PENERAPAN INTEGRAL (Bagian 2 dari 2)

Pertemuan: 10
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

3. Volume Benda: Metode Kulit Tabung
4. Panjang Lintasan pada Bidang
5. Usaha dan Gaya

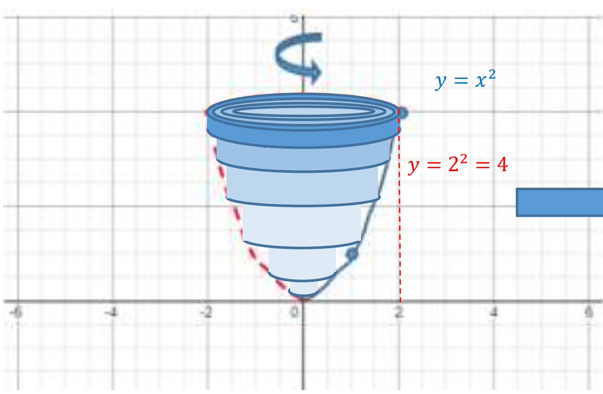
Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menghitung luas daerah dan volume benda putar (C3).

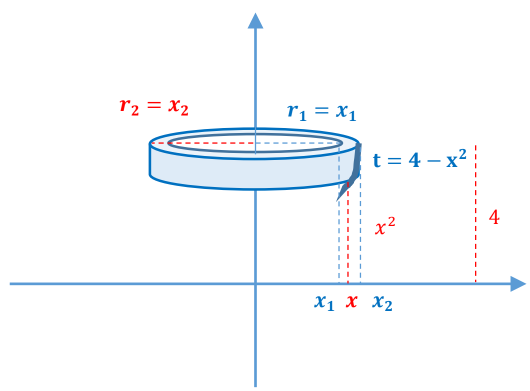
Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

3. Volume Benda: Metode Kulit Tabung

Ingat kembali pada subbab sebelumnya mengenai volume benda putar untuk lempengan cakram maupun cincin. Jika grafiknya diputar terhadap sumbu-y, rumus volumenya harus mengintegralkan fungsi dalam y atau dengan kata lain fungsinya harus diinverskan terlebih dahulu. Selain harus tidak efisien, mencari invers fungsi tidaklah selalu mudah.

Terdapat metode lain untuk benda putar terhadap sumbu-y. Perhatikan Volume dengan batas fungsi $y = x^2$ dan $y = 4$ pada $[0,2]$ diputar 360^o terhadap dan sumbu-y berikut.





Metode ini dinamakan *metode kulit tabung*, yang mana volume didekati dengan cara membuat kulit tabung yang berlapis-lapis yang sangat tipis. Untuk mencari besar volumenya, perhatikan gambar satu buah kulit tabung sebelah kanan. Lapisan kulit tabung tersebut memiliki volume

$$\begin{aligned}V_P &= Tabung\ luar - Tabung\ dalam \\ &= \pi r_2^2 t - \pi r_1^2 t = \pi(r_2^2 - r_1^2)t = \pi(x_2^2 - x_1^2)(4 - x^2) \\ &= 2\pi \frac{(x_2 + x_1)}{2}(x_2 - x_1)(4 - x^2) \\ &= 2\pi . x . (4 - x^2)\Delta x\end{aligned}$$

Karena ada sebanyak tak berhingga kulit tabung tersebut, maka volume benda putarnya adalah

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi.x.(4-x^2)\Delta x = \int_0^2 2\pi.x.(4-x^2)\Delta x$$

Secara umum, volume benda putar metode selimut tabung adalah sebagai berikut.

VOLUME BENDA PUTAR METODE SELIMUT TABUNG

Misalkan f dan g terintegralkan pada interval $[a,b]$ dan $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Volume benda putar yang terbentuk dari fungsi f dan g pada interval $[a,b]$ diputar 360° terhadap sumbu-y maka volumenya

$$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx$$

CONTOH 6

1) Luas daerah untuk kasus di atas adalah

$$V = 2\pi \int_0^2 x\,[4-x^2]\,\mathrm{dx} = 2\pi \int_0^2 [4x - x^3]\,\mathrm{dx}$$

$$= 2\pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi\,[8-4-0] = 8\pi \approx 25{,}12$$

2) Akan volumenya jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{4-2x}$, sumbu-x, dan sumbu-y diputar 180^o.

Untuk kasus ini selang $[a,b]$ telah didapat berdasarkan Contoh 1 nomor 2), yakni $[0,2]$.

Maka volume putarnya terhadap sumbu-y sebesar 360^o adalah

$$V = 2\pi \int_0^2 x\,\sqrt{4-2x}\,dx$$

Misalkan $u = 4 - 2x$ maka $x = 2 - \frac{1}{2}u$ dan $dx = -\frac{1}{2}\,du$ sehingga

$$V = 2\pi \int_{4-2.0}^{4-2.2} \left(2 - \frac{1}{2}u\right)\sqrt{u}\,\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\pi \int_4^0 \left(2u^{1/2} - \frac{1}{2}u^{3/2}\right)\,du$$

$$= -\pi \left[2\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2}\frac{u^{5/2}}{5/2}\right]_4^0$$

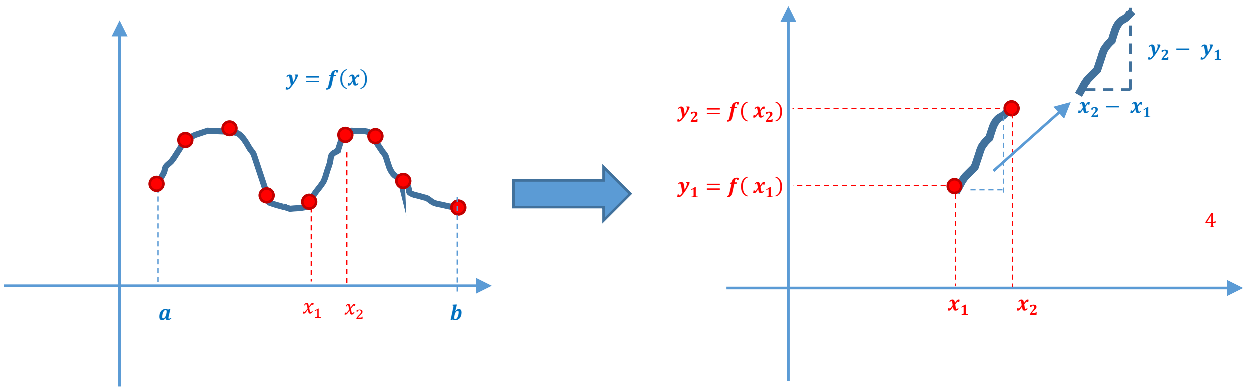
$$= -\pi \left[0 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{4}^3 - \frac{1}{5}\sqrt{4}^5\right)\right]$$

$$= -\pi \left[-\frac{32}{3} + \frac{32}{5}\right] = 4.27\pi$$

Sehingga untuk 180^o adalah $V = \frac{4.27\pi}{2} = 1.135\pi$

4. Panjang Kurva Pada Bidang

Panjang suatu lintasan tentunya akan mudah apabila lintasan yang terbentuk adalah berupa garis lurus atau melingkar yang mana menentukannya sudah kita ketahui rumusnya (rumus jarak lurus dan keliling lingkaran). Perhatikan gambar berikut



Panjang lintasan mulai dari a hingga b pada gambar di atas tidak melalui sebuah lintasan yang lurus atau melingkar mulus menyerupai lingkaran sehingga jarak tempuhnya tidak dapat dicari langsung menggunakan rumus-rumus yang terdahulu. Namun, apabila dibuat partisi yakni panjang lintasan antar titik-titik persinggahan, maka akan menyerupai garis lurus. Perhatikan sebuah partisi di sebelah kanan, panjang lintasan untuk satu buah partisi dapat dicari menggunakan rumus Pythagoras (atau rumus jarak pada vektor), yaitu

$$L_i = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)(\Delta x)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$$

Dengan demikian, dengan L_i tak behingga buah maka panjang lintasan dari a ke b akan didapat

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$$

Secara umum, panjang lintasan dari suatu titik awal $x = a$ hingga $x = b$ adalah sebagai berikut.

PANJANG LINTASAN PADA BIDANG

Misalkan f terdiferensialkan pada $[a, b]$. Panjang lintasan yang menelusuri fungsi f sepanjang interval $[a, b]$ adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

CONTOH 7

1) Akan dicari panjang lintasan kurva $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ pada interval $[0, 1]$

Karena $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{3/2}$ maka $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = \frac{3}{4}x^{1/2}$, sehingga panjang lintasannya

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{1/2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{16}{9}\frac{(1 + 9/16x)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{32}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}(1)\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4}(0)\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{32}{27}\left[\sqrt{\frac{25}{16}}^{3} - \sqrt{1}^{3}\right] = \frac{32}{27} . \frac{61}{64} = \frac{61}{54}$$

2) Rumus keliling lingkaran telah diketahui bahwa $K = 2\pi r$. Dengan menggunakan panjang lintasan dapat dibuktikan bahwa rumus tersebut benar.

Rumus persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Mengubah persamaan tersebut menjadi fungsi $y = f(x)$ tidaklah bijak, sebab akan mempersulit bentuk pengintegralan. Untuk mempermudah, misalkan

$$x = r\cos t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -r\sin t$$

Substitusikan ke persamaan lingkaran, maka

$$r^2\cos^2 t + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2 - r^2\cos^2 t = r^2(1 - \cos^2 t) = r^2\sin^2 t$$

Sehingga

$$y = r\sin t \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

Rumus panjang lintasan pada pembahasan di atas berasal dari $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Apabila dikalikan dengan $\frac{\Delta t}{\Delta t}$ maka menjadi $\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\ \Delta t$. Akibatnya, rumus panjang lintasannya

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\right]^2}\ \mathrm{dt}$$

Jadi, panjang lintasan lingkaran atau keliling lingkarannya dari 0 hingga $2\pi = 360^o$ adalah

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin t]^2 + [-r\cos t]^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + \mathrm{r}^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r.1\ \mathrm{d}t$$

$$= [rt]_0^{2\pi} = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

Jadi, terbukti bahwa keliling lingkaran adalah $K = 2\pi r$.

5. Usaha dan Gaya

Dalam kehidupan sehari-hari, tidak terlepas dari yang namanya “usaha”. Sebuah konsep dalam fisika yang menjelaskan suatu besaran berarah yang merupakan kombinasi gaya dan panjang atau jarak perpindahan. Dalam berbagai teknologi, mengetahui besarnya usaha sangat diperlukan untuk memperoleh hasil yang optimal, baik itu mengenai kemampuan maksimumnya maupun tingkat kesalahan minimum dari yang dihasilkan dari teknologi tersebut.

Dalam konsep fisika, rumus sederhana dari usaha adalah gaya dikalikan jarak perpindahan, yakni

$$W = F \times d \ \ (Newton\ meter\ atau\ Joule)$$

Rumus tersebut tentunya dapat dipakai apabila sepanjang jarak perpindahan tersebut, gaya yang dilakukan adalah tetap. Pada kenyataannya, gaya yang dikenai suatu benda cenderung berubah-ubah setiap perpindahannya, banyak faktor penyebabnya seperti asupan energi yang menurun, apalagi jika gaya tersebut terdapat campur tangan manusia yang tidak bisa memberikan gaya yang terus menerus konsisten.

Dikarenakan gaya yang diberikan tidaklah konsisten, maka tentu gaya tersebut akan berupa fungsi yakni $F(x)$ untuk setiap perpindahan x. Karena jarak atau perpindahan merupakan perubahan dari x_i ke x_j maka jaraknya $d = x_j - x_i = \Delta x$. Dengan demikian, untuk jarak yang sangat dekat sehingga gaya yang diberikan belum berubah, maka usaha pada partisi perpindahan dari x_i ke x_j adalah

$$W_P = F(x).d = F(x).\Delta x \approx F(x)\ dx$$

Akibatnya, besarnya usaha apabila benda dipindahkan sejauh $x = a$ menuju $x = b$ adalah

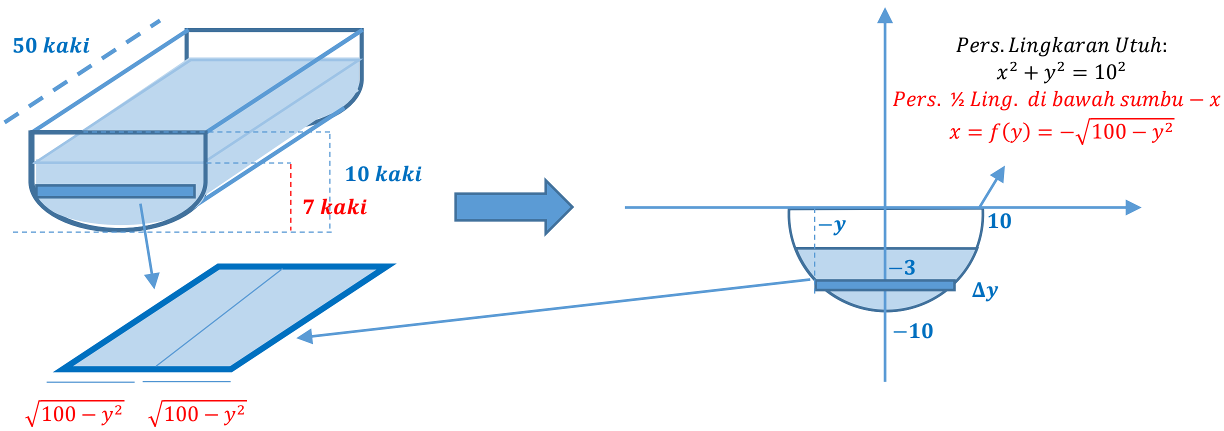
$$W = \lim_{|p| \to 0} \sum W_P = \int_a^b F(x)\ dx$$

Pembahasan ini tentunya memerlukan tambahan wawasan konsep fisika, sehingga untuk bisa menggunakannya, pembaca diharapkan untuk membekali diri dengan konsep tersebut. Di luar hal tersebut, rumus di atas menunjukkan bahwa integral memiliki peranan yang sangat penting dalam berbagai aplikasi. Selain mengenai usaha, terdapat banyak pembahasan pada buku sumber tercantum mengenai penerapan integral dalam kehidupan sehari-hari, seperti gaya pada cairan fluida, momen dan pusat masa, dan lain sebagainya yang sangat berguna dalam banyak pengembangan teknologi.

Berikut contoh sederhana dari pemakaian rumus usaha di atas.

CONTOH 8

Misalkan sebuah tangki air berbentuk setengah tabung (lihat gambar di bawah). Akan dicari besarnya usaha yang diperlukan untuk memompa tangki air hingga mencapai tepi tangki jika minyak yang terisi adalah hanya 70% dari tinggi tangki.



Besarnya usaha yang dibutuhkan akan menggunakan partisi volume

Berdasarkan konsep fisika, untuk mengetahui gaya yang dibutuhkan untuk mengangkat sebuah cairan merupakan perkalian antara volume dari benda yang diangkat dikalikan kepadatan cairan, untuk air adalah sebesar $\delta = 62.4$, yakni $F = V \times \delta = 62.4\,V$. Volume partisi baloknya adalah

$$V = p \times l \times t = \left(2\sqrt{100-y^2}\right) \times 50 \times \Delta y$$

Dengan demikian gaya yang diperlukan untuk mengangkat volume partisi air tersebut adalah

$$F(y) = 62.4\,V(y) = \left[62.4 \times \left(2\sqrt{100-y^2}\right) \times 50\right] \times \Delta y$$

Kemudian karena partisi air yang akan diangkat adalah ke tepi adalah setinggi $-y$, maka partisi dari usahanya adalah

$$W_P = F(y) \times d = \left[62.4 \times \left(2\sqrt{100-y^2}\right) \times 50 \times \Delta y\right] \times (-y)$$

Jadi, usaha totalnya adalah keseluruhan volume air pada tangki, yakni jumlah tak berhingga partisi setinggi 7 kaki yaitu dari -10 hingga -3

$$L = 62.4 \times 50 \int_{-10}^{-3} -2y\sqrt{100-y^2}\ \mathrm{d}x = 3140 \int_{100-(-10)^2}^{100-(-3)^2} -2y\sqrt{u}\ \frac{\mathrm{d}u}{-2y}$$

$$= 3140 \int_{0}^{91} u^{1/2}\ \mathrm{d}x = 3140 \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^{91} = 3140\,\frac{2}{3}(91)^{3/2} \approx 1{,}805{,}606$$