Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________Sección:______________________________

Por 1

1.- (1,0 ptos) Determine si la siguiente proposición es tautología, contradicción o contingencia:

$$(p \wedge (q \implies r)) \implies (\sim p \vee \sim r)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
(p \wedge (q \implies r)) \implies (\sim p \vee \sim r) &\equiv \sim (p \wedge (\sim q \vee r)) \vee (\sim p \vee \sim r) \\
&\equiv (\sim p \vee (q \wedge \sim r)) \vee (\sim p \vee \sim r) \\
&\equiv \sim p \vee (q \wedge \sim r) \vee \sim p \vee \sim r \\
&\equiv \sim p \vee \sim p \vee (q \wedge \sim r) \vee \sim r \\
&\equiv \sim p \vee \sim r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión anterior es una contingencia.

2.- (2,0 ptos) Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in [-20, 20] : (\exists k \in \mathbb{N} : x = 3k - 4) \wedge (\forall k \in \mathbb{N} : x \cdot k > 5)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} : (\forall p \in \mathbb{N} : x + 4p \geq 20) \wedge (|x| \leq 30)\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : (\exists r \in \mathbb{Z} : \sqrt[3]{x} = r) \wedge (-30 \leq x \leq 30)\}$$

Determine explícitamente los conjuntos A, B y C y calcule el número:

$$n(A \cup B \cup C).$$

Solución: Se tiene lo siguiente:

$A = \{-1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\} \cap \{5, 6, 7, 8, \ldots, 18, 19, 20\} = \{8, 11, 14, 17, 20\}$
$B = \{16, 17, 18, 19, 20, 21 \ldots\} \cap \{-30, -29, \ldots, 0, \ldots, 29, 30\} = \{16, 17, 18, 19, 20, \ldots, 28, 29, 30\}$
$C = \{-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27\} \cap \{-30, -29, \ldots, 0, \ldots, 29, 30\} = \{-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27\}$

Con lo anterior se tiene que:

$$n(A \cup B \cup C) = 23$$

3.- (1,5 ptos) Determine a, b y c de modo que el polinomio :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

sea divisible por $(x-3)(x+1)(x-1)$ y además encuentre las raíces de $P(x)$.
Solución: Por enunciado tenemos que $x = 3$,$x = -1$ y $x = 1$ son raíces de $P(x)$ por lo tanto podemos generar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&(3)^5 - 2(3)^4 - 6(3)^3 + a(3)^2 + 3b + c = 0\\
&(-1)^5 - 2(-1)^4 - 6(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 0\\
&(1)^5 - 2(1)^4 - 6(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = 0
\end{aligned}$$

obteniendo así:

$$\begin{aligned}
&243 - 162 - 162 + 9a + b + c = 0\\
&-1 - 2 + 6 + a - b + c = 0\\
&1 - 2 - 6 + a + b + c = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior, se tienen las soluciones:

$$\begin{aligned}
a &= 8\\
b &= 5\\
c &= -6
\end{aligned}$$

4.- (1,5 ptos) Pruebe, usando propiedades de conjuntos, que se cumple la igualdad:

$$((A - B) \cup C) \cap (C^c - (A^c \cup B))^c = C$$

Solución:

$$\begin{aligned}
((A - B) \cup C) \cap (C^c - (A^c \cup B))^c &= ((A \cap B^c) \cup C) \cap \left(C^c \cap \left(A^C \cup B\right)^c\right)^c \\
&= ((A \cap B^c) \cup C) \cap (C \cup (A^c \cup B)) \\
&= C \cup ((A \cap B^c) \cap (A^c \cup B)) \\
&= C \cup (A \cap B^c \cap (A^c \cup B)) \\
&= C \cup (A \cap (B^c \cap A^c)) \\
&= C \cup (A \cap B^c \cap A^c) \\
&= C \cup \emptyset \\
&= C
\end{aligned}$$