Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:____________________ Sección:____________________

Pep 2

Forma A

1.- i) Demostrar que para $r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Solución: Por inducción, definamos el predicado:

$$P(n) : \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

- Caso base:

$$P(1) : \sum_{k=0}^{1} r^k = \frac{1 - r^{1+1}}{1 - r},$$

lo anterior entrega la igualdad

$$r^0 + r^1 = \frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r,$$

la cual es una verdad, por lo tanto $P(1)$ es verdad.

- Probar $P(n) \implies P(n+1)$.

Hipótesis de inducción: $P(n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, se debe probar $P(n+1)$ que es:

$$P(n+1) : \sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}.$$

Trabajando el lado izquierdo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} r^k}_{H.I.} + \sum_{k=n+1}^{n+1} r^k \\
&= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}
\end{aligned}
$$

Lo anterior prueba que $P(n+1)$ es verdad y por el principio de inducción se tiene que $P(n)$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Resuelva la siguiente ecuación:

$$\sum_{k=3}^{10} x \cdot 2^k = 340x^2 + 680$$

Solución: Como se tiene que $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} x \cdot 2^k = x \sum_{k=3}^{10} 2^k$, debemos primero determinar el valor de la sumatoria:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{10} 2^k &= \sum_{k=0}^{7} 2^{k+3} \\
&= 2^3 \sum_{k=0}^{7} 2^k \\
&= 8 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} \\
&= 8 \cdot 255 \\
&= 2040
\end{aligned}
$$

Con lo anterior nos queda la siguiente ecuación:

$$2040x = 340x^2 + 680,$$

la cual, simplificando se tiene la ecuación:

$$x^2 - 6x + 2 = 0,$$

en donde sus soluciones son $x = 3 - \sqrt{7}$ y $x = 3 + \sqrt{7}$.

2.- Encuentre los valores de $r \in \mathbb{R}$ para que el coeficiente de x^9 sea -96 en el desarrollo de :

$$\left(x^2 - \frac{x}{r}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{2}\right)^8.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - \frac{x}{r}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(x^4 - \frac{2x^3}{r} + \frac{x^2}{r^2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^8 \\
&= \left(x^4 - \frac{2x^3}{r} + \frac{x^2}{r^2}\right)\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(2x)^{8-k}\cdot(-2)^{-k} \\
&= \left(x^4 - \frac{2x^3}{r} + \frac{x^2}{r^2}\right)\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}2^{8-2k}(-1)^k x^{8-k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}2^{8-2k}(-1)^k x^{12-k}}_{A} - \underbrace{\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\frac{2^{9-2k}(-1)^k}{r}x^{11-k}}_{B} + \underbrace{\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\frac{2^{8-2k}(-1)^k}{r^2}x^{10-k}}_{C}
\end{aligned}$$

Se busca el coeficiente de x^9 por lo tanto se tiene:

- En A, $k = 3$, por lo tanto el coeficiente de x^9 en A es:

$$\binom{8}{3}2^2(-1)^3 = -56 \cdot 4.$$

- En B, $k = 2$, por lo tanto el coeficiente de x^9 en B es :

$$\binom{8}{2}\frac{2^5(-1)^2}{r} = 28 \cdot \frac{32}{r}$$

- En C, $k = 1$, por lo tanto el coeficiente de x^9 en C es:

$$\binom{8}{1}\frac{2^6(-1)^1}{r^2} = -8 \cdot \frac{64}{r^2}$$

Obteniendo la ecuación:

$$-56 \cdot 4 - 28 \cdot \frac{32}{r} - 8 \cdot \frac{64}{r^2} = -96,$$

multiplicando por r^2 y simplificando se obtiene la ecuación:

$$r^2 + 7r + 4 = 0,$$

la cuales tiene como solución $r = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$ y $r = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$

3.- Encuentre el valor de las siguientes sumatorias usando propiedades de sumatorias:

i) $\displaystyle\sum_{k=4}^{12} \frac{3}{4k^2 - 12k}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{12} \frac{3}{4k^2 - 12k} &= \sum_{k=4}^{12} \frac{3}{4k(k-3)} \\
&= \frac{3}{4} \sum_{k=4}^{12} \frac{1}{k(k-3)} \\
&= \frac{3}{4} \sum_{k=4}^{12} \frac{-\frac{1}{3}}{k} + \frac{\frac{1}{3}}{k-3} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=4}^{12} \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-3} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=4}^{12} \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1} \right)
\end{aligned}$$

ii) $\displaystyle\sum_{r=5}^{15} \frac{5}{(4r-1)(4r-9)}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=5}^{15} \frac{5}{(4r-1)(4r-9)} &= \sum_{r=5}^{15} \frac{\frac{-5}{8}}{(4r-1)} + \frac{\frac{5}{8}}{(4r-9)} \\
&= \frac{5}{8} \sum_{r=5}^{15} \frac{-1}{(4r-1)} + \frac{1}{(4r-9)} \\
&= \frac{5}{8} \sum_{r=5}^{15} \frac{-1}{(4r-1)} + \frac{1}{(4r-5)} - \frac{1}{(4r-5)} + \frac{1}{(4r-9)} \\
&= \frac{5}{8} \left(-\frac{1}{59} + \frac{1}{15} - \frac{1}{55} + \frac{1}{11} \right)
\end{aligned}$$