PERTEMUAN 13

MATERI:

1. TURUNAN DAN INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI
2. FUNGSI INVERS TRIGONOMETRI DAN TURUNANNYA

Turunan dan Integral fungsi Trigonometri

Berikut adalah turunan dan integral dari fungsi trigonometri :

Turunan	Integral
1) $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$	1) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
2) $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$	2) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
3) $y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$	3) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
4) $y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \tan x$	4) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
5) $y = \operatorname{cosec} x \rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x \cot x$	5) $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
6) $y = \cot x \rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 x$	6) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

Contoh :

1. misalkan $f(x) = \sin(4x^2 - 5x)$

maka $f'(x) = \cos(4x^2 - 5x)(8x - 5) = (8x-5)\cos(4x^2-5x)$

2. Jika $y = x^2 \tan 3x$ maka

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \tan 3x + x^2 \cdot (\sec^2 3x \cdot 3) = 2x \tan 3x + 3x^2 \sec^2 3x$$

3. $$\int \sin(5-2x)\,dx = \int \sin u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\int \sin u \, du = -\frac{1}{2}(-\cos u + C)$$
$$= \frac{1}{2}\cos(5-2x) + C$$

$u = 5 - 2x$

$du = -2\,dx \rightarrow dx = \frac{du}{-2}$

4. $$\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x \sec^2\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_{0^2+\pi/4}^{\sqrt{\pi}^2+\pi/4} \cancel{4x}^{\,2} \sec^2 u \frac{du}{\cancel{2x}} = \int_{\pi/4}^{\pi+\pi/4} 2 \sec^2 u \, du = 2 \tan u \Big]_{\pi/4}^{\pi+\pi/4}$$
$$= 2(1-1) = 0$$

$u = x^2 + \pi/4$

$du = 2x\,dx \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI

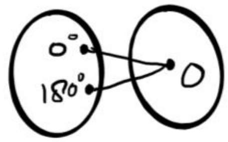
Berdasarkan yang kita kenali, fungsi trigonometri adalah fungsi yang menghubungkan sudut dengan bilangan real atau dengan kata lain, "mengubah" sudut menjadi bilangan real, contohnya

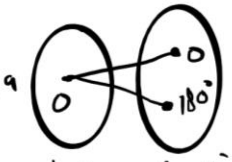
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$
$$\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

sebaliknya, invers dari fungsi trigonometri adalah fungsi yang "mengubah" bilangan real menjadi sudut (terdapat syarat yang akan dibahas berikutnya). Notasi untuk invers fungsi trigonometri adalah $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, dst atau arcsin, arccos, dst.

Contoh :

1. misalkan $f(x) = \sin x$ pada interval $[0, 360^\circ]$
   maka $f^{-1}(x)$ tidak ada, sebab

   $f(0^\circ) = 0$
   $f(180^\circ) = 0$ $\longrightarrow$ 

   inversnya 

   bukan fungsi
   (karena bercabang)

2. misalkan $f(x) = \sin x$ pada interval $[0, 90^\circ]$
   maka $f^{-1}(x)$ ada (tidak ada yang memiliki nilai sama)
   yaitu $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ atau $f^{-1}(x) = \arcsin x$
   fungsi invers ini mengubah bil. real menjadi sudut, contoh :

   $$f^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 30^\circ \quad \left(\text{karena } \sin(30^\circ) = \tfrac{1}{2}\right)$$

③ misalkan $f(x) = \sin x$ pada $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
dan $g(x) = \cos x$ pada $[3\frac{\pi}{2}, 2\pi]$
Akan dicari $(f^{-1} \circ g)(\frac{11}{6}\pi)$ dan $(g \circ f^{-1})(\frac{1}{2}\sqrt{2})$

Perhatikan $(f^{-1} \circ g)(\frac{11}{6}\pi) = f^{-1}(g(\frac{11}{6}(180^\circ)) = f^{-1}g(330^\circ)$
$= \sin^{-1}(\cos(330^\circ)) = \sin^{-1}(\cos(360^\circ - 30^\circ))$
$= \sin^{-1}(\cos(30^\circ)) = \sin^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$

(karena $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
mengapa bukan 30°?
bukankah $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ juga?
karena pada soal
$f(x) = \sin x$ pada $[\frac{\pi}{2}, \pi] = [90^\circ, 180^\circ]$

Perhatikan pula

$$(g \circ f^{-1})(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = g(f^{-1}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}))$$
$$= \cos(\sin^{-1}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}))$$
$$= \underbrace{\cos(135^\circ)}$$ (karena $\sin 135^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$)

tidak terdefinisi, sebab pada soal $g(x) = \cos x$
pada $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi] = [270^\circ, 360^\circ]$

SIFAT KESAMAAN INVERS TRIGONOMETRI

1) $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
2) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
3) $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$
4) $\tan(\sec^{-1} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

Contoh: Misalkan $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ dengan $D_f = D_g = [0, \pi/2]$, maka

1) $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2) $\cos(\sin^{-1}(1)) = \sqrt{1 - 1^2} = 0$

TURUNAN FUNGSI INVERS TRIGONOMETRI

Misalkan $x \in [0, 1]$, maka

1) $D_x \sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
2) $D_x \cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
3) $D_x \tan^{-1} x = \dfrac{1}{1 + x^2}$
4) $D_x \sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$

Contoh :

1. misalkan $y = \sin^{-1}(5-x^2)$ dg $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5-x^2)}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$$

2. $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x^2}{4})}}\, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\, dx$$

$u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2}\, dx$

$\rightarrow 2\, du = dx$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, \cancel{2} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \sin^{-1} u + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

karena $D_x \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$