ερώτημα α.

Μετά την εφαρμογή Low_pass filter



Τελική εικόνα



Παρατηρώ ότι μετά την εφαρμογή low-pass φίλτρου και διατηρώντας μόνο το 400x41 των οριζόντιων χαμηλών συχνοτήτων, η περιοχή αυτή στην εικόνα του λογαρίθμου το μέτρου του DFT διατηρείται φωτεινή, ενώ οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην τελική εικόνα να εξαφανιστούν οι άσπρες στήλες και να εμφανίζονται οι λευκές γραμμές, αφού υπάρχει πλέον πληροφορία μόνο γι αυτές. Η υπόλοιπη εικόνα είναι αρκετά θολή, ενώ και πάλι εμφανίζεται το φαινόμενο των δακτυλίων.

δ)

<u>Κώδικας</u>

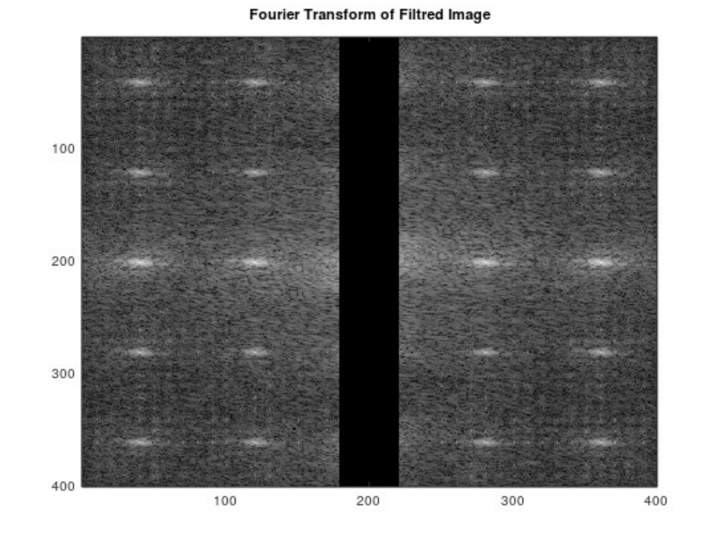
```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')
```

```
% Plot the logarithm of the magnitude
LA1=log10(aA1+1);
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
n1=180;
n2=220;
m1=1;
m2=400;
%
MM=ones(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
%n1=1;
%n2=400;
%m1=180;
%m2=220;
%
%MM=zeros(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

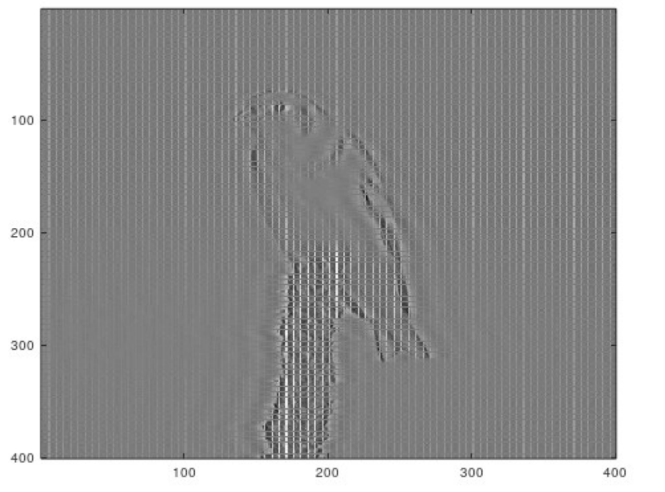
<u>Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις</u>

Η αρχική εικόνα, η εικόνα του κεντραρισμένου DFT και του λογάριθμου του μέτρου του DFT είναι ίδια με το ερώτημα α.

Μετά την εφαρμογή High_pass filter



Τελική εικόνα



Παρατηρώ ότι μετά την εφαρμογή του high-pass φίλτρου, μηδενίζοντας τις 400x41 χαμηλές οριζόντιες περιοχές, η τελική εικόνα έχει έντονες τις άσπρες στήλες, ενώ οι άσπρες γραμμές έχουν εξαφανισθεί, αφού έχει χαθεί η πληροφορία αυτών. Η υπόλοιπη πληροφορία της εικόνας έχει σχεδόν σβηστεί και είναι αναμενόμενο αφού βρισκόταν στην κεντρική περιοχή του λογαρίθμου του μέτρου του DFT και αυτή μηδενίστηκε.

ε) γ)

<u>Κώδικας</u>

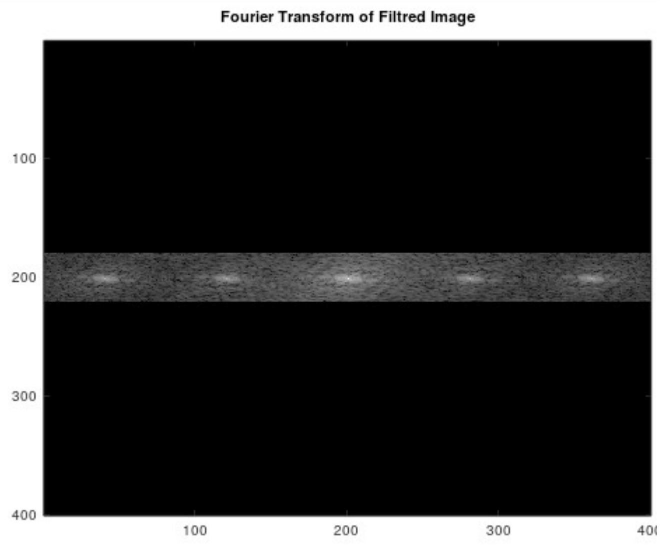
```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')

% Plot the logarithm of the magnitude
LA1=log10(aA1+1);
```

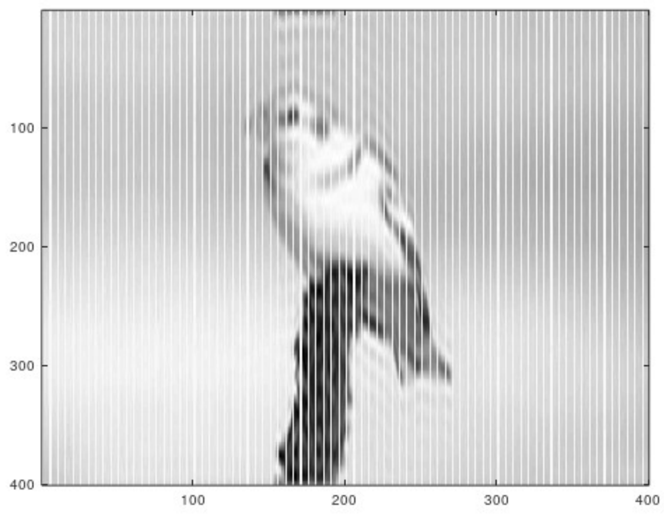
```
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
%n1=180;
%n2=220;
%m1=1;
%m2=400;
%
%MM=ones(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
n1=1;
n2=400;
m1=180;
m2=220;
%
MM=zeros(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις

Η αρχική εικόνα, η εικόνα του κεντραρισμένου DFT και του λογάριθμου του μέτρου του DFT είναι ίδια με το ερώτημα α.

Μετά την εφαρμογή Low_pass filter　　　　　　　　　Τελική εικόνα





Παρατηρώ ότι μετά την εφαρμογή low-pass φίλτρου στις κάθετες συχνότητες, η μεσαία οριζόντια περιοχή στην εικόνα του λογαρίθμου το μέτρου του DFT διατηρείται φωτεινή, ενώ οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην τελική εικόνα να εξαφανιστούν οι άσπρες γραμμές και να εμφανίζονται οι άσπρες στήλες, αφού υπάρχει πλέον πληροφορία μόνο γι αυτές. Η υπόλοιπη εικόνα είναι αρκετά θολή, ενώ και πάλι εμφανίζεται το φαινόμενο των δακτυλίων.

ε) δ)

<u>Κώδικας</u>

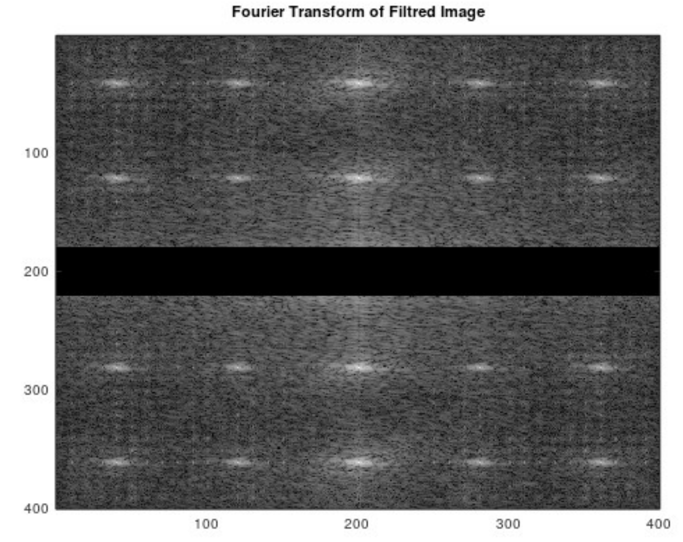
```
%Filter  in the DFT domain by zeroing a
% portion out of the spectrum of the image

close all
A1=imread('BIRD_CAGE.jpg');
A1=im2double(A1);
[M,N]=size(A1);
% Show image
figure
imagesc(A1);colormap(gray)
title('Noisy Image')

% Compute 2-D FFT and shift to center the 2D FFT of the image
fA1=fftshift(fft2(A1));
aA1=abs(fA1);

% Plot magnitude of the FFT
figure
imagesc(aA1);colormap(gray)
title('MAGNITUDE of the 2-D FFT')
```

```
% Plot the logarithm of the magnitude
LA1=log10(aA1+1);
figure
imagesc(LA1);colormap(gray)
title('LOG OF MAGNITUDE of the 2-D FFT SIGNAL')

%
% Select the area that we keep from the spectrum of the noisy image
% High_pass
n1=1;
n2=400;
m1=180;
m2=220;
%
MM=ones(M,N);
MM(m1:m2,n1:n2)=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Low_pass
%n1=1;
%n2=400;
%m1=180;
%m2=220;
%
%MM=zeros(M,N);
%MM(m1:m2,n1:n2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=MM.*fA1;
cc=log(abs(C)+1);
figure
imagesc(cc); colormap(gray)
title('Fourier Transform of Filtred Image')

%Reconstruct the image by first shifting back (fftshift) and then taking the real part of the %inverse
2-D FFT
C=fftshift(C);
IC=real(ifft2(C));
%If C contains the image

figure
imagesc(IC);colormap(gray)
```

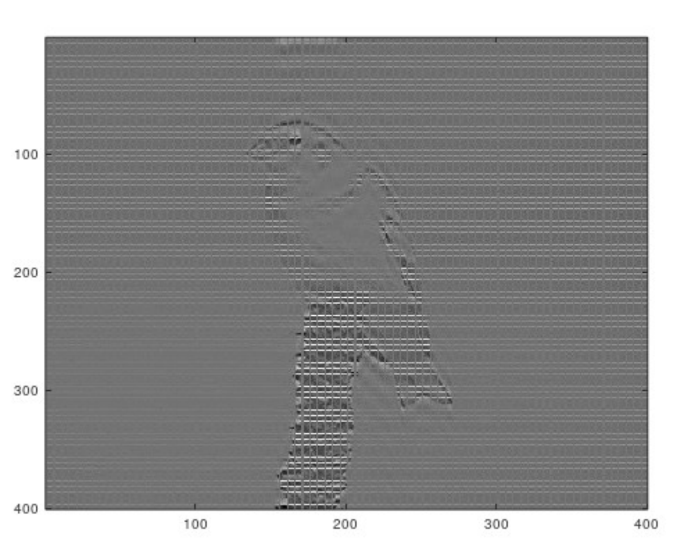
<u>Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις</u>

Η αρχική εικόνα, η εικόνα του κεντραρισμένου DFT και του λογάριθμου του μέτρου του DFT είναι ίδια με το ερώτημα α.

Μετά την εφαρμογή High_pass filter



Τελική εικόνα



Παρατηρώ ότι μετά την εφαρμογή του high-pass φίλτρου, μηδενίζοντας τις κάθετες συχνότητες, η τελική εικόνα έχει έντονες τις άσπρες γραμμές, ενώ οι στήλες έχουν εξαφανισθεί, αφού έχει χαθεί η πληροφορία αυτών. Η υπόλοιπη πληροφορία της εικόνας έχει σχεδόν σβηστεί και είναι αναμενόμενο αφού βρισκόταν στην κεντρική περιοχή του λογαρίθμου του μέτρου του DFT και αυτή μηδενίστηκε.

ΆΣΚΗΣΗ 3

Κώδικας

```
%arxikos pinakas f
f = [1 -1 1 0 1;
     2 1 0 -1 3;
     2 4 4 0 0;
     1 0 -1 1 1;
     1 -1 -1 -1 1];

%arxikos pinakas h
h = [0 1 0;
     1 -4 1;
     0 1 0];

%dhmiourgw pinaka h 4x4 kai ton sumplhrwnw katallhla
new_h = zeros(4,4);
new_h(1:3,1:3) = h(1:3,1:3);
new_h(4,1) = new_h(1,mod((4-1),4)+1);
new_h(4,2) = new_h(1,mod((4-2),4)+1);
new_h(4,3) = new_h(1,mod((4-3),4)+1);
new_h(4,4) = new_h(1,mod((4-4),4)+1);
new_h(1,4) = new_h(1,mod((1-4),4)+1);
```

```
new_h(2,4) = new_h(1,mod((2-4),4)+1);
new_h(3,4) = new_h(1,mod((3-4),4)+1);

%krataw to 3x3 kommati autou
last_h(1:3,1:3) = new_h(2:4,2:4)

%grammikh suneliksh
%efarmozw padding ston f kai ston h
%gia na exoun idio mege8os me to apotelesma
zpf = zeros(7,7);
zpf(1:5,1:5) = f(1:5,1:5);
zph = zeros(7,7);
zph(1:3,1:3) = last_h(1:3,1:3);
%kai ektelw grammikh suneliksh
f1 = fft2(zph);
f2 = fft2(zpf);
res = int8(ifft2(f1 .* f2))

%kuklikh suneliksh
%efarmozw padding fia na ginei idio mege8os me ton f
zero_padded_h = zeros(5,5);
zero_padded_h(1:3,1:3) = last_h(1:3,1:3);
%kai ektelw grammikh suneliksh
fft_f = fft2(f);
fft_h = fft2(zero_padded_h);
r = fft_h .* fft_f;
result = int8(ifft2(r))
```

Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις

Για να μεταφέρω το -4 στην αρχή των αξόνων χρησιμοποίησα τη σχέση C(i,j) = (i-j)modN. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά δημιούργησα ένα πίνακα 4x4 του οποίου τα πρώτα 3x3 στοιχεία ήταν ίδια με του h:

0	1	0	1
1	-4	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

Προσθέτω +1, γιατί η αρίθμηση στη matlab ξεκινάει από 1

C(1,4) = (1-4)mod4 = 1+1 = 2, το 2ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 1

C(4,2) = (4-2)mod4 = 2+1 = 3, το 3ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 0

C(4,3) = (4-3)mod4 = 1+1 = 2, το 2ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 1

C(4,4) = (4-4)mod4 = 0+1 = 1, το 1ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 0

C(2,4) = (2-4)mod4 = 2+1 = 3, το 3ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 0

C(3,4) = (3-4)mod4 = 3+1 = 4, το 4ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 1

C(4,1) = (4-1)mod4 = 3+1 = 4, το 4ο στοιχείο της 1ης γραμμής = 1

Από αυτόν τον πίνακα κράτησα τα 3x3 τελευταία στοιχεία:

-4	1	0
1	0	1
0	1	0

Όσον αφορά τη γραμμική συνέλιξη, το μέγεθος του αποτελέσματος ισούται με:

5(γραμμές f) + 3(γραμμές h) – 1 =7 γραμμές
5(στήλες f) + 3(στήλες h) – 1 =7 στήλες

Έτσι, έκανα zero padding στον πίνακα h για να γίνει 7x7 και στον πίνακα f για να γίνει 7x7 και να μπορεί να πολλαπλασιαστεί με τον h:

f =

1	-1	1	0	1	0	0
2	1	0	-1	3	0	0
2	4	4	0	0	0	0
1	0	-1	1	1	0	0
1	-1	-1	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

h =

-4	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Εφάρμοσα 2-D FFT στους δύο πίνακες, τους πολλαπλασίασα και στη συνέχεια πήρα τον αντίστροφο 2-D FFT για να πάρω το αποτέλεσμα.

Το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης:

-4	5	-5	1	-4	1	0
-7	-3	3	3	-11	3	1
-6	-12	-11	5	3	0	3
-2	7	11	-1	0	4	0
-3	7	7	8	-5	2	1
1	0	0	-3	1	0	1
0	1	-1	-1	-1	1	0

Όσον αφορά τη κυκλική συνέλιξη, έκανα zero padding στον πίνακα h για να έχει ίδιο μέγεθος με τον f, δηλαδή 5x5:

f =

1	-1	1	0	1
2	1	0	-1	3
2	4	4	0	0
1	0	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1

h =

-4	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Εφάρμοσα 2-D FFT στους δύο πίνακες, τους πολλαπλασίασα και στη συνέχεια πήρα τον αντίστροφο 2-D FFT για να πάρω το αποτέλεσμα.

Το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης:

-2	6	-5	-2	-3
-3	-1	2	2	-12
-6	-9	-11	5	3
2	7	11	-1	0
-1	8	7	8	-5

ΑΣΚΗΣΗ 3 (γ) ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

$$f = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to F_7 \\ \to F_6 \\ \to F_5 \\ \to F_4 \\ \to F_3 \\ \to F_2 \\ \to F_1 \end{array} \qquad h = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπου $h(0,0) = -4$ και στον πίνακα f έχω εφαρμόσει zero-padding για να έχει ίδιο μέγεθος με τον πίνακα του αποτελέσματος, δηλαδή 7×7.
Από τον πίνακα f προκύπτουν οι πίνακες:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε, $$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_7 & F_6 \\ F_2 & F_1 & F_7 \\ F_3 & F_2 & F_1 \\ F_4 & F_3 & F_2 \\ F_5 & F_4 & F_3 \\ F_6 & F_5 & F_4 \\ F_7 & F_6 & F_5 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
4 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 4 & 4 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & -1 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\times
\begin{array}{c}
0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 1 \\ \hline -4 \\ 1 \\ 0
\end{array}
$$

Διάνυσμα που προκύπτει από τον πίνακα h.

$1\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 0$

$-1\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 1$

$(-1)\times0+(-1)\times1+1\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = -1$

$(-1)\times0+(-1)\times1+(-1)\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = -1$

$(-1)\times0+(-1)\times1+(-1)\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = -1$

$1\times0+(-1)\times1+(-1)\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 1$

$0\times0+1\times1+(-1)\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 0$

$0\times0+0\times1+1\times0+0\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 1$

$1\times0+0\times1+0\times0+1\times1+0\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 0$

$0\times0+1\times1+0\times0+(-1)\times1+1\times0+0\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 0$

$-1\times0+0\times1+1\times0+(-1)\times1+(-1)\times0+1\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = 0$

$1\times0+(-1)\times1+0\times0+(-1)\times1+(-1)\times0+(-1)\times1+0\times(-4)+0\times1+0\times0 = -3$

...

Ομοίως προκύπτουν και τα υπόλοιπα, οπότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} (0\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 0)^T \\ (1\ 0\ 0\ -3\ 1\ 0\ 1)^T \\ (-3\ 7\ 7\ 8\ -5\ 2\ 1)^T \\ (-2\ 7\ 11\ -1\ 0\ 4\ 0)^T \\ (-6\ -12\ -11\ 5\ 3\ 0\ 3)^T \\ (-7\ -3\ 3\ 3\ -11\ 3\ 1)^T \\ (-4\ 5\ -5\ 1\ -4\ 1\ 0)^T \end{bmatrix}$$

και το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{bmatrix} (-4\ 5\ -5\ 1\ -4\ 1\ 0)^T \\ (-7\ -3\ 3\ 3\ -11\ 3\ 1)^T \\ (-6\ -12\ -11\ 5\ 3\ 0\ 3)^T \\ (-2\ 7\ 11\ -1\ 0\ 4\ 0)^T \\ (-3\ 7\ 7\ 8\ -5\ 2\ 1)^T \\ (1\ 0\ 0\ -3\ 1\ 0\ 1)^T \\ (0\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 0)^T \end{bmatrix}$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ίδιο με το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης που προέκυψε με τη matlab.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (γ)

ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

$$f = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to F_5 \\ \to F_4 \\ \to F_3 \\ \to F_2 \\ \to F_1 \end{array} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπου στον πίνακα h έχω εφαρμόσει zero-padding για να έχει ίδιο μέγεθος με τον μεγαλύτερο, δηλαδή τον f (5x5).

Από τον πίνακα f προκύπτουν οι πίνακες:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_5 & F_4 \\ F_2 & F_1 & F_5 \\ F_3 & F_2 & F_1 \\ F_4 & F_3 & F_2 \\ F_5 & F_4 & F_3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|rrrrr|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\
4 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\
0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{array}
\times
\begin{array}{r}
0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}
$$

$1\times0+1\times1+(-1)\times0+(-1)\times0+(-1)\times0+1\times1+1\times0+0\times1+1\times0+(-1)\times0+2\times(-4)+$

$1\times0+1\times1+(-1)\times0+(-1)\times0+(-1)\times0+2\times0+0\times0+0\times0+4\times0+4\times0+1\times0+1\times0+$

$+3\times1+(-1)\times0+0\times0+1\times0+2\times0+0\times0+0\times0+4\times0+4\times0+1\times0+1\times0+$

$+1\times0+(-1)\times0+0\times0=-3$

$(-1)\times0+1\times1+1\times0+(-1)\times0+(-1)\times0+(-1)\times1+1\times0+1\times1+0\times0+1\times0+1\times(-4)+$

$(-1)\times0+1\times1+1\times0+(-1)\times0+(-1)\times0+4\times0+2\times0+0\times0+0\times0+4\times0+0\times0+$

$+2\times1+3\times0+(-1)\times0+0\times0+4\times0+2\times0+0\times0+0\times0+4\times0+0\times0+$

$+1\times0+1\times0+1\times0+(-1)\times0=-1$ ...

Ομοίως προκύπτουν και τα υπόλοιπα:

$$\begin{bmatrix} (-3 & -1 & 2 & 2 & -12)^T \\ (-2 & 6 & -5 & -2 & -3)^T \\ (-1 & 8 & 7 & 8 & -5)^T \\ (2 & 7 & 11 & -1 & 0)^T \\ (-6 & -9 & -11 & 5 & 3)^T \end{bmatrix}$$

Και το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{bmatrix} (-6 & -9 & -11 & 5 & 3)^T \\ (2 & 7 & 11 & -1 & 0)^T \\ (-1 & 8 & 7 & 8 & -5)^T \\ (-2 & 6 & -5 & -2 & -3)^T \\ (-3 & -1 & 2 & 2 & -12)^T \end{bmatrix}$$

Είναι οι ίδιες γραμμές με το αποτέλεσμα σε matlab όμως με λίγο διαφορετική σειρά. Το αποτέλεσμα σε matlab ήταν:

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & -12 \\ -6 & -9 & -11 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 11 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

ΆΣΚΗΣΗ 4

Για k = rN,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{jk2\pi n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{jrN2\pi n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi rn}$$
$$= \frac{1}{N}N = 1$$

Ισχύει ότι,

$$e^{-2\pi j} = cos(-2\pi) + j \cdot sin(-2\pi) = cos(2\pi) - j \cdot sin(2\pi)$$
$$= 1 + 0 = 1$$

Για k ≠ rN,

έστω k = rN + a, 0 < a < N,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi(rN+a)}{N}}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nr} e^{-\frac{j2\pi na}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi na}{N}} =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-\frac{j2\pi a}{N}}\right)^n = \frac{1}{N}\frac{1-\left(e^{-\frac{j2\pi a}{N}}\right)^N}{1-\left(e^{-\frac{j2\pi a}{N}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j2\pi a}}{1-e^{-\frac{j2\pi a}{N}}} = 0$$