Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.
Autor: Axel Silva Fredes.

Lógica y Predicados

1 Lógica

Definición 1.1. Una proposición es una oración o expresión que se puede considerar como verdadera o falsa, pero no ambas cosas al mismo tiempo. Por ejemplo, la afirmación "$2+2=4$" es una proposición verdadera, mientras que la afirmación "$x+3>7$" no es una proposición en sí misma, ya que depende del valor de x. Sin embargo, si se fija el valor de x, por ejemplo, x=4, entonces la afirmación se convierte en una proposición verdadera.

Ejemplo 1.1.

i) A: Si estudié para la prueba.

ii) B: Hoy iré a clases.

iii) C: 9 es un número primo. (proposición cerrada)

iv) D: $x+y=5$. (proposición abierta)

La forma de poder conectar estas sentencias es usando **conectivos lógicos o proposicionales**. La noción más simple para conector lógico es la negación y la denotaremos por el símbolo $\sim$.

Ejemplo 1.2.

i) $\sim$A: No estudié para la prueba.

ii) $\sim$B: Hoy no iré a clases.

iii) $\sim$C: 9 no es un número primo.

iv) $\sim$ D: $x+y\neq 5$.

Definición 1.2. Una **tabla de verdad** es una forma gráfica para expresar los distintos valores de verdad que puede tener una combinación de proposiciones bajo aplicación de conectores lógicos.

Para entender como funcionan las tablas de verdad, construiremos la tabla del conector negación, que se hace de forma natural. Tomemos una proposición p y con esto:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Lo anterior nos dice que cuando la proposición p toma el valor de verdad V (Verdadero) la negación de p tiene como valor de verdad F (Falso). Usando esta tabla definiremos nuevos conectores lógicos.

Definición 1.3. Definimos el conector lógico **conjunción**, denotado por $\wedge$ (se lee "y") tal que para dos proposiciones p y q, $p \wedge q$ es verdadero cuando ambas , p y q, son verdaderas. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Definición 1.4. Definimos el conector lógico **disjunción**, denotado por $\vee$ (se lee "o") tal que para dos proposiciones p y q, $p \vee q$ es verdadera cuando al menos una de ellas, p o q, son verdaderas. Al igual que en nuestro lenguaje hay una ambigüedad con respecto a esta disjunción, ya que puede ser exclusiva o inclusiva, la disjunción exclusiva la denotaremos por $\veebar$. Para ejemplificar esto denotemos p y q como:

i) p: Un conjunto A es acotado.

ii) q: Un conjunto A es finito.

- $p \vee q$: A es acotado o finito.
- $p \veebar q$: A es acotado ó finito.

El primero nos dice que A es acotado o finito o incluso puede ser ambos, la segunda restringe que A sólo debe tener una de esas características. Sus tablas de verdad están definidas así:

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
V	V	V	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

Definición 1.5. Definimos el conector lógico **condicional** denotado por $\implies$. Sean dos proposiciones p y q, entonces $p \implies q$ lo leemos como "Si p, entonces q" o "p implica q." Su tabla de verdad es:

p	q	$p \implies q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Para poder entender un poco más la tabla de verdad anterior veremos el siguiente ejemplo:

i) p : x es un número entero impar positivo.

ii) q : x^2 es un número entero impar positivo.

Primero asumamos que p es verdadera y q es verdadera, con esto la expresión " Si x es un número entero impar positivo, entonces x^2 es un número entero impar positivo" es una proposición verdadera, la cual es de fácil demostración. Ahora digamos que p es falsa y q es verdadera, con esto generamos la expresión " Si x no es un número entero impar positivo, entonces x^2 es un número entero impar positivo", la cual es una proposición verdadera ya qe basta tomar por ejemplo $x = -3$, y así $x^2 = 9$. Ahora digamos que p es verdadera y q es falsa, así generamos la expresión " Si x es un número entero impar positivo entonces x^2 no es un número entero impar positivo" la cual es una proposición falsa, ya que no existe número entero, impar y positivo que haga válida esta expresión. Por último digamos que p y q son falsas, generamos así la expresión " Si x no es un número entero impar positivo entonces x^2 no es un número entero impar positivo" la cual es verdadera y para ver eso podemos tomar $x = -2$.

Definición 1.6. Definimos el conector lógico **bicondicional** denotado por $\iff$. Sean dos proposiciones p y q, entonces $p \iff q$ se lee como "p sí y sólo sí q". Su tabla de verdad asociada es:

p	q	$p \iff q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Definición 1.7. Definimos una **función proposicional** como una expresión o fórmula lógica que depende de una o más variables proposicionales, y que toma valores de verdad (verdadero o falso) en función de la asignación de valores de verdad a dichas variables.

Ejemplo 1.3. Sean p, q, r tres proposiciones y la función proposicional:

$$f(p, q, r) = [(\sim p \vee q) \implies r]$$

Se puede construir la tabla de verdad asociada a dicha función proposicional:

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \implies r$
V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F

Definición 1.8. Sea f una función proposicional. Si la tabla de verdad asociada a f es constante igual a V . Diremos que f es una **Tautología.**

Ejemplo 1.4. La función proposicional $p \vee \sim p$ es una tautología, llamada **Principio del tercer excluído o ley clásica del pensamiento**.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V
V	F	V
F	V	V

Definición 1.9.

i) Si $A \implies B$ es una tautología, diremos que "A implica lógicamente a B" o dicho de otra manera "B es una consecuencia lógica de A."

ii) Si $A \iff B$ es una tautología, diremos que "A y B son equivalencias lógicas". Lo denotamos por $A \equiv B$.

Observación:. Sean f y g dos funciones proposicionales.Diremos que f y g son equivalencias lógicas si sus tablas de verdad asociadas son iguales.

Ejemplo 1.5. p y $\sim(\sim p)$ son equivalencias lógicas.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F
V	F	V
F	V	F

Equivalencias lógicas básicas:

i) $p \vee p \equiv p$ (Ley de idempotencia)
$p \wedge p \equiv p$

ii) $p \equiv \sim (\sim p)$ (Ley de doble negación)

iii) $p \vee q \equiv q \vee p$ (Ley de conmutatividad)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

iv) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Ley de distributividad)
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

v) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan)
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

vi) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Ley de absorción)
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

vii) $p \vee V \equiv V$ (Leyes de identidad)
$p \wedge V \equiv p$
$p \vee F \equiv p$
$p \wedge F \equiv F$

De estas podemos obtener otras equivalencias importantes:

i) $p \implies q \equiv \sim p \vee q$

ii) $p \implies q \equiv \sim q \implies \sim p$

iii) $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$

iv) $p \iff q \equiv \sim p \iff \sim q$

v) $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$

Proposición 1.1. *Si A y $(A \implies B)$ son tautologías, entonces B es una tautología.*

Para poder demostrar esta proposición, mostraremos distintos métodos de demostración, en particular, proposiciones de la forma $p \implies q$:

i) **Demostración directa**: Supongamos que p es una proposición verdadera, en base a eso se prueba que q también es verdadera, teniendo así que $p \implies q$ es verdadera.

ii) **Demostración por contrapositiva**: Como se vió anteriormente, $p \implies q$ es una equivalencia lógica con $\sim q \implies \sim p$, por lo tanto para probar que $p \implies q$ es verdadero basta con probar que $\sim q \implies \sim p$ es verdadero, usando demostración directa.

iii) **Demostración por contradicción**: Supongamos que q es falso ($\sim q$ es verdadero), asumiendo que p es verdadero. Luego se debe intentar, usando demostración directa, probar que $p \implies \sim q$ es verdadero. Si en este proceso se llega a una incosistencia de los datos o una contradicción, significa que nunca se debió decir que q es falso, por lo tanto $p \implies q$ sería una verdad.

Ejemplo 1.6. Demostrar lo siguiente : Sea $x \in \mathbb{N}$. Si x^2 es un número par, entonces x es un número par.

- **Demostración directa:** Supongamos que x^2 es un número par. Como $x^2 = x \cdot x$, y $x \in \mathbb{N}$ tenemos 2 posibilidades, que x sea un número par o que x sea un número impar.

i) Si x es impar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2 \cdot k + 1$, así

$$x^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

por lo tanto se tiene que x^2 es un número impar, por lo tanto no es posible, ya que nuestra hipótesis es que x^2 es par.

ii) Si x es par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2 \cdot k$, así

$$x^2 = (2 \cdot k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

por lo tanto x^2 es par, lo que cumple nuestra hipótesis.

Con esto se prueba que x es par.

- **Demostración por contrapositiva:** Demostrar que "Si x^2 es un número par, entonces x es un número par" es equivalente a demostrar que "Si x no es un número par, entonces x^2 no es un número par" que es lo mismo que "Si x es un número impar, entonces x^2 es un número impar".
  Esto último es fácil ya que si tomamos un número impar x este debe ser de la forma $2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto tenemos que :

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

  y como $k \in \mathbb{N}$ entonces $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $x^2 = 2m + 1$ y así x^2 es un número impar, lo que demuestra lo pedido.

- **Demostración por contradicción:** Supongamos que x^2 es par y que x no es par (por lo tanto x es impar). Como x es impar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2 \cdot k + 1$, así

$$x^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

  con esto se tiene que x^2 es impar, lo cual es una contradicción.

Demostración Proposición 1.1. Demostración por contradicción. Supongamos que B no es una tautología, por lo tanto B contiene una F en su tabla de verdad, así tendríamos que $A \implies B$ contiene una F en su tabla de verdad, ya que A es tautología, lo cual es una contradicción ya que $A \implies B$ es tautología. □

Proposición 1.2. *Sea A una tautología compuesta por las proposiciones $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sea B una función proposicional que surge de reemplazar otras proposiciones $B_1, B_2, \ldots, B_n$ por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivamente, entonces B es una tautología. En otras palabras, una sustitución en una tautología, mantiene la tautología.*

Ejemplo 1.7. Sea $A \equiv (A_1 \wedge A_2) \implies A_1$, $B_1 \equiv p \vee q$ y $B_2 \equiv q \wedge r$. Vemos que:

$$\begin{aligned} (A_1 \wedge A_2) \implies A_1 &\equiv \sim (A_1 \wedge A_2) \vee A_1 \\ &\equiv \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee A_1 \\ &\equiv \sim A_1 \vee A_1 \vee A_2 \\ &\equiv V \vee A_2 \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

por lo tanto A es una tautología, y usando la proposición anterior tenemos que
$B \equiv [(p \vee q) \wedge (q \wedge r)] \implies (p \vee q)$ es una tautología.

Definición 1.10. Sea f una función proposicional tal que su tabla de verdad asociada es constante igual a F, diremos que f es una **contradicción.**

Observación:. Una función proposicional que no es ni tautología ni contradicción se llama **contingencia.**

Ejemplo 1.8. Determine el valor de verdad de las siguientes funciones proposicionales:

i) $((p \wedge q) \implies r) \implies (p \implies (q \implies r))$

$$\begin{aligned}((p \wedge q) \implies r) \implies (p \implies (q \implies r)) &\equiv \sim (\sim (p \wedge q) \vee r) \vee (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \\ &\equiv ((p \wedge q) \wedge \sim r) \vee (\sim p \vee \sim q \vee r) \\ &\equiv (p \wedge q \wedge \sim r) \vee \sim (p \wedge q \wedge \sim r) \\ &\equiv V\end{aligned}$$

Lo anterior se obtiene ya que $A \vee \sim A \equiv V$ sea cual sea la proposición A. El resultado anterior nos dice que, sean cual sean los valores de verdad que tengan p y q siempre se llega a una verdad, por lo tanto se concluye que la función proposicional es una tautología.

ii) $\sim [p \iff q] \vee (q \implies (\sim p))$.

$$\begin{aligned}\sim [p \iff q] \vee (q \implies (\sim p)) &\equiv \sim [(p \implies q) \wedge (q \implies p)] \vee (q \implies \sim p) \\ &\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim q \vee \sim p) \\ &\equiv [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)] \vee (\sim q \vee \sim p) \\ &\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \vee (\sim q \vee \sim p) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee \sim q \vee \sim p \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee (q \wedge \sim p) \vee \sim p \\ &\equiv \sim q \vee \sim p\end{aligned}$$

Como no podemos definir el valor de verdad de $\sim q \vee \sim p$, tenemos que la función proposicional es una contingencia.

Ejemplo 1.9. Si la función proposicional $\sim p \implies \sim (\sim p \wedge q)$ es falsa, determine el valor de verdad de:

$$[(p \implies q) \wedge (p \wedge q)] \implies [(q \vee p) \implies p].$$

Como tenemos que $\sim p \implies \sim (\sim p \wedge q)$ es falsa, y recordando que la única implicancia falsa es $V \implies F$, tenemos que $\sim p \equiv V$ y por lo tanto $p \equiv F$. Por otro lado $\sim (\sim p \wedge q) \equiv F$ y por lo tanto $\sim p \wedge q \equiv V$ y así llegamos a:

$$\begin{aligned}\sim p \wedge q &\equiv V \\ \sim F \wedge q &\equiv V \\ V \wedge q &\equiv V \\ q &\equiv V\end{aligned}$$

En lo último dijimos que $T \wedge q = q$, eso es consecuencia de la tabla de verdad de $\wedge$ ya que $V \wedge V = V$ y $V \wedge F = F$, es decir , el resultado de $V \wedge q$ dependerá solo del valor de q. Con esto reemplazamos en la función proposicional pedida teniendo que $p = F$ y $q = V$:

$$\begin{aligned}[(F \implies V) \wedge (F \wedge V)] \implies [(V \vee F) \implies F] &\equiv (V \wedge F) \implies (V \implies F) \\ &\equiv F \implies F \\ &\equiv V\end{aligned}$$

Por lo tanto es una tautología.

Ejercicio 1.1. Determine el valor de verdad (sin usar tabla de verdad) de:

$$\Big((p \implies q) \wedge (q \implies \sim r) \wedge (\sim p \implies \sim r)\Big) \implies \sim r$$

2 Predicados

Como vimos anteriormente:

- $3 > 5$
- $4^2 \geq 0$
- $2 + 2 = 3$

son proposiciones ya que se les puede dar un valor de verdad.
Pero, ¿que sucede con ejemplos como los siguientes?:

- $x > 5$
- $x^2 \geq 0$
- $x + x = 3$

Es claro que los ejemplos anteriores no son proposiciones, pero se convierten en una cuando x toma algún valor. Por ejemplo, definamos $p(x)$ como:

$$p(x) : x > 5.$$

Es fácil notar que $p(3)$ es una proposición falsa, y $p(7)$ también es una proposición pero es verdadera.

Definición 2.1. Definimos un **predicado** como aquella expresión que se convierte en una proposición al darle valores a las variables invucradas.

Usando el mismo ejemplo anterior, se tiene que $p(7)$ es una proposición, pero también lo son $p(8), p(9), p(50) \dots$, entonces se puede dar a entender que un predicado se puede convertir en una proposición en un conjunto de valores.

Definición 2.2. Llamamos **Dominio** de un predicado como aquel conjunto de valores que hacen que el predicado se convierta en proposición.

Observación:. No existe un único dominio para un predicado.

Ejemplo 2.1. Algunos dominios para el predicado:

$$p(x) : x > 3$$

son:

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}$
- Números naturales mayores que 5
- Números enteros negativos

En los primeros dos casos, el predicado puede ser tanto una proposición verdadera como falsa según el valor que se tome. En el tercer caso el predicado se convierte en una proposición verdadera, sea cual sea el valor del dominio que se tome. De la misma manera, en el cuarto caso el predicado siempre se convierte en una proposición falsa.

Como vimos antes, según el dominio que se defina, un predicado puede convertirse tanto en una proposición verdadera como falsa, por lo tanto podemos, de alguna manera, cuantificar dichos elementos.

Ejemplo 2.2. Cuantifiquemos $p(x) : x^2 + 1 > 4$ en un conjunto A cualquiera.

1) $p(x)$ es verdadero para **3** distintos $x \in A$.
2) $p(x)$ es verdadero para **exactamente 3** distintos $x \in A$.
3) Hay **infinitos** $x \in A$ tal que $p(x)$ es verdadero.
4) $p(x)$ vale para **ningún** $x \in A$.
5) $p(x)$ es verdadero para **todo** $x \in A$.

Observación:. $x \in A$ es la simbología usada para decir que x es un elemento del conjunto A. Se lee x pertenece a A.

Definición 2.3. Sea $p(x)$ un predicado y A un conjunto cualquiera:

i) Definimos **cuantificador universal**, denotado por $\forall$ como:

$$\text{Para todo elemento } x \in A \text{ se cumple } p(x) \rightarrow \forall x \in A : p(x).$$

ii) Definimos **cuantificador existencial**, denotado por $\exists$ como:

$$\text{Existe al menos un elemento } x \in A \text{ tal que se cumple } p(x) \rightarrow \exists x \in A : p(x).$$

Ejemplo 2.3.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = x$.
Todo elemento de $\mathbb{R}$ cumple que su cuadrado es igual a si mismo. Proposición falsa. Basta tomar, por ejemplo, $x = 2$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$.
Existe al menos un elemento de $\mathbb{R}$ que cumple que su cuadrado es igual a si mismo. Proposición verdadera. Basta tomar $x = 1$ o $x = 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$.
Existe al menos un elemento de $\mathbb{R}$ que cumple la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Proposición falsa. No existe número real que lo cumpla.

d) $\forall x \in \mathbb{Z} : \big(\text{"}x^2 \text{ es par"} \Rightarrow \text{"}x \text{ es impar"}\big)$.
Todo elemento de $\mathbb{Z}$ que cumpla que si su cuadrado es un número par, entonces el mismo es un número impar. Proposición falsa. Ver ejemplo 1.6.

e) $\forall x \in \mathbb{Z} : ([x \neq 2 \wedge \text{"}x \text{ es primo"}] \Rightarrow \text{"}x \text{ es impar"})$.
Todo número entero que cumple que si es un número disinto de 2 y a la vez es un número primo, entonces ese número debe ser par. Proposición verdadera. Todo número primo, salvo el 2, solo puede ser divisible por 1 y por si mismo, si fuese par sería divisible por 2 y dejaría de ser primo.

f) $\forall x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N} : x < n)$.
Para todo número real x existe al menos un número natural n más grande que el. Proposición verdadera.

h) $\exists x \in \mathbb{R} : (\forall n \in \mathbb{N} : x > n)$
Existe al menos un número real x tal que para todo número natural n, x es mayor que n. En otras palabras, existe al menos un número real que es más grande que cualquier número natural. Proposición falsa.

Usando los ejemplos $f)$ y $h)$ anteriores, podemos dar a entender la importancia del orden al momento de cuantificar.
Podemos reescribir el ejemplo $f)$ como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : (x < n)$$

es decir, se puede cuantificar todo antes del predicado, siempre que no se pierda el sentido.
De la misma manera, $h)$ lo podemos reescribir como:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : (x > n)$$

Analizando los dos ejemplos mencionados, se puede notar que los cuantificadores están intercambiados en orden, con esto podemos acotar lo siguiente:
Para dos dominios de predicados A, B y y un predicado $p(x, y)$ tenemos la siguiente *equivalencia semántica*:

$$\exists x \in A : \exists y \in B : p(x,y) \quad \simeq \quad \exists y \in B : \exists x \in A : p(x,y).$$

$$\forall x \in A : \forall y \in B : p(x,y) \quad \simeq \quad \forall y \in B : \forall x \in A : p(x,y).$$

Ejemplo 2.4. Las siguientes dos proposiciones equivalen a lo mismo:

i) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z}^+ : x \cdot y > 0$.
Para todo número natural x y para todo número entero positivo z se tiene que la multiplicación de ambos es mayor que cero.

ii) $\forall z \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{N} : x \cdot y > 0$.
Para todo número entero positivo z y para todo número natural x se tiene que la multiplicación de ambos es mayor que cero.

Podemos unificar su significado como sigue:

La multiplicación de cualquier entero positivo con un natural es siempre positivo.

Analicemos el siguiente par de predicados:

i) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$
Para todo número natural x existe al menos un número entero y tal que la suma de ambos es cero.

ii) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N} : x + y = 0.$
Existe al menos un número entero y tal que para todo número natural x la suma de ambos es cero.

Recordando que un número a es el inverso aditivo de un número b si $b + a = 0$ podemos explicar los dos ejemplos anteriores.
El primero: "sea cual sea el número natural que nosotros elijamos, siempre podremos encontrar su inverso aditivo en $\mathbb{Z}$, pero ese inverso dependerá del número natural que se escoja".
En el segundo: "Existe al menos un número entero el cuál es inverso aditivo de todo número natural".
La primera proposición es verdadera, en cambio la segunda es falsa.

En general, no se pueden intercambiar distintos cuantificadores, es decir:

$$\exists x \in A : \forall y \in B : p(x,y) \quad \neq \quad \forall y \in B : \exists x \in A : p(x,y).$$

$$\forall x \in A : \exists y \in B : p(x,y) \quad \neq \quad \exists y \in B : \forall x \in A : p(x,y).$$

Observación:. Hacer el cambio de cuantificadores cambia el sentido de la proposición, pero no necesariamente su veracidad.

Ejemplo 2.5.

i) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : y < x.$

ii) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N} : y < x.$

Ambas proposiciones son verdaderas.

Como vimos hasta ahora, al cuantificar un predicado obtenemos una proposición, por lo tanto podemos negarla, lo que nos lleva a lo siguiente:

Proposición 2.1. *Sea $p(x)$ un predicado y A un dominio para $p(x)$.*

i) $\sim (\forall x \in A : p(x)) = \exists x \in A : \sim p(x).$
La negación de que todo elemento de un conjunto A cumpla el predicado $p(x)$, es que existe al menos un elemento en A que no cumpla la proposición (pueden ser muchos que no la cumplan).

ii) $\sim (\exists x \in A : p(x)) = \forall x \in A : \sim p(x).$
La negación de que exista al menos un elemento en A que cumpla la proposición $p(x)$ es que todo elemento de A no cumpla la proposición.

Podemos generalizar lo anterior a muchos cuantificadores usando lo siguiente:

$$\sim (\forall x \in A, \exists y \in B : p(x,y)) = \exists x \in A, \forall y \in B : \sim p(x,y).$$

$$\sim (\exists x \in A, \forall y \in B : p(x,y)) = \forall x \in A, \exists y \in B : \sim p(x,y).$$

Ejemplo 2.6.

- $\exists x \in A : \Big(p(x) \wedge \big(\forall y \in A : (p(y) \implies x = y)\big)\Big)$

  Existe un elemento x en el conjunto A que cumple el predicado $p(x)$ y además, sea cual sea el elemento y en A que cumpla el predicado entonces necesariamente x e y son iguales. En otras palabras x es el único elemento de A que cumple el predicado. Esto lo podemos reescribir como:

$$\exists! x \in A : p(x).$$

- $\exists x \in A : \Big(\exists y \in A : \big(p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y\big)\Big).$

  Existe un elemento x en A y existe un elemento y en A tal que ambos cumplen el predicado $p(x)$ y además son distintos. En otras palabras existen dos elementos disintos que cumplen el predicado $p(x)$.(no excluye la existencia de otros que cumplan el predicado)

- $\forall x \in A, \forall y \in A : (x \neq y \implies (p(x) \wedge q(y)) \vee (p(y) \wedge q(x)))$

  Para todo par de elementos distintos del conjunto A, uno satisface el predicado p y el otro el predicado q.

- $\forall x \in A : (p(x) \implies q(x)).$

  Para todo elemento del conjunto A, si satisface el predicado p, entonces también satisface el predicado q.

- $\forall x \in A, y \in A : (x \neq y \implies (p(x) \implies q(y)))$

  Para todo par de elementos distintos del conjunto A, si uno satisface el predicado p, entonces el otro satisface el predicado q.

- $\exists x \in A : (p(x) \wedge (\forall y \in A : p(y) \implies x \geq y)).$

  Existe un elemento del conjunto A que es el mayor de todos los elementos de A que satisfacen el predicado p.

Observación:. En vez de escribir $\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \ldots, \forall x_n \in A$ adoptaremos la forma $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$.

Ejemplo 2.7.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : p \geq 2 \wedge \big(n \neq 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = pk\big).$

  Para todo número natural n existe un número natural p tal que p es mayor o igual que 2 y si n es distinto de 1, entonces p es un divisor de n.

- $\forall p \in A \subset \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \Big(\frac{p}{n} \in \mathbb{N} \implies \big(n = 1 \vee n = p\big)\Big).$

  Para todo numéro p en un conjunto A que es subcojunto de $\mathbb{N}$ y para todo número natural n, si n es un divisor de p entonces n es 1 o p.
  En otras palabras, los únicos divisores que puede tener p en $\mathbb{N}$ es 1 o si mismo. Podemos concluir que A es el conjunto de los números primos.

- $\forall n \in \mathbb{N} : \Big(n \text{ es par} \iff \big(\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2 \cdot k\big)\Big).$

  Caracterización de un número par.

- $\forall n \in B \subset \mathbb{N} : \Big(\big(\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1\big) \wedge \big(\exists k \in \mathbb{Z} : n = 3k\big)\Big).$

  Todos los números naturales que están en B cumplen que son números impares y a la vez múltiplos de 3.

Observación:. Los k que se definen en ambas condiciones son distintos, ya que están cuantificados por separado. Por ejemplo, 9 es un elemento de B. Veamos la primera condición , debemos probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $9 = 2k + 1$, y eso se cumple cuando $k = 4$. En cambio para la segunda condición , debemos probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $9 = 3k$ y eso se cumple para $k = 3$.
Se podría reescribir dicha proposición de la siguiente manera:

$$\forall n \in B \subset \mathbb{N} : \Big(\big(\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1 \big) \wedge \big(\exists r \in \mathbb{Z} : n = 3r \big) \Big)$$