Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.
Autor: Axel Silva Fredes.

Polinomios

1 Polinomios

Definición 1.1. Definimos un polinomio en la variable x a una expresión algebraica de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Donde los términos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman coeficientes del polinomio y cumplen que $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1.1.

i) $3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 10$

ii) $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{4} - 3x^2 + 2$

iii) $5x^4 - 3x^2 + 1$

En los ejemplos anteriores podemos ver que, para el ejemplo $i)$ se tiene que $a_4 = 4$, $a_3 = -2$, $a_2 = 5$, $a_1 = -1$ y $a_0 = 10$ los cuales cumplen todas las restricciones impuestas para los coeficientes.
Para el ejemplo $iii)$ podemos notar que $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -3$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 1$.

Observación. Un polinomio tiene que ser una combinación lineal de potencias naturales de x. Por ejemplo, las expresiones:

- $\dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$
- $\dfrac{x + 1}{x^2 + 2}$

no son polinomios.

Definición 1.2. Sea un polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$, diremos que $P(x)$ es **mónico** si $a_n = 1$.

Ejemplo 1.2.

i) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$

ii) $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 2$
son polinomios mónicos.

Observación. Se hace énfasis a la variable a utilizar, porque para un polinomio no es obligación usar la variable x. Por ejemplo podemos definir los polinomios:

$$P(y) = y^3 + 3y^2 - 5y + 7$$
$$Q(\star) = \star^2 + 2\star - 4$$

Definición 1.3. Sea $P(x)$ un polinomio en la variable x, definimos el grado de $P(x)$, el cual lo denotamos por $\delta(P(x))$, como el exponente más grande de la variable x, siempre y cuando su coeficiente sea disinto de 0.

Ejemplo 1.3.

i) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 6 \implies \delta(P(x)) = 3$

ii) $Q(x) = x^2 - 3 \implies \delta(Q(x)) = 2$

iii) $R(x) = -5x^2 + 4x^5 - 3 + x^3 \implies \delta(R(x)) = 5$

iv) $T(x) = 7 \implies \delta(T(x)) = 0$

El ejemplo iv) se deduce de $7 = 7x^0$. El polinomio anterior se llama polinomio constante, por lo tanto todo número real es un polinomio de grado 0.

La variable x de un polinomio, para nuestro contexto representa un número, por lo tanto, al igual que una función, podemos evaluar polinomios en valores arbitrarios, por ejemplo definamos el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$, con esto podemos evaluar en $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$:

$$\begin{aligned}
P(1) &= (1)^3 - (1)^2 + 2(1) - 3 = -1 \\
P(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -19 \\
P(3) &= (3)^3 - (3)^2 + 2(3) - 3 = 21
\end{aligned}$$

Bajo la idea anterior, podemos entonces decir que un polinomio es un número, es decir si $x \in \mathbb{R}$ entonces $P(x) \in \mathbb{R}$. Esto nos da la posibilidad de usar las propiedades ya conocidas de los números reales en polinomios.

Propiedades: Sean $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $T(x)$ cuatro polinomios en la variable x, entonces:

i) (Conmutatividad de la suma en polinomios):

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$$

ii) (Conmutatividad de la multiplicación en polinomios):

$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$$

iii) (Asociatividad de la suma en polinomios):

$$(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x)) = P(x) + Q(x) + R(x)$$

iv) (Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma en polinomios):

$$P(x) \cdot (Q(x) + R(x)) = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

v) Suma de fracciones con numerador y denominador polinomiales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x) + R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot T(x)}$$

vi) Igualdad de polinomios:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

sí y sólo si:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_{n-1} &= b_{n-1} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_1 \\ a_0 &= b_0 \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos realizar las siguientes operaciones:

Ejemplo 1.4.

i) $2x + x = (2+1)x = 3x$

ii) $(x+1)(x+2) = (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot 2 = x\cdot x + 1\cdot x + x\cdot 2 + 1\cdot 2 = x^2 + 3x + 2$

iii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1\cdot x^2 + 2\cdot x}{x\cdot x^2} = \dfrac{x^2+2x}{x\cdot x^2} = \dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}\cdot x^2} = \dfrac{x+2}{x^2}$

Definición 1.4. Sea $P(x)$ un polinomio y $\lambda \in \mathbb{R}$. Diremos que λ es una raíz de $P(x)$ sí y sólo si $P(\lambda) = 0$.

Ejemplo 1.5.

- $x = 2$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$ ya que:

$$P(2) = (2)^2 + (2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$$

- $x = -3$ y $x = 1$ son raíces del polinomio $Q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ ya que:

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^4 + (-3)^3 - 7(-3)^2 - (-3) + 6 = 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0 \\ P(1) &= (1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - (1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0 \end{aligned}$$

Observación. Para esta primera parte del apunte solo estudiaremos polinomios con raíces reales.

Como vimos anteriormente, podemos extender las propiedades de los números reales a polinomios, por lo tanto no es raro definir lo siguiente:

Definición 1.5. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios. Diremos que $Q(x)$ divide a $P(x)$ si existe un tercer polinomio, $L(x)$, tal que:

$$P(x) = Q(x)\cdot L(x).$$

Ejemplo 1.6. $Q(x) = x - 1$ divide al polinomio $P(x) = x^4 - 1$ ya que:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$$

Ejemplo 1.7. $Q(x) = x^2 - 3x + 5$ divide al polinomio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 6x^2 - 12x + 20$, ya que:

$$x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 6x^2 - 12x + 20 = (x^2 - 3x + 5)(x^3 - 2x^2 + 4)$$

Teorema 1.1. *(Teorema del resto)*
Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios tal que $\delta(P(x)) \geq \delta(Q(x))$ entonces existen únicos polinomios $L(x)$ y $R(x)$, con $0 \leq \delta(R(x)) < \delta(Q(x))$ tal que:

$$P(x) = Q(x)L(x) + R(x).$$

Observación. $R(x)$, al igual que el teorema del resto en $\mathbb{R}$ se llama resto. De la misma manera, si $R(x) = 0$ diremos que $Q(x)$ divide a $P(x)$.

Teorema 1.2. *(Teorema del factor)*
Sea $P(x)$ un polinomio y $\lambda \in \mathbb{R}$. λ es una raíz de $P(x)$ sí y sólo sí $(x - \lambda)$ divide a $P(x)$. En otras palabras:

$$P(\lambda) = 0 \iff (x - \lambda) \text{ divide a } P(x).$$

Ejemplo 1.8. Sea $P(x) = x^2 + x - 6$. Como vimos en un ejemplo anterior, $x = 2$ es una raíz de este polinomio, por lo tanto, por el teorema del factor, podemos asegurar que $(x-2)$ divide a $P(x)$, es decir, existe un polinomio $L(x)$ tal que:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)L(x),$$

el cual no es difícil comprobar que $L(x) = x + 3$.

Observación. En el ejemplo anterior, vemos que $x^2+x-6 = (x-2)(x+3) = (x+3)(x-2)$, por lo tanto se puede concluir que $(x + 3)$ divide al polinomio, y por el teorema del factor $x = -3$ es también una raíz.

1.1 Algoritmo de división de polinomios

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, ¿cómo podemos encontrar la representación de esos polinomios en función del teorema del resto?.
Antes de explicar un método directo, veremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.9. Encontrar la representación del teorema del resto para los polinomios $x^2 + 5x + 6$ y $x + 3$.
Notemos que $x + 3$ es un polinomio de grado 1 y $x^2 + 5x + 6$ de grado 2, como buscamos polinomios $L(x)$ y $R(x)$ tal que:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)L(x) + R(x)$$

podemos concluir que $L(x)$ es un polinomio de grado 1, supongamos $L(x) = x$. Con lo anterior $(x + 3) \cdot x = x^2 + 3x$. Podemos escribir esto como:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)x + 2x + 6,$$

de donde $2x + 6$ resulta de $(x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 3x)$. Al igual que en una división normal, nos preguntamos si el resto resultante puede seguir siendo dividido por $(x + 3)$, lo cual en nuestro caso si se puede, ya que $(2x + 6) = 3(x + 3)$. Por lo tanto, juntando ambas cosas podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)x + 2x + 6 = (x + 3)x + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2).$$

De forma general, para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$ (el grado de $P(x)$ debe ser mayor que el grado de $Q(x)$) debemos seguir el siguiente proceso o algoritmo:

1° Ordenar ambos polinomios de manera decreciente según su grado.

2° Dividir la potencia de mayor grado de $P(x)$ con la potencia de mayor grado de $Q(x)$. (Incluyendo sus coeficientes).

3° El resultado de la división anterior se debe multiplicar por todo el polinomio $Q(x)$.

4° El resultado anterior se debe restar a $P(x)$, obteniendo así, un polinomio de grado menor a $P(x)$.

5° Se debe repetir el proceso entre el resultado de la resta anterior y el mismo polinomio $Q(x)$ (desde el segundo paso).

6° El proceso se termina cuando en la resta del cuarto paso se obtenga un polinomio de grado menor a $Q(x)$.

7° El resultado de la división serán todos los términos obtenidos en la repetición del segundo paso.

Ejemplo 1.10. Realizar la división $(3x^3 - 4x^2 - 7x + 6) : (x - 2)$.

$$
\begin{array}{l}
3x^3 - 4x^2 - 7x + 6 : x - 2 = 3x^2 + 2x - 3 \\
-\underline{(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 7x + 6 \\
\qquad - \underline{(2x^3 - 4x)} \\
\qquad\qquad\quad - 3x + 6 \\
\qquad\qquad - \underline{(-3x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto se tiene que:

$$3x^3 - 4x^2 - 7x + 6 = (x - 2)(3x^2 + 2x - 3) + 0$$

Ejemplo 1.11. Realizar la división $(x^5 + -4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7) : (x^2 - 2)$

$$
\begin{array}{l}
x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 : x^2 - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 13 \\
-\underline{(x^5 - 2x^3)} \\
\quad - 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 2x - 7 \\
\quad - \underline{(-4x^4 + 8x^2)} \\
\qquad\qquad 5x^3 - 13x^2 + 2x - 7 \\
\qquad\quad - \underline{(5x^3 - 10x)} \\
\qquad\qquad\qquad - 13x^2 + 12x - 7 \\
\qquad\qquad\qquad - \underline{(-13x^2 + 26)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 12x - 33
\end{array}
$$

Podemos notar que el resto resultante es un polinomio de grado 1, el cual es menor que el grado de $x^2 - 2$, por lo tanto el proceso termina ahí, quedando:

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = (x^2 - 2)(x^3 - 4x^2 + 5x - 13) + \underbrace{12x - 33}_{\text{Resto}}$$

2 Obtención de raíces en polinomios

2.1 Polinomios cuadráticos

Definición 2.1. Se define un **polinomio cuadrático** como un polinomio de la forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

de donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Para poder encontrar las raíces de un polinomio cuadrático necesitamos lo siguiente:

Ejercicio 2.1. Sean $p, q \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de $\phi, \xi \in \mathbb{R}$, en función de p y q, tal que:

$$x^2 + px + q = (x + \xi)^2 + \phi$$

Solución:. Tomando el lado derecho de la igualdad y resolviendo el cuadrado tenemos:

$$(x + \xi)^2 + \phi = x^2 + 2x\xi + \xi^2 + \phi$$

Usando la propiedad de igualdad de conjuntos tenemos que:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x\xi + \xi^2 + \phi$$

sí y sólo sí:

$$\begin{aligned} p &= 2\xi \\ q &= \xi^2 + \phi \end{aligned}$$

Despejando la primera ecuación tenemos que $\xi = \frac{p}{2}$, y reemplazando lo anterior en la segunda ecuación se tiene:

$$q = \xi^2 + \phi = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \phi = \frac{p^2}{4} + \phi,$$

por lo tanto $\phi = q - \frac{p^2}{4}$. $\square$

El proceso anterior es conocido como **completación de cuadrados.**

Ejemplo 2.1. Usemos completación de cuadrados para el polinomio $P(x) = x^2 + 8x - 14$. En este caso se puede identificar $p = 8$ y $q = -14$.
Por lo tanto :

$$P(x) = x^2 + 8x - 14 = \left(x + \left(\frac{8}{2}\right)\right)^2 + (-14) - \frac{(8)^2}{4} = (x + 4)^2 - 14 - 16 = (x + 4)^2 - 30$$

Ejemplo 2.2. Usemos completación de cuadrados en el polinomio $Q(x) = x^2 - 12x + 20$. Aquí se tiene que $p = -12$ y $q = 20$, por lo tanto:

$$Q(x) = x^2 - 12x + 20 = \left(x + \left(\frac{-12}{2}\right)\right)^2 + (20) - \frac{(-12)^2}{4} = (x - 6)^2 + 20 - 36 = (x - 6)^2 - 16$$

Para poder encontrar las raíces de un polinomio cuadrático se debe resolver la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ya que debemos recordar que las raíces de un polinomio son valores que al evaluarlos en el, da como resultado 0.
Ahora, cabe destacar, que la fórmula presentada antes para completación de cuadrados solo sirve para polinomios cuadráticos mónicos, por lo tanto podemos hacer lo siguiente:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac) = \frac{1}{a}((ax)^2 + b(ax) + ac),$$

el cual lo podemos identificar como un polinomio mónico en la variable ax. Para eso hagamos el cambio de variable $z = ax$, quedando así el polinomio:

$$\frac{1}{a}(z^2 + bz + ac),$$

de donde, identificándolo con la completación de cuadrados se tiene que $p = b$ y $q = ac$, así:

$$\frac{1}{a}(z^2 + bz + ac) = \frac{1}{a}\left[\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right],$$

lo anterior lo reemplazamos en la ecuación de las raíces y se tiene:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left[\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right] = 0,$$

usando la igualdad del lado derecho, y multiplicando por a se tiene:

$$\left[\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right] = 0,$$

reordenando la ecuación se obtiene:

$$\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 = -ac + \frac{b^2}{4},$$

aplicando raíz cuadrada en ambos lados:

$$z + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{-ac + \frac{b^2}{4}} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

despejando z :

$$z = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

usando ahora que $z = ax$ se tiene que:

$$z = ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

despejando x nos queda:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula anterior es la que nos permite encontrar las raíces de un polinomio cuadrático.

Ejemplo 2.3. Encontrar las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 14x + 24$.
En $P(x)$ podemos identificar $a = 1$, $b = -14$ y $c = 24$. Usando la fórmula tenemos:

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(1)(24)}}{2(1)} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2},$$

el signo $\pm$ nos indica que debemos usar $+$ y $-$ como dos casos por separado, así:

$$x_1 = \frac{14 + 10}{2} = 12$$
$$x_2 = \frac{14 - 10}{2} = 2$$

por lo tanto tenemos que $x = 12$ y $x = 2$ son raíces de $P(x)$, lo cual se puede comprobar:

$$P(12) = (12)^2 - 14(12) + 24 = 144 - 168 + 24 = 0$$
$$P(2) = (2)^2 - 14(2) + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$$

Ejemplo 2.4. Encontrar las raíces del polinomio $P(x) = 9x^2 - 6x - 8$.
En $P(x)$ podemos identificar $a = 9$, $b = -6$ y $c = -8$. Usando la fórmula tenemos:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(-8)}}{2(9)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{18} = \frac{6 \pm 18}{18},$$

así:

$$x_1 = \frac{6 + 18}{18} = \frac{4}{3}$$
$$x_2 = \frac{6 - 18}{18} = -\frac{2}{3}$$

por lo tanto tenemos que $x = \frac{4}{3}$ y $x = -\frac{2}{3}$ son raíces de $P(x)$, lo cual se puede comprobar:

$$P\left(\frac{4}{3}\right) = 9\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{4}{3}\right) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$
$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

2.2 Polinomios bicuadráticos.

Definición 2.2. Se define un **polinomio bicuadrático** como un polinomio de la forma:

$$P(x) = ax^4 + bx^2 + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Para poder encontrar las raíces de este tipo de polinomios, debemos hacer un cambio de variable. Usando la definición anterior, haremos el cambio $u = x^2$, elevando al cuadrado se tiene que $u^2 = x^4$, reemplazando lo anterior se tiene que:

$$P(x) = ax^4 + bx^2 + c = au^2 + bu^2 + c,$$

lo que resulta ser un polinomio cuadrático en la variable u. Por lo tanto, primero se deben buscar las raíces del polinomio en la variable u, es decir:

$$au^2 + bu^2 + c = 0,$$

usando la fórmula general, se tiene que:

$$u_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$
$$u_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Como el cambio de variable era $u = x^2$, se tiene que $x = \pm u$, por lo tanto, las 4 raíces de $ax^4 + bx^2 + c$ (siempre que existan) son:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}$$

Donde $x_{1,2}$ significa que hay dos valores distintos x_1 y x_2, ambos determinados según $\pm$.

Ejemplo 2.5. Entontrar las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x^2 + 12$.

Solución:. Usando el cambio de variable $u = x^2$, obtenemos la ecuación:

$$u^2 - 8u + 12 = 0,$$

de donde las soluciones son :

$$u_1 = \frac{8 + \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} = \frac{8 + 4}{2} = 6$$
$$u_2 = \frac{8 - \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 - \sqrt{16}}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

Voliendo a usar el cambio de variable, pero con $x = \pm\sqrt{u}$, se tienen las soluciones:

$$x_1 = \sqrt{u_1} = \sqrt{2}$$
$$x_2 = -\sqrt{u_1} = -\sqrt{2}$$
$$x_3 = \sqrt{u_2} = \sqrt{6}$$
$$x_4 = -\sqrt{u_2} = -\sqrt{6}$$

De donde, probando por ejemplo con x_1 se tiene:

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 8(\sqrt{2})^2 + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$$

□

2.3 Polinomios con raíces racionales.

Un método para encontrar raíces de polinomios generales, es cuando un polinomio tiene raíces racionales, pero para eso necesitamos ciertas condiciones, las cuales las enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *(Teorema de las raíces racionales.)*
Sea el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tal que los coeficientes a_i son números enteros y además $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Entonces si $P(x)$ posee alguna raíz racional irreducible de la forma $\frac{p}{q}$ entonces se cumple que:

- *p divide a a_0*
- *q divide a a_n*

Observación. Recordemos que es un número racional irreducible:

Definición 2.3. Sean p y q números enteros, diremos que p y q son **coprimos** entre sí, si los únicos divisores en común entre p y q son el 1 y el -1. En otras palabras p y q son coprimos si $MCD(p, q) = 1$.

La definición anterior es diferente a la de número primo, ya que esta es una relación que se da entre dos números.

Ejemplo 2.6.

- 3 y 5 son números primos y al mismo tiempo son coprimos entre si.
- 4 y 15 son números compuestos pero si son coprimos entre sí (MCD(4,15)=1).
- 7 es primo y 9 es compuesto, pero son coprimos entre sí.

Definición 2.4. Sean p y q números enteros con $q \neq 0$. Diremos que el número racional $\dfrac{p}{q}$ es un racional irreducible sí y sólo sí p y q son coprimos entre sí.

Volviendo al teorema anterior, veremos la utilidad de su uso con un ejemplo:

Ejemplo 2.7. Encuentre las raíces del polinomio $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 21x + 10$.

Solución:. Como $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y el primer y último coeficiente son distintos de cero, asumamos que $P(x)$ tiene una solución racional $\dfrac{p}{q}$ cumpliendo las condiciones del teorema.
Como p debe ser un divisor de 10 tenemos que p puede tomar los valores $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Por otro lado, como q es divisor de 3, q puede tomar los valores $\pm 1, \pm 3$. Así los candidatos a raíces de $P(x)$ son:

- $x = \pm\dfrac{1}{1} = \pm 1$
- $x = \pm\dfrac{1}{3}$
- $x = \pm\dfrac{2}{1} = \pm 2$
- $x = \pm\dfrac{2}{3}$
- $x = \pm\dfrac{5}{1} = \pm 5$
- $x = \pm\dfrac{5}{3} = \pm 1$
- $x = \pm\dfrac{10}{1} = \pm 10$
- $x = \pm\dfrac{10}{3}$

El procedimiento a seguir es probar cuáles de estas opciones es una raíz de $P(x)$:

$$\begin{aligned}
P(1) &= 3(1)^3 + 7(1)^2 - 21(1) + 10 = 20 \\
P(-1) &= 3(-1)^3 + 7(-1)^2 - 21(-1) + 10 = 35 \\
P\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 21\left(\frac{1}{3}\right) + 10 = \frac{35}{9} \\
&\vdots \\
P\left(\frac{2}{3}\right) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 21\left(\frac{2}{3}\right) + 10 = 0
\end{aligned}$$

Dentro de nuestra búsqueda (que en este caso es extensa por la gran cantidad de posibilidades que hay) encontramos una raíz de $P(x)$ la cual es $x_1 = \dfrac{2}{3}$. Por el teorema del factor tenemos que $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ divide al polinomio $P(x)$, por lo tanto podemos usar el algoritmo de división:

$$
\begin{array}{r}
\big(\quad 3x^3 + 7x^2 - 21x + 10\big) \div \left(x - \frac{2}{3}\right) = 3x^2 + 9x - 15 \\
\underline{-\,3x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
9x^2 - 21x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-\,9x^2 \;\; + 6x} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
-\,15x + 10 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
\underline{15x - 10} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad
\end{array}
$$

Con esto podemos usar la representación del teorema del resto como :

$$3x^3 + 7x^2 - 21x + 10 = (x - \frac{2}{3})(3x^2 + 9x - 15).$$

Para encontrar las otras dos raíces de $P(x)$ basta con resolver la ecuación:

$$3x^2 + 9x - 15 = 0,$$

la cual, usando la fórmula general de la ecuación cuadrática da como raíces a $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ y $x_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2}$. □

Observación. Este método tiene un problema, es que se podrían enfrentar a polinomios que no tengan raíces racionales, como por ejemplos las dos soluciones irraciones x_2 y x_3 de antes.

3 Ejercicios Resueltos:

1.- Halle los valores de k para que al dividir el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k$ por $(x - 2)$, el resto sea 6 .

Proof. **Solución:** Dividiendo $p(x)$ por $(x - 2)$ se tiene lo siguiente:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^4 + 2x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k : x - 2 = x^3 + 4x^2 + 5x + 10 + k^2 \\
-\underline{x^4 + 2x^3} \\
\qquad\quad 4x^3 - 3x^2 + k^2x - 12k \\
\qquad -\,\underline{4x^3 + 8x^2} \\
\qquad\qquad\quad 5x^2 + k^2x - 12k \\
\qquad\qquad -\,\underline{5x^2 + 10x} \\
\qquad\qquad\qquad (10 + k^2)x - 12k \\
\qquad\qquad\quad -\,\underline{(10 + k^2)x + 20 + 2k^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2k^2 - 12k + 20
\end{array}
$$

Con lo anterior se tiene que el resto es $2k^2 - 12k + 20$, por lo tanto se tiene que $2k^2 - 12k + 20 = 6$, dando la ecuación $2k^2 - 12k + 14 = 0$

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 112}}{4} \\
k &= \frac{12 \pm \sqrt{32}}{4} \\
k &= \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{4} \\
k &= 3 \pm \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Forma alternativa: Escribiendo $p(x)$ en función del teorema del resto se tiene que:

$$p(x) = (x-2)q(x) + r(x),$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios. Evaluando en $x = 2$ se tiene que:

$$p(2) = 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + k^2 \cdot 2 - 12k = (x-2)q(x) + r(x).$$

De donde $r(x) = 60.3$ por enunciado, así:

$$2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + k^2 \cdot 2 - 12k = 16 + 16 - 12 + 2k^2 - 12k = 6,$$

obteniendo así la ecuación $2k^2 - 12k + 20 = 6$, que tiene como solución $k = 3 \pm \sqrt{2}$. $\square$

2.- Sea el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$. Encuentre las raíces de $P(x)$ sabiendo que una de ellas es $x = -3$.

Solución:. Como tenemos que $x = -3$ es una raíz de $P(x)$, por el teorema del factor se tiene que $(x - (-3)) = (x + 3)$ divide a $P(x)$, por lo tanto existe un polinomio $L(x)$ tal que :

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x+3)L(x).$$

De lo anterior se pueden hacer las siguientes conclusiones:

- Como $P(x)$ es un polinomio de grado 3 y $(x + 3)$ es un polinomio de grado 1, necesariamente $L(x)$ es un polinomio de grado 2.
- Como $P(x)$ y $(x+3)$ son polinomios mónicos, necesariamente $L(x)$ también debe serlo.
- Con las observaciones anteriores podemos concluir que $L(x)$ es de la forma:

$$L(x) = x^2 + bx + c$$

Usando la representación anterior tenemos que:

$$(x+3)L(x) = (x+3)(x^2+bx+c) = x^3+bx^2+cx+3x^2+3bx+3c = x^3+(b+3)x^2+(c+3b)x+3c.$$

Como lo anterior debe ser igual a $P(x)$, se tiene que:

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = x^3 + (b+3)x^2 + (c+3b)x + 3c,$$

y usando la igualdad de polinomios se puede obtener que :

$$\begin{aligned} b + 3 &= 5 \\ c + 3b &= -2 \\ 3c &= -24 \end{aligned}$$

Usando la primera y tercera ecuación se obtiene que $b = 2$ y $c = -8$, ambos valores hacen válida también la segunda ecuación, así:

$$L(x) = x^2 + 2x - 8.$$

Con lo anterior tenemos que

$$P(x) = (x+3)(x^2 + 2x - 8).$$

Como estamos en la búsqueda de las raíces de $P(x)$ sabemos que se debe resolver la ecuación

$$P(x) = 0,$$

que en nuestro caso sería resolver

$$(x+3)(x^2+2x-8)=0,$$

recordando una propiedad de los números reales:

$$x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0,$$

se tiene que :

$$(x+3)(x^2+2x-8)=0 \implies (x+3)=0 \wedge (x^2+2x-8)=0,$$

de donde $(x+3)=0$ nos entrega la solución $x=-3$ que ya conocemos. Por lo tanto ahora nos queda resolver la ecuación:

$$x^2+2x-8=0,$$

la cual usando la fórmula general de la ecuación cuadrática nos entrega las soluciones $x=2$ y $x=-4$. Con lo anterior tenemos que las raíces del polinomio $P(x)$ son $x=2$, $x=-3$ y $x=-4$, lo cual se puede comprobar:

$$\begin{aligned}
P(2) &= (2)^3+5(2)^2-2(2)-24 = 8+20-4-24=0\\
P(-3) &= (-3)^3+5(-3)^2-2(-3)-24 = -27+45+6-24=0\\
P(-4) &= (-4)^3+5(-4)^2-2(-4)-24 = -64+80+8-24=0
\end{aligned}$$

Observación. Una forma alternativa para encontrar $L(x)$ es usar el algoritmo de división de polinomios para calcular $(x^3+5x^2-2x-24):(x+3)$

$\square$