Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________ Sección:______________________________

# Pep 1

Forma A

1.- Sean $p, q$ y $r$ tres proposiciones. Se define el conector lógico $\star$ como:

$$p \star q \equiv \big((p \implies q) \implies (\sim q \implies p)\big).$$

i) Pruebe que $\star$ es un conector conmutativo.

ii) Pruebe que $\star$ distribuye con respecto a $\vee$, es decir:

$$p \star (q \vee r) \equiv (p \star q) \vee (p \star r).$$

iii) Sea la proposición compuesta:

$$(p \star q) \wedge (q \star r) \wedge (\sim r \star q).$$

Determine si es tautología, contradicción o contingencia.

**Solución:** Primero se debe analizar el conector $\star$:

$$\begin{aligned} p \star q &\equiv \big((p \implies q) \implies (\sim q \implies p)\big) \\ &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee p) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \vee p) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee p \vee q \\ &\equiv p \vee q. \end{aligned}$$

i) $p \star q \equiv p \vee q \equiv q \vee p \equiv q \star p.$

ii) $p \star (q \vee r) = p \vee (q \vee r) \equiv p \vee p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r) = (p \star q) \vee (p \star r).$

iii)

$$\begin{aligned} (p \star q) \wedge (q \star r) \wedge (\sim r \star q) &\equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim r \vee q) \\ &\equiv q \vee (p \wedge r \wedge \sim r) \\ &\equiv q \vee (p \wedge F) \\ &\equiv q \vee F \\ &\equiv q. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que la proposición compuesta es una contingencia. Si realizan el ejercicio sin simplificar a $p \vee q$ repartir los puntos en i),ii) y iii). También está permitido el uso de tabla de verdad.

2.- Sean $A$ y $B$ conjuntos.

i) Demuestre usando solo propiedades de conjuntos que:

$$\big(A - (A \cap B)\big) \cup \big((A \cup B) - B^c\big) = A \cup B$$

ii) Definiendo ahora los conjuntos $A$ y $B$ como:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : \big((\exists k \in \mathbb{N} : x = 5k) \vee (\exists k \in \mathbb{N} : x = 7k - 1)\big) \wedge (x \leq 40)\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists r \in \mathbb{N} : x + r = 20\big) \wedge \big(\exists r \in \mathbb{N} : x = 3r\big)\} \end{aligned}$$

Determine explícitamente los conjuntos $A$ y $B$ y calcule el valor de:

$$n\Big(\big(B \cap (A \cup B)\big) \cup \big(A - (A \cap B)\big)\Big).$$

**Solución:**

i)

$$\begin{aligned} \big(A - (A \cap B)\big) \cup \big((A \cup B) - B^c\big) &= \big(A \cap (A \cap B)^c\big) \cup \big((A \cup B) \cap B\big) \\ &= \big(A \cap (A^c \cup B^c)\big) \cup B \\ &= \big((A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)\big) \cup B \\ &= \big(\emptyset \cup (A \cap B^c)\big) \cup B \\ &= (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B. \end{aligned}$$

ii) Analizando el conjunto $A$ se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : \big((\exists k \in \mathbb{N} : x = 5k) \vee (\exists k \in \mathbb{N} : x = 7k - 1)\big) \wedge (x \leq 40)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : \big((x \text{ es múltiplo de 5 }) \vee (x \text{ es múltiplo de 7 menos 1})\big) \wedge (x \leq 40)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : \big((x \text{ es múltiplo de 5 }) \wedge (x \leq 40)\big) \vee \big((x \text{ es múltiplo de 7 menos 1}) \wedge (x \leq 40)\big)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : (x \text{ es múltiplo de 5 }) \wedge (x \leq 40)\} \cup \{x \in \mathbb{N} : (x \text{ es múltiplo de 7 menos 1}) \wedge (x \leq 40)\} \\ &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\} \cup \{6, 13, 20, 27, 34\} \\ &= \{5, 6, 10, 13, 15, 20, 25, 27, 30, 34, 35, 40\} \end{aligned}$$

Analizando el conjunto $B$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists r \in \mathbb{N} : x + r = 20\big) \wedge \big(\exists r \in \mathbb{N} : x = 3r\big)\} \\
&= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists r \in \mathbb{N} : x = 20 - r\big) \wedge \big(x \text{ es múltiplo de } 3\ \big)\} \\
&= \{x \in \mathbb{N} : \exists r \in \mathbb{N} : x = 20 - r\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 3\} \\
&= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\} \cap \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,\dots\} \\
&= \{3,6,9,12,15,18\}
\end{aligned}$$

Ahora, para la cardinalidad, se tiene que:

$n\Big(\big(B \cap (A \cup B)\big) \cup \big(A - (A \cap B)\big)\Big) = n\Big(\big((A \cup B) - B^c\big) \cup \big(A - (A \cap B)\big)\Big) = n(A \cup B)$,

lo anterior dado por $i$), con esto:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12 + 6 - 2 = 16.$$

Es válido determinar la cardinalidad directamente (haciendo el mismo trabajo que en i), si es así se reparten los 0.3 puntos asignados antes.

3.- Halle los valores de $k$ para que al dividir el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k$ por $(x-2)$, el resto sea 6 .

**Solución:** Dividiendo $p(x)$ por $(x-2)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{l}
x^4 + 2x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k : x - 2 = x^3 + 4x^2 + 5x + 10 + k^2 \\
-\underline{x^4 + 2x^3} \\
\quad 4x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k \\
\quad -\underline{4x^3 + 8x^2} \\
\qquad 5x^2 + k^2x - 12k \\
\qquad -\underline{5x^2 + 10x} \\
\qquad\quad (10 + k^2)x - 12k \\
\qquad\quad -\underline{(10 + k^2)x + 20 + 2k^2} \\
\qquad\qquad 2k^2 - 12k + 20
\end{array}$$

Con lo anterior se tiene que el resto es $2k^2 - 12k + 20$, por lo tanto se tiene que $2k^2 - 12k + 20 = 6$, dando la ecuación $2k^2 - 12k + 14 = 0$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 112}}{4} \\
k &= \frac{12 \pm \sqrt{32}}{4} \\
k &= \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{4} \\
k &= 3 \pm \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

**Forma alternativa:** Escribiendo $p(x)$ en función del teorema del resto se tiene que:

$$p(x) = (x-2)q(x) + r(x),$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios. Evaluando en $x = 2$ se tiene que:

$$p(2) = 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + k^2 \cdot 2 - 12k = (x-2)q(x) + r(x).$$

De donde $r(x) = 6$ por enunciado, así:

$$2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + k^2 \cdot 2 - 12k = 16 + 16 - 12 + 2k^2 - 12k = 6,$$

obteniendo así la ecuación $2k^2 - 12k + 20 = 6$ , que tiene como solución $k = 3 \pm \sqrt{2}$.