STRUKTUR ALJABAR
“Definisi Grup”

Nafida Hetty Marhaeni

STRUKTUR ALJABAR

- Struktur aljabar adalah suatu himpunan tidak kosong S yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner.
- Jika himpunan S dilengkapi dengan satu operasi biner * maka struktur aljabar tersebut dinyatakan dengan (S,*)
- Jika S dilengkapi dengan dua operasi biner * dan ° maka struktur aljabar tersebut dinyatakan (S, *, °) atau (S, °, *)

OPERASI BINER

Definisi 1.:

1. Operasi biner * pada S adalah jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a*b \in S$, atau sering dikatakan Operasi * pada S bersifat tertutup
2. Jika Operasi * pada S tertutup maka (S,*) disebut **Grupoid** yaitu struktur aljabar dengan satu operasi yang tertutup (biner).
3. Operasi biner * pada S dikatakan **assosiatif** jika $\forall a, b, c \in S$, $(a*b)*c = a*(b*c)$
4. Grupoid (S,*) disebut **semigrup** jika Operasi biner * pada S assosiatif
5. Himpunan S terhadap operasi * dikatakan **mempunyai elemen identitas e** jika $\exists e \in S$, $\forall a \in S$, $a*e = e*a = a$
6. Semigrup (S,*) disebut **monoid** jika S terhadap * mempunyai elemen identitas e.
7. Himpunan S terhadap operasi * dikatakan **komutatif** jika $\forall a, b \in S$, $a*b = b*a$

DEFINISI GRUP

Definisi 2. :

Misalkan G adalah himpunan tidak kosong dilengkapi dengan operasi . maka struktur aljabar (G,.) disebut Grup jika dipenuhi aksioma-aksioma berikiut :

a. Tertutup, artinya $\forall a, b \in G$ berlaku $a.b \in G$

b. Asosiatif, artinya $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a.b).c = a.(b.c)$

c. Mempunyai elemen identitas ditulis e, artinya $(\forall a \in G)$ $a.e = e.a = a$

d. Setiap elemen mempunyai invers dinotasikan a^{-1} adalah invers dari a, artinya $(\forall a \in G)$ $(\exists a^{-1} \in G)$ sehingga $a^{-1}.a = a.a^{-1} = e$

CONTOH

Diberikan himpunan bilangan bulat Z dengan operasi biner * yang didefinisikan $\forall x, y \in Z$ berlaku $x * y = xy - x - y$

Buktikan apakah (Z,*) grup atau tidak.

BUKTI:

Pertama kita harus membuktikan (Z,*) tertutup

Ambil sebarang $x, y \in Z$ perhatikan bahwa:

$x * y = xy - x - y \ldots.. \in Z$

Dengan demikian,

$$\forall x, y \in Z \ni x * y = xy - x - y \in Z$$

$\therefore (Z,*)$ tertutup

Lanjutan...

Selanjutnya, kita buktikan $(Z,*)$ asosiatif

Ambil sebarang $x, y, z \in Z$ perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy - x - y) * z \\ &= (xy - x - y)z - (xy - x - y) - z \\ &= xyz - xz - yz - xy + x + y - z\end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned}x * (y * z\ ) &= x * (yz - y - z) \\ &= x(yz - y - z) - x - (yz - y - z) \\ &= xyz - xy - xz - x - yz + y + z\end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in Z \ni (x * y) * z \neq x * (y * z)$

$\therefore (Z,*)$ tidak asosiatif

Lanjutan...

Karena $(Z,*)$ tidak asosiatif maka harus diberikan *counter example*.

Misalkan: $x = 1; y = 2; z = 3$, perhatikan bahawa:

$$
\begin{aligned}
(x * y) * z &= xyz - xz - yz - xy + x + y - z \\
&= 1.2.3 - 1.3 - 2.3 - 1.2 + 1 + 2 - 3 \\
&= 6 - 3 - 6 - 2 + 1 + 2 - 3 = -5
\end{aligned}
$$

Sedangkan,

$$
\begin{aligned}
x * (y * z\ ) &= xyz - xy - xz - x - yz + y + z \\
&= 1.2.3 - 1.2 - 1.3 - 1 - 2.3 + 2 + 3 \\
&= 6 - 2 - 3 - 1 - 6 + 2 + 3 = -1
\end{aligned}
$$

Terlihat jelas bahwa $(x * y) * z \neq x * (y * z)$

Kesimpulan

Karena $(Z,*)$ yang didefiniskan sebagai $x * y = xy - x - y$ hanya berlaku aksioma tertutup saja maka $(Z,*)$ bukan grup tetapi grupoid.

Contoh

Misalkan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in Q \right\}$ maka $(M, +)$ merupakan grup,

BUKTI:

Pertama kita harus membuktikan (M,+) tertutup

Ambil sebarang $\mathrm{A}, B \in M$ dimana $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan B$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ perhatikan

bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h \in Q$ maka $a + e, b + f, c + g, d + h \in Q$

Dengan demikian,

$$\forall A, B \in M \ni A + B \in Q$$

$$\therefore (M, +) \text{ tertutup}$$

Lanjutan

Ambil sebarang $A, B, C \in M$ dimana $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,B$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ perhatikan bahwa

$$(A + B) + C \quad = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a + e) + i & (b + f) + j \\ (c + g) + k & (d + h) + l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + (e + i) & b + (f + j) \\ c + (g + k) & d + (h + l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e + i & f + j \\ g + k & h + l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= A + (B + C)$$

Dengan demikian,

$$\forall A, B, C \in M \ni (A + B) + C = A(B + C) \in M$$

$$\therefore (M, +) \; asosiatif$$

Lanjutan

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$, perhatikan bahwa:

$$A + E = A$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots . \in M$$

Dengan demikian, $\exists E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M, \forall A \in M \ni A + E = A$

$\therefore (M, +)$ mempunyai elemen identitas

Lanjutan

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$, dan $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ perhatikan bahwa:

$A + A^{-1} = E$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \ldots . \in M$

Dengan demikian,, $\forall A \in, \exists A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in M \ni A + A^{-1} = E$

$\therefore (M, +)$ mempunyai elemen invers

Kesimpulan

Karena $(M, +)$ yang didefiniskan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in Q \right\}$ berlaku tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan mempunyai elemen invers maka $(M, +)$ merupakan grup.