Problema 1 Demuestre por inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Problema 2 En este ejercicio consideramos la relación de equivalencia "modulo m" en $\mathbb{Z}$ para un numero natural m como lo vimos en la clase de relaciones de equivalencias. (Se escribe tradicionalmente "$a \equiv b \mod m$" en vez de "$a \sim_{\text{mod}\, m} b$").

a) Sean, a, b, $\in \mathbb{Z}$, con $a \equiv b \mod 2$. Demuestre por inducción que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a^n \equiv b^n \mod 2$$

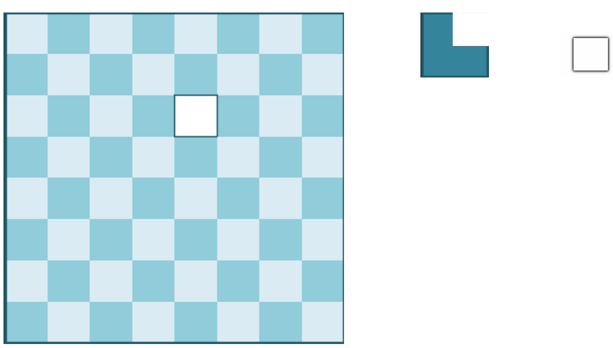
b) Encuentre una demostración sin utilizar inducción para el anterior (*Sugerencia: distincción de casos según si a es par o impar y b es par o impar*)

c) Elija ahora su favorito numero natural $m \neq 2$ (o dejalo incluso indeterminado) y demuestre

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}: \Big(a \equiv b \mod m \implies a^n \equiv b^n \mod m\Big).$$

(Observe que la demostración por inducción sigue similar al caso $m = 2$, pero encontrar una demostración sin inducción es mucho más complicado).

Problema 3. (difícil, pero entretenido) Queremos tapizar un tablero cuadrado y cuadrículado (estilo tablero de ajedrez) con baldosas verdes de tres casilleros en forma "L" (poseemos una cantidad ilimitada de esas baldosas) y una sola baldosa blanca que consiste de un solo casillero.



a) ¿ Se puede tapizar un tablero de largo 8×8 completamente ?

b) ¿ Se puede tapizar un tablero de largo 1024×1024 completamente ?

c) En caso que se puede tapizar: ¿ Se puede evitar usar la baldosa blanca ?

d) En caso que no se puede evitar: ¿ Se puede posicionar la baldosa blanca en cualquier lado ?

(*8 y 1024 son ambos potencias de 2. Formula una proposición universal para tableros $2^n \times 2^n$ y demuestra esa por inducción.*)

Continuación en la siguiente pagina

Problema 4.

a) ¿ Cuantos cuadriláteros tiene la siguiente figura? (Respuesta correcta es 45).

1	2	3	4	5	6	7	8	9

¿ Cual sería la fórmula para el caso de n arbitrario ? (Respuesta correcta es $\frac{n(n+1)}{2}$)

b) ¿ Cuántos cuadrados contiene un tablero de ajedrez de tamaño 8×8 ? (Respuesta correcta es 204)

¿ Cuál sería la formula para un tablero de largo $n \times n$?
(Sugerencia: Prueba con formula polinomial en n de grado a lo más 3) (Respuesta correcta es $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$)