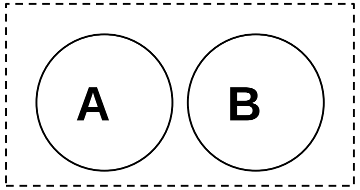
容与斥

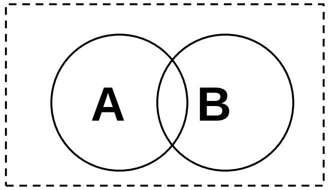
组合数学 Combinatorics

清华大学 马昱春

容斥原理

- 容斥原理





  - Inclusion and Exclusion Principle
  - 计数时重叠部分不能被重复计算
    - 若 $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \varnothing$, 则 $|A \cup B| = m + n$ 。
  - 容斥的计数思想是:
    - 先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来;
    - 然后再把计数时重复计算的数目排斥出去;
    - 使得计算的结果既无遗漏又无重复。

容斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \quad - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Inclusion-Exclusion Principle

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

计算不在 A_1 也不在 A_2中的元素个数

若x不属于A_1 或A_2

1 1-0-0+0 = 1

*若x 属于*A1 但不属于A2

0 1-1-0+0 = 0

*若x 属于*A2 但不属于A1

0 1-0-1+0 = 0

*若x 属于*A2 且属于A1

0 1-1-1+1 = 0

两边相等

$(x+y)^m = C(m,0)x^m + C(m,1)x^{m-1}y + \ldots + C(m,m)y^m$

If $x=1$, $y=-1$

$0 = C(m,0) - C(m,1) + \ldots + (-1)^m C(m,m)$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m \sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

计算不满足任意属性的元素.

x不满足任何属性

1 **$1-0-0\ldots+(-1)^m 0 = 1$**

x只满足1个属性

0 **$1-1-0 \ldots+(-1)^m 0 = 0$**

………

x只满足n个属性, $n \le m$

0 $C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)+\ldots+(-1)^m C(n,m)$

$= C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)+\ldots+(-1)^n C(n,n) +0\ldots +0$

$=0$

两边相等，同样计算不满足任何属性的元素个数

- 求从1到500的整数中能被6或8除尽的数的个数。
- [500/6]+[500/8]-[500/**24**]

§举例

例 求由a, b, c, d四个字母构成的n位符号串中, a, b, c都至少出现一次的符号串数目。

解：令A、B、C分别为n位符号串中不出现a, b, c符号的集合。由于n位符号串中每一位都可取a, b, c, d四种符号中的一个，故不允许出现a的n位符号串的个数应是3^n个，即：

$$|A| = |B| = |C| = 3^n \quad |A \cap B \cap C| = 1$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |C \cap B| = 2^n$$

a, b, c至少出现一次的n位符号串集合即为

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = 4^n - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|) - |A \cap B \cap C|$$

$$= 4^n - 3 \bullet 3^n + 3 \bullet 2^n - 1$$

§ 举例

例. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x1 \wedge x2$
f3	0	0	1	0	$x1 \wedge \overline{x2}$
f4	0	0	1	1	$x1$
f5	0	1	0	0	$\overline{x1} \wedge x2$
f6	0	1	0	1	$x2$
f7	0	1	1	0	$\overline{x1} \wedge x2$
f8	0	1	1	1	$(\overline{x1} \vee \overline{x2}) \wedge (x1 \vee x2)$
f9	1	0	0	0	$x1 \vee x2$
f10	1	0	0	1	$\overline{x1} \wedge \overline{x2}$
f11	1	0	1	0	$(\overline{x1} \vee x2) \wedge (x1 \vee \overline{x2})$
f12	1	0	1	1	$\overline{x2}$
f13	1	1	0	0	$x1 \vee \overline{x2}$
f14	1	1	0	1	$\overline{x1}$
f15	1	1	1	0	$\overline{x1} \vee \overline{x2}$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

例6。求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解：设$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中 x_i不出现的布尔函数类为：A_i， $i=1,2,\ldots,n.$

有1个变量不出现的布尔函数个数为 $C(n,1)\,2^{2^{n-1}}$

有2个变量不出现的布尔函数个数为 $C(n,2)\,2^{2^{n-2}}$

……

有k个变量不出现的布尔函数个数为 $C(n,k)\,2^{2^{n-k}}$

根据容斥原理，满足条件的函数数目为：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|=2^{2^n}-C(n,1)2^{2^{n-1}}$$

$$+C(n,2)2^{2^{n-2}}-\ldots+(-1)^kC(n,k)2^{2^{n-k}}$$

$$+\ldots+(-1)^nC(n,n)2$$

$n=2$时， 得

$$\left|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\right|=2^{2^2}-C(2,1)2^2+C(2,2)2$$

$$=16-8+2=10$$

§ 举例

例. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x1 \wedge x2$
f3	0	0	1	0	$x1 \wedge \overline{x2}$
f4	0	0	1	1	$x1$
f5	0	1	0	0	$\overline{x1} \wedge x2$
f6	0	1	0	1	$x2$
f7	0	1	1	0	$\overline{x1} \wedge x2$
f8	0	1	1	1	$(\overline{x1} \vee \overline{x2}) \wedge (x1 \vee x2)$
f9	1	0	0	0	$x1 \vee x2$
f10	1	0	0	1	$\overline{x1} \wedge \overline{x2}$
f11	1	0	1	0	$(\overline{x1} \vee x2) \wedge (x1 \vee \overline{x2})$
f12	1	0	1	1	$\overline{x2}$
f13	1	1	0	0	$x1 \vee \overline{x2}$
f14	1	1	0	1	$\overline{x1}$
f15	1	1	1	0	$\overline{x1} \vee \overline{x2}$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

§ 举例

例 求不超过120的素数个数。

因11^2=121，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设A_i为不超过120的数 i的倍数集， i=2，3，5，7。

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60, |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24, |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5, |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$

$$\begin{aligned} \left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}\right| &= 120 - |A_2| - |A_3| - |A_5| \\ &\quad - |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| \\ &\quad + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| \\ &\quad - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 \\ &\quad + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) \\ &= 27. \end{aligned}$$

注意：因为27个数中排除了2，3，5，7四个素数，又包含了1这个非素数。故所求的不超过120的素数个数为：

27+4-1=30

就是在所有比1大的整数中，除了1和它本身以外没有别的约数，这种整数叫做质数，质数又叫做素数。

$\Phi(8)=4$

$8 = 2^3$，小于8且与8互素有1 3 5 7

§举例

例. 欧拉函数φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

解：若n分解为不同素数的乘积 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$

设1到n的n个数中为p_i倍数的集合为A_i $|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2\ldots k$

对于$p_i \neq p_j$, $A_i \cap A_j$既是p_i的倍数也是p_j的倍数。

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, i, j = 1,2\ldots,k, i \neq j$$

$$\varphi(\mathrm{n}) = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}\right|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2}\right.$$

$$\left. + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_1 p_n}\right) - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\varphi(\mathrm{n}) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

- **例续。**欧拉函数φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

  φ(8)=8(1-1/2) = 4

  8 = 2^3，小于8且与8互素有1 3 5 7

例如$n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$，则

$$\varphi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 16$$

即比60小且与60无公因子的数有16个：

7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，49，53，59，此外还有一个1。

例 求不定方程$x_1+x_2+x_3=15$,附加约束为$0\le x_1 \le 5$, $0\le x_2 \le 6$； $0\le x_3 \le 7$, 求整数解的数目。

解：对于$x_1+x_2+\ldots+x_n=r$的非负整数解的个数为$C(n+r-1,r)$

没有约束情况下的不定方程$x_1+x_2+x_3=15$的非负整数解的个数为 $C(15+3-1,15)= C(17,2)$

设A1为$x_1\ge 6$的解， $y_1+6+x_2+x_3=15$

$|A1|= C(9+3-1,9)= C(11,2)$

设A2为$x_2\ge 7$的解， $x_1+y_2+7+x_3=15$

$|A2|= C(8+3-1,8)= C(10,2)$

设A3为$x_3\ge 8$的解，$x_1+x_2+ y_3+8=15$

$|A3|= C(7+3-1,7)= C(9,2)$

$A1\cap A2$: $y_1+6+y_2+7+x_3=15$ $|A1\cap A2|= C(2+3-1,2)= C(4,2)$

$A1\cap A3$: $y_1+6+x_2+y_3+8=15$ $|A1\cap A3|= C(1+3-1,1)= C(3,1)$

$A2\cap A3$: $x_1+y_2+7+y_3+8=15$ $|A2\cap A3|= 1$

$A1\cap A2 \cap A3$: $y_1+6+y_2+7+y_3+8=15$; $|A1\cap A2 \cap A3 |= 0$

$|\overline{A1}\cap\overline{A2} \cap\overline{A3}|=C(17,2) – C(11,2)-C(10,2)-C(9,2)$

$+C(4,2)+C(3,1)+1=10$

讨论

- 例:求不定方程$x_1+x_2+x_3=15$,附加约束为$0\le x_1 \le 10$, $0\le x_2 \le 10$; $0\le x_3 \le 10$,求整数解的数目
- $\xi1=10-x_1$, $\xi2=10-x_2$, $\xi3=10-x_3$
- $\xi1+\xi2+\xi3=10-x_1+10-x_2+10-x_3=15$, $\xi1, \xi2, \xi3\ge 0$
- $\xi1+\xi2+\xi3=15$ $\xi1, \xi2, \xi3\ge 0$
- $x_1+x_2+x_3=15$ $0\le x_1,x_2,x_3 \le 10$ 整数解个数相等??
- 显然不成立,所以原解法不具有通用性
- 应加上约束条件

11+2+2=15 $\xi1=11$ $\xi2=2$ $\xi3=2$ 找不到对应的x1,x2,x3

$\xi1=10-x1$, $\xi2=10-x2$, $\xi3=10-x3$ $0\le \xi1, \xi2, \xi3 \le 10$

讨论

- $x_1+x_2+x_3=S$
- $0 \le x_1 \le m1$, $0 \le x_2 \le m2$； $0 \le x_3 \le m3$
- $\xi 1=m1-x1$, $\xi 2=m2-x2$, $\xi 3=m3-x3$
- $\xi 1+\xi 2+\xi 3=m1+m2+m3-S$
- $0 \le \xi 1 \le m1$, $\xi 2 \le m2$, $\xi 3 \le m3$

- 若$m1+m2+m3-S \le \min(m1,m2,m3)$则
- $x1+x2+x3=S$ $0 \le x1 \le m1$, $0 \le x2 \le m2$； $0 \le x1 \le m3$
- $\xi 1+\xi 2+\xi 3=m1+m2+m3-S$ $\xi 1, \xi 2, \xi 3 \ge 0$

整数解个数相等

§ 举例

例: 错排问题: n个元素依次给以标号1，2，…，n。n个元素的全排列中，求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

设A_i为数i在第i位上的全体排列，i=1，2，…，n。因数字i不能动，因而有：$|A_i|=(n-1)!$

$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$

每个元素都不在原来位置的排列数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = n! - C(n,1)(n-1)!$$

$$+ C(n,2)(n-2)! - \cdots - \pm C(n,n)1!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

$$C(n,i)(n-i)! = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}(n-i)! = \frac{n!}{i!}$$

- 例. 在8个字母A,B,C,D,E,F,G,H的全排列中,求使A,C,E,G四个字母不在原来位置上的排列数目。
- **解**：8个字母的全排列中，令A_A,A_C,A_E,A_G分别表A,C,E,G在原来位置上的排列，则错排数为：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right| = 8! - C(4,1)7! + C(4,2)6!$$

$$- C(4,3)5! + C(4,4)4!$$

$$= 24024$$

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$$

- 求8个字母A,B,C,D,E,F,G,H的全排列中只有4个不在原来位置的排列数。
- **解：** 8个字母中只有4个不在原来位置上，其余4个字母保持不动，相当于4个元素的错排，其数目为

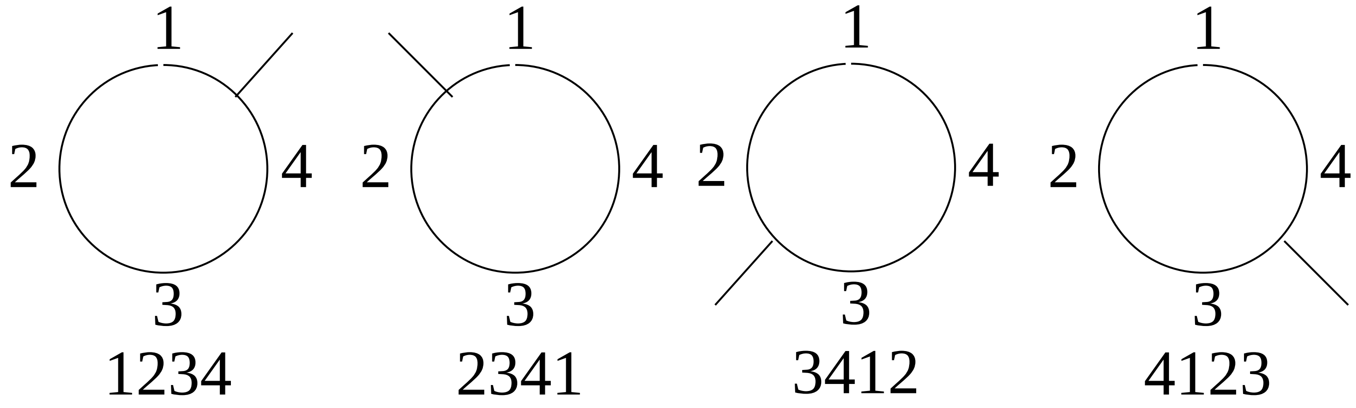
$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$

$$=24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)=9$$

故8个字母的全排列中有4个不在原来位置上的排列数应为：C(8,4)·9=630

圆排列

- 圆排列：从n个中取r个的圆排列的排列数为 $P(n,r)/r$, $2 \le r \le n$
- 以4个元素为例



项链排列

- 项链排列：在圆排列的基础上，正面向上和反面向上两种方式放置各个数是同一个排列。
- **例** 下面两种方式实际上表示的都是3个元素的同一种排列。
- 从n个中取r个的项链排列的排列数为

$$P(n, r)/2r,\ \ 3\le r\le n$$

§ 容斥原理应用举例

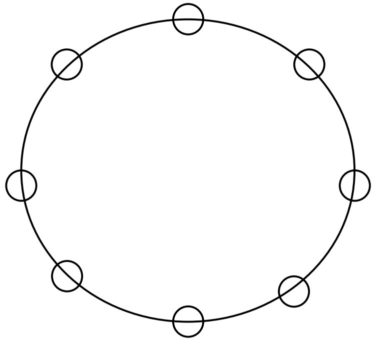
- n对夫妻围坐问题
- 1) n个人围圆桌而坐的方案数

  $(n-1)!$

  2) n对夫妻围圆桌而坐且夫妻相邻的方案数

  $(n-1)!\ 2^n$

  3) n对夫妻围圆桌而坐且夫妻不相邻的方案数



§ 容斥原理应用举例

3) n对夫妻围圆桌而坐且夫妻不相邻的方案数

解: n对夫妻围圆桌而坐,没有约束的方案数为

$$|S| = (2n-1)!$$

A_i表示第i对夫妻相邻而坐的集合

$|A_i| = 2\,(2n-2)!$ 共C(n,1)个

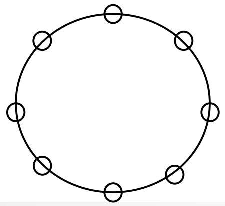
$|A_i \cap A_j| = 2^2\,(2n-3)!$ 共C(n,2)个

…..

故不相邻的方案数为

$$(2n-1)! - 2C(n,1)(2n-2)! + 2^2 C(n,2)(2n-3)! - \ldots\ldots + (-1)^n 2^n (n-1)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k C(n,k)(2n-k-1)!$$



- 4) n 对夫妻围圈而坐，男女相间，且夫妻不相邻有多少种可能的方案？

解　不失一般性,先排女宾，方案数为$(n-1)!$ 。

对任一这样的给定方案，顺时针给每个女宾以编号1，2，…, n。

设第i号与第 $i+1$号女宾之间的位置为第 i 号位置，$1\le i\le n-1$。第 n 号女宾与第1 号之间的位置为第 n 号位置。

设第 i 号女宾的丈夫的编号也为第 i 号，$1\le i\le n$。让 n 个男宾坐到上述编号的 n 个位置上。

设 a_i是坐在第 i 号位置上的男宾，则 $a_i\ne i$，$i+1$，$1\le i\le n-1$；$a_n\ne n$，1。

§ 容斥原理应用举例

这样的限制也即要求在下面3行n列的排列中每列中都无相同元素。

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & n & 1 \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n
\end{array}
$$

满足这样的限制的排列$a_1a_2\cdots a_n$称为二重错排。
设二重错排的个数为U_n，
原问题所求的方案数就是$U_n(n-1)!$。

1	2	3	⋯	⋯	n－1	n
2	3	4	⋯	⋯	n	1
a_1	a_2	a_3	⋯	⋯	a_{n-1}	a_n

设A_i为 $a_i = i$ 或 $i+1$ $(1\le i\le n-1)$，$a_n = n$ 或1的排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$的集合。则

$|A_i| = 2(n-1)!$，关键是计算 $\sum_{I\in C(n,k)} |\bigcap_{i\in I} A_i|$

也就是从(1，2)(2，3) ⋯($n-1$，n)(n，1)这n对数的k对中各取一数，且互不相同的取法的计数。

这相当于从1，2，2，3，3，4，⋯；$n-1$，$n-1$，n，n，1中取 k 个互不相邻数的组合的计数，条件是

1) 任意两个数在数列中不相邻
2) 首尾的 1 不能同时取。

无重复不相邻组合的计数：

$C'(n, r) = C(n-r+1, r)$

不相邻组合

- 不相邻的组合是指从$A=\{1,2,\ldots,n\}$中取r个不相邻的数进行组合(**不可重**)，即不存在相邻的两个数j, $j+1$的组合
- 例 $n=6,r=3$的不相邻组合有
- {1 3 5}{2 4 6}
- 从$A=\{1,2,\ldots,n\}$中取r个不相邻的数进行组合，其组合数为$C(n-r+1,r)$

$$\begin{array}{lccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ B: & \{1, & 3, & 5, & 7, & 9\} \\ C: & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5\} \end{array}$$

- **从$A=\{1,2,\ldots n\}$中取r个不相邻的数进行组合，其组合数为$C(n-r+1,r)$**
- 证明：设$B=\{b_1,b_2\ldots b_r\}$是一组不相邻的组合，
- 假定$b_1<b_2\ldots.<b_r$,令$c_1=b_1$, $c_2 = b_2-1,\ldots c_r=b_r-r+1\leq n-r+1$,则$c_1<c_2\ldots<c_r$,$\{c_1,c_2\ldots c_r\}$为从$\{1,2,\ldots n-r+1\}$中取$r$个进行不可重组合
- 反之，从$\{1,2,\ldots n-r+1\}$中取r个进行不可重组合构成$\{d_1,d_2\ldots d_r\}$,假定$d_1<d_2\ldots<d_r$
- $c_1=d_1$, $c_2=d_2+1,\ldots c_r=d_r+r-1\leq n-r+1+r-1=n$
- $c_1<c_2\ldots<c_r$， $c_{i+1}-c_i = (d_{i+1}+i)-(d_i+i-1)=d_{i+1}-d_i+1>1$,故$c_{i+1}$和$c_i$不相邻。$\{c_1,c_2\ldots c_r\}$为从$=\{1,2,\ldots n\}$中取$r$个不相邻的数进行组合
- 故从$A=\{1,2,\ldots n\}$中取r个不相邻的数进行组合与从$(n-r+1)$个元素中取r个进行无重组合一一对应，其组合数为$C(n-r+1,r)$.

无重复不相邻组合的计数：

C'(n , r) = C (n－r + 1 , r)

- 从1 , 2 , 2 , 3 ,3 ,4, ··;n－1, n－1, n , n , 1中取 k 个互不相邻数的组合的计数选取数为 C(2n-k+1,k)
- 首尾的 1 不能同时取。
  - 不满足该条件的情况:在首尾两列各取出1后,选取数为C(2n-4-(k-2)+1,k-2)=C(2n-k-1, k-2)

$$\cancel{1 , 2}, \underbrace{2 , 2 , 3 ,3 ,4, \cdots,n-1, n-1, n}_{\text{2n-4个中选出k-2个两两不相邻的数}}, \cancel{n , 1}$$

$$\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-4-(k-2)+1}{k-2}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

5对夫妻$(n-1)!U_n=3120$

$$U_n = \left|\bigcap_{i\in[1,n]} \overline{A_i}\right| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

- 原问题所求的方案数就是

$$(n-1)!U_n = (n-1)!\sum_{i=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

夫妻围坐问题(**ménage problem**)：

- sequence A059375 in OEIS
- 这个著名问题由卢卡斯在1891年提出来。
- 1934年，图夏尔给出一个具体表达式，但没有给出证明。
- Until the work of Bogart & Doyle (1986), solutions to the ménage problem took the form of first finding all seating arrangements for the women and then counting, for each of these partial seating arrangements, the number of ways of completing it by seating the men away from their wives.

§ Mǒbíus反演

Mǒbíus(墨比乌斯)函数

定义　设 $n \in Z^+$

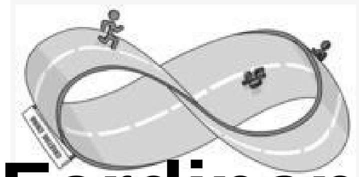
$$\mu(n)=\begin{cases} 1,\text{若} n=1; \\ 0,\text{若} n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\ldots\ldots p_k^{\alpha k};\text{存在}\alpha_i>1; \\ (-1)^k,\text{若} n=p_1p_2\ldots\ldots p_k \end{cases}$$

p_i为彼此不同的素数

如 $\mu(30)=\mu(2\cdot 3\cdot 5)=(-1)^3$

$\mu(12)=\mu(3\cdot 2^2)=0$;

对任何素数p,$\mu(p)$=-1;



August Ferdinand Möbius

- **August Ferdinand Möbius(1790-1868, German)**
- **Möbius travelled to Göttingen where he studied astronomy under Gauss.(1813)**
- Doctoral the

- Extraordina 316)
- Full Profess g (1844)
- *“His intuitior utions that he found, all ex something original in a rying, quietly on his own. ntil everything had been p without pomposity a fruits of his mind mature s perfected works.* “
- Möbius's na atical objects such as the e 1831.

$$\mu(n)=\begin{cases}1,\text{若}n=1; & p_i\text{为彼此不同的素数}\\ 0,\text{若}n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\dots\ p_k^{\alpha k};\text{存在}\alpha_i>1;\\ (-1)^k,\text{若}n=p_1p_2\dots p_k\end{cases}$$

定理 设$n \in Z^+$

则 $$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1，\text{若}n=1;\\ 0，\text{若}n>1;\end{cases}$$

d|n表示取遍n的正整数因子d

证 若n =1， $\sum_{d\mid n}\mu(d)=\mu(1)=1$,成立.

若 $n>1$，设 $n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\dots p_k^{\alpha k}, n'=p_1p_2\dots p_k$

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{d\mid n'}\mu(d)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{I\in C(k,j)}\mu(\prod_{i\in I}p_i)+\mu(1)=1+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j=(1-1)^k=0$$

§ Mŏbíus反演

与Mŏbíus函数密切相关的另一类数论函数是Euler函数

Euler函数:　 φ(n)等于小于n的与n互素的正整数个数

$$\mu(n)=\begin{cases}1, \text{若} n=1; \\ 0, \text{若} n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\dots\ p_k^{\alpha k}; \text{存在} \alpha_i>1; \\ (-1)^k, \text{若} n=p_1p_2\dots p_k\end{cases}$$

p_i为彼此不同的素数

证明 $\varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$

证

$$n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=n\sum_{d|n'}\frac{\mu(d)}{d}$$

若 $n>1$, $n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\dots p_k^{\alpha k}$,

$$n'=p_1p_2\dots p_k$$

$$n\sum_{d|n'}\frac{\mu(d)}{d}=n(1+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{I\in\mathbb{C}(k,j)}(\prod_{i\in I}p_i)^{-1})$$

$$=n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})\ =\varphi(n)$$

$$\psi(\mathrm{n})=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_k}|$$

$$=n-(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\dots+\frac{n}{p_k})+(\frac{n}{p_1p_2}$$

$$+\frac{n}{p_1p_3}+\dots+\frac{n}{p_1p_n})-\bullet\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

§ Mŏbíus反演

定理 （Mŏbíus反演定理）设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在正整数集合上的两个函数.

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)=\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (M_1)$$

$$g(n)=\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \qquad (M_2)$$

则 $(M_1) \Longleftrightarrow (M_2)$

证 “$\Rightarrow$” 设 (M_1)成立,则有。

$$f(n)=\boxed{\sum_{d|n} g(d)}=\sum_{d|n} g(\frac{n}{d}) \qquad (M_1)$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1)$$

$$\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{dd_1|n}\mu(d)g(d_1)$$

$$\sum_{d_1|n}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{d_1|n} g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=g(n)$$

$$\boxed{\text{而} \sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, & d_1=n\\ 0, & d_1<n\end{cases}}$$

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)=\sum_{d|n} g(\frac{n}{d}) \quad (M_1) \qquad\qquad g(n)=\sum_{d|n}\mu(d) f(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d}) f(d) \quad (M_2)$$

"$\Leftarrow$"：设（M_2）成立。则

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d) f(\frac{n}{d})=\boxed{\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d}) f(d)} \qquad (M_2)$$

$$\sum_{d|n} g(d)=\sum_{d|n}\boxed{g(\frac{n}{d})}$$

$$=\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(\frac{n}{dd_1}) f(d_1)=\sum_{dd_1|n}\mu(\frac{n}{dd_1}) f(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n} f(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(\frac{n}{dd_1})=f(n)$$

$$\boxed{\text{而}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(\frac{n}{dd_1})=\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, d_1=n\\ 0, d_1<n\end{cases}}$$

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)=\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (M_1)$$

$$\boxed{g(n)=\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)}=\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \qquad (M_2)$$

Euler函数:　φ(n)等于小于n的与n互素的正整数个数

$$\varphi(n)=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\ldots+\frac{n}{p_k}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\ldots+\frac{n}{p_1p_n}\right)-\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{若 } n=1;\\ 0, & \text{若} n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\cdots p_k^{\alpha k} \ \text{存在}\alpha_i>1\\ (-1)^k, & \text{若} n=p_1p_2\cdots p_k\end{cases}$$

$$\varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d|n}\frac{n\mu(d)}{d}=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$$

若视$f(n)=n$, $g(n)=\varphi(n)$,

由反演公式可得到公式 $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$

$$\sum_{d\,|\,15}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(3)+\varphi(5)+\varphi(15)$$

$$=1+2+4+8=15$$

§ Mǒbíus反演

例　圆排列问题

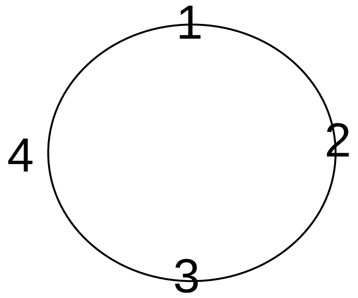
设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个圆排列，则

$a_2a_3\cdots a_na_1$ ，$\cdots$，$a_na_1\cdots a_{n-1}$，看作是相同的。

为了加以区别，必要时把原先的排列称为线排列。

无重圆排列　(n-1)!

n个位置断开,产生n个不同的线排列



1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

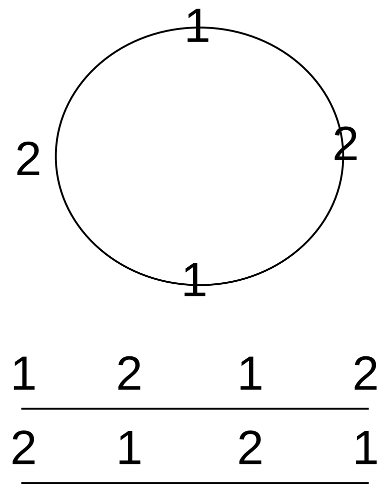
§ Mŏbíus反演

可重圆排列:特指不限重数的圆排列,即从$a_1,a_2,\ldots a_r$中取n个做允许重复的圆排列

- ✓ 经过旋转可一致的两个圆排列视为同一排列;
- ✓ 一个圆排列在 n 个位置断开形成的 n 个线排列在元素可重复的情况下，未必都不相同。例如，$d\mid n$时，由不重复的$a_1a_2\cdots a_d$重复 n/d次构成的圆排列

$$\underbrace{(a_1a_2\cdots a_d)\cdots(a_1a_2\cdots a_d)}_{n/d\text{组}}$$

只能形成 d 个不同的线排列。

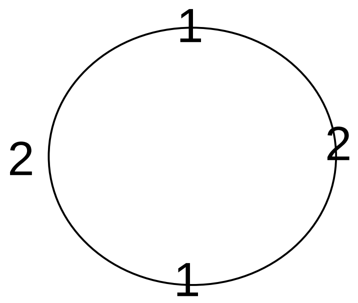


§ Mŏbíus反演

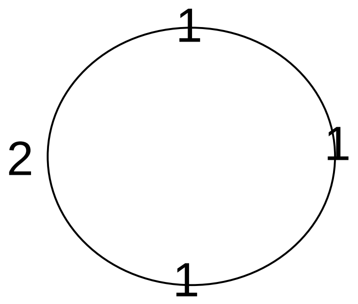
定义:

若一个圆排列可由一个长度为 k 的线排列重复若干次形成，则这样的 k 中最小者成为该圆排列的周期K。

周期为n的一个圆排列中元素的个数（重复出现的按其重复次数计）称为它的长度T。



K=2
T=4

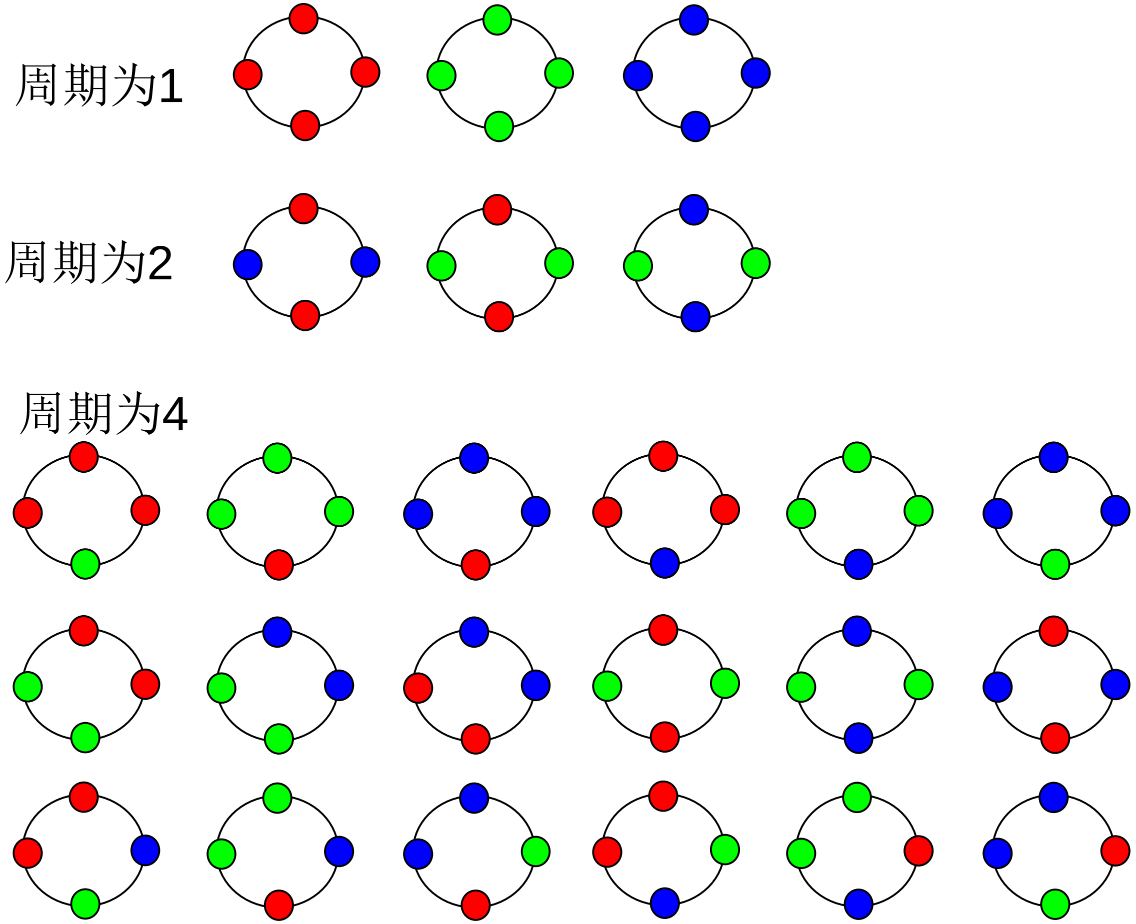


K=4
T=4

§ Mŏbíus反演

设集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 种元素形成的长度与周期都是 n 的圆排列的个数为$M(n)$。

3种元素
长度为4
所有的圆排列共24个
长度与周期都为4的
即M(4) = 18



§ Mŏbíus反演

利用Mŏbíus反演来求M(n)。

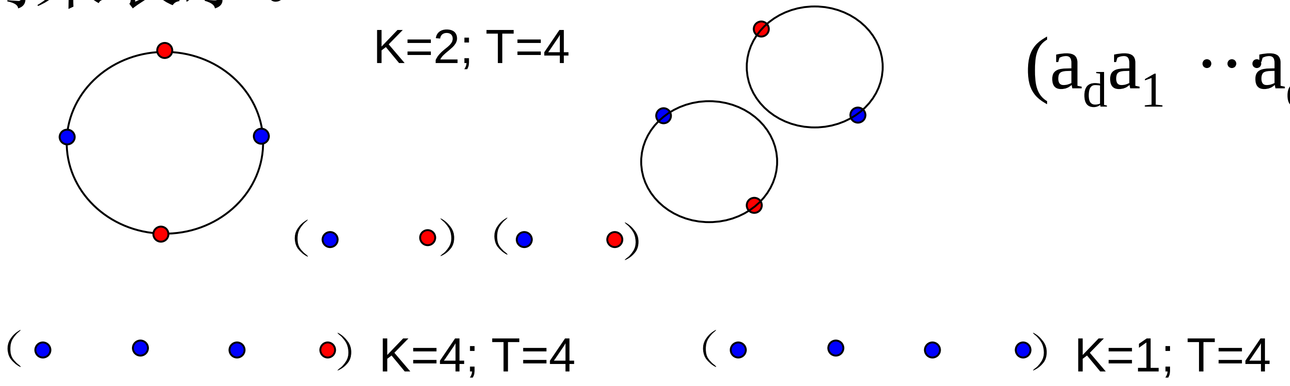
若 d | n , 每个长度与周期都是d的圆排列可在 d 个位置上断开，重复 n / d 次形成d个长度为 n 的可重排列。

$$\underbrace{(a_1a_2\cdots a_d)\cdots(a_1a_2\cdots a_d)}_{n/d\text{ 组}}$$

形成 d个不同的线排列。

$$(a_1a_2\cdots a_d)\cdots(a_1a_2\cdots a_d)$$
$$(a_2a_3\cdots a_1)\cdots(a_2a_3\cdots a_1)$$
$$\cdots$$
$$(a_da_1\cdots a_{d-1})\cdots(a_da_1\cdots a_{d-1})$$

对所有长度为n的可重线排列，均可用长度和周期都是d的圆排列来表示。



§ Mŏbíus反演

长度与周期都是 d 的圆排列的个数为M(d)。
n可重线排列的个数等于dM(d)

$$\sum_{d\,|\,n} d\,M(d) = m^n$$

由Mŏbíus反演定理

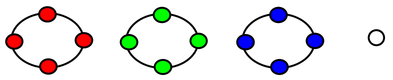
$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (M_1)$$

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \qquad (M_2)$$

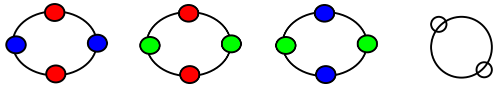
$f(n) = m^n$; $\qquad g(n) = nM(n)$

M1→M2: $g(n) = nM(n) = \sum_{d|n} \bar{\mu}(d) m^{\frac{n}{d}}$

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$$



周期为1且长度为1的圆排列个数



周期为2且长度为2的圆排列个数

设长度为 n 的圆排列的个数为T(n)，则

$$T(n) = \sum_{d\,|\,n} M(d)$$

$$M(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)m^{\frac{n}{d}}$$

例　m = { 1 , 2 , 3} ， n = 4　则　d=1,2,4

$$M(4) = 1/4(3^4 - 3^2) = 18$$

$$T(4) = \sum_{d\,|\,4} M(d) = M(1) + M(2) + M(4) = 24$$

例　m = { 1 , 2 } ， n = 7　则

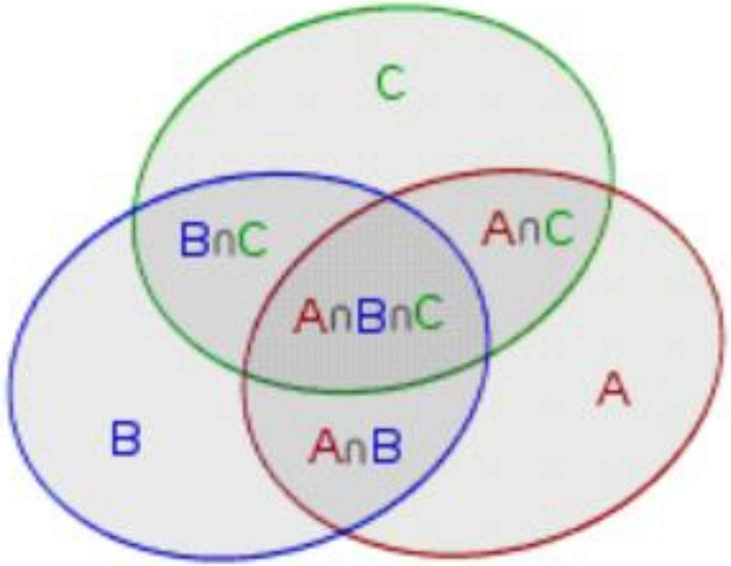
$$M(7) = \frac{1}{7}(2^7 - 2) = 18$$

$$T(7) = \sum_{d\,|\,7} M(d) = M(1) + M(7) = 20$$

在OJ的相关题目

这里列出了一些可以用容斥原理解决的习题。

- UVA #10325 **"The Lottery"** [难度：简单]
- UVA #11806 **"Cheerleaders"** [难度：简单]
- TopCoder SRM 477 **"CarelessSecretary"** [难度：简单]
- TopCoder TCHS 16 **"Divisibility"** [难度：简单]
- SPOJ #6285 NGM2 **"Another Game With Numbers"** [难度：简单]
- TopCoder SRM 382 **"CharmingTicketsEasy"** [难度：中等]
- TopCoder SRM 390 **"SetOfPatterns"** [难度：中等]
- TopCoder SRM 176 **"Deranged"** [难度：中等]
- TopCoder SRM 457 **"TheHexagonsDivOne"** [难度：中等]
- SPOJ #4191 MSKYCODE **"Sky Code"** [难度：中等]
- SPOJ #4168 SQFREE **"Square-free integers"** [难度：中等]
- CodeChef **"Count Relations"** [难度：中等]



谢 谢