Análisis Real

Axiomática de R

I - Axiomas de la adición

a) la **suma** es una ***operación interna***: si a, $b \in \mathbb{R}$ entonces $a+b \in \mathbb{R}$

b) es ***conmutativa***: $a+b = b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

c) es ***asociativa***: $a+(b+c) = (a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

d) existe un ***elemento neutro***: $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a+0 = 0+a = a$

e) existe un ***elemento opuesto***: $\forall a \in \mathbb{R}$ existe $-a$ tal que $a+(-a)=0$

II - Axiomas de la multiplicación

a) la multiplicación es *operación* interna: si $a,b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$

b) es ***conmutativa***: $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

c) es ***asociativa***: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

d) existe un ***elemento neutro***: $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

e) existe un ***elemento inverso***: $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}$ existe $1/a$ tal que $a \cdot 1/a=1$

f) es ***distributiva*** respecto de la suma: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ cumple $a(b+c)=ab+ac$

Estos dos axiomas definen a $(\mathbb{R},+,\cdot)$ como un cuerpo conmutativo.

III - Axiomas de orden

a) si $a,b \in \mathbb{R}$ entonces $a \leq b$ o $a \geq b$ (o las dos a la vez)

b) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \leq a$

c) Si $a \leq b$ y $a \geq b$ entonces $a=b$

d) Si $a \leq b$ entonces $a+c \leq b+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

e) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $a \cdot b \geq 0$

f) Si $a \leq b$ y $z>0$ entonces $a \cdot z \leq b \cdot z$

g) Si $a \leq b$ y $z<0$ entonces $a \cdot z \geq b \cdot z$

Estos tres axiomas definen a $\mathbb{R},+,\cdot,\leq$ como un cuerpo **ordenado**.

IV - Axioma del supremo

Un conjunto **A**$\subset \mathbb{R}$ se dice **acotado superiormente** si existe un elemento $z \in \mathbb{R}$ que es mayor que cualquier elemento de **A**.

Al elemento z se le llama **cota superior** de **A**.

Se llama **supremo** de **A** a la *cota superior* de **A** más pequeña.

a) Todo conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente posee **supremo**.

Estos axiomas definen una estructura en $\mathbb{R}$ llamada **topología** que introduce el concepto de proximidad.

Valor absoluto

- Valor absoluto de x, $|x| = máx\{x,-x\}$
  - Si $|x| \leq a$ quiere decir que $-a \leq x \leq +a$
  - $|x+y| \leq |x| + |y|$
  - $|x-y| \leq |x| + |y|$
  - $|x-y| \geq \big|\,|x| - |y|\,\big|$

Topología de R

Intervalos abiertos y cerrados

- ***Intervalo abierto*** de extremos a y b es el conjunto
  $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R}, a < x < b \}$ siendo $a<b$. a y $b \notin$ al conjunto (a,b)
- ***Intervalo cerrado*** de extremos a y b es el conjunto
  $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \}$ siendo $a<b$. a y $b \in$ al conjunto $[a,b]$

Entorno de un punto

Entorno de un punto a, $N(a)$, es el conjunto de puntos que pertenecen al intervalo abierto $(a-r, a+r)$

$$N(a) = \{ x \in \mathbb{R}, : a-r < x < a+r \}$$

El entorno de a con radio $r > 0$ es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ que se encuentran a una distancia de a menor que r, es decir, $|a-x| < r$

$$N(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}, |a-x| < r \}$$

Entorno reducido de un punto a es el conjunto de puntos del entorno excluyendo al propio punto a.

$$N^*(a,r) = N(a,r) - \{a\}$$

Conjunto abierto

Un conjunto *abierto* es aquel en el que todos sus elementos poseen un entorno que pertenece al conjunto.

Es decir, $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto si para todo $x \in \mathbf{A}$ existe un $N(x) \subset \mathbf{A}$.

- El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.
- La unión infinita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección finita de abiertos es un abierto.

Conjunto cerrado

Un conjunto *cerrado* $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es aquel cuyo complementario $\mathbb{R} - \mathbf{A}$ es abierto.

- El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.

- La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La intersección infinita de cerrados es un cerrado.

Punto interior

Sea $\mathbf{A}\subset\mathbb{R}$. Un punto $a\in\mathbf{A}$ es un *punto interior* de **A** si existe un entorno $N(a)\subset\mathbf{A}$, es decir, si todos los puntos del entorno de a pertenecen a **A**.

Si $N(a) \subset \mathbf{A}$, entonces a es un *punto interior* de **A**.

Al conjunto de puntos interiores de **A** se llama *interior* de **A**, $\mathring{\mathbf{A}}=int(\mathbf{A})$

- El conjunto $int(\mathbf{A})$ es **abierto**
- $int(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ (todos los puntos de $int(\mathbf{A})$ pertenecen a **A**)
- **A** es abierto si y sólo si $int(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$
- En un conjunto de puntos aislados $int(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Punto adherente

Sea $\mathbf{A}\subset\mathbb{R}$. Un punto $a\in\mathbf{A}$ es un *punto adherente* de **A** si en el entorno $N(a)$ existen puntos de **A**.

Todos los puntos de **A** son *puntos adherentes* de **A**. Pueden existir *puntos adherentes* de **A** que no pertenezcan al conjunto **A**.

Al conjunto de puntos adherentes de **A** se llama *adherencia*, $\bar{\mathbf{A}}=adh(\mathbf{A})$

- El conjunto $adh(\mathbf{A})$ es **cerrado**
- $int(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A} \subset adh(\mathbf{A})$ (todos los puntos de **A** son adherentes de **A**)
- **A** es ***cerrado*** si y sólo si $adh(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$
- El *ínfimo* y el *supremo* de **A** pertenecen a $adh(\mathbf{A})$

Punto frontera

Un punto $a\in\mathbb{R}$ es un *punto frontera* de **A** si en el entorno $N(a)$ del punto existen puntos de **A** y puntos de $\mathbb{R}-\mathbf{A}$.

Los *puntos frontera* son *puntos adherentes* de **A** y pueden pertenecer, o no, al conjunto **A**.

Al conjunto de puntos frontera de **A** se llama *frontera* de **A**, $front(\mathbf{A})$

- $adh(\mathbf{A}) = int(\mathbf{A}) \cup front(\mathbf{A})$
- $int(\mathbf{A}) \cap front(\mathbf{A}) = \emptyset$, los puntos *frontera* son no *interiores*

- **A** es ***cerrado*** si contiene a todos sus puntos frontera: $front(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$

Punto de acumulación

Un punto a es un *punto de acumulación* de **A** si en el entorno N(a,r) del punto existen puntos de **A** distintos del propio a, es decir,

$$\forall\ r>0 \text{ existe un } N^*(a,r) \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$$

- $N^*(a,r)$ es el entorno del punto a con radio r excluyendo al propio a
- $N^*(a,r) = N(a,r) - \{a\}$

Al conjunto de puntos de acumulación de **A** se llama *acumulación* o *derivado* de **A**, $\mathbf{A}' = acum(\mathbf{A})$.

- Un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es ***cerrado*** si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.
- $int(\mathbf{A}) \subset acum(\mathbf{A}) \subset adh(\mathbf{A})$

Punto aislado

Un punto a es un *punto aislado* de **A** si no tiene entorno, es decir,

$N(a,r) \cap \mathbf{A} = \{a\}$, o bien,
$N^*(a,r) \cap \mathbf{A} = \varnothing$

Al conjunto de puntos de aislados de **A** se llama *aislado* de **A**, $ais(\mathbf{A})$.

- El conjunto $ais(\mathbf{A})$ es cerrado.

Punto exterior

Se llama *punto exterior* de **A** al punto $a \in \mathbb{R}-\mathbf{A}$.

Llamamos exterior o *complementario* de **A** al conjunto de puntos exteriores de **A**, $ext(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^c$.

- **A** y $\mathbf{A}^c$ tienen los mismos puntos frontera: $front(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A} \cap \mathbf{A}^c$

Entre 2 elementos de $\mathbb{Q}$ siempre hay un elemento de $\mathbb{R}$. Cualquier $x \in \mathbb{R}$ se puede definir como el límite de dos sucesiones de $\mathbb{Q}$ convergentes.

- $adh(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

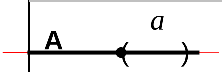
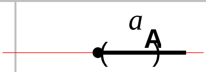
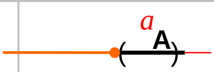
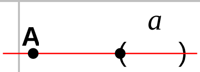
Ejemplo Demostrar que un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es **cerrado** si y sólo si contiene todos sus *puntos frontera*.

- Sea **A** un conjunto cerrado y x un punto frontera,

- entonces $x \in$ **A**, ya que
- si $x \notin$ **A** entonces $x \in \mathbf{A}^c$ que es un conjunto *abierto*, y
- si $x \in \mathbf{A}^c$ entonces existe un $\mathbf{N}(x) \subset \mathbf{A}^c$ y, por tanto, $\mathbf{N}(x) \cap \mathbf{A} = \varnothing$, lo cual indica que x no es un punto frontera de **A** ya que en su entorno no hay puntos de **A**.

Ejemplo $\mathbf{A} = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{R} \}$

- No es *abierto* ya que está formado por puntos aislados y los puntos aislados no tienen entorno en **A**.
- No es *cerrado* ya que, siendo {0} un punto de acumulación, $0 \notin$ **A**
- En este ejemplo el conjunto $adh(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \{0\}$.

interior	**frontera** **adherente**	**exterior** **frontera**	**aislado**
a es un punto de A con todo su entorno en A	a es un punto de A y en su entorno hay puntos A y de $\mathbb{R}$–A	a no es un punto de A pero en su entorno hay puntos A	a es un punto de A. a no tiene entorno
			
$\Phi \in$ **A** $\Phi \notin$ **A**	$\Phi \in$ **A** $\Phi \notin$ **A**	$\Phi \in$ **A** $\Phi \notin$ **A**	$\Phi \in$ **A** $\Phi \notin$ **A**
$a \in$ **A** $\mathrm{N}(a) \subset \mathbf{A}$	$a \in$ **A** $\mathrm{N}(a) \subset \mathbf{A} \cup \mathbb{R} - \mathbf{A}$	$a \notin$ **A** $\mathrm{N}(a) \subset \mathbf{A} \cup \mathbb{R} - \mathbf{A}$	$a \in$ **A** $\mathrm{N}(a) = \varnothing$
$a \in int(\mathbf{A})$ $a \in adh(\mathbf{A})$ $a \notin front(\mathbf{A})$ $a \in acum(\mathbf{A})$ $a \notin ais(\mathbf{A})$	$a \notin int(\mathbf{A})$ $a \in adh(\mathbf{A})$ $a \in front(\mathbf{A})$ $a \in acum(\mathbf{A})$ $a \notin ais(\mathbf{A})$	$a \notin int(\mathbf{A})$ $a \in adh(\mathbf{A})$ $a \in front(\mathbf{A})$ $a \in acum(\mathbf{A})$ $a \notin ais(\mathbf{A})$	$a \notin int(\mathbf{A})$ $a \in adh(\mathbf{A})$ $a \in front(\mathbf{A})$ $a \notin acum(\mathbf{A})$ $a \in ais(\mathbf{A})$

Ejemplo $\mathbf{A} = \{ \frac{1}{x-2} : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 3 \}$, tomemos el intervalo semiabierto [0,3)

el punto $x=2 \notin$ **A**

- $x=2 \notin int(\mathbf{A})$
- $x=2 \in adh(\mathbf{A})$
- $x=2 \in front(\mathbf{A})$
- $x=2 \in acum(\mathbf{A})$

el punto $x=0 \in$ **A**

- $x=0 \notin int(\mathbf{A})$
- $x=0 \in adh(\mathbf{A})$
- $x=0 \in front(\mathbf{A})$
- $x=0 \in acum(\mathbf{A})$

el punto $x=3 \notin$ **A**

- $x=3 \notin int(\mathbf{A})$
- $x=3 \in adh(\mathbf{A})$
- $x=3 \in front(\mathbf{A})$
- $x=3 \notin acum(\mathbf{A})$

Conjuntos compactos

- Un **recubrimiento** de un conjunto **A** es la unión de una familia de conjuntos **F** de tal forma que $A \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots F_n$.
- Un **subrecubrimiento G** de **A** es una subfamilia del recubrimiento **F** de **A** de tal forma que **G** es igualmente un recubrimiento de **A**.
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **compacto** si de cualquier recubrimiento **F** de *conjuntos abiertos*, se puede extraer un subrecubrimiento **G** formado por un número finito de elementos.

Propiedades

- Todo intervalo cerrado [a,b] es compacto.
- Todo subconjunto finito $A \subset \mathbb{R}$ es compacto.
- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado es compacto.
- Todo conjunto cerrado contenido en un compacto, es compacto.
- La unión finita de conjuntos compactos es un compacto.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *compacto* si y sólo si es cerrado y acotado.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no finito y acotado tiene, al menos, un *punto de acumulación*.

Sucesiones

Una ***sucesión*** (a_n) es un conjunto infinito de números ordenados. A cada elemento de la sucesión se le denomina *término de la sucesión*.

Una ***sucesión*** (a_n) es una aplicación a: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ que a cada elemento de $\mathbb{N}$ le hace corresponder una imagen en $\mathbb{R}$.

Por extensión, también se llama sucesión al conjunto imagen: f: $\{ f(n): n\in\mathbb{N} \}$, y se denota por (a_n) donde cada elemento $a_n= f(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

- Una ***subsucesión*** puede considerarse un subconjunto dentro de una sucesión.

  Es la composición de una función g:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, estrictamente creciente, con una función f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$. Dada una sucesión (x_n) en la que a cada número natural n se le asigna una imagen $f(n)$, una subsucesión es una sucesión que tiene la forma (x_{n_k}) donde $n_k< n_{k+1}$ para todo $k\in\mathbb{N}$, es decir, n_k es un subconjunto ordenado de $\mathbb{N}$.

<u>Ejemplo</u> Tomemos la sucesión f:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$: $f(n) = \dfrac{1}{n}$

- Una subsucesión sería $f(n) = \dfrac{1}{2n}$ que es un subconjunto de la sucesión anterior formado únicamente por los elemetos pares de la sucesión, es decir, las imágenes de los elementos pares.
- Esta subsucesión es la composición $g\ E\ f$ donde:

  f: $\mathbb{N} \rightarrow\mathbb{R}$: $f(n) = \dfrac{1}{n}$

  g: $\mathbb{N} \rightarrow\mathbb{N}$: $g(n) = 2n$

<u>Término general</u>

- Es la expresión de variable n generadora de los términos de la sucesión al sustituir n por cualquier número natural. Los términos de la sucesión se obtienen al ir sustituyendo la variable n de la expresión por la secuencia de los números naturales.
- Los elementos (o términos) de una sucesión pueden generarse:
  - aplicando el *término general* a cada elemento de $\mathbb{N}$.
  - *por recurrencia*, a través de una regla que permite calcular cada término a partir de los anteriores.
- Hay sucesiones que no tienen término general ni regla de recurrencia, por ejemplo, la

sucesión de los números primos.

Sucesiones monótonas

Sucesiones **crecientes** son aquellas en las que cada término es mayor que el anterior: $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $a_n = 3n$

Sucesiones **decrecientes** son aquellas en las que cada término es menor que el anterior: $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $a_n = \dfrac{n+1}{3n}$, es decreciente y acotada entre $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Las sucesiones que no son crecientes ni decrecientes, no son monótonas.

- $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ no es monótona, pero está acotada entre (-1, $\frac{1}{2}$) y el límite es 0

Sucesiones convergentes. Límite de una sucesión

Una sucesión (a_n) de números reales tiene por límite (converge hacia) el número x, si para cualquier entorno de x $N(x)$, existe un número natural n_0 a partir del cual todos los elementos a_n de la sucesión —siendo $n \geq n_0$—, es decir, los siguientes a la posición n_0, pertenecen al entorno $N(x)$.

Si una sucesión de números reales es convergente su límite es único.

- $lim \dfrac{3+n}{6n} = lim \dfrac{3}{6n} + \dfrac{1}{6} = lim \dfrac{3}{6n} + lim \dfrac{1}{6} = 0 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$
- $lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ (para todo $k \in \mathbb{N}$)

Ejemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2}{5n-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ para resolver la indeterminación dividimos entre n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{0-0} = +\infty$$

Ejemplo $\lim_n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}) = \infty - \infty$ multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\lim_n \frac{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})} = \lim_n \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} =$$

$$\lim_n \frac{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Sucesiones divergentes: límite ∞

Las sucesiones que tienden a infinito ($\lim a_n = +\infty$ o, $\lim a_n = -\infty$) son llamadas **divergentes**.

- $\lim n^k = +\infty$ $\qquad \lim \sqrt[k]{n} = +\infty$ $\qquad$ (para todo $k\in\mathbb{N}$)

Las sucesiones que no tienden a un único límite, es decir, que no son *convergentes* ni *divergentes*, son llamadas **oscilantes**.

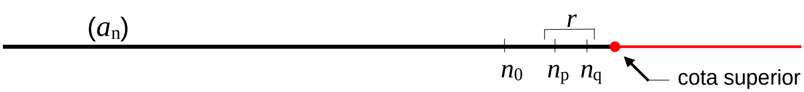
- $a_n = (-2)^n$

Sucesiones de Cauchy

Una sucesión (a_n) es de **Cauchy** si para cualquier r >0 existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si p,q son naturales mayores que n_0, entonces $|a_p - a_q|<r$.

$$\forall r>0 \ \exists\, n_0\in\mathbb{N} \text{ tal que si } p,q \geq n_0 \ \rightarrow |a_p - a_q| < r$$

Dicho de otra forma, (a_n) es de Cauchy si, a partir del término enésimo de la sucesión, la distancia entre 2 términos de la sucesión, es más pequeña que cualquier distancia que se proponga.



- Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- Toda sucesión de Cauchy es acotada.
- En $\mathbb{R}$ las sucesiones de Cauchy son convergentes.

Sucesiones acotadas

- Una sucesión a_n está *acotada superiormente* si existe un número $k\in\mathbb{R}$ que es mayor o igual que cualquier término de la sucesión.

$$a_n \le k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{R}$$

El número k se denomina ***cota superior*** de la sucesión.

- Una sucesión a_n está *acotada inferiormente* si existe un número $k \in \mathbb{R}$ que es menor o igual que cualquier término de la sucesión.

$$a_n \le k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{R}$$

El número k se denomina ***cota inferior*** de la sucesión.

- Toda sucesión de números reales monótona creciente y acotada superiormente (o monótona decreciente y acotada inferiormente) es **convergente**.
- Si (a_n) es una sucesión acotada y (b_n) converge a cero, entonces: lim ($a_n \cdot b_n$) = 0.

Ejemplo $\quad x_n = \dfrac{1}{n^3} \cdot sin\left[\dfrac{n^2 + e^{n^2}}{2}\right]$

- $\mathbf{x_n = y_n \cdot z_n}$
- $y_n = \dfrac{1}{n^3} \quad \to \quad lim \dfrac{1}{n^3} = 0$
- $z_n = sin\left[\dfrac{n^2 + e^{n^2}}{2}\right]$ está acotada ya que sen(x) < 1
- entonces vemos que $lim\ x_n = 0$.

Aritmética de límites

Tomemos 2 sucesiones (a_n) y (b_n) cuyos límites respectivos sean a y b.

$\textbf{lim}\ (a_n+b_n) = \textbf{lim}\ a_n + \textbf{lim}\ b_n = a + b$	$\textbf{lim}\ (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \textbf{lim}\ a_n = \lambda \cdot a$
$\textbf{lim}\ (a_n \cdot b_n) = \textbf{lim}\ a_n \cdot \textbf{lim}\ b_n = a \cdot b$	$\textbf{lim}\ ((a_n)^{b_n}) = \textbf{lim}\ (a_n)^{\textbf{lim}\ b_n} = (a)^b$
$\textbf{lim}\ (log\ a_n) = log\ (\textbf{lim}\ a_n) = log\ a$	$\textbf{lim}\ f(a_n) = f(\textbf{lim}\ a_n)$

Ejemplo

$$lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{2n-3} =$$

A primera vista este límite tiene la forma ∞ / ∞ *por tanto habrá que hacer algunas transformaciones:*

$$lim \frac{\sqrt{\frac{9n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}} =$$

Dividimos cada polinomio entre la **n** *de mayor potencia, en este caso, n.*

$$lim \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}} =$$

- Aplicamos al numerador y al denominador la regla del límite de una suma es igual a la suma de los límites.

$$lim \frac{\sqrt{9+0}}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Indeterminaciones

Las siguientes expresiones producen una indeterminación:

- $\infty - \infty$
- $\infty \cdot \mathbf{0}$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$
- $\mathbf{1}^{\infty}$
- $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$
- $\mathbf{0}^{\infty}$
- $\dfrac{\pm\infty}{\mathbf{0}}$

Las siguientes expresiones tienen una solución particular:

- $\infty^0 = 1$
- $\dfrac{0}{\infty} = 0$
- $\dfrac{1}{\infty} = 0$
- $\dfrac{1}{0} = \infty$

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n})$$

El límite de esta sucesión es del tipo ∞ – ∞ (indeterminado) Lo transformamos multiplicando y dividiendo por el conjugado.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n}) \cdot \frac{(\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3-n}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^4}-\frac{3}{n^4}}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n}{n^2}-\frac{3}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}} = \frac{1-0-0}{\sqrt{0-0}+\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

- Si f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y (a_n) es una sucesión que converge a x, entonces $f(a_n)$ converge a $f(x)$.

Ejemplo La sucesión $(a_n) = \frac{1}{x}+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \mathbf{1}$

La función $f(x)$=sen x , $f(a_n)= \operatorname{sen}(\frac{1}{x}+1)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}(a_n) = \lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}(\frac{1}{x}+1) = f(\mathbf{1}) = \operatorname{sen}\mathbf{1}$$

Regla del bocata (sandwich)

- Si tenemos 3 sucesiones (a_n), (b_n) y (c_n) y existe un punto $n_0\in\mathbb{N}$ que cumple que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $a_n \leq b_n \leq c_n$ y, además resulta que $lim(a_n) = lim(c_n) = \boldsymbol{l}$, entonces (b_n) es convergente y $lim(b_n) = \boldsymbol{l}$.

Criterio de Stolz

- Si tenemos 2 sucesiones de números reales (a_n) y (b_n) siendo (b_n) creciente con límite $+\infty$ y existe $\lim\limits_{n}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \boldsymbol{l}$

  entonces $\lim\limits_{n}\frac{a_n}{b_n} = \boldsymbol{l}$.

Límites inferior y superior

Una sucesión es convergente si sus límites inferior y superior son reales y coinciden.

Ejemplo La sucesión $a_n = (-1)^n$ tiene como límite inferior -1 y como límite superior 1

Funciones

- Función real de variable real es una correspondencia entre 2 conjuntos de números reales que asigna a cada elemento del conjunto origen un elemento, y sólo uno, del conjunto destino.

  $$f\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R}$$

  Al conjunto origen le llamamos ***dominio*** de la función y es el conjunto de los números reales para el cual está definida la función.

  Al conjunto destino le llamamos ***recorrido*** de la función y a sus elementos les llamamos ***imágenes***.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Una función $f(x)$ es **creciente** si al aumentar el valor de x también aumenta el valor de $f(x)$.

  Una función f es *creciente* en el intervalo **I** cuando, dados dos elementos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo **I**,

  si $x_2 > x_1$ entonces implica que $f(x_2) \geq f(x_1)$

  Una función f es *estrictamente creciente* en el intervalo **I** cuando, dados dos elementos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo **I**,

  si $x_2 > x_1$ entonces implica que $f(x_2) > f(x_1)$

- Una función $f(x)$ es **decreciente** si al aumentar el valor de x disminuye el valor de $f(x)$.

  Una función f es *decreciente* en el intervalo **I** cuando, dados dos elementos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo **I**,

  si $x_2 > x_1$ entonces implica que $f(x_2) \leq f(x_1)$

  Una función f es *estrictamente decreciente* en el intervalo **I** cuando, dados dos elementos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo **I**,

  si $x_2 > x_1$ entonces implica que $f(x_2) < f(x_1)$

- Cuando una función es creciente (o decreciente) en todo un intervalo, decimos que es **monótona** en dicho intervalo.

- Una función $f\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ tiene un **máximo absoluto** en el punto x_0 cuando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{D}$.

- Una función f: $D \to \mathbb{R}$ tiene un **mínimo absoluto** en el punto x_0 cuando $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D$.

- Una función f: $D \to \mathbb{R}$ tiene un **máximo relativo** en el punto x_0 si para todos los puntos x del entorno de x_0 $N(x_0)$ se cumple:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para todo } x \in N(x_0).$$

Composición de funciones

- La composición de funciones es una operación que consiste en la aplicación sucesiva de dos funciones sobre un elemento del dominio, de tal forma que la aplicación de la primera función sobre el elemento genera una imagen sobre la que se aplica la segunda función para obtener la imagen definitiva.

  La composición de la función f y la función g sobre el elemento x se expresa como:
  $g \circ f = f(g(x))$.

Funciones inyectivas

- Una función es inyectiva cuando no existen 2 elementos del dominio que tengan la misma imagen, es decir, a cada elemento del dominio le corresponde una y sólo una imagen:

$$\forall\ x_1, x_2 \in D, \quad \text{si } x_1 \neq x_2 \quad \text{entonces } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Funciones inversas

- Una función es una correspondencia entre 2 variables:

$$y = f(x)$$

  La **inversa** de una función se obtiene aislando la variable x (poniéndola en función de la variable y)

$$x = f^{-1}(y)$$

  Después de aislar la variable x, como habitualmente llamamos y a la variable dependiente, realizamos un intercambio de nombres en la función inversa.

  Así pues la función inversa de la función $f(x)$ es $f^{-1}(x)$

Ejemplo $y = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y + 2 \quad \Rightarrow$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

- Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Propiedades

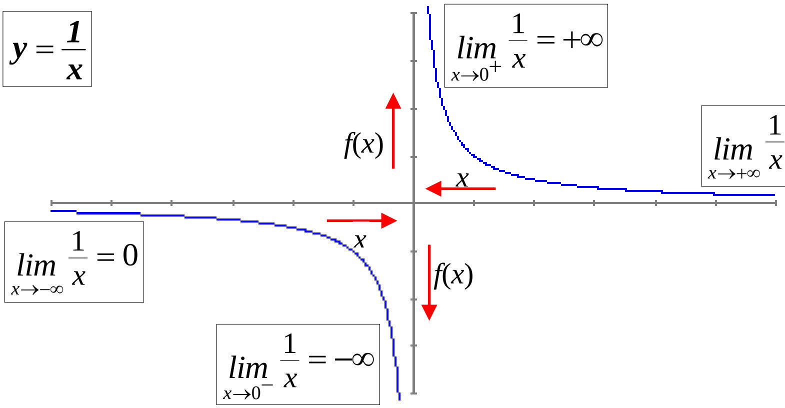
- $f^{-1}(f(x)) = x$
- $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbf{I}$ (función identidad)
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Límite de una función

- Diremos que el límite de una función f cuando x tiende al punto a es el valor $\boldsymbol{l}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{l}$$

cuando, al acercarse el valor de x al punto a, el valor $f(x)$ de la función se aproxima a $\boldsymbol{l}$ de tal forma que la distancia $|\, f(x)-\boldsymbol{l}\,|$ llega a hacerse tan pequeña como se desee.



- Para que exista límite $\boldsymbol{l}$ de una función en un punto x_0 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \boldsymbol{l}$, este límite debe ser único.

  En la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, observamos que cuando x se aproxima al punto x_0=0 los valores $f(x)$ que toma la función no se aproximan a un valor único:

  - Si x se aproxima a x_0 =0 desde la derecha, $f(x)$ se aproxima a $+\infty$
  - Si x se aproxima a x_0 =0 desde la izquierda, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$

Límites laterales

- Decimos que $\boldsymbol{l}^+$ es el límite por la derecha de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha (se acerca a x_0 desde la derecha hacia la izquierda)

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l^+,$$

cuando tenemos que, al acercarse por la derecha los valores de x hacia x_0, los valores que toma $f(x)$ están próximos a $\boldsymbol{l}$, de forma que, cuando $|x-x_0|$ es muy pequeño, resulta que $|f(x)-l|$ también es muy pequeño.

- Decimos que $\boldsymbol{l^-}$ es el límite por la izquierda de una función $f(x)$ cuando x se acerca por la izquierda a x_0:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l^-$$

- Estudiar la continuidad de una función en un punto consiste en buscar el valor de la función en dicho punto por la derecha y por la izquierda.

Aritmética de límites

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$ siempre y cuando el dominio de definición de x se extienda hasta +∞ (o hasta -∞ en el caso inverso).

Tomemos 2 funciones f(x) y g(x) cuyos límites respectivos sean a y b.

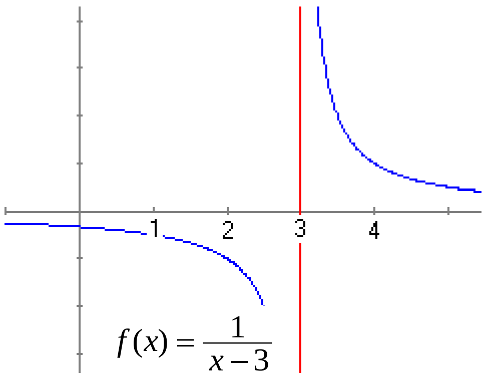
$\boldsymbol{\lim}\,(f+g)(x) = \boldsymbol{\lim}\, f(x) + \boldsymbol{\lim}\, g(x) = a+b$	$\boldsymbol{\lim}\,(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot\boldsymbol{\lim}\, f(x) = \lambda\cdot a$
$\boldsymbol{\lim}\,(f\cdot g)(x) = \boldsymbol{\lim}\, f(x)\cdot\boldsymbol{\lim}\, g(x) = a\cdot b$	$\boldsymbol{\lim}\,(f(x))^k = (\boldsymbol{\lim}\, f(x))^k = (a)^k$
$\boldsymbol{\lim}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\boldsymbol{\lim}\, f(x)}{\boldsymbol{\lim}\, g(x)} = \frac{a}{b}$ si $g(x)\neq 0$ y $b\neq 0$	$\boldsymbol{\lim}\,\log f(x) = \log\,\boldsymbol{\lim}\, f(x) = \log a$ si $f(x)>0$ y $a>0$
	$\boldsymbol{\lim}\,\lvert f\rvert(x) = \lvert\boldsymbol{\lim}\, f(x)\rvert = \lvert a\rvert$

Límites de una función en un punto

Decimos que $\boldsymbol{l}$ es el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,,$$

cuando tenemos que, al tomar valores de x próximos a x_0, los valores que toma $f(x)$ están próximos a $\boldsymbol{l}$, de forma que, cuando $|x-x_0|$ es muy pequeño, resulta que $|f(x)-l|$ también es muy pequeño.



Es posible que la función no esté definida en el límite, es decir, que no esté definida en el punto *x* para el que la función *f*(*x*) toma el valor del límite ***l***.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

De otra forma, diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{l}$ si y sólo si cuando, al tomar puntos *x* de un entorno reducido de *a* (excluyendo al propio *a*) $N^*(a)$, los correspondientes *f*(*x*) pertenecen a un cierto entorno de ***l***.

Límites de expresiones potenciales

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ para } n \text{ par} \\ -\infty \text{ para } n \text{ impar} \end{cases}$
▪ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$	▪ $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x) = 1$

Límites de funciones notables

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Ejemplo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\frac{\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos 0 = \mathbf{1}$$

Operaciones con límites infinitos

- $+\infty + l = +\infty$
- $-\infty + l = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
-

Examen El valor de $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]$ es:

a) 0 $\Leftarrow$ correcta

b) $\frac{1}{2}$

c) Ninguna de las anteriores

- Vemos que $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$, entonces
- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]=$ $\Rightarrow$ buscamos un denominador común
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cdot\cos x}{x\cdot\operatorname{sen} x}=\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ aplicamos l'Hôpital
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x - x\cdot\cos x)'}{(x\cdot\operatorname{sen} x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x - x\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ aplicamos l'Hôpital
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x+\cos x - x\operatorname{sen} x}=$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x}=\frac{0+0}{2-0}=\mathbf{0}$

Examen El valor de $\lim\limits_{x\to 0} cos(3x)^{\frac{1}{x^3}}$ es:

a) ∞

b) 0 $\Leftarrow$ correcta

c) $-\frac{3}{2}$

- Vemos que $\lim\limits_{x\to 0} cos(3x)^{\frac{1}{x^3}}=1^{\infty}$. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\lim_{x\to 0}\ ln\,(cos\,(3x)^{\frac{1}{x^3}})=\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{x^3}\cdot ln\,(cos\,3x)=\frac{0}{0}$$

- Se resuelve por L'Hôpital:
  lim x->0 [(-sen 3x·3) / cos 3x] / 3x^2 = lim x->0 - tg 3x / x^2 = 0 / 0
- Se vuelve a aplicar L'Hôpital:

lim x->0 -(3 / cos^2 3x) / 2x = - 3 / 0 = - inf

- Aplicando de nuevo la propiedad de los logaritmos:
  lim x->0 Ln(cos 3x)^(1/x^3) = L
  e^L = e^-inf = 1 / e^inf = 1 / inf = 0
- Respuesta: **B**

Examen Sea A = $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(x)-\mathrm{sen}(x)}{x-\mathrm{sen}(x)}$, entonces:

a) A = 3 $\Leftarrow$ correcta

b) A = 7

c) Ninguna de las anteriores

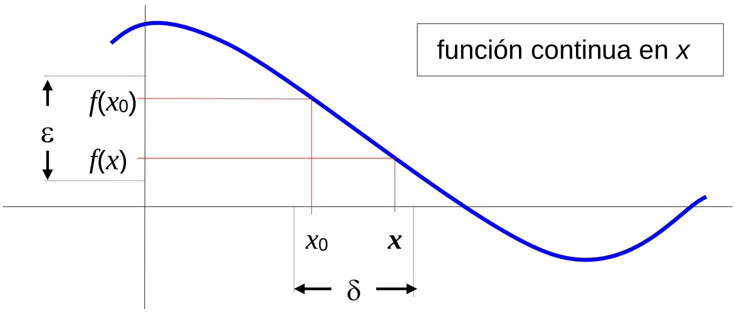
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(x)-\mathrm{sen}(x)}{x-\mathrm{sen}(x)}=\dfrac{0}{0}$, aplicamos l'Hôpital
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{sen}\,x)'}{(x-\mathrm{sen}\,x)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{\frac{1}{1}-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$, más l'Hôpital
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x}+\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\,\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,x\cdot\cos^3 x}{\mathrm{sen}\,x\cdot\cos^3 x}$
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,x\cdot(2+\cos^3 x)}{\mathrm{sen}\,x\cdot(\cos^3 x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2+\cos^3 x}{\cos^3 x}=\dfrac{2+1}{1}=\mathbf{3}$

Ejemplo $\lim_{x\to\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x)$ multiplicamos y dividimos por $\dfrac{1}{x}$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}x\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}x}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)$ aplicamos l'Hôpital
- $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}})}{(-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=\mathbf{1}$

Funciones continuas

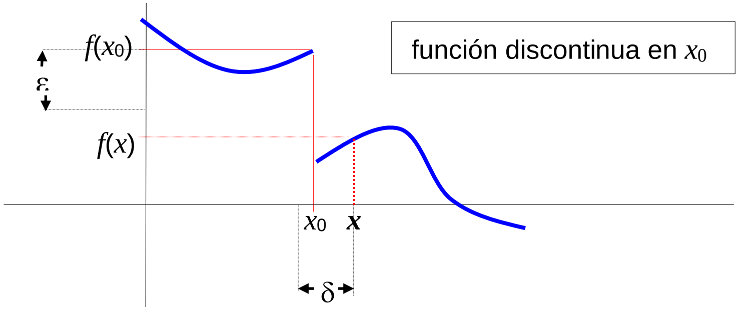
- Sean **A** $\subset \mathbb{R}$, f: **A** $\to \mathbb{R}$, $x_0 \in$ **A**.
- Una función es continua en un punto $\boldsymbol{x}$ si para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que, si $|x_0-x|<\delta$ entonces $|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$.



- Una función f es continua en un punto x_0 si para cada entorno $f(x_0)$ existe un entorno de x_0 tal que para todo $x \in$ **N**(x_0) se tiene que $f(x) \in$ **N**(x_0)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

De otra forma. Decimos que la función f es continua en el punto x_0 si para cualquier número real $\varepsilon>0$ dado, podemos encontrar otro número real $\delta>0$ de tal forma que $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ para todo x que cumple que $|x-x_0| < \delta$.



dicho de otra forma, una función f es continua en un intervalo si, dado un valor ε positivo cualquiera, muy pequeño, existe un valor $\delta>0$ tal que si $|x_0-x_1|<\delta$ (x_0, x_1 $\in$ al intervalo) entonces se cumple que $|f(x_0)-f(x_1)|<\varepsilon$.

Ampliando el concepto diremos que una función es uniformemente continua si lo anterior se cumple para cualesquiera x_0, x_1 pertenecientes al dominio de la función.

- Una función es continua si el valor del límite de la función es igual al valor de la función en el límite, es decir, es continua en un punto x_0 cuando el valor que toma la función para el punto x_0 es igual al límite de la función para dicho punto x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Ejemplo</u> Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ una función continua en x_0 que pertenece a (a, b)

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) f es derivable en un entorno de x_0

b) Existe una sucesión (x_n) de elementos de $[a, b]$ para los cuales $|f(x_n) - f(x_0)| > 1$

c) Para toda sucesión (x_n) de elementos de $[a, b]$ que converge a x_0 se tiene que $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

- Respuesta: **C**

- Una función tiene límite en el punto x_0 si el límite de $f(x^+)$ cuando x se aproxima a x_0 por la derecha coincide con el límite de la función cuando x se aproxima a x_0 desde la izquierda.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

el valor de la función cuando x tiende a x_0 por la derecha no coincide con el valor de la función cuando x tiende a x_0 desde la izquierda

- Una función es continua en un conjunto **A** $\subset \mathbb{R}$ si es continua en todos los puntos del conjunto **A**.

- Sean f y g dos funciones definidas en el conjunto **A** $\subset \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en el punto $x_0 \in$ **A**, las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y f/g (con $g(x_0) \neq 0$) también son continuas en x_0.

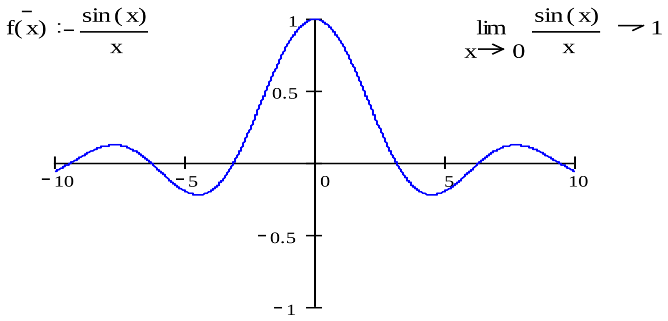
- La inversa de una función inyectiva continua también es continua.

- Sea f una función estrictamente creciente en el intervalo I. Si f es continua en I, entonces f^{-1} es estrictamente creciente y continua en f(I).

- Las funciones racionales tienen puntos de discontinuidad en los valores de x que anulan el denominador.

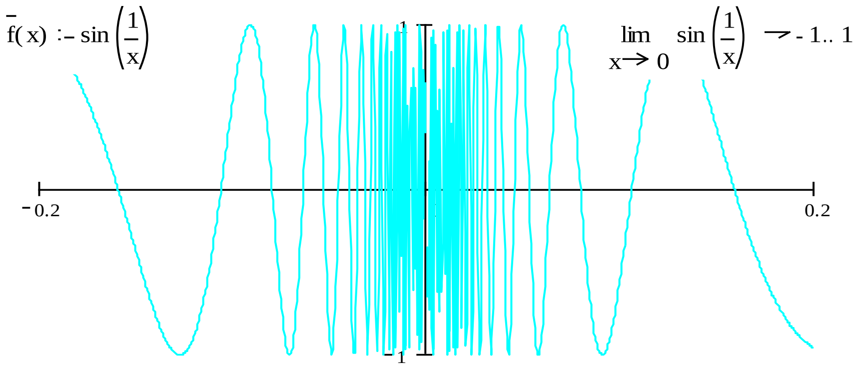
Resumen

- Para que una función sea continua en un punto *a*:
    - La función debe estar definida en el punto *a*, es decir, debe existir *f*(*a*).



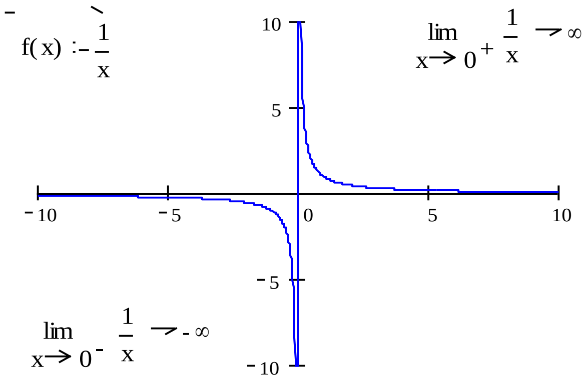
En el punto *a*=0 la función $f(a)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida. Pero si redefinimos la función como: $f(x)\begin{cases} =\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x\neq 0 \\ =\ 0 & \text{para } x=0 \end{cases}$ entonces *f*(*x*) es continua en *x*=0

- El límite de la función en el punto *a* debe existir y coincidir con el valor de la función en dicho punto: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.



La función $f(x)=\operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$ en la vecindad del punto *x*=0 está acotada entre -1 y 1

- Los límites laterales deben existir y coincidir.



En la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para el punto x=0 los límites laterales no coinciden.

<u>Examen</u> Sea $f(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$ si x<>0

Sea $f(x) = a$ si x=0

a) f es continua en $\mathbb{R}$ para a=1 ← correcta

b) f es discontinua en x=0 para todo a real

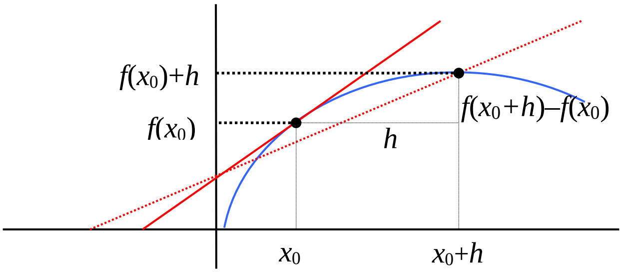
c) ninguno de los anteriores.

- Para que $f(x)$ sea continua en el 0: $f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$.
- Calculamos el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = \dfrac{sen\, 0}{0} = \dfrac{0}{0}$
- Aplicamos la regla de l´Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\, x}{x}\right)' = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$
- Por tanto, para a=1, $f(x)$ es continua en el 0, es decir, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y como $\dfrac{sen\, x}{x}$ es continua en $\mathbb{R}$ menos en el 0, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivadas

La derivada de una función en un punto x_0 representa la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \text{tg}(\alpha)$$



El conjunto de valores que toma la derivada de una función para cada uno de los puntos del dominio de dicha función se puede expresar asimismo como una nueva función.

A la nueva función que proporciona los valores para la derivada de la función en todos sus puntos se le llama ***función derivada***.

Propiedades

- Si una función es derivable en un punto a ($a \in \mathbf{A}$ abierto) entonces es continua en dicho punto a.
- Si una función no es continua en el punto a entonces no es derivable en a.
- Si una función es continua en un punto a, no se deduce que sea derivable en a.

Tabla de derivadas

función	÷ **función derivada**
▪ $k \cdot g(x)$	÷ $k \cdot g'(x)$
▪ $f(x) + g(x)$	÷ $f'(x) + g'(x)$
▪ $f(x) \cdot g(x)$	÷ $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

▪ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	÷ $\dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
▪ $f(x)^{m}$	÷ $m \cdot f(x)^{m-1} \cdot f'(x)$
▪ $f(g(x))$	÷ $f'(g(x)) \cdot g'(x)$
▪ k	÷ 0
▪ x	÷ 1
▪ x^{n}	÷ $n \cdot x^{n-1}$
▪ $\sqrt{x}$	÷ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
▪ $\dfrac{1}{x}$	÷ $-\dfrac{1}{x^2}$
▪ $\dfrac{1}{x^2}$	÷ $-\dfrac{2}{x^3}$
▪ $\dfrac{1}{x^n}$	÷ $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
▪ $\dfrac{1}{(x+1)^n}$	÷ $\dfrac{-n}{(x+1)^{n+1}}$
▪ $ln\ x$	÷ $\dfrac{1}{x}$
▪ $log_a\ x$	÷ $\dfrac{1}{x \cdot ln\ a}$
▪ e^{x}	÷ e^{x}
▪ a^{x}	÷ $a^{x} \cdot ln\ a$
▪ $e^{\frac{1}{x}}$	÷ $-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
▪ $sen\ x$	÷ $cos\ x$
▪ $cos\ x$	÷ $-\ sen\ x$

▪ $tg\ x$	$\div\ \ \dfrac{1}{cos^2 x} = sec^2 x = 1+tg^2 x$
▪ $cotg\ x$	$\div\ \ \dfrac{-1}{sen^2 x}$
▪ $\dfrac{sen\ x}{cos\ x}$	$\div\ \ \dfrac{1}{cos^2 x} = 1+\dfrac{sen^2 x}{cos^2 x}$
▪ $sen^2\ x$	$\div\ \ 2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x$
▪ $sen(\mathrm{n}x)$	$\div\ \ \mathrm{n}\cdot cos(\mathrm{n}x)$
▪ $tg^2\ x$	$\div\ \ 2 \cdot tg\ x \cdot (1+ tg^2 x)$
▪ $\lvert x\rvert$	$\div\ \ \dfrac{\lvert x\rvert}{x}$