Ejercicios.

1) Resolver la ecuación que incluye valor absoluto:

$$|3x-|x-1||=x+2.$$

2) Encontrar el conjunto solución de la inecuación

$$|x+1|>2x+5.$$

Soluciones

1) Para esta ecuación, Trabajaremos desde adentro hacia afuera con los valores absolutos. Notemos que para $|x-1|$ tenemos dos opciones; $|x-1| = x-1$ y $|x-1| = -(x-1)$. Analicemos que ocurre con cada caso:

Si $|x-1| = x-1$, entonces la igualdad queda:

$$|3x-(x-1)| = x+2,$$
$$|2x+1| = x+2.$$

Aquí volvemos a separar en dos casos; $|2x+1| = 2x+1$ y $|2x+1| = -(2x+1)$.

Si $|2x+1| = 2x+1$, entonces:

$$2x+1 = x+2 \Leftrightarrow x=1.$$

Si $|2x+1| = -(2x+1)$, entonces:

$$-(2x+1) = x+2 \Leftrightarrow 2x+1 = -x-2 \Leftrightarrow x=-1.$$

Por otro lado, si $|x-1| = -(x-1)$, entonces la igualdad queda:

$$|3x+x-1| = x+2,$$
$$|4x-1| = x+2.$$

Aquí volvemos a separar en dos casos; $|4x-1| = 4x-1$ y $|4x-1| = -(4x-1)$.

Si $|4x-1| = 4x-1$, entonces:

$$4x-1 = x+2 \Leftrightarrow x=1.$$

Si $|4x-1| = -(4x-1)$, entonces:

$$-4x+1 = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}.$$

Las posibles soluciones de esta ecuación son $\{1, -1, -\frac{1}{5}\}$. Si comprobamos para $x=1$ y $x=-\frac{1}{5}$, se verifica que son soluciones de la ecuación, pero si $x=-1$, no se satisface la igualdad.

Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es $\{1, -\frac{1}{5}\}$.

2) No podemos usar inmediatamente la propiedad que nos dice

$$|x|>a \Leftrightarrow (x>a \ \vee \ x<-a) \wedge a\geq 0$$

ya que en este problema $2x+5$ puede tener signo positivo o negativo o ser 0. Es por ésto que analizaremos el valor absoluto:

Si $x+1\geq 0$, entonces $|x+1|=x+1$ y la inecuación queda:

$$x+1>2x+5 \Leftrightarrow x<-4 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-4),$$

y como $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1 \Leftrightarrow x\in[-1,+\infty)$, al intersectar ambos conjuntos:

$$S_1=[-1,+\infty)\cap(-\infty,-4)=\emptyset \ \text{(vacío)}.$$

Si $x+1<0$, entonces $|x+1|=-x-1$ y la inecuación queda

$$-x-1>2x+5 \Leftrightarrow 3x<-6 \Leftrightarrow x<-2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2),$$

y como $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)$, al intersectar ambos conjuntos:

$$S_2=(-\infty,-1)\cap(-\infty,-2)=(-\infty,-2)$$

Finalmente, el conjunto solución es

$$S=S_1\cup S_2=\emptyset\cup(-\infty,-2)=(-\infty,-2).$$