Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:________________________________ Sección:________________________________

Pep 1

Forma B

1.- Se definen los conector lógicos $\boxtimes$ y $\oplus$ como:

$$p \boxtimes q \equiv \Big[\Big((\sim q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)\Big) \wedge (q \implies p)\Big] \implies (p \vee q)$$

$$p \oplus q \equiv \sim \Big(\Big[(\sim p \wedge q) \implies (\sim q \vee p)\Big] \implies \Big[\sim q \wedge ((p \vee q) \implies \sim q)\Big]\Big)$$

Solución: Primero simplifiquemos las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
p \boxtimes q &\equiv \Big[\Big((\sim q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)\Big) \wedge (q \implies p)\Big] \implies (p \vee q)\\
&\equiv \sim \Big[\Big(\sim q \vee (\sim p \wedge p)\Big) \wedge (\sim q \vee p)\Big] \vee (p \vee q)\\
&\equiv \sim \Big[\Big(\sim q \vee F\Big) \wedge (\sim q \vee p)\Big] \vee (p \vee q)\\
&\equiv \sim \Big[\sim q \wedge (\sim q \vee p)\Big] \vee (p \vee q)\\
&\equiv \sim \Big[\sim q\Big] \vee (p \vee q)\\
&\equiv q \vee (p \vee q)\\
&\equiv q \vee p \vee q\\
&\equiv p \vee q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \oplus q &\equiv \sim \Big(\Big[(\sim p \wedge q) \implies (\sim q \vee p)\Big] \implies \Big[\sim q \wedge ((p \vee q) \implies \sim q)\Big]\Big)\\
&\equiv \sim \Big(\sim \Big[\sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \vee p)\Big] \vee \Big[\sim q \wedge (\sim (p \vee q) \vee \sim q)\Big]\Big)\\
&\equiv \sim \Big(\sim \Big[(p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p)\Big] \vee \Big[\sim q \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q)\Big]\Big)\\
&\equiv \sim \Big(\sim \Big[(p \vee \sim q)\Big] \vee \Big[\sim q\Big]\Big)\\
&\equiv \sim \Big(\Big[\sim p \wedge q\Big] \vee \Big[\sim q\Big]\Big)\\
&\equiv \sim \Big(\sim p \vee \sim q\Big)\\
&\equiv p \wedge q
\end{aligned}$$

i) Demuestre que se cumple la ley de absorción entre $\boxtimes$ y $\oplus$, es decir $p \boxtimes (p \oplus q) \equiv p$.
Solución:

$$\begin{aligned} p \boxtimes (p \oplus q) \equiv & \underbrace{p \vee (p \wedge q)}_{\text{Ley de absorción de } \wedge \text{ y } \vee} \\ \equiv & \; p \end{aligned}$$

ii) Determine si la siguiente proposición es contingencia, contradicción o tautología.

$$\Big[(p \boxtimes q) \wedge (\sim p \oplus q)\Big] \implies (p \boxtimes q)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \Big[(p \boxtimes q) \wedge (\sim p \oplus q)\Big] \implies (p \boxtimes q) &\equiv \Big[(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)\Big] \implies (p \vee q) \\ &\equiv \sim \Big[(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)\Big] \vee (p \vee q) \\ &\equiv \Big[\sim (p \vee q) \vee \sim (\sim p \wedge q)\Big] \vee (p \vee q) \\ &\equiv \sim (p \vee q) \vee \sim (\sim p \wedge q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv \underbrace{\sim (p \vee q) \vee (p \vee q)}_{V} \vee \sim (\sim p \wedge q) \\ &\equiv V \vee \sim (\sim p \wedge q) \\ &\equiv V \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión anterior es una tautología.
Observación: No es necesario saber la simplificación de $\boxtimes$ o $\oplus$:

$$\begin{aligned} \Big[(p \boxtimes q) \wedge (\sim p \oplus q)\Big] \implies (p \boxtimes q) &\equiv \sim \Big[(p \boxtimes q) \wedge (\sim p \oplus q)\Big] \vee (p \boxtimes q) \\ &\equiv \sim (p \boxtimes q) \vee \sim (\sim p \oplus q) \vee (p \boxtimes q) \\ &\equiv \underbrace{\sim (p \boxtimes q) \vee (p \boxtimes q)}_{V} \vee \sim (\sim p \oplus q) \\ &\equiv V \end{aligned}$$

2.- Sean A, B y C tres conjuntos.

i) Pruebe la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\Big((A - B^c) - C^c\Big) \cup \Big((A - B) \cup (B - A^c)\Big) = A$$

ii) Se definen ahora los conjuntos A, B y C como:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : (\exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2k} = 3) \wedge (|2x+1| \leq 61)\} \\
B &= \{x \in \mathbb{Z} : (\exists r \in \mathbb{R} : x \cdot r = 1) \implies (\exists l \in \mathbb{R} : (x+l)^2 < 0)\} \\
C &= \{x \in [-30, 30] : (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 11k + 4) \vee (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 13k - 5)\}
\end{aligned}$$

Determine explícitamente los conjuntos A, B y C y calcule $n((C \cap A) \cup B)$

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : (\exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2k} = 3) \wedge (|2x+1| \leq 61)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x \text{ es múltiplo de 6 sin el 0}) \wedge (-61 \leq 2x + 1 \leq 61)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x \text{ es múltiplo de 6 sin el 0}) \wedge (-62 \leq 2x \leq 60)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x \text{ es múltiplo de 6 sin el 0}) \wedge (-31 \leq x \leq 30)\} \\
&= \{\pm 6, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 30\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in \mathbb{Z} : (\exists r \in \mathbb{R} : x \cdot r = 1) \implies (\exists l \in \mathbb{R} : (x+l)^2 < 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \sim (\exists r \in \mathbb{R} : x \cdot r = 1) \vee (\exists l \in \mathbb{R} : (x+l)^2 < 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\forall r \in \mathbb{R} : x \cdot r \neq 1) \vee (\exists l \in \mathbb{R} : (x+l)^2 < 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\text{Solo el 0 cumple esta propiedad}) \vee (\text{Ningún número real cumple esta condición})\} \\
&= \{0\} \\
C &= \{x \in [-30, 30] : (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 11k + 4) \vee (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 13k - 5)\} \\
&= \{x \in [-30, 30] : (\text{múltiplos de 11 más 4}) \vee (\text{múltiplos de 13 menos 5})\} \\
&= \{-29, -18, -7, -5, 4, 8, 21, 15, 26\}
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se tiene que:

$$C \cap A = \{-18\}$$

y

$$(C \cap A) \cup B = \{-18, 0\}$$

así:

$$n((C \cap A) \cup B) = 2$$

3.- Determine todas las raíces del polinomio $P(x) = 49x^4 + 14x^3 - 260x^2 - 70x + 75$ sabiendo que $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$ son raíces de $P(x)$. (*Hint:* $56^2 = 3136$)

Solución: Como $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$ son raíces de $P(x)$, por el teorema del factor tenemos que $(x - \sqrt{5})$ y $(x + \sqrt{5})$ dividen a $P(x)$ y por lo tanto $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = (x^2 - 5)$ también lo divide, así, dividiendo:

$$
\begin{array}{l}
\quad 49x^4 + 14x^3 - 260x^2 - 70x + 75 : x^2 - 5 = 49x^2 + 14x - 15 \\
-\underline{(49x^2 - 245x^2)} \\
\qquad\qquad 14x^3 - 15x^2 - 70x + 75 \\
\qquad\quad - \underline{(14x^3 - 70x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 15x^2 + 75 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \underline{(-15x^2 + 75)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Con lo anterior, tenemos que:

$$P(x) = (x^2 - 5)(49x^2 + 14x - 15),$$

y como buscamos las raíces de $P(x)$, debemos resolver la ecuación $P(x) = 0$, lo que nos entrega:

$$P(x) = (x^2 - 5)(49x^2 + 14x - 15) = 0,$$

y para esto se tiene que $(x^2 - 5) = 0$ o $(49x^2 + 14x - 15) = 0$. La primera ecuación nos entrega $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$, que ya sabemos que son raíces. La segunda ecuación $49x^2 + 14x - 15 = 0$ es una ecuación cuadrática, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - (4) \cdot (49) \cdot (-15)}}{2 \cdot 49} \\
&= \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 2940}}{2 \cdot 49} \\
&= \frac{-14 \pm \sqrt{3136}}{2 \cdot 49} \\
&= \frac{-14 \pm 56}{2 \cdot 49} \\
&= \frac{-1 \pm 4}{7}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las otras dos raíces de $P(x)$ son $x = \dfrac{3}{7}$ y $x = -\dfrac{5}{7}$