LIMIT (Bagian 1)

Pertemuan: 1 dan 2

Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.

Materi:

1. Pendahuluan
2. Teorema Limit
3. Pengkajian mendalam tentang limit

Kompetensi Khusus:

Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan teorema limit untuk nilai menghitung limit.

Sumber Materi:

Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon.(2010).Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

1. Pendahuluan

PENTINGNYA LIMIT

Limit merupakan pondasi utama dalam mempelajari kalkulus. Melalui limit, konsep-konsep perhitungan dalam berbagai rumusan matematika dan tentunya aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari seperti rumus-rumus dalam fisika bahkan dalam konsep ekonomi dapat dilakukan. Untuk memahami konsep limit, perhatikan kasus-kasus berikut.

KASUS 1

$$\text{Berapakah hasil dari } \frac{0}{0} \text{ ?}$$

$$\text{Apakah } \frac{0}{0} = 1 \text{ ?}$$

Perhatikan apa yang terjadi jika hal tersebut benar:

$$2 \,.\, 0 = 1 \,.\, 0$$

$$2 \,.\, \frac{0}{0} = 1$$

$$2 \,.\, 1 = 1$$

$$2 = 1 \quad ✖$$

(memberikan implikasi yang salah, jadi $\frac{0}{0}$ bukanlah 1)

Anda dapat mendefinisikan berapapun hasil dari $\frac{0}{0}$, namun tetap saja akan mengakibatkan sesuatu yang salah. Jadi, $\frac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

KASUS 2

$$\text{Berapakah hasil dari } \frac{1}{0}\text{ ?}$$

$$\text{Apakah } \frac{1}{0} = \infty\text{ ?}$$

Perhatikan apa yang terjadi jika hal tersebut benar:

$$\frac{1}{0} = \infty$$
$$1 = 0 \,.\, \infty$$
$$1 = 0 \quad ✖$$

(memberikan implikasi yang salah, jadi $\frac{1}{0}$ bukanlah ∞)

Anda dapat mendefinisikan berapapun hasil dari $\frac{1}{0}$, namun tetap saja akan mengakibatkan sesuatu yang salah. Jadi haruslah $\frac{1}{0}$ tidak terdefinisi.

KASUS 3

Sekarang pandang fungsi berikut

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$$

Berapakah hasil f ketika $x = 1$, yakni $f(1)$?
Perhatikan

$$f(1) = \frac{2(1)^2 - 2(1)}{1 - 1} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(tidak terdefinisi)}$$

Maka f tidak terdefinisi di 1.

Mungkin Anda berfikir menggunakan cara lain, seperti

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2x$$

Maka $f(1) = 2(1) = 2$.

INI SALAH!

Mengapa Anda melakukan "pencoretan" terhadap $(t - 1)$ di atas?

Memang berapa hasil dari $\frac{x-1}{x-1}$? jika $x = 1$, maka $\frac{x-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

Dengan demikian, $f(1)$ MEMANG TIDAK TERDEFINISI, BUKAN BERNILAI 2.

KASUS 4

Lalu bagaimana jika kita memang membutuhkan nilai dari fungsi $f(x) = \frac{2x^2-2x}{x-1}$ di atas tersebut ketika "$x = 1$"?

Karena pada saat $x = 1$, fungsi f tersebut SUDAH PASTI tidak terdefinisi, maka kita akan coba dekati di sekitar $x = 1$. Perhatikan nilai f di sekitar 1, seperti $x = 0{,}9999$ dan $x = 1{,}0001$ berikut.

Sebelumnya sudah kita kerjakan bahwa

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2x$$

Sekarang kita boleh *mencoret* $(x - 1)$ tersebut, mengapa?

Karena untuk $x = 0{,}9999$,

$$\frac{x-1}{x-1} = \frac{0{,}9999 - 1}{0{,}9999 - 1} = \frac{-\cancel{0{,}0001}}{-\cancel{0{,}0001}} = 1$$

dan $x = 1{,}001$,

$$\frac{x-1}{x-1} = \frac{1{,}0001 - 1}{1{,}0001 - 1} = \frac{\cancel{0{,}0001}}{\cancel{0{,}0001}} = 1$$

Akibatnya,

$$f(0{,}9999) = 2(0{,}9999) = 1{,}9998 \qquad (dekat\ dengan\ 2)$$

sedangkan

$$f(1{,}0001) = 2(1{,}0001) = 2{,}0002 \qquad (dekat\ dengan\ 2)$$

Dapat dilihat bahwa ketika x dekat dengan 1 maka nilai dari f dekat dengan 2.
Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa

"jika x mendekati 1 maka $f(x)$ mendekati 2"

Ingat, bukanlah $f(1) = 2$ melainkan hanya mendekati 2, secara matematis dituliskan

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} \right) = 2$$

Konsep yang demikian disebut sebagai **LIMIT**.

DEFINISI LIMIT

Secara umum definisi limit adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

artinya jika x mendekati c maka $f(x)$ akan mendekati L

Contoh:

1) $\lim_{x \to 3}(4x - 5)$

Dengan mengambil sampel x yang dekat dengan 3, seperti $x = \mathbf{2,9999}$, maka

$$(4x - 5) = 4 \cdot (2{,}9999) - 5 = 11{,}9996 - 5 = \mathbf{6,9996} \quad (dekat\ dengan\ 7)$$

atau $x = \mathbf{3,0001}$, maka

$$(4x - 5) = 4 \cdot (3{,}0001) - 5 = 12{,}0004 - 5 = \mathbf{7,0004} \quad (dekat\ dengan\ 7)$$

Dengan demikian, jika x mendekati 3, maka $(4x - 5)$ mendekati 7, atau dituliskan

$$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

Dengan mengambil sampel x yang dekat dengan -2, seperti $x = \mathbf{-2,0001}$, maka

$$\frac{x^2-x-6}{x+2} = \frac{(-2{,}0001)^2-(-2{,}0001)-6}{(-2{,}0001)+2} = \frac{0{,}00050001}{-0{,}0001} = \mathbf{-5,0001} \quad (dekat\ dengan - 5)$$

atau $x = \mathbf{-1,9999}$, maka

$$\frac{x^2-x-6}{x+2} = \frac{(-1{,}9999)^2-(-1{,}9999)-6}{(-1{,}9999)+2} = \frac{-0{,}00049999}{0{,}0001} = \mathbf{-4,9999} \quad (dekat\ dengan - 5)$$

Dengan demikian, jika x mendekati -2, maka $\frac{x^2-x-6}{x+2}$ mendekati -5, atau dituliskan

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$$

2. Teorema Limit

Mengerjakan limit "menggunakan definisi" seperti di atas, yakni melalui nilai-nilai yang dekat di sekitarnya akan cukup berat apalagi jika tidak menggunakan alat bantu hitung, belum lagi hal tersebut hanyalah bentuk perkiraan sehingga tidaklah 100% valid karena ada tak berhingga banyaknya angka yang mendekati suatu nilai. Teorema-teorema berikut akan memudahkan dalam mengerjakan limit (Bukti teorema dapat dipelajari menggunakan definisi formal limit yang akan dibahas pada subbab 3).

TEOREMA SUBSTITUSI

Jika $f(x)$ adalah polinomial atau fungsi rasional dan terdefinisi di c, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Contoh:

1) Pada pembahasan sebelumnya didapat $\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$

   Hasil tersebut dapat diperoleh melalui teorema substitusi di atas, yakni

$$\lim_{x\to 3}(4x-5) = 4(3) - 5 = 7$$

2) Misalkan $f(x) = x^2 - x - 6$, perhatikan $f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$ artinya terdefinisi di 3, maka

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - x - 6) = f(3) = 0$$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{0^2-0-6}{0-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

TEOREMA LIMIT PADA KESAMAAN DUA FUNGSI

Jika $f(x) = g(x)$ ketika $x \neq c$, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

Contoh:

1) Perhatikan bahwa ketika $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x + 2 = g(x)$$

$$\text{maka } \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 3 + 2 = 5$$

2) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{x+2}} = \lim_{x\to -2}(x-3) = -2 - 3 = -5$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to 3} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{16-(x^2+7)}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(9-x^2)}(4+\sqrt{x^2+7})}{\cancel{9-x^2}} = \lim_{x\to 3}\left(4 + \sqrt{x^2+7}\right) = 4 + \sqrt{3^2+7} = 4 + 4 = 8$$

TEOREMA DASAR LIMIT

Jika f dan g memiliki limit di c, kemudian k kostanta real, dan n bilangan bulat positif, maka

1) $\lim\limits_{x\to c} k = k$
2) $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3) $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$
4) $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$
5) $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$
6) $\lim\limits_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ **jika** $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
7) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$
8) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ **jika** $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$

<u>Contoh:</u>

1) $\lim\limits_{x\to 100} 5 = 5$
2) $\lim\limits_{x\to 100} x = 100$
3) $\lim\limits_{x\to 100} 5x = 5\lim\limits_{x\to 100} x = 5\,.\,100 = 500$

Patut diperhatikan bahwa seringkali terdapat **KESALAHAN UMUM** dalam pengerjaan limit yang seolah-olah dirasa tepat. Sebagai contoh:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}} = (3+2) = 5$$

Kesalahannya sederhana, yakni HILANGNYA $\lim\limits_{x\to 3}$ di depan $\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$.

Mengapa salah?

Karena dengan hilangnya bagian tersebut, berarti nilai x yang ingin disubstitusi menjadi tidak jelas yang berakibat pada:

1) $\frac{x-3}{x-3}$ tidak dapat dicoret karena x nya menjadi tidak jelas berapa nilainya.
2) bagaimana bisa muncul $(3+2)$? sedangkan $(x+2)$ tidak jelas nilai x nya.

Hasil akhir pengerjaan tersebut memang benar, namun yang paling utama dalam pengerjaan adalah proses yang tepat, karena matematika bukan hanya mengajarkan menghitung, melainkan bagaimana kita diajarkan berlogika dan dilatih untuk mengerjakan sesuai kaidah.

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN

KASUS 5

Perhatikan kasus berikut:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Berapakah hasil f ketika $x = 0$, yakni $f(0)$?

Perhatikan

$$f(0) = \frac{1}{0} \quad \text{(tidak terdefinisi)}$$

Maka f tidak terdefinisi di 0.

Seperti sebelumnya, jika dicari nilai f tersebut di sekitar $x = 0$, seperti $x = -0{,}00000001$ dan $x = 0{,}00000001$, yakni mencari

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Perhatikan untuk $\boldsymbol{x = -0,00000001}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{-0{,}00000001} = -\mathbf{100000000} \quad (\textit{bilangan yang sangat kecil atau "mendekati} - \infty\text{"})$$

Sedangkan untuk $\boldsymbol{x = 0,00000001}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}00000001} = \mathbf{100000000} \quad (\textit{bilangan yang sangat besar atau "mendekati} \ \infty\text{"})$$

Dapat dilihat bahwa untuk x di sekitar 0 memberikan nilai f yang tidak konsisten, di satu sisi bernilai sangat kecil, di sisi lain bernilai sangat besar, kontradiktif. Dengan demikian

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ \text{juga tidak terdefinisi / tidak ada}$$

Meski demikian, jika diperhatikan secara terpisah:

-0,00000001	→	**0**	←	**0,00000001**
dekat dengan 0 dari kiri				dekat dengan 0 dari kanan

Perhatikan $x = -0{,}00000001$ berada di sebelah kiri 0 dan menghasilkan $\frac{1}{x}$ mendekati $-\infty$, artinya

"Jika x mendekati 0 dari sebelah kiri maka $\frac{1}{x}$ mendekati $-\infty$"

Jika dituliskan secara formal $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

sedangkan $x = 0{,}00000001$ berada di sebelah kanan 0 dan menghasilkan $\frac{1}{x}$ mendekati ∞, artinya

"Jika x mendekati 0 dari sebelah kanan maka $\frac{1}{x}$ mendekati ∞"

Jika dituliskan secara formal $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Konsep yang demikian disebut sebagai **LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN**.

Secara umum definisi limit kiri adalah

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

artinya jika x mendekati c dari kiri maka $f(x)$ akan mendekati L,

sedangkan definisi limit kanan adalah

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = M$$

artinya jika x mendekati c^+ dari kanan maka $f(x)$ akan mendekati M

TEOREMA LIMIT KIRI DAN KANAN

Jika

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

atau dapat dikatakan bahwa jika limit kiri dan limit kanannya sama maka limitnya ada.

Patut diperhatikan kembali mengenai maksud dari c^- dan c^+.

- Jika $c = 0$ maka c^- bilangan yang dekat dengan 0 dari sebelah kiri seperti $-0{,}00000001$ (bilangan negatif). Sedangkan c^+ bilangan yang dekat dengan 0 dari sebelah kanan seperti 0,00000001 (bilangan positif).
- Berbeda halnya jika c adalah selain 0, bilangan yang dekat dengan c akan selalu positif atau selalu negatif. Sebagai contoh: $c = 7$, maka $7^- \approx 6{,}999999$, sedangkan $7^+ \approx 7{,}0000001$ yang tentunya $7^- \approx 7^+ \approx 7$.

Contoh:

1) $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$

Perhatikan bahwa

Limit kanannya: $\lim_{x \to 3^+} (4x - 5) = 4 \cdot \mathbf{3}^+ - 5 = 12^+ - 5 = \mathbf{7}^+ = \mathbf{7}$

Limit kirinya: $\lim_{x \to 3^-} (4x - 5) = 4 \cdot \mathbf{3}^- - 5 = 12^- - 5 = \mathbf{7}^- = \mathbf{7}$

Jadi,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Sebagai catatan, fungsi seperti $(4x - 5)$ tidak perlu dicari limit kiri dan kanannnya untuk mendapatkan hasil limitnya, cukup mengerjakan dengan cara seperti contoh sebelumnya.

2) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

Perhatikan bahwa

Limit kananya: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = \infty$

Limit kirinya: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^--1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Jadi,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{tidak ada}$$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & jika\ x < 1 \\ x+1 & jika\ x \geq 1 \end{cases}$

Akan dicari

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Perhatikan bahwa

Limit kanannya menggunakan fungsi $x+1$ karena $1^+ \geq 1$, sehingga

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 1^+ + 1 = \mathbf{2}^+ = \mathbf{2}$$

Limit kanannya menggunakan fungsi $\frac{x^2-1}{x-1}$ karena $1^- < 1$, sehingga

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 1^- + 1 = 2^- = 2$$

Jadi,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & jika\ x \neq 1 \\ x+2 & jika\ x = 1 \end{cases}$

Akan dicari

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Perhatikan bahwa

Limit kanannya menggunakan fungsi $\frac{x^2-1}{x-1}$ karena $1^+ \neq 1$, sehingga

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 1^+ + 1 = \mathbf{2}^+ = \mathbf{2}$$

Limit kanannya menggunakan fungsi $\frac{x^2-1}{x-1}$ karena $1^- \neq 1$, sehingga

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 1^- + 1 = \mathbf{2}^- = \mathbf{2}$$

Karena limit kiri dan kanannya sama, maka

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

3. Pengkajian Mendalam Tentang Limit

DEFINISI FORMAL LIMIT

Sejauh ini pembahasan sebelumnya menjelaskan tentang bagaimana cara mencari nilai limit. Namun demikian, hal tersebut merupakan cara yang intuitif. Sejatinya, kita hanya membayangkan nilai-nilainya tanpa pernah menyebutkan secara pasti bilangannya berapa (dan memang tidak mungkin). Sebagai contoh, kita pandang kembali

$$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$$

Kita menggunakan angka 3 sebagai subtitusi terhadap x, padahal kenyataannya x hanya mendekati 3 bukan persis 3. Kita juga tidak dapat menggunakan $x = 2{,}9999$ atau $3{,}00001$ karena bilangan yang paling dekat dengan 3 bukanlah itu dan kita tidak akan bisa menyebutkannya. Bahwa jawabannya adalah mendekati 7 secara intuisi kita dapat pastikan benar.

Untuk itu, tugas berikutnya adalah membuktikan hal tersebut benar secara matematis, bukan sekedar memperkirakan atau berintuisi. Namun sebelumnya, diberikan definisi limit secara formal (matematis).

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x sangat dekat dengan c, tetapi $x \neq c$	(arti dari notasi $0 < |x - c| < \delta$, yang mana $x - c > 0$ mengartikan $x \neq c$ dan $|x - c| < \delta$ mengartikan selisih x dan c begitu kecil)
maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L	(arti dari $|f(x) - L| < \epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk)

Melalui definisi ini, maka kita dapat membuktikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

<u>Contoh</u>:

1) $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$

Bukti

Misalkan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ (cara menentukan δ akan dijelaskan di bawah)

Perhatikan bahwa jika $0 < |x - 3| < \delta$

$$|f(x) - L| = |(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = \frac{4\epsilon}{4} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$, sesuai definisi maka benar bahwa

$$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$$

cara menentukan δ agar tepat:

karena tujuan utamanya adalah $|f(x) - L| < \epsilon$ dan diketahui $|x - c| < \delta$, maka melalui proses mundur

$$|f(x) - L| < \epsilon$$
$$|(4x - 5) - 7| < \epsilon$$
$$|4x - 12| < \epsilon$$
$$4|x - 3| < \epsilon$$
$$|x - 3| < \frac{\epsilon}{4}$$

Jadi, dipilih $\delta = \frac{\epsilon}{4}$

3) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$

Bukti

Misalkan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $\delta = \epsilon$ (cara menentukan δ akan dijelaskan di bawah)

Perhatikan bahwa jika $0 < |x - 3| < \delta$

$$|f(x) - L| = \left|\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) - 5\right| = \left|\frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} - 5\right|$$
$$= |(x+2) - 5| = |x - 3| < \delta = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$, sesuai definisi maka benar bahwa

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$$

cara menentukan δ agar tepat:

karena tujuan utamanya adalah $|f(x) - L| < \epsilon$ dan diketahui $|x - c| < \delta$, maka melalui proses mundur

$$|f(x) - L| < \epsilon$$
$$\left|\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) - 5\right| < \epsilon$$
$$\left|\frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} - 5\right| < \epsilon$$
$$|(x+2) - 5| < \epsilon$$
$$|x - 3| < \epsilon$$

Jadi, dipilih $\delta = \epsilon$.