
Principio de Inducción

1. Demuestre, usando el principio de inducción, las siguientes igualdades:

- i) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
- ii) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.
- iii) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.

2. Demuestre, usando el principio de inducción, las siguientes desigualdades:

- i) $3^n > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ii) $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \geq 1$.
- iii) $n! > 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 7$.

3. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones:

- i) $6n - 1$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ii) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$. (**Hint:** $n(n + 1)$ *es un número par*)
- iii) $7^n - 2^n$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- iv) $7^{2n} + 16n - 1$ es un múltiplo de 64, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- v) $2^n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea la sucesión recursiva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}.$$

- i) Demuestre que $(a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Demuestre que $0 < a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea la sucesión recursiva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}.$$

- i) Demuestre que $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Demuestre que $a_{2n} > 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.