Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:____________________Sección:____________________

Control 2

Forma A

1.- Determine el valor de k en la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=1}^{20}(r^2-10)-\sum_{r=1}^{k}(r+9)=2610$$

Solución: Primero, simplifiquemos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{20}(r^2-10)-\sum_{r=1}^{k}(r+9) &= \sum_{r=1}^{20}r^2-\sum_{r=1}^{20}10-\sum_{r=1}^{k}r-\sum_{r=1}^{k}9\\ &= \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}-20\cdot 10-\frac{k\cdot(k+1)}{2}-9\cdot k\\ &= 2870-200-\frac{k^2+k}{2}-9k\\ &= 2670-\frac{k^2+k}{2}-9k\end{aligned}$$

Usando la igualdad del enunciado se obtiene la ecuación:

$$2670-\frac{k^2+k}{2}-9k=2610$$

amplificando por 2 y reordenando se tiene:

$$k^2+19k-120=0$$

de donde las soluciones para k están dadas por:

$$k=\frac{-19\pm\sqrt{19^2+480}}{2}$$

así:

$$k=\frac{-19\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{-19\pm 29}{2},$$

de donde se obtiene $k=5$ y $k=-24$. Pero como k debe ser mayor que 1 para que la sumatoria tenga sentido, se tiene que $k=5$.

2.- Demostrar que $9^n - 4^n$ es divisible por 5 para todo $n \in \mathbb{N}$. **Solución:** Definamos el predicado:

$$P(n) : \exists k \in \mathbb{Z} : 9^n - 4^n = 5k.$$

Demostración usando el principio de inducción:

i) Paso base:

$$P(1) : \exists k \in \mathbb{Z} : 9^1 - 4^1 = 5k.$$

Como existe un k que cumple lo anterior ($k = 1$) se concluye que $P(1)$ es verdad.

ii) Probar que $P(n) \implies P(n+1)$ es verdad:
Hipótesis de inducción $P(n) : \exists k \in \mathbb{Z} : 9^n - 4^n = 5k$.
Por demostrar que $P(n+1) : \exists r \in \mathbb{Z} : 9^{(n+1)} - 4^{(n+1)} = 5r$ es verdad.

$$\begin{aligned} 9^{(n+1)} - 4^{(n+1)} &= 9 \cdot 9^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 5 \cdot 9^n + 4 \cdot 9^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 5 \cdot 9^n + 4 \cdot \underbrace{(9^n - 4^n)}_{\text{H. I.}} \\ &= 5 \cdot 9^n + 4 \cdot 5k \\ &= 5(9^n + 4k) \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $9^n + 4k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto si hacemos $9^n + 4k = r$, entonces $P(n+1)$ es verdad y por el principio de inducción $P(n)$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.- Sea la sucesión recursiva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{3 - a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Demuestre que $(a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Solución: Definamos el predicado $P(n)$ como:

$$P(n) : (a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0.$$

i) Paso base:

$$P(1) : (a_1)^2 - 3a_1 + 1 \leq 0$$

Como $a_1 = 1$ por enunciado, se tiene que $P(1)$ es verdad.

ii) Probar que $P(n) \implies P(n+1)$:
Hipótesis de inducción $P(n) : (a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$.
Por demostrar que $P(n+1) : (a_{n+1})^2 - 3a_{n+1} + 1 \leq 0$ es verdad.

Como

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
(a_{n+1})^2 - 3a_{n+1} + 1 &= \left(\frac{1}{3-a_n}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3-a_n} + 1 \\
&= \frac{1}{(3-a_n)^2}\left(1 - 3\cdot(3-a_n) + (3-a_n)^2\right) \\
&= \frac{1}{(3-a_n)^2}\left(1 - 9 + 3a_n + 9 - 6a_n + a_n^2\right) \\
&= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{(3-a_n)^2}}_{\geq 0}\underbrace{(1 - 3a_n + a_n^2)}_{\text{H.I.}}}_{\leq 0}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P(n+1)$ es verdad y por el principio de inducción se tiene que $P(n)$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$.