APLIKASI TURUNAN (Bagian 1)

Pertemuan: 9 dan 10 (Minggu ke – 5)
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

1. Komponen Grafik Fungsi
2. Penggambaran Grafik Fungsi
3. Maksimum dan Minimum
4. Masalah-Masalah Praktis (bagian 1)

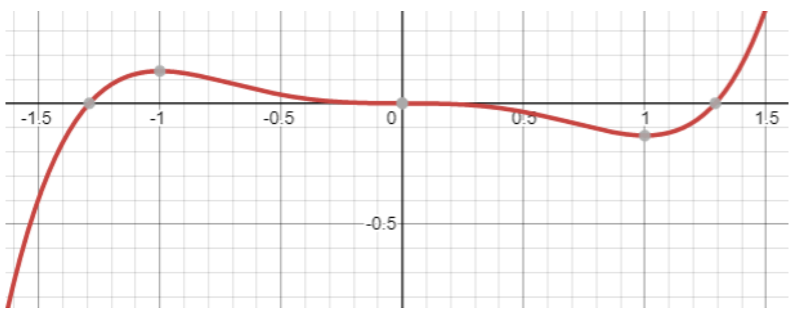
Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan rumus rumus turunan untuk menghitung aplikasi turunan.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

1. KOMPONEN GRAFIK

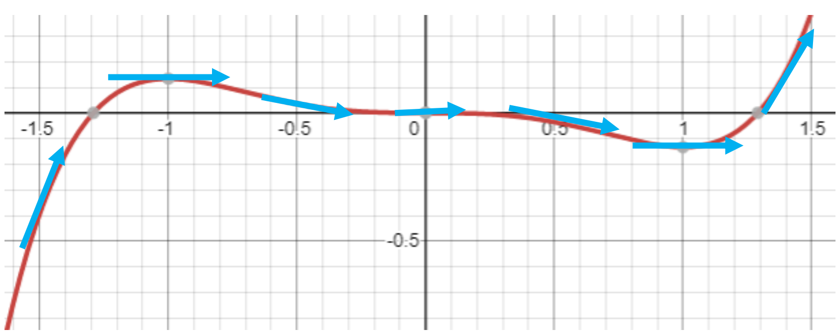
Sebelum mempelajari berbagai aplikasi dari turunan, akan lebih baik jika meninjau terlebih dahulu grafik suatu fungsi yang di dalamnya terdapat banyak pengantar aplikasi untuk turunan.

Perhatikan grafik dari fungsi $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ berikut (menggunakan bantuan desmos.com).

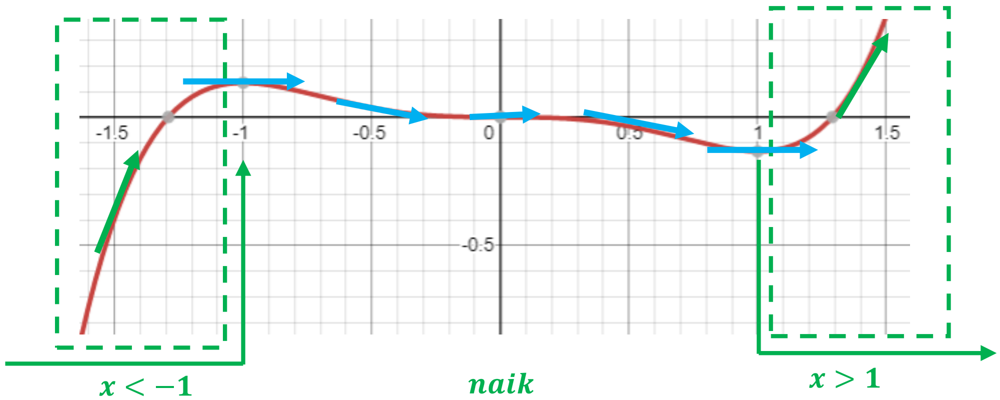


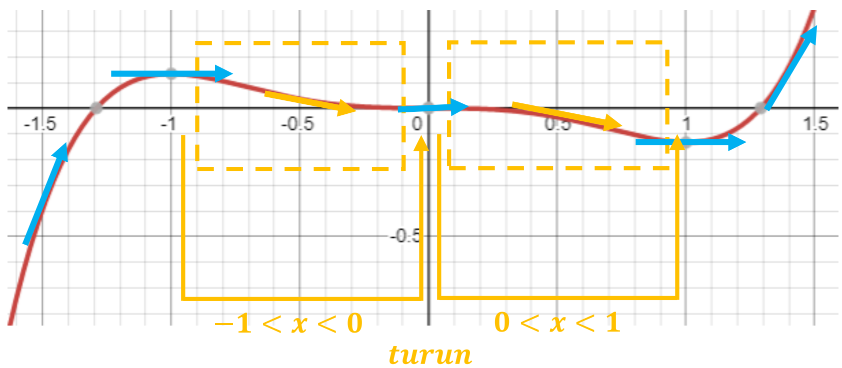
KEMONOTONAN DAN STASTIONERITAS

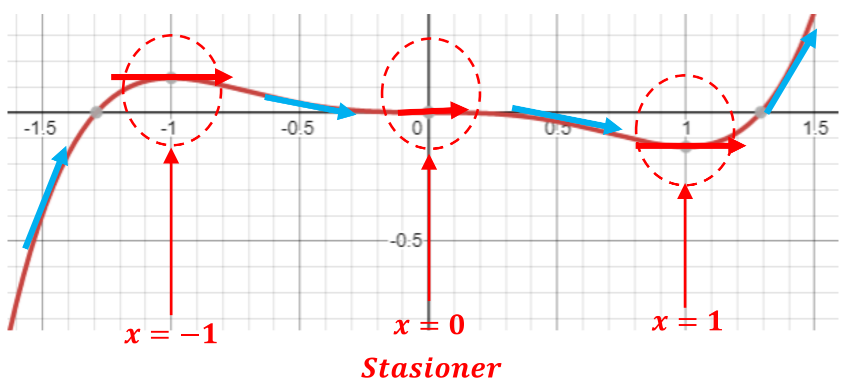
Dari grafik di atas perhatikan apabila diberi **panah biru** seperti gambar berikut.



Panah biru pada grafik di atas menunjukkan **kemiringan (gradien)** dari fungsi $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$. Grafik tersebut tidaklah mengalami kemonotonan mutlak melainkan hanya pada beberapa daerah saja karena terdapat **3 jenis kemiringan**, yakni **naik**, **turun**, dan **stasioner** (datar).







Dapat dilihat bahwa masing-masing kemiringan memiliki interval atau *"daerah kejadian"*, yakni:

a) Untuk kondisi monoton ***naik***, terjadi saat sebelum $x = -1$ atau setelah $x = 1$, sehingga dapat dituliskan $\boldsymbol{x < -1}$ atau $\boldsymbol{x > 1}$.

b) Untuk kondisi monoton ***turun***, terjadi di antara $x = -1$ dan $x = 0$ atau di antara $x = 0$ dan $x = 1$, sehingga dapat dituliskan $\boldsymbol{-1 < x < 0}$ atau $\boldsymbol{0 < x < 1}$.

c) Untuk kondisi ***stasioner***, terjadi pada saat $\boldsymbol{x = -1}$, $\boldsymbol{x = 0}$ atau $\boldsymbol{x = 1}$.

Melalui turunan, hasil terkait kemonotonan dan stasioneritas dapat dicari tanpa harus membuat grafiknya terlebih dahulu, bahkan kita bisa membuat grafiknya. Ingat kembali bahwa turunan suatu fungsi merupakan kemiringan/gradien. Dengan demikian:

a) monoton ***naik*** dapat dicari dengan membuat kemiringan/turunannya positif atau $y' > 0$.

b) monoton ***naik*** dapat dicari dengan membuat kemiringan/turunannya negatif atau $y' < 0$.

c) ***stasioner*** dapat dicari dengan membuat kemiringan/turunannya 0 atau $y' = 0$.

Contoh 1.1 (Kemonotonan dan Stasioneritas)

Untuk fungsi $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ maka $\boldsymbol{y' = x^4 - x^2}$ sehingga berikut adalah daerah stasioneritas dan kemonotonan naik dan turun-nya:

$$\boldsymbol{y' = 0}$$
$$x^4 - x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\boldsymbol{x = 0} \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{x = \pm 1} \qquad \rightarrow \qquad \textbf{daerah stasioner}$$

Untuk memperoleh daerah monoton naik dan turun, perhatikan tanda dari setiap interval dengan batasan nilai x tersebut.

titik sampel $\rightarrow$	$(x = -2)$	$(x = -1/2)$	$(x = 1/2)$	$(x = 2)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
masukkan titik sampel y' $\rightarrow$	$(y' = 12)$	$(y' = -3/16)$	$(y' = -3/16)$	$(y' = 12)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

$$y' \rightarrow \underline{+++++}\; 0 \;\underline{-----}\; 0 \;\underline{-----}\; 0 \;\underline{+++++}$$
$$\qquad -1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1$$

$\underline{naik}$ $\quad$ $\underline{turun}$ $\quad$ $\underline{turun}$ $\quad$ $\underline{naik}$

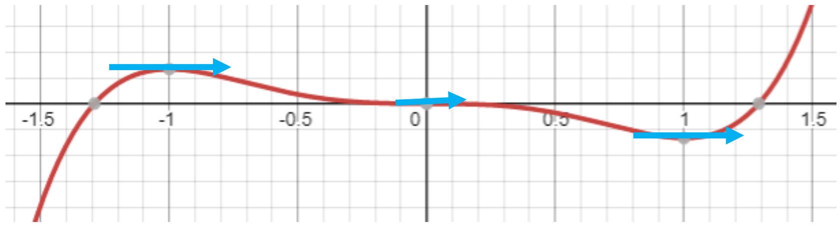
Dengan demikian, maka

a) daerah stasioner-nya adalah ketika $x = -1$, $x = 0$, atau $x = 1$,
b) untuk daerah monoton naik-nya adalah $x < -1 \; atau \; x > 1$,
c) untuk daerah monoton turun-nya adalah $-1 < x < 1$, $x \neq 0$.

Hasil ini sama dengan hasil di atas sebelumnya menggunakan grafik.

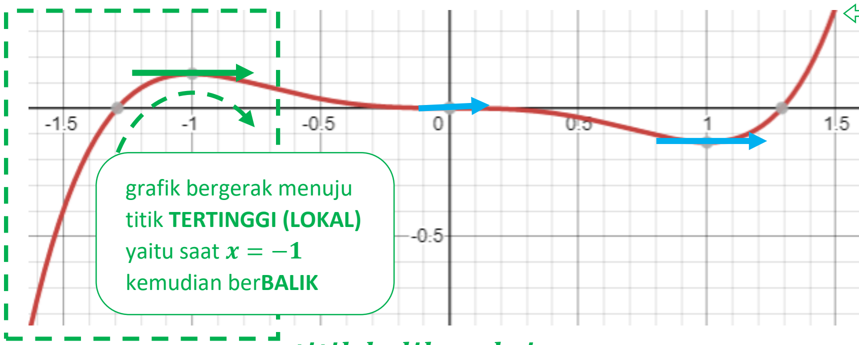
TITIK BALIK DAN TITIK BELOK

Perhatikan kembali mengenai titik stasioner pada pembahasan sebelumnya dari grafik berikut.

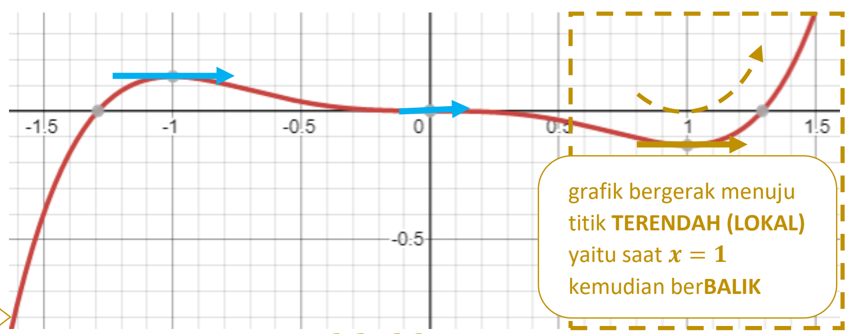


Terdapat **3 jenis titik stasioner** pada grafik di atas yakni **titik balik maksimum (maksimum lokal)**, **titik balik minimum (minimum lokasl)**, dan **titik belok**.

Mengapa LOKAL?
Karena masih ada
yang lebih tinggi

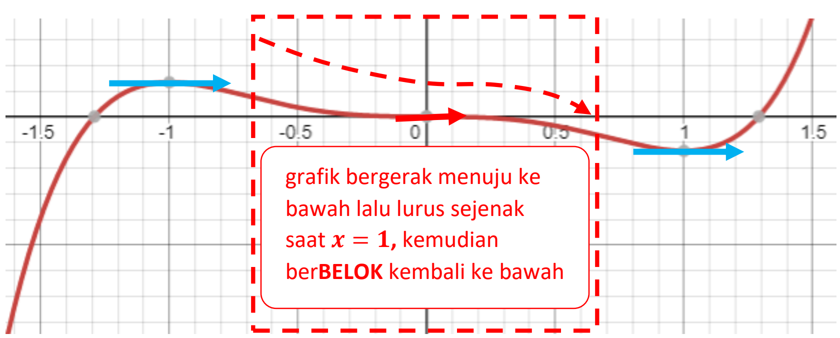


$$\textit{titik balik maksimum}$$
$$(\textit{maksimum lokal})$$



Mengapa LOKAL?
Karena masih ada
yang lebih rendah

$$\textit{titik balik minimum}$$
$$(\textit{minimum lokal})$$



$$\textit{Titik Belok}$$

Dapat dilihat bahwa masing-masing titik stasioner memiliki sifatnya masing-masing, yakni:

a) Untuk ***titik balik maksimum/maksimum lokal*** terjadi saat $\boldsymbol{x = -1}$.
b) Untuk ***titik balik minimum/minimum lokal*** terjadi saat $\boldsymbol{x = 1}$.
c) Untuk ***titik belok*** terjadi pada saat $\boldsymbol{x = 0}$.

Dari grafik di atas dapat diidentifikasi bahwa titik balik maksimum terjadi saat gradiennya berubah dari positif ke negatif (naik kemudian turun), titik balik minimum terjadi saat gradiennya berubah dari negatif ke positif (turun kemudian naik), sedangkan titik belok terjadi saat gradiennya tidak berubah yakni positif ke positif (naik kemudian naik lagi) atau negatif ke negatif (turun kemudian turun lagi).

Karena konsep gradien dipakai kembali, maka menggunakan turunan akan lebih mudah dibandingkan harus menggambarkan grafiknya. Sebagaimana aturan berikut.

Misalkan $\boldsymbol{f(x)}$ fungsi yang dapat diturunkan di $\boldsymbol{x = a}$, maka:

a) $\boldsymbol{(a, b)}$ merupakan ***titik balik maksimum/maksimum lokal*** apabila untuk $x < a$ maka $f'(a)$ positif dan untuk $x > a$ maka $f(x)$ negatif.

b) $\boldsymbol{(a, b)}$ merupakan ***titik balik minimum/minimum lokal*** apabila untuk $x < a$ maka $f'(a)$ negatif dan untuk $x > a$ maka $f(x)$ positif.

c) $\boldsymbol{(a, b)}$ merupakan ***titik belok*** apabila baik untuk $x < a$ maupun untuk $x > a$ tanda dari $f(x)$ tidak berubah.

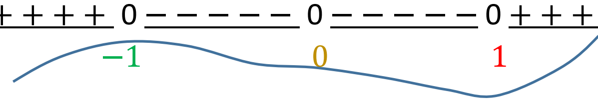
Contoh 1.2 (Titik Balik dan Titik Belok)

Misalkan $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ maka $\boldsymbol{y' = x^4 - x^2}$ sehingga berikut adalah jenis stasioneritas-nya:

$$\boldsymbol{y' = 0}$$
$$x^4 - x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\boldsymbol{x = 0} \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{x = \pm 1} \qquad \rightarrow \qquad \textbf{daerah stasioner}$$

Berdasarkan hasil pada Contoh 1.1, diperoleh tanda berikut

$$\underline{+++++}\ 0\ \underline{------}\ 0\ \underline{------}\ 0\ \underline{+++++}$$
$$-1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1$$



Dengan demikian, maka

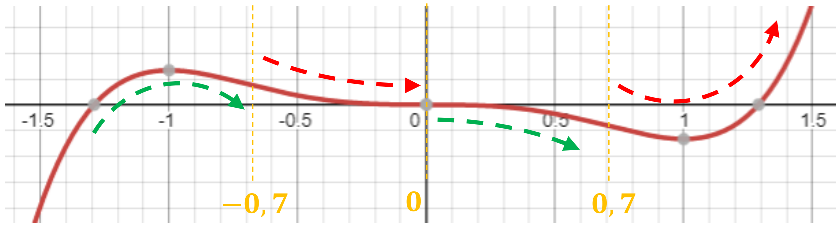
a) Titik balik maksimumnya adalah ketika $x = -1$, sehingga $y = \frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{2}{15}$
Jadi titiknya adalah $(-1, 2/15)$.

b) Titik balik minimumnya adalah ketika $x = 1$, sehingga $y = \frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{3}(1)^3 = -\frac{2}{15}$
Jadi titiknya adalah $(1, -2/15)$.

c) Titik beloknya adalah ketika $x = 0$, sehingga $y = \frac{1}{5}(0)^5 - \frac{1}{3}(0)^3 = 0$ → titiknya $\boldsymbol{(0, 0)}$

KECEKUNGAN

Perhatikan kembali grafik $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ mengenai kecekungannya berikut.



Terdapat **2 jenis kecekungan** pada grafik di atas yakni **cekung ke bawah** dan **cekung ke atas**. Dapat dilihat bahwa masing-masing kecekungan memiliki intervalnya masing-masing, yakni:

a) Untuk ***cekung ke bawah*** terjadi saat $x < -0,7$ atau $0 < x < 0,7$
b) Untuk ***cekung ke atas*** terjadi saat $-0,7 < x < 0$ atau $x > 0,7$

Dari grafik di atas dapat diidentifikasi bahwa cekung ke bawah terjadi saat gradiennya berangsur berubah menurun (naik kemudian turun). Namun ingat bahwa gradien adalah turunan dan berangsur berubah mengindikasikan perubahan terhadap waktu yang juga merupakan turunan pula, maka **cekung ke bawah terjadi saat turunan dari turunannya (turunan keduanya) negatif** (menurun). Sebaliknya, maka sedangkan **cekung ke atas terjadi saat turunan dari turunannya (turunan keduanya) positif (naik)**. Sebagaimana teorema berikut.

Misalkan $f(x)$ fungsi yang memiliki turunan kedua maka:

d) $f(x)$ akan ***cekung ke bawah*** apabila $f''(x)$ negatif.

e) $f(x)$ akan ***cekung ke atas*** apabila $f''(x)$ positif.

Contoh 1.3 (Kecekungan)

Misalkan $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ maka $y' = x^4 - x^2$ sehingga turunan keduanya adalah

$$y'' = 4x^3 - 2x$$

berikut adalah jenis kecekungannya-nya:

$$y'' = 0$$
$$4x^3 - 2x = 0$$
$$x(4x^2 - 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm\sqrt{2/4} = \pm 0,71$$

Dengan cara yang serupa dengan Contoh 1.1 (menggunakan y''), diperoleh tanda berikut

$$\underset{}{-\,-\,-\,-\,-}\ 0\ \underset{-0,71}{}\ +\,+\,+\,+\,+\ 0\ \underset{0}{}\ -\,-\,-\,-\,-\ 0\ \underset{0,71}{}\ +\,+\,+\,+\,+$$

$- - - - -$	0	$+ + + + +$	0	$- - - - -$	0	$+ + + + +$
	$-0,71$		0		$0,71$	

Dengan demikian, maka

a) cekung ke bawah terjadi ketika $x < -0,71$ atau $0 < x < 0,71$.
b) cekung ke atas terjadi ketika $-0,71 < x < 0$ atau $x > 0,71$.

2. PENGGAMBARAN GRAFIK FUNGSI

Melalui pembahasan mengenai komponen grafik di atas yang ternyata bisa dihasilkan oleh turunan, maka sebuah grafik dapat digambar dengan presisi yang cukup tinggi melalui turunan. Dengan detail tambahan seperti nilai $f(x)$ yang tidak terdefinisi, titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y, dan asimtot-asimtot, maka mehasilkan grafik yang lebih baik lagi. Dengan demikian, berikut adalah langkah-langkah untuk menggambar grafik dari suatu fungsi.

Langkah Menggambar Grafik Fungsi $y = f(x)$

1) Titik Diskontinu

Periksa daerah asal untuk melihat apakah terdapat nilai x sehingga $f(x)$ tidak terdefinisi.

2) Titik Potong Sumbu

Cari titik potong dengan sumbu-x ketika $y = 0$ dan sumbu-y ketika $x = 0$.

3) Stasioneritas (Titik Balik dan Belok) dan Kemonotonan

Cari titik stasioner yaitu ketika $f'(x) = 0$, kemudian definisikan tanda di sekitarnya untuk memperoleh titik balik (maksimum dan/atau minimum) dan titik belok. Sekaligus mendapatkan interval kemonotonan berdasarkan tanda yang telah diperoleh, yakni jika $f'(x) > 0$ atau positif maka naik, sedangkan $f'(x) < 0$ atau negatif maka turun.

4) Kecekungan

Cari kecekungan, yakni titik ketika $f''(x) = 0$, kemudian definisikan tanda di sekitarnya untuk memperoleh cekung ke atas jika $f'(x) > 0$ dan cekung ke bawah jika $f'(x) > 0$.

5) Asimtot

Cari asimtot datar $y = c$ jika

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$$

Asimtot tegak $x = c$ jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Asimtot miring $y = ax + b$ jika

$$f(x) = ax + b + g(x) \text{ di mana } g(x) \to 0 \text{ ketika } x \to \pm\infty.$$

<u>Contoh 2.1</u> (Menggambar Grafik Fungsi)

Akan digambarkan grafik dari fungsi $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3}$.

1) Titik Diskontinu: Tidak ada

Semua x terdefinisi pada $y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$

2) Titik potong dengan sumbu koordinat

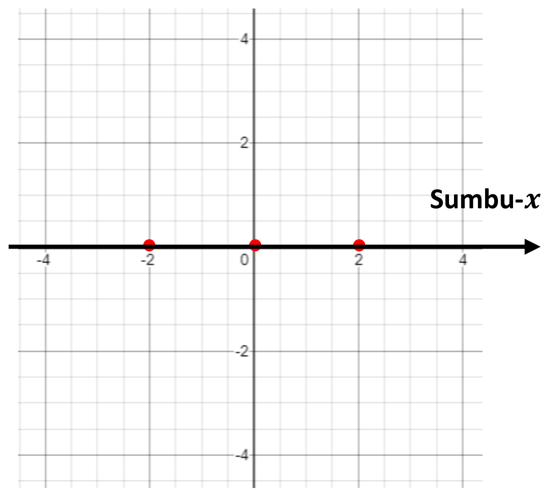
Pada sumbu-$\boldsymbol{x}$ terjadi saat $y = 0$, yakni

$$\begin{aligned} y = 0 &= \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 \\ &= x^5 - 4x^3 \\ &= x^3(x^2 - 4) \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm 2$$

Pada sumbu$-\boldsymbol{y}$ terjadi saat $x = 0$, yakni

$$y = \frac{1}{2}0^5 - 2\,.\,0^3 = 0$$



Ilustrasi proses 2)

3) Stasioner (Balik dan Belok) dan Monoton

Terjadi saat $\boldsymbol{y' = 0}$, yakni

$$\begin{aligned} y' = \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 &= 0 \\ 5x^4 - 12x^2 &= 0 \\ x^2(5x^2 - 12) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm\sqrt{12/5} \approx \pm 1.54$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$\begin{array}{cccc} (x = -2) & (x = -1) & (x = 1) & (x = 2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y' = +) & (y' = -) & (y' = -) & (y' = +) \end{array}$$

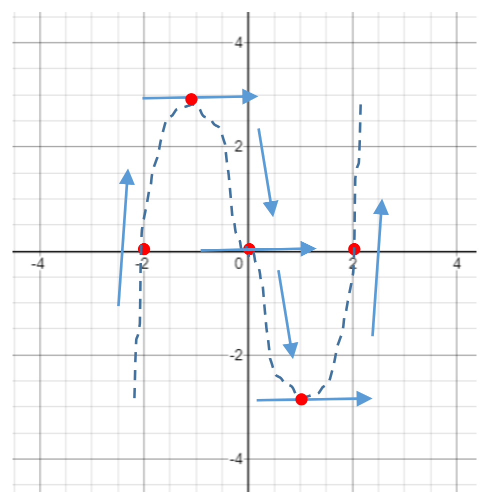
$$y' \rightarrow \quad \underset{-1.54}{+++\,0}\,---\,\underset{0}{0}\,---\,\underset{1.54}{0}\,+++$$

Dengan demikian,

- $x = -1.54 \rightarrow y = 2.97$ titik balik maksimum
- $x = 1.54 \rightarrow y = -2.97$ titik balik minimum
- $x = 0 \rightarrow y = 0$ titik belok.

Sekaligus didapatkan pula,

- Naik pada interval $(-\infty, -1.54)$ dan $(1.54, \infty)$
- turun pada interval $(-1.54, 0)$ dan $(0, 1.54)$.



Ilustrasi proses 3)
Garis putus-putus di atas hanyalah perkiraan, sehingga perlu dipastkan melalui proses berikutnya.

4) Titik Kecekungan

Terjadi saat $\boldsymbol{y}'' = \mathbf{0}$, yakni

$$y'' = 10x^3 - 12x = 0$$
$$5x^3 - 6x = 0$$
$$x(5x^2 - 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm\sqrt{6/5} \approx \pm 1.1$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$\begin{array}{cccc} (x=-2) & (x=-1) & (x=1) & (x=2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y''=-) & (y'=+) & (y'=-) & (y'=+) \end{array}$$

$$y'' \rightarrow \quad ---0+++\ 0---\ 0+++$$
$$-1.1 \qquad 0 \qquad 1.1$$

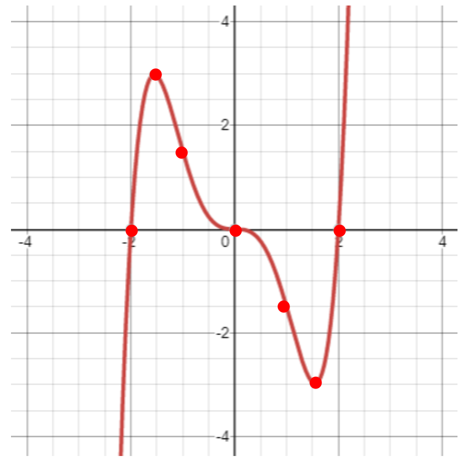
Titik perpindahan kecekungannya adalah

- $x = -1.1 \rightarrow y = 1.84$
- $x = 1.1 \rightarrow y = -1.84$
- $x = 0 \rightarrow y = 0$

Dengan demikian,

- Cekung ke bawah pada $(-\infty, -1.1)$ dan $(0, 1.1)$
- Cekung ke atas pada $(-1.1, 0)$ dan $(1.1, \infty)$

5) Tidak ada asimtot datar, tegak, maupun miring sebab fungsi polinom (fungsi dengan pangkat bilangan bulat positif) tidak memiliki batasan.



Gambar Grafik $y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$

Grafik perkiraan sebelumnya cukup sesuai dengan sebenarnya.

Contoh 2 Akan digambarkan grafik dari fungsi $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

1) Fungsi tidak terdefinisi pada $x = 2$

Karena ketika $x = 2$ menghasilkan $4/0$

Sehingga fungsi tidak akan menyentuh $x = 2$.

2) Titik potong dengan sumbu koordinat

Pada **sumbu-x** terjadi saat $y = 0$

$$y = 0 = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

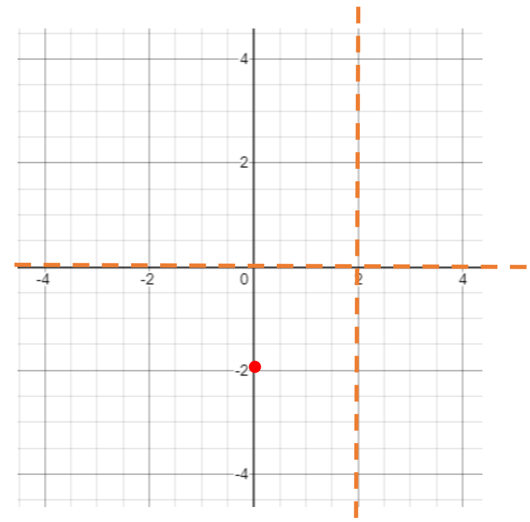
Diskriminan dari $x^2 - 2x + 4$ adalah

$$D = (-2)^2 - 4.4 < 0$$

definit positif. Artinya fungsi tidak akan pernah bernilai y =0 memotong sumbu x

Pada **sumbu**$-$***y*** terjadi saat $x = 0$, yakni

$$y = \frac{0^2 - 2(0) + 4}{0 - 2} = -2$$



Ilustrasi proses 1) dan 2)

Sepanjang $x = 2$ dan sumbu-x tidak boleh disentuh karena tidak terdefinisi

3) Titik Stasioner: Balik dan Belok

Terjadi saat $\boldsymbol{y'} = \mathbf{0}$, yakni

$$y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 4)}{(x-2)^2} = 0$$

$$y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$

$$x = 0, \quad x = 4 \quad \text{atau} \quad x \neq 2$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$(x = -1)$	$(x = 1)$	$(x = 3)$	$(x = 5)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$(y' = +)$	$(y' = -)$	$(y' = -)$	$(y' = +)$

$$y' \rightarrow \quad +++ \; 0 \; --- \; 0 \; --- \; 0 \; +++$$

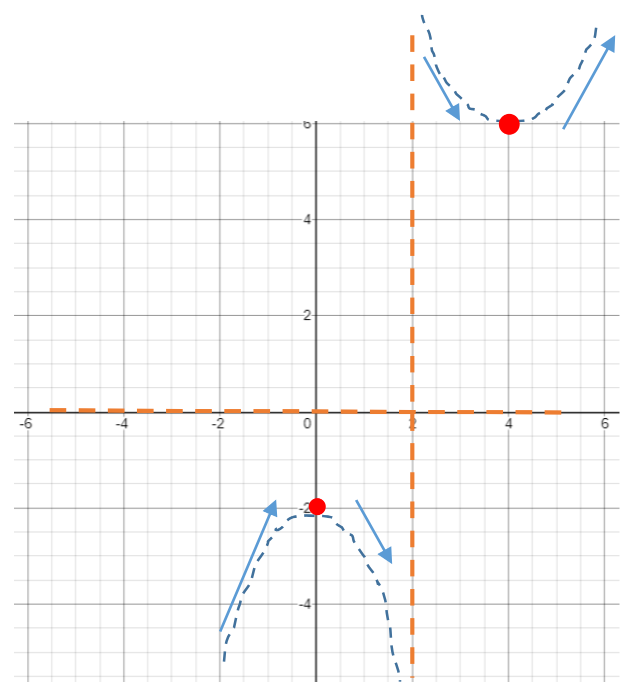
$$0 \qquad\quad 2 \qquad\quad 4$$

Dengan demikian,

- $x = 0 \rightarrow y = -2$ titik balik maksimum
- $x = 2 \rightarrow y$ tidak terdefinisi
- $x = 4 \rightarrow y = 6$ titik balik minimum.

Sekaligus didapatkan pula,

- Naik pada interval $(-\infty, 0)$ dan $(4, \infty)$
- turun pada interval $(0, 2)$ dan $(2,4)$.



4) Titik Kecekungan

Terjadi saat $\boldsymbol{y'' = 0}$, yakni

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)}{(x-2)^3}$$

$$y'' = \frac{8}{(x-2)^3} = 0$$

$$x = 2$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$(x = -0) \quad (x = 2)$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$(y'' = -) \quad (y' = +)$$

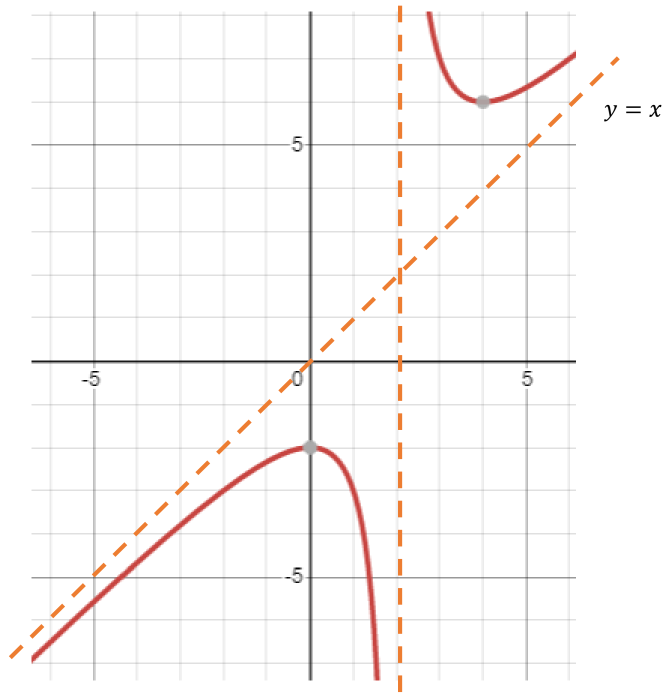
$$y'' \rightarrow \underset{2}{\underline{- - - \; 0 \; + + +}}$$

Titik perpindahan kecekungannya adalah

- $x = 2 \rightarrow y$ tidak terdefinsi, yang berarti berupa garis yang tidak boleh dilewati (asimtot tegak)

Dengan demikian,

- Cekung ke bawah pada $(-\infty, 2)$
- Cekung ke atas pada $(2, \infty)$



Gambar Grafik $\boldsymbol{y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}}$

Terdapat dua asimtot yakni, asimtot datar $x = 2$, dan asimtot miring $y = x$.

5) Asimtot tegak sudah ditemukan yakni $x = 2$, **asimtot datar**

tidak ada karena

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

Asimtot miring,

perhatikan bahwa

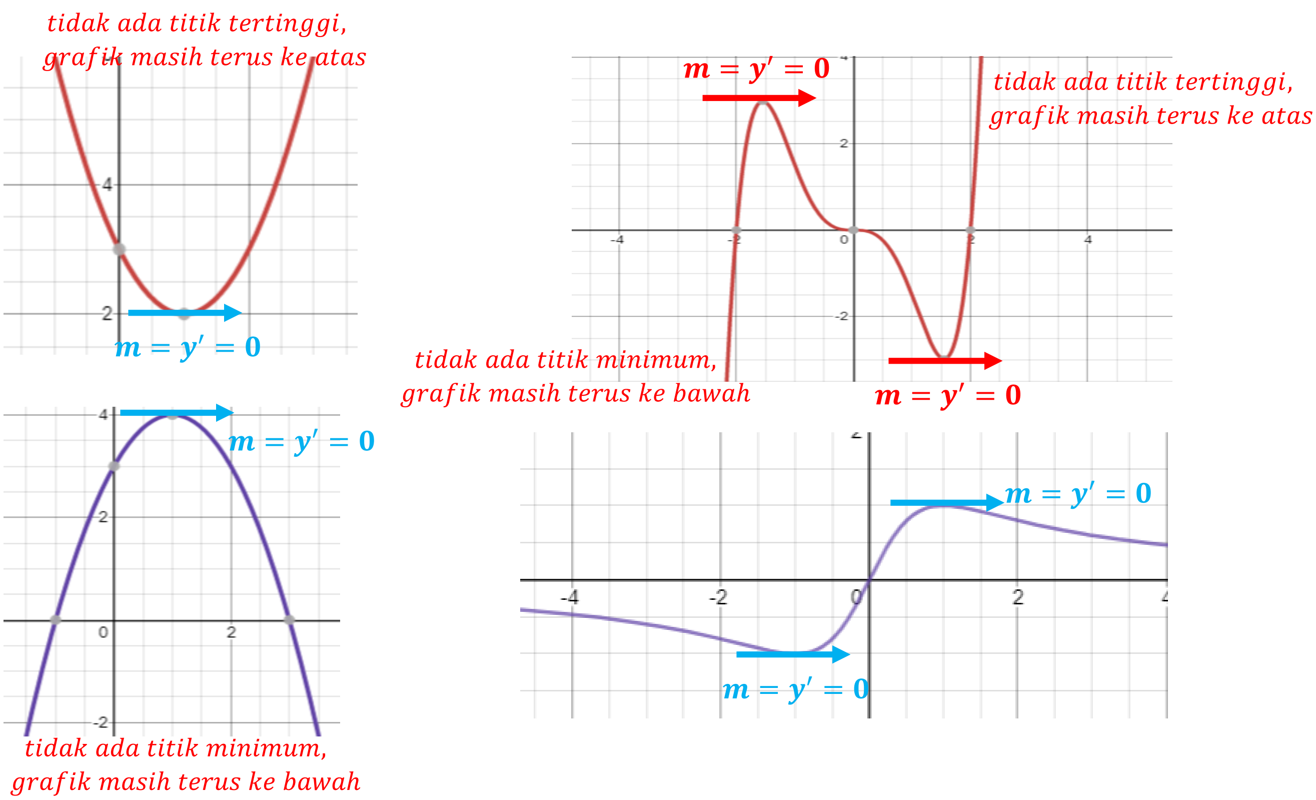
$$f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{x(x-2)+4}{x-2} = x + \frac{4}{x-2}$$

Karena $\frac{4}{x-2} \rightarrow 0$ ketika $x \rightarrow \pm\infty$,

maka $f(x) = x$ merupakan asimtot miring.

3. TITIK MAKSIMUM DAN MINIMUM

Titik maksimum dan minimum (atau disebut sebagai titik ekstrem) dari suatu fungsi pada selang yang tidak dibatasi (global) tidak lah selalu ada. Sebagai contoh, perhatikan grafik-grafik berikut.



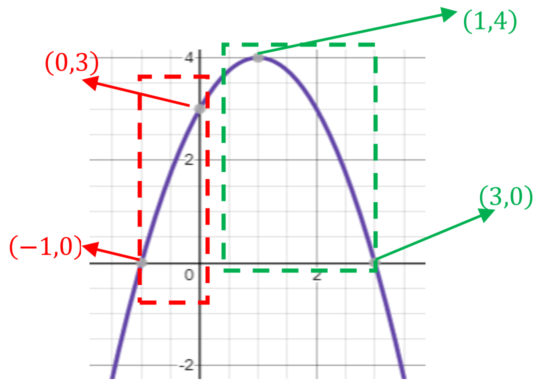
1) **Grafik sebelah kiri atas memiliki titik minimum global, namun tidak memiliki titik maksimum global**. Titik minimum tersebut terjadi saat kemiringannnya 0, yakni $y' = m = 0$.
2) **Grafik sebelah kiri bawah memiliki titik maksimum global, namun tidak memiliki titik minimum global**. Titik maksimum tersebut terjadi saat kemiringannnya 0, yakni $y' = m = 0$.
3) **Grafik sebelah kanan atas tidak memiliki titik minimum global maupun titik maksimum global**. Kemiringan yang 0, yakni $y' = m = 0$, tidak memberikan kesimpulan mengenai maksimum atau minimum global, melainkan lokal. (ingat kembali pembahasan titik balik pada Subbab 1 mengenai Komponen Grafik.
4) **Grafik sebelah kanan bawah memiliki titik maksimum dan titik minimum global**. Kedua titik ekstrem tersebut terjadi saat kemiringannnya 0, yakni $y' = m = 0$.

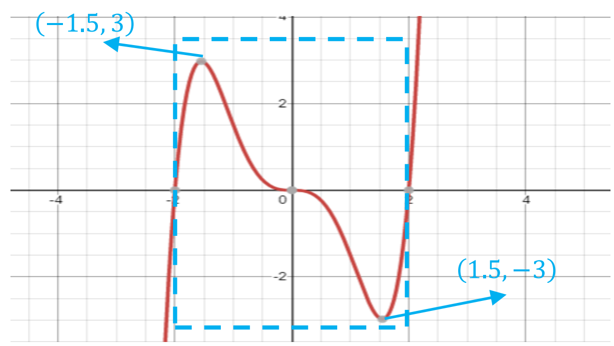
Dari keempat kasus di atas, dapat dilihat bahwa **titik maksimum dan minimum (global) tidak senantiasa dimiliki oleh setiap fungsi**. Ada yang memiliki keduanya, ada yang hanya memiliki maksimum saja atau minimum saja, bahkan tidak memiliki kedua titik ekstrem tersebut.

Demikian pula mengenai konsep kemiringan atau turunan yang 0, tidak senantiasa memberikan titik maksimum ataupun minimum.

Namun demikian, **titik maksimum dan minimum dari suatu fungsi bisa tetap diperoleh dan dapat berubah, bergantung batasan yang diberikan**. Titik maksimum dan minimum yang demikian disebut sebagai **ekstrem lokal (maksimum dan minimum lokal)**.

Perhatikan kembali grafik dari fungsi-fungsi berikut berikut batasan yang diberikan.





1) **Grafik sebelah kiri** dengan batasan kotak merah memiliki titik maksimum pada $(0,3)$ yang terletak di ujung interval dan minimum pada $(-1, 0)$ juga di ujung interval.
2) **Grafik sebelah kiri** dengan batasan kotak hijau memiliki titik maksimum pada $(1,4)$ yang merupakan kondisi $m = y' = 0$ dan minimum pada $(3, 0)$ yang terletak di ujung interval.
3) **Grafik sebelah kanan** dengan batasan kotak biru memiliki titik minimum pada sekitar $(1.5, -3)$ dan maksimum pada $(-1.5, 3)$, yang keduanya merupakan kondisi $m = y' = 0$ (padahal sebelumnya fungsi ini bahkan tidak memiliki nilai maksimum atau minimum).

Kasus di atas menunjukkan bahwa titik maksimum dan minimum (lokal) suatu fungsi tidaklah tetap, bergantung dari batasan yang diberikan. Terdapat beberapa kemungkinan untuk mengetahui letak dari titik ekstrem, yakni titik ujung interval (batasan) dan kondisi $y' = 0$.

Berikut adalah definsi formal mengenai maksimum dan minimum suatu fungsi.

Definisi Ekstrem

1) Titik ekstrem (a, b) dari suatu fungsi $y = f(x)$ adalah titik dimana saat $y = f(a) = b$ memiliki nilai yang paling besar atau paling kecil di antara nilai lainnya, yakni untuk setiap $x \in D_f$ maka $f(x) \leq f(a)$ atau $f(x) \geq f(a)$.

2) Untuk (a, b) sehingga $f(a) = b$ paling besar maka disebut titik maksimum, di mana b disebut nilai maksimum, sedangkan a disebut nilai x saat maksimum.

3) Untuk (a, b) sehingga $f(a) = b$ paling kecil maka disebut titik minimum, di mana b disebut nilai minimum, sedangkan a disebut nilai x saat maksimum.

Seperti yang telah dibahas sebelumnya bahwa, konsep $y' = 0$ tidak selalu memberikan nilai x yang menghasilkan nilai y yang ekstrem lokal. Berikut adalah teorema untuk titik ekstrem lokal.

Teorema Titik Kritis

Misalkan suatu fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada suatu selang I. Jika $x = c \in I$ sehingga $f(c)$ merupakan nilai ekstrem, maka $\left(c, f(c)\right)$ merupakan titik kritis, yakni merupakan salah satu dari titik berikut:

1) Titik ujung dari I. Secara khusus, jika $I = [a, b]$, maka $c = a$ atau $c = b$.
2) Titik stasioner dari f, yakni $x = c$ sehingga $f'(c) = 0$.
3) Titik singular dari f, yakni $x = c$ sehingga $f'(c)$ tidak ada atau tidak terdefinisi

Contoh 3.1 (Titik Ekstrem (Maksimum dan Minimum)

1) Misalkan $\boldsymbol{y = f(x) = -2x^3 + 3x^2}$. Akan dicari titik ekstrem pada selang

   a) $(-\infty, \infty)$ **atau tidak terbatas**

   Titik kritis pada selang ini adalah:

   - Titik ujung yakni $x \to -\infty$ dan $x \to \infty$

     Perhatikan bahwa
     $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2(-\infty)^3 + 3\infty^2 = 2\infty^3 + 3\infty^2 = \infty$$
     dan
     $$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2(\infty)^3 + 3\infty^2 = -2\infty^3 + 3\infty^2 = -\infty$$

   Dengan demikian, tanpa mencari titik kritis lainnya, titik maksimum ataupun minimumnya tidak akan ada, sebab nilai $f(x)$ menuju $-\infty$ dan ∞.

   b) $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

   Titik kritis pada selang ini adalah:

   - **Titik ujung** yakni $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ dan $\boldsymbol{x = 2}$

     Perhatikan bahwa
     $$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
     dan
     $$f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 = -4$$

   - **Titik statsioner**, yakni
     $$\begin{aligned} y' &= 0 \\ -6x^2 + 6x &= 0 \\ 6x(-x + 1) &= 0 \end{aligned}$$
     $x = 0$ atau $x = 1$ keduanya ada pada selang $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

     maka
     $$f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = 0$$
     $$f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = 1$$

- **Titik singular**, tidak ada karena
$$y' = -6x^2 + 6x \quad \text{terdefinisi di setiap titik}$$
Dengan demikian, dari semua titik kritis yang ada, titik maksimumnya adalah $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $(1,1)$ sedangkan titik minimumnya adalah $(2, -4)$.

Dengan kata lain, **nilai maksimumnya adalah $y = 1$ yaitu saat $x = -1/2$** dan **$x = 1$**. Sedangkan **nilai minimumnya adalah $y = -4$ yaitu saat $x = 2$**.

2) Misalkan $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Akan dicari titik ekstrem pada selang $[\mathbf{-1}, \mathbf{2}]$

Titik kritis pada selang ini adalah:

- **Titik ujung** yakni $x = -1$ dan $x = 2$
  Perhatikan bahwa
$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$
  dan
$$f(2) = \sqrt[3]{2^2} \approx 1.59$$
- **Titik statsioner**, yakni
$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$
$$\text{maka } y' = 0$$
$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 0$$
$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$$
  Tidak ada x yang memenuhi sehingga titik stasioner tidak ada.

- **Titik singular** yakni $x = 0$, sebab
$$f'(0) = \frac{2}{3.0^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{0} \quad \text{tidak terdefinisi}$$
  Perhatikan bahwa
$$f(0) = \sqrt[3]{(0)^2} = 0$$

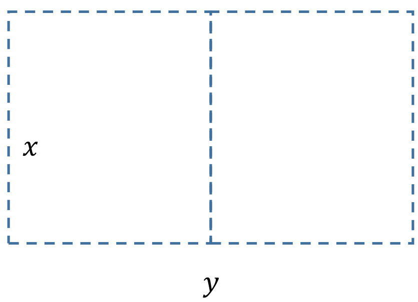
Dengan demikian, dari semua titik kritis yang ada, titik maksimumnya adalah $(2, 1.59)$ dan titik minimumnya adalah $(0,0)$.

Dengan kata lain, **nilai maksimumnya adalah $y = 2$ yaitu saat $x = 1.59$**. Sedangkan **nilai minimumnya adalah $y = 0$ yaitu saat $x = 0$**.

4. MASALAH-MASALAH PRAKTIS

PAGAR

Seorang peternak berencana membuat dua buah pagar yang identik yang berdampingan (seperti tampak atas pada gambar). Modal yang ia miliki hanya bisa untuk membeli jarring kawat sepanjang 100 meter dengan tinggi 2 meter. Akan ditentukan ukuran panjang dan lebar pagar agar memiliki luas sebesar-besarnya sehingga dapat memuat banyak ternak.



Dengan panjang sisi x sebanyak 3 dan y sebanyak 4 dan panjang kawat yang tersedia 100 meter, maka

$$3x + 2y = 100$$
$$y = \frac{100 - 3x}{2}$$

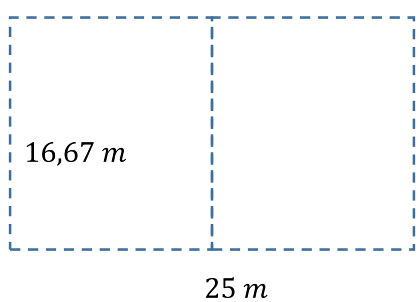
Luas dari kandang adalah

$$L = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{100 - 3x}{2}\right) = 50x - \frac{3}{2}x^2$$

Agar luasnya maksimum maka

$$L' = 0 \quad \rightarrow \quad 50 - \frac{3}{2}(2x) = 0$$
$$50 = 3x$$
$$x = \frac{50}{3} \approx 16{,}67\ m$$
$$\rightarrow y = \frac{100 - 3\left(\frac{50}{3}\right)}{2} = \frac{50}{2} = 25\ m$$

Jadi, ukuran agar luasnya maksimum adalah



BIAYA OPERASIONAL

Biaya operasional sebuah truk memiliki kecenderungan pola linier terhadap kecepatan v per mil yakni $f(x) = 30 + \frac{v}{2}$ sen dollar per mil. Pengemudinya dibayar \$14 per jam dengan diberi batas kecepatan dari 40 hingga 60 mil/jam. Akan dicari kecepatan yang disarankan agar biaya operasional pengiriman ke setiap tempat semurah mungkin.

Misalkan jarak yang akan ditempuh menuju lokasi pengiriman adalah k mil. Maka biaya operasional totalnya adalah

$$\begin{aligned} C(v) &= biaya\ pengemudi + Biaya\ operasional \\ &= 1400 \times waktu\ sampai + \left(30 + \frac{v}{2}\right) \times jarak \\ &= 1400 \times \frac{k}{v} + \left(30 + \frac{v}{2}\right) \times k \\ &= 1400kv^{-1} + 30k + \frac{kv}{2} \end{aligned}$$

Agar biayanya semurah mungkin (minimum) maka terdapat titik-titik kritis, yakni

- Titik ujung, yakni $v = 40$ dan $v = 60$.
  Perhatikan bahwa
  $$C(40) = \frac{1400k}{40} + 30k + \frac{40k}{2} = 85k \quad \text{dan}$$
  $$C(60) = \frac{1400k}{60} + 30k + \frac{60k}{2} = 83.3k$$
- Titik stasioner
  Perhatikan bahwa
  $$\begin{aligned} C'(v) = -1400kv^{-2} + k/2 &= 0 \\ \frac{k}{2} &= \frac{1400k}{v^2} \\ v^2 &= 2800 \\ v &= \sqrt{2800} \approx 53 \end{aligned}$$

  Kecepatan ini berada pada batas yang ditentukan, maka
  $$C(53) = \frac{1400k}{53} + 30k + \frac{53k}{2} = 82.9k$$
- Titik singularnya terjadi ketika $v = 0$ karena $C'(0) = -\frac{1400k}{0^2} + \frac{k}{2}$ tidak terdefinisi. Namun, $v = 0$ tidak termasuk dalam selang batas kecepatan yang dikehendaki (tentu saja, $v = 0$ artinya tidak pergi kemanapun).

Dari setiap titik kritis, diperoleh titik minimumnya adalah $(53, 82.9)$. Dengan demikian, pengemudi sangat di sarankan untuk berkendara dengan kecepatan di sekitar 53 mil/jam.

EKONOMI

Sebuah perusahaan memperkirakan bahwa akan dapat menjual 1000 barang tiap minggu dengan harga jual Rp 3,000.00. Setiap menurunkan harga per Rp 100.00, penjualan mingguannya meningkat 100 unit. Misalkan x adalah banyaknya unit terjual per minggunya. Perusahaan memiliki target bahwa barang yang terjual harus di atas 1000 unit setiap minggunya. Akan dicari harga satuan yang dapat memaksimalkan pendapatan.

Fungsi harganya adalah

$$\frac{P(x) - 3000}{x - 1000} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{-100}{100} = -1$$
$$P(x) - 3000 = 1000 - x$$
$$P(x) = 4000 - x$$

Dengan demikian, untuk penjualan sebanyak x barang, total pendapatannya adalah

$$R(x) = xP(x) = 4000x - x^2$$

Agar Total pendapatannya maksimum berikut terdapat titik-titik kritisnya, yakni

- Titik ujung, yakni $x = 1000$.
  Perhatikan bahwa
  $$R(1000) = 4000(1000) - 1000^2 = 4{,}000{,}000 - 1{,}000{,}000 = 3{,}000{,}000$$

- Titik stasioner
  Perhatikan bahwa
  $$\frac{dR}{dx} = 4000 - 2x = 0$$
  $$4000 = 2x$$
  $$x = 2000$$
  Nilai x memenuhi syarat yakni $x \geq 1000$, perhatikan bahwa
  $$R(2000) = 4000(2000) - 2000^2 = 8{,}000{,}000 - 4{,}000{,}000 = 4{,}000{,}000$$

- Titik singularnya tidak ada sebab $R'(x)$ terdefinisi di semua titik.

Dari setiap titik kritis, diperoleh titik maksimumnya adalah $(2000, 4000000)$. Dengan demikian, penjualan setiap minggu harus mencapai 2000 unit agar mencapai pencapatan maksimum.