	Puntaje
1.	
2.	
3.	
4.	
Nota	

Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C

Cálculo I

Prueba Optativa de Reemplazo (P.O.R) 1

Martes 01 de agosto de 2023

Nombre: ______________________ Sección ____________

1. **[20 puntos]** Resolver la inecuación

$$\frac{x-|2-x|}{x^2+4}<0$$

Solución:

Observemos, primero, que el denominador $x^2+4>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, por lo tanto, para que la fracción sea negativa, basta con que el numerador sea negativo, es decir

$$x-|2-x|<0.$$

Para resolver esta inecuación, consideraremos 2 casos:

- Caso 1: $x\leq 2\Rightarrow 2-x\geq 0$

$$\begin{array}{rcl} x-|2-x| & < & 0\\ x-(2-x) & < & 0\\ x-2+x & < & 0\\ 2x & < & 2\\ x & < & 1 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución del caso 1 es

$$S_1:\,]-\infty,2]\cap]-\infty,1[\,=\,]-\infty,1[$$

- Caso 2: $x>2\Rightarrow 0>2-x$

$$\begin{array}{rcl} x-|2-x| & < & 0\\ x+(2-x) & < & 0\\ x+2-x & < & 0\\ 2 & < & 0 \end{array}$$

Como esto, es claramente una contradicción, la solución del caso 2 es $S_2:\phi$.
Finalmente la solución $S_f$de la inecuación es

$$S_f=S_1\ \cup\ S_2=]-\infty,1[\cup\phi=]-\infty,1[$$

2. **[20 puntos]** Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que

$$kx^2 + k(k-1)x + 4k < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución:

Como esta es una expresión cuadrática, para que sea negativa para todo $x \in \mathbb{R}$, se debe cumplir que $k < 0$ (la parábola abra hacia abajo) y que el discriminante sea negativo (para que no haya intersección con el eje X), es decir

$$\begin{aligned} \Delta = k^2(k-1)^2 - 4k(4k) &< 0 \\ k^2(k-1)^2 - 16k^2 &< 0 \\ k^2[(k-1)^2 - 16] &< 0 \\ k^2[(k-1-4)(k-1+4)] &< 0 \\ k^2[(k-5)(k+3)] &< 0 \end{aligned}$$

Esta última expresión es negativa para $k \in]-3,5[$, pero como indicamos anteriormente $k < 0$, por lo tanto, la solución de la inecuación es

$$S_f : k \in \,]-3,0[$$

3. **[20 puntos]** Considere $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$

Probar que f es biyectiva y determinar f^{-1}

Solución:

Sean $a, b \geq 0$. Supongamos que $f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \frac{a}{1-a} &= \frac{b}{1-b} \\ a - ab &= b - ab \\ a &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto en $[0, -1[$ la función es inyectiva. Ahora, si $a, b < 0$, supongamos que $f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \frac{a}{1+a} &= \frac{b}{1+b} \\ a + ab &= b + ab \\ a &= b \end{aligned}$$

Entonces, en $]-1,0]$ la función es inyectiva.
Por otra parte, notemos que como $1-|x| \geq 0$ para todo $x \in]-1,1[$, si $x \geq 0$, entonces $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|} \geq 0$ y que si $x < 0$ entonces $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|} < 0$. Es decir, si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $f(a) \neq f(b)$, por lo tanto la función es inyectiva en $]-1,1[$.

Para determinar el recorrido de la función, consideremos primero $x \geq 0$, en este caso $y = \dfrac{x}{1-x}$, entonces $y \geq 0$, luego, al despejar x tenemos que

$$x = \frac{y}{1+y}$$

Entonces, el recorrido de f, para los $x \geq 0$ es $(\mathbb{R} - \{-1\}) \cap [0, \infty[= [0, \infty[$.
Ahora, consideremos $x < 0$, en este caso $y = \dfrac{x}{1+x}$, entonces $y < 0$, luego, al despejar x tenemos que

$$x = \frac{y}{1-y}$$

Entonces, el recorrido de f, para los $x \geq 0$ es $(\mathbb{R} - \{1\}) \cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$, por lo que, Rec$(f) = \mathbb{R}$, con esto se tiene que f es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva y f^{-1} está dada por

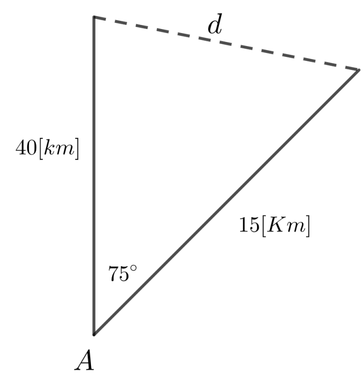
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+y} & \text{si } y \geq 0 \\ \\ \dfrac{y}{1-y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notemos que f^{-1} también se puede expresar como $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{y+|y|}$

4. **[20 puntos]** Desde el punto A salen dos caminos rectilíneos, uno hacia el Norte y el otro en dirección NE formando un ángulo de $75°$ con respecto al primer camino.
A las 12:00 hrs. sale del punto A, una persona en bicicleta con dirección Norte a una velocidad de $10[Km/h]$. A las 13:00 hrs. sale del mismo punto A, pero por el segundo camino, otra persona caminando a $5[Km/h]$
¿A qué distancia se encuentrarán, entre sí, ambas personas a las 16:00 hrs?

Solución:

La persona que avanzó hacia el Norte, a las 16:00 hrs. estaba a $40Km$ del punto A, mientras que la que tomó el otro camino se encontraba, a la msima hora, a $15Km$ del punto A. Un diagrama de esta situación es la que se muestra acá



donde d es la distancia que separa a las dos personas a las 16:00 hrs. Para calcular d usaremos el Teorema del Coseno

$$\begin{aligned} d^2 &= 40^2 + 15^2 - 2(40)(15)\cos(75) \\ &= 1600 + 225 - 1200\cos(75) \\ &= 1825 - 1200\cos(75) \end{aligned}$$

Para calcular $\cos(75)$ usaremos la fórmula de la suma del ángulo para el coseno

$$\begin{aligned} \cos(75) &= \cos(30+45) \\ &= \cos(30)\cos(45) - \operatorname{sen}(30)\operatorname{sen}(45) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, a las 16:00 hrs. las personas se encontrarán a una distancia d en Km igual a

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{1825 - 1200\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ d &= \sqrt{1825 - 300(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \end{aligned}$$

Instrucciones

- Respuestas sin desarrollo no tendrán puntaje.
- No se permite el uso de calculadoras, celulares ni ningún dispositivo electrónico.
- Cualquier copia o intento de copia será calificado con nota 1.0

Tiempo: 80 minutos.