Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________Sección:______________________________

Control 2

Forma A

1.- Determinar el valor de $c \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{13}(k+c)^2 = \sum_{k=5}^{17} c(c+1)$$

Solución: Trabajando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{13}(k+c)^2 &= \sum_{k=1}^{13}(k^2+2kc+c^2)\\ &= \sum_{k=1}^{13}k^2 + 2c\sum_{k=1}^{13}k + \sum_{k=1}^{13}c^2\\ &= \frac{13\cdot 14\cdot 27}{6} + 2c\frac{13\cdot 14}{2} + 13c^2\\ &= 819 + 182c + 13c^2\end{aligned}$$

Ahora trabajando el lado derecho:

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{17} c(c+1) &= c(c+1)(17-5+1)\\ &= 13c(c+1)\\ &= 13c^2+13c\end{aligned}$$

Igualando ambos lados :

$$819 + 182c + \cancel{13c^2} = \cancel{13c^2} + 13c$$

obteniendo:

$$169c = -819$$

y así:

$$c = -\frac{819}{169} = -\frac{63}{13}$$

2.- Sea la sucesión recursiva:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$$

Demuestre que $a_n = \frac{1}{2^n}(2^{n+1} - 3)$ para todo $n \geq 2$.

Solución: Definamos el predicado:

$$P(n) : a_n = \frac{1}{2^n}(2^{n+1} - 3).$$

- Paso base $P(2)$. Por definición se tiene que

$$a_2 = \frac{1}{2}a_{2-1} + 1 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Por otro lado:

$$a_2 = \frac{1}{2^2}(2^{2+1} - 3) = \frac{1}{4}(8 - 3) = \frac{5}{4}.$$

Por lo tanto se cumple el paso base.

- Probar $P(n) \implies P(n+1)$.

Hipótesis de inducción: $a_n = \frac{1}{2^n}(2^{n+1} - 3)$.

Por demostrar $P(n+1) : a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(2^{n+2} - 3)$

Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\underbrace{a_n}_{\text{H.I}} + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}(2^{n+1} - 3)\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(2^{n+1} - 3) + 1 \\
&= 1 - \frac{3}{2^{n+1}} + 1 \\
&= 2 - \frac{3}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(2^{n+2} - 3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple $P(n+1)$

3.- Sea $x \in \mathbb{R}$ y la expresión:

$$(x^2+2)(x-3)^{10}$$

i) Determine el coeficiente, si es que existe, de x^8.

ii) Determine el coeficiente, si es que existe, de x^{11}.

Solución:

$$\begin{aligned}
(x^2+2)(x-3)^{10} &= (x^2+2)\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{10-k}(-3)^k \\
&= x^2\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{10-k}(-3)^k + 2\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{10-k}(-3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^2x^{10-k}(-3)^k + 2\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{10-k}(-3)^k \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{12-k}(-3)^k}_{A} + \underbrace{\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{10-k}2(-3)^k}_{B}
\end{aligned}$$

i) Coeficiente de x^8 :

- En A se resuelve la ecuación $12-k=8$, dando $k=4$
, así el coeficiente de x^8 en A es:

$$\binom{10}{4}(-3)^4 = \frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!}\cdot 81 = \frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot 81 = 210\cdot 81 = 17010$$

- En B se resuelve la ecuación $10-k=8$, dando $k=2$
, así el coeficiente de x^8 en B es:

$$\binom{10}{2}2(-3)^2 = \frac{10!}{(10-2)!\cdot 2!}\cdot 18 = \frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot 18 = 45\cdot 18 = 810$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^8 es:

$$17010 + 810 = 17820.$$

ii) Coeficiente de x^{11} :

- En A se resuelve la ecuación $12-k=11$, dando $k=1$
, así el coeficiente de x^{11} en A es:

$$\binom{10}{1}(-3)^1 = 10\cdot(-3) = -30$$

- En B se resuelve la ecuación $10 - k = 11$, dando $k = -1$
, como $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 10$, no es posible ese valor de k, así el coeficiente de x^{11} en B es 0.

Por lo tanto, el coeficiente de x^{11} es:

$$-30 + 0 = -30.$$