TURUNAN (Bagian 1)

Pertemuan: 5 dan 6

Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.

Materi:

1. Pendahuluan dan Definisi Turunan
2. Aturan Pencarian Turunan
3. Turunan Fungsi Trigonometri
4. Aturan Rantai

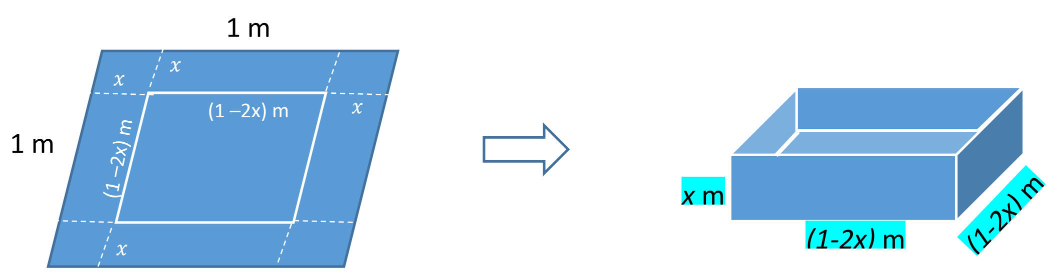
Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan aturan turunan untuk menghitung hasil turunan.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta

1. Pendahuluan dan Definisi Turunan

PENDAHULUAN

Sebuah perusahaan yang memproduksi kotak tanpa tutup menghendaki bentuk kotaknya adalah sebuah balok dengan panjang yang sama dengan lebarnya (artinya tingginya menyesuaikan bahan yang tersedia). Selama ini, perusahaan tersebut membuat kotak tersebut dari bahan kertas berbentuk persegi yang memiliki luas 1 m^2. Perusahaan tersebut menginginkan agar bahan tersebut dapat dibuat kotak yang memiliki volume sebesar mungkin (maksimum). Berikut ilustrasinya



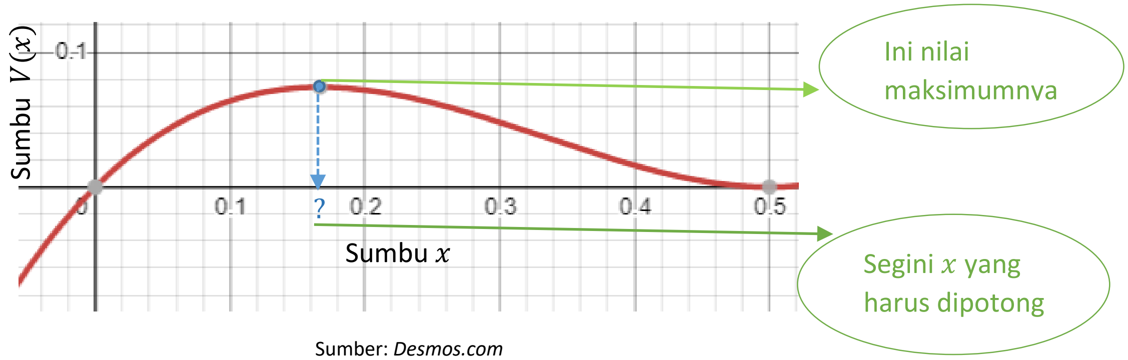
Salah satu cara menentukannya adalah dengan cara mencoba-coba berbagai ukuran, tentunya hal tersebut bukan cara yang bijak. Selain memakan waktu dan bahan percobaan yang akan terbuang sia-sia, jika desain diganti maka harus mencoba-coba kembali dari awal. Akibatnya, biaya produksi akan membesar. Belum lagi hasil volume maksimum yang diinginkan belum tentu akurat.

Untuk itu harus digunakan cara yang cukup efektif, yakni melibatkan konsep atau teori pemodelan dalam matematika, berikut konsepnya:

Yang dikehendaki perusahaan adalah agar kotak memiliki volume semaksimal mungkin. Rumusan volume kotak berdasarkan sisi-sisi yang diketahui pada gambar di atas adalah adalah

$$V = p \cdot l \cdot t = (1 - 2x) \cdot (1 - 2x) \cdot x \quad \rightarrow \quad V(x) = x - 4x^2 + 4x^3$$

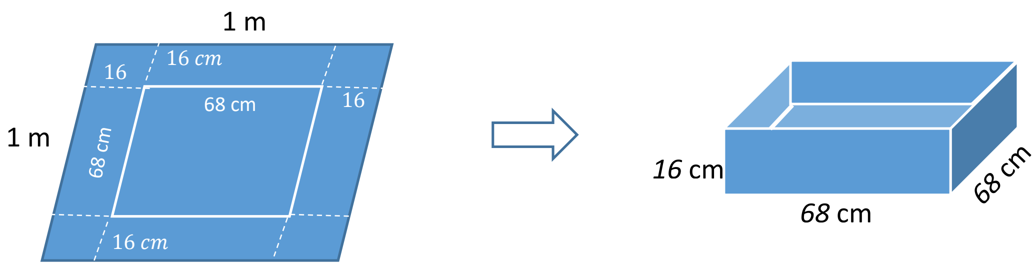
Volume kotak menjadi fungsi dalam x sehingga dapat dibuat grafiknya, yakni sebagai berikut:



Sumber: *Desmos.com*

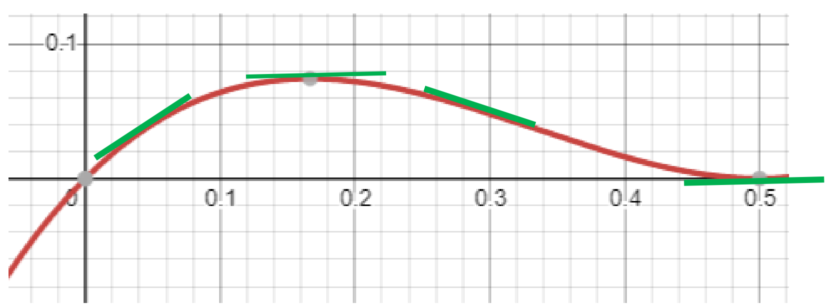
Grafik yang disorot tentunya adalah pada interval 0 hingga 0,5 {dinotasikan $\left(0, \frac{1}{2}\right)$}, sebab nilai x merupakan potongan kertas agar terbentuk balok (lihat lagi gambar di atas). jika $x \geq 0{,}5$, bagaimana bisa, padahal panjang sisi kertasnya hanyalah 1 meter dan yang dipotong adalah sisi kanan dan kiri.

Pertanyaan berikutnya adalah berapa x yang harus dipotong agar maksimum? Melalui gambar dapat dilihat bahwa pada interval $(0, \frac{1}{2})$, grafik fungsi mencapai maksimum ketika x di sekitar $0{,}16 = 16\ cm$. Jadi, ukuran yang tepat agar volumenya maksimum adalah dengan memotong sebesar 16 cm sehingga bentuk kotaknya adalah dengan panjang $68\ cm$, lebarnya $68\ cm$, dan tingginya $16\ cm$.



Namun demikian, cara menggunakan grafik tidaklah efektif juga karena cukup rumit untuk membuatnya dan jika tidak presisi maka hasil perhitungannya akan kurang akurat pula. Untuk itu, diperlukan konsep yang lebih universal sehingga dapat digunakan dalam banyak hal.

Sekarang pandang kembali grafik di atas. Perhatikan garis-garis hijau (garis singgung) yang ditambahkan berikut.



Sumber: *Desmos.com*

Di antara garis-garis hijau tersebut, ada yang miring dan ada juga yang tidak miring (lurus mendatar). Dapat dilihat bahwa nilai maksimum (titik tertinggi) dan nilai minimum (titik terendah) memiliki garis yang tidak miring. Ingat kembali bahwa konsep kemiringan dalam matematika disebut **gradien**, yang rumusannya untuk $y = f(x)$ adalah

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}}$$

Namun karena garis singgung untuk kurva (grafik yang melengkung) akan berbeda kemiringannya di setiap titik (bayangkan sedang mendaki gunung atau menuruni gunung, melangkah sedikit saja akan berubah kemiringannya), maka rumus kemiringan atau gradien di atas harus dimodifikasi, karena agar dapat dicari kemiringannya di setiap titik maka x_2 harus sedekat mungkin dengan x_1, yakni misalkan $x_2 = x_1 + h$ di mana $h \rightarrow 0$. Dengan demikian, rumus gradiennya menjadi

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}}$$

Konsep gradien yang demikian disebut sebagai **turunan**. Selanjutnya notasi m tidak digunakan melainkan $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{df}{dx}$ merujuk pada rumus gradien awal $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ atau $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, seperti pada definisi turunan secara formal berikut.

DEFINISI TURUNAN

Jika f adalah fungsi yang kontinu pada (a, b). **Turunan dari f, dinotasikan f',** di $x \in (a, b)$ adalah

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Perhatikan ada kata "kontinu" pada definisi di atas, hal ini dikarenakan akan menggunakan konsep limit dari f dan tentunya f harus terdefinisi pada titik-titik yang akan dicari turunannya.

Notasi turunan tidak hanya f', bisa pula menggunakan $\frac{df'}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, y', $D_x(f)$, atau $D_x y$.

Kembali lagi ke kasus sebelumnya, Ingat kembali fungsinya adalah $V(x) = x - 4x^2 + 4x^3$. Karena nilai maksimum memiliki garis singgung yang tidak miring, maka kemiringannya 0, yakni

$$m = V'(x) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x + h) - V(x)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[(x + h) - 4(x + h)^2 + 4(x + h)^3] - [x - 4x^2 + 4x^3]}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[x + h - 4x^2 - 8xh - 4h^2 + 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3] - [x - 4x^2 + 4x^3]}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[h - 8xh - 4h^2 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3]}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[1-8x-4h+12x^2+12xh+4h^2]}{h}=0$$

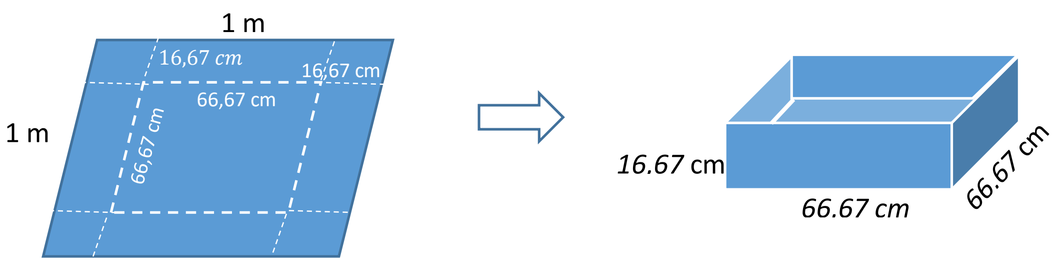
$$\lim_{h\to 0}[1-8x-4h+12x^2+12xh+4h^2]=0$$

$$1-8x+12x^2=0$$

$$(1-2x)(1-6x)=0$$

$$x=\frac{1}{2}\quad \text{atau}\quad x=\frac{1}{6}=0{,}1667\ m\approx 16{,}67\ cm$$

Kita tidak mungkin memotong sebesar $x=\frac{1}{2}$, karena akan membuat kertasnya langsung terbelah, tidak mungkin terbentuk balok. Untuk itu, besar potongannya haruslah 16,67 cm. Jawaban yang mirip dengan sebelumnya kita dapatkan menggunakan grafik, namun lebih presisi nilainya. Jadi, ukuran kotak agar volume maksimum adalah



Kasus mengenai volume ini hanyalah salah satu aplikasi mengenai turunan. Aplikasi yang lebih luas lagi lebih lanjut akan dibahas tersendiri. Pada bab ini, akan fokus pada konsep turunan dari berbagai fungsi yang diberikan. Karena dalam kehidupan sehari-hari akan banyak sekali fungsi yang belum tentu akan mudah dicari turunannya.

Contoh 1.1 (Mencari Turunan Menggunakan Definisi)

1) $f(x)=x$, maka

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Jadi, turunan dari $f(x)=x$ adalah $f'(x)=1$

2) $f(x)=x^2$, maka

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[x^2+2xh+h^2]-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Jadi, turunan dari $f(x)=x^2$ adalah $\frac{df(x)}{dx}=2x$

3) $y=7$, maka

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{7-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

2. Aturan Pencarian Turunan

Definisi turunan di atas sangatlah penting untuk memberikan pemahaman mengenai apakah itu turunan. Namun demikian, proses pencariannya begitu panjang sehingga cukup banyak memakan waktu. Dapat dilihat pada 3 contoh di atas bahwa hasilnya memiliki pola tertentu. Berikut adalah beberapa aturan mengenai turunan.

ATURAN DASAR TURUNAN

1) Fungsi konstan:

$$\boldsymbol{f(x) = k \;\rightarrow\; f'(x) = 0}$$

2) Fungsi identitas:

$$\boldsymbol{f(x) = x \;\rightarrow\; f'(x) = 1}$$

3) Fungsi berpangkat n, di mana n bilangan rasional tak nol:

$$\boldsymbol{f(x) = x^n \;\rightarrow\; f'(x) = nx^{n-1}}$$

4) Fungsi dikalikan kontanta k:

$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot g(x) \;\rightarrow\; f'(x) = k \cdot g'(x)}$$

5) Penjumlahan atau pengurangan Fungsi:

$$\boldsymbol{f(x) = g(x) \pm h(x) \;\rightarrow\; f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Contoh 2.1 (Mencari Turunan Menggunakan Aturan Dasar)

1) $f(x) = 1000$, maka $f'(x) = 0$ (Lihat aturan nomor 1)

2) $f(x) = \frac{1}{7}x$, maka $f'(x) = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$ (Lihat aturan nomor 2 dan 4)

3) $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{5x} - \sqrt{x}$, dengan $x > 0$, maka

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{5}x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga (Lihat aturan nomor 3, 4, dan 5)

$$\frac{df(x)}{dx} = 2 \cdot (3x^2) + \frac{1}{5} \cdot (-1x^{-2}) - (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$$
$$= 6x^2 - \frac{1}{5x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $y = \frac{x^2+2x-\sqrt[3]{x}}{3x}$, $x \neq 0$ maka

$$f(x) = \frac{x^2}{3x} + \frac{2x}{3x} - \frac{x^{1/3}}{3x}$$
$$= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Sehingga (Lihat aturan nomor 3, 4, dan 5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (1) + (0) - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

Di antara aturan dasar di atas, semuanya merupakan aturan yang secara langsung dapat “dieksekusi” pada masing-masing fungsinya. Namun demikian, tidak ada aturan mengenai perkalian dua buah fungsi pada aturan di atas. Hal ini dikarenakan untuk perkalian dua buah fungsi, turunannya tidak dapat dikerjakan “secara langsung”.

Sebagai gambaran, misalkan $f(x) = x^3 \cdot x^2$. Fungsi ini sebenarnya dapat diturunkan menggunakan aturan di atas. Berdasarkan sifat eksponen, maka $f(x) = x^3 \cdot x^2 = x^5$ sehingga dengan menggunakan aturan nomor 3 di atas maka $f'(x) = 5x^4$.

Di sini kita ingin menunjukkan bahwa jika tidak menggunakan sifat eksponen, maka kita tidak bisa melakukan turunan secara langsung pada x^3 dan x^2, yakni seperti $f'(x) = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3$. Hasil ini tidak sesuai dengan hasil pada sifat eksponen di atas, artinya jika $f(x) = g(x)h(x)$ maka

$$f'(x) \neq g'(x)h'(x)$$

Berikut adalah aturan turunan yang tepat untuk perkalian dua buah fungsi.

ATURAN TURUNAN PERKALIAN

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = u(x).v(x)}$ di mana u dan v adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\boldsymbol{f' = u'v + uv'}$$

BUKTI RUMUS:
Misalkan $f(x) = u(x) \, . \, v(x)$, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x+h)] - [u(x).v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x+h)] - [u(x).v(x)]}{h} - \left(\frac{[u(x).v(x+h)] - [u(x).v(x+h)]}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h).v(x+h)] - [u(x).v(x+h)] + [u(x).v(x+h)] - [u(x).v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]\, v(x+h) + u(x)\, [v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} \, . \, v(x+h) + \lim_{h \to 0} u(x) . \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$f'(x) = u'(x) \, . \, v(x) + u(x) \, . \, v'(x)$$

Terbukti bahwa aturan turunan untuk perkalian dua fungsi di atas berlaku

Contoh 2.2 **(Mencari Turunan Bentuk Perkalian Dua Fungsi)**

1) $f(x) = x^3.x^2 = u(x)\,.\,v(x)$ maka $u'(x) = 3x^2$ dan $v'(x) = 2x$ sehingga

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= [3x^2.x^2] + [x^3.2x]$$
$$= 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$$

Tentu saja untuk fungsi ini lebih baik menggunakan eksponen seperti sebelumnya.

2) $f(x) = (x^3 - 5x^2 - 3)(x^2 - 2x + 1) = u(x).v(x)$
maka $u'(x) = (3x^2 - 10x)$ dan $v'(x) = (2x - 2)$ sehingga

$$f'(x) = [(3x^2 - 10x)(x^2 - 2x + 1)] + (x^3 - 5x^2 - 3)(2x - 2)$$
$$= (3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 10x^3 + 20x^2 - 10x) + (2x^4 - 2x^3 - 10x^3 + 10x^2 - 6x + 6)$$
$$= 5x^4 - 28x^3 + 33x^2 - 16x + 6$$

Terdapat cara lain yang lebih mudah untuk fungsi ini, perhatikan:

$$f(x) = (x^3 - 5x^2 - 3)(x^2 - 2x + 1)$$
$$= x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 6x - 3$$

maka

$$f'(x) = 5x^4 - 28x^3 + 33x^2 - 16x + 6$$

Seperti halnya pada perkalian, pada dua buah fungsi yang dibagi, termasuk fungsi rasional, tidak dapat pula dilakukan penurunan secara langsung, melainkan menggunakan aturan berikut.

ATURAN TURUNAN PEMBAGIAN

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ di mana u dan v adalah fungsi yang dapat diturunkan dan $v \neq 0$, maka

$$\boldsymbol{f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Contoh 2.3 **(Mencari Turunan Pembagian Dua Fungsi)**

$$f(x) = \frac{(x^3 - 5x)}{(x^2 - 2x + 1)} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

maka $u'(x) = (3x^2 - 5)$ dan $v'(x) = (2x - 2)$ sehingga

$$D_x(f) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(3x^2 - 5)(x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 5x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$
$$= \frac{(3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 10x - 5) - (2x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 10x)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$
$$= \frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

3. Turunan Fungsi Trigonometri

Perhatikan turunan fungsi trigonometri menggunakan definsi turunan berikut.
Misalkan $y = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[\sin x\cos h + \cos x\sin h] - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos h) + \cos x\sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos h)}{h} + \frac{\cos x\sin h}{h}$$

$$= 0 + \cos x = \cos x$$

Jadi, turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$.

Dapat dicari pula untuk turunan trigonometri lainnya menggunakan definisi turunan. Berikut merupakan atiran turunan untuk fungsi trigonometri.

ATURAN TURUNAN TRIGONOMETRI A

1) Fungsi Sinus: $f(x) = \sin x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \cos x}$
2) Fungsi Cosinus: $f(x) = \cos x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = -\sin x}$
3) Fungsi Tangent: $f(x) = \tan x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \sec^2 x}$
4) Fungsi Secant: $f(x) = \sec x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \sec x\tan x}$
5) Fungsi Cosecant: $f(x) = \csc x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = -\csc x\cot x}$
6) Fungsi Cotangent: $f(x) = \cot x \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = -\csc^2 x}$

Contoh 3.1 (Mencari Turunan Fungsi Trigonometri)

1) $f(x) = \sin x\cos x$ $=u(x)v(x)$, maka $u'(x) = \cos x$ dan $v'(x) = -\sin x$ sehingga

$$f' = u'v + uv' = (\cos x)\cos x + \sin x\,(-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$f(x) = \cos 2x$$

2) $f(x) = x^2\tan x$, tentukan $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Misalkan $u(x) = x^2$ dan $v(x) = \tan x$, maka $u'(x) = 2x$ dan $v'(x) = \sec^2 x$, sehingga

$$f' = u'v + uv' = (2x)\tan x + x^2(\sec^2 x)$$
$$f'(x) = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$$

Maka

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3} + \frac{4\pi^2}{27} \approx 2{,}671$$

4. Aturan Rantai

Perhatikan fungsi-fungsi berikut.

$$f(x) = \sin 3x \qquad \text{dan} \qquad f(x) = (x^2 - 2x - 3)^{100}$$

Menggunakan aturan-aturan yang telah dibahas di atas, belum ada yang dapat digunakan untuk mencari turunan dari dua fungsi tersebut. Hal ini dikarenakan fungsi tersebut merupakan fungsi berantai atau merupakan fungsi komposisi yakni

$$f(x) = \sin 3x = g(h) \qquad \text{di mana } g(u) = \sin u \text{ dan } h(x) = 3x$$

Begitu pula

$$f(x) = (x^2 - 2x - 3)^{100} = g(h)$$

$$\text{di mana } \quad g(u) = u^{100} \text{ dan } h(x) = x^2 - 2x - 3$$

Untuk mencari turunannya, jika $f = g \circ h = g(h)$, perhatikan bahwa

$$\frac{df}{dx} = \frac{d[g(h)]}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = g'(h) \cdot h'(x)$$

Aturan yang demikian disebut sebagai aturan rantai.

ATURAN TURUNAN BERANTAI

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = g(h(x))}$ dengan g dan h dapat diturunkan, maka

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

Contoh 4.1 (Mencari Turunan Fungsi Berantai)

1) $f(x) = \sin 3x$, maka

$$f'(x) = \sin' 3x \cdot (3x)'$$
$$= \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

2) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)^{100} = (x^2 - 2x - 3)^{100}$ maka

$$f'(x) = 100(x^2 - 2x - 3)^{99} \cdot (2x - 2)$$
$$= 100(2x - 2)(x^2 - 2x - 3)^{99}$$

3) $f(x) = \sin^3(\cos(2x^2 + 5)) = (\sin(\cos(2x^2 + 5)))^3$

$$f'(x) = 3 \sin^2(\cos(2x^2 + 5)) \cdot (\sin(\cos(2x + 5)))'$$
$$= 3 \sin^2(\cos(2x + 5)) \cdot \cos(\cos(2x + 5)) \cdot (\cos(2x + 5))'$$
$$= 3 \sin^2(\cos(2x + 5)) \cdot \cos(\cos(2x + 5)) \cdot \sin(2x + 5) \cdot (2x^2 + 5)'$$
$$= 3 \sin^2(\cos(2x + 5)) \cdot \cos(\cos(2x + 5)) \cdot \sin(2x + 5) \cdot (4x)$$
$$= 12x \sin^2(\cos(2x + 5)) \cdot \cos(\cos(2x + 5)) \cdot \sin(2x + 5)$$

4) $f(x) = (2x-4)^2(5-3x)^3$

Soal ini memerlukan dua aturan, yakni aturan perkalian dan aturan rantai, yakni:

Misalkan $u(x) = (2x-4)^2$ dan $v(x) = (5-3x)^3$

maka $u'(x) = 2(2x-4)(2) = 4(2x-4)$ dan $v(x) = 3(5-3x)^2(-3) = -9(5-3x^2)$

Sehingga

$$\begin{aligned} f' = u'v + uv' &= 4(2x-4)(5-3x)^3 + (2x-4)^2(-9)(5-3x)^2 \\ &= (2x-4)(5-3x)^2[4(5-3x) + (2x-4)(-9)] \\ &= (2x-4)(5-3x)^2[20-12x-18x+36] \\ &= (2x-4)(5-3x)^2[56-40x] \\ &= (2x-4)(5-3x)^2 8[7-5x] \\ &= 8(2x-4)(5-3x)^2(7-5x) \end{aligned}$$

ATURAN TURUNAN RANTAI KOMPOSISI FUNGSI LINIER

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = g(\alpha x + b)}$ dengan g dapat diturunkan, maka

$$\boldsymbol{f'(x) = \alpha\, g'(\alpha x + b)}$$

Contoh 4.2 (Mencari Turunan Fungsi yang Dikomposisikan dengan Fungsi Linear)

1) $f(x) = (3x-4)^2$, maka

$$\frac{df(x)}{dx} = 3.[2(3x-4)] = 6(3x-4)$$

2) $y = \cos 2x$, maka

$$y' = 2[-\sin 2x] = -2\sin 2x$$

3) $f(u) = \sec\frac{1}{2}u$, maka

$$D_u f(x) = \frac{1}{2}\left[\sec\frac{1}{2}x \tan\frac{1}{2}x\right]$$

4) $f(x) = (7-5x)^{1000}$, maka

$$f'(x) = -5\,[1000(5x-7)^{999}] = -5000(5x-7)^{999}$$