INTEGRAL TENTU (Bagian 2 dari 2)

Pertemuan: 8
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

5. Teorema Rata-rata untuk Integral
6. Metode Substitusi
7. Metode Parsial

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan rumus rumus integral untuk menghitung nilai integral tertentu (C3).

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

5. TEOREMA RATA-RATA UNTUK INTEGRAL

Dalam Statistika, rata-rata hitung dari suatu data dirumuskan sebagai $\bar{x} = \Sigma\, x_i/n$. Dengan rumus tersebut kita dapat menghitung semisal kecepatan rata-rata seseorang mengendarai sepeda motor yang diukur setiap 1 menit atau setiap jarak tertentu misalnya. Namun hal ini tidaklah akurat, sebab motor tersebut berkendara setiap saat sepanjang jalan.

Misalkan dari pengukuran setiap menit didapatkan pola fungsi yang mewakili, yakni $v(t)$, dan karena pengukurannya setiap saat maka kecepatan rata-ratanya tidak bisa menggunakan rumus di atas, melainkan aturan penjumlahan di mana partisi waktunya sangat rapat. Seperti yang diketahui, penjumlahan dengan partisi yang sangat rapat adalah definisi integral.

TEOREMA NILAI RATA-RATA UNTUK INTEGRAL

Misalkan f kontinu pada selang tutup $[a, b]$, maka terdapat suatu bilangan $c \in (a, b)$ sehingga

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$$

CONTOH 1

Misalkan seseorang berkendara selama 4 jam menuju suatu tempat dengan kecepatan yang mengikuti fungsi $v(t) = 3\sqrt{x} + 12x^2$ km/jam, maka kecepatan rata-ratanya adalah

$$\frac{\int_0^4 (3x^{1/2} + 12x^2)\,dx}{(4-0)} = \frac{\left[3\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + 12\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^4}{4} = \frac{2(4)^{3/2} + 4(4)^3}{4} = \frac{2.8 + 4.64}{4} = 80\ km/jam$$

6. METODE SUBSTITUSI

Sebelumnya telah diberikan mengenai aturan dasar mengenai integral tak tentu pada Subbab Antiturunan, Bab Aplikasi Turunan. Namun, pada aturan tersebut, tidak terdapat aturan mengenai integral tak tentu dari perkalian dua fungsi tak konstan. Ini menunjukkan bahwa terdapat aturan tersendiri untuk mengintegralkan perkalian antar dua fungsi tak konstan.

Sebagai ilustrasi, perhatikan integral tak tentu dari perkalian fungsi $f(x) = (x^2 + 5x)$ dan $g(x) = (x - 2)$ berikut.

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int (x^2 + 5x)(x - 2)\,dx$$

Mungkin Anda berfikir, hasil integalnya akan seperti berikut

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 5x)(x - 2)\,dx &= \left(\frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \\ &= \frac{x^5}{6} - \frac{2x^4}{3} + \frac{5x^4}{4} - 5x^3 + C \\ &= \frac{x^5}{6} - \frac{7x^4}{12} - 5x^3 + C\end{aligned}$$

Hasil tersebut SALAH BESAR, sebab seharusnya

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 5x)(x - 2)\,dx &= \int (x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 10x)\,dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^3}{3} - 10x^2 + C \\ &= \frac{x^4}{4} + x^3 - 10x^2 + C\end{aligned}$$

Hasil yang berbeda jauh dengan sebelumnya. Ini menunjukkan bahwa, seperti halnya turunan, integral dari perkalian dua buah fungsi tak konstan tidaklah dikerjakan secara sembarangan dengan mengintegralkan masing-masing fungsi kemudian dikalikan. Cara yang kedua di atas sayangnya tidak dapat digunakan untuk setiap fungsi, sebab tidak semua fungsi dapat dikalikan langsung sebelum diintegralkan. Sebagai contoh:

$$\int (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 9}\,dx$$

dua fungsi yakni $(x - 2)$ dan $\sqrt{x^2 - 4x + 9}$ tidak dapat dikalikan secara langsung sehingga tidak dapat dikerjakan menggunakan cara di atas. Untuk kasus ini, dapat dimisalkan

$$u = x^2 - 4x + 9$$

Akibatnya diferensial dari u adalah

$$du = 2x - 4 = 2(x - 2)\,dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{2(x - 2)}$$

Dengan demikian,

$$\int (x-2)\sqrt{x^2-4x+9}\,dx = \int (x-2)\sqrt{u}\,\frac{du}{2(x-2)} = \int u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{u^{3/2}}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2-4x+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Jika dilihat dengan teliti, pemisalan u di atas menghasilkan $(x-2)$ yang mana sebenarnya terdapat pula pada soal integralnya sehingga ketika disubstitusikan ke dalam u mengakibatkan $(x-2)$ tereliminasi dan akibatnya pengintegralan jadi lebih mudah. Ini menunjukkan bahwa metode ini hanya dapat dipakai untuk kasus di mana diferensial dari fungsi yang dimisalkan atau disubstitusi harus terdapat pada soal integral tersebut, sebagaimana teorema berikut

TEOREMA INTEGRAL SUBSTITUSI

Misalkan g adalah fungsi yang terdiferensialkan dan F adalah antiturunan dari f. jika $u = g(x)$, maka

$$\int g'(x)f\big(g(x)\big)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

Lebih lanjut, integral tentu dari bentuk tersebut dari a ke b adalah

$$\int_a^b g'(x)f\big(g(x)\big)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,dx$$

CONTOH 2

1) $\int 300x^2(x^3+5)^{99}\,dx$. Misalkan $u = x^3+5$ maka $du = 3x^2\,dx \to dx = du/3x^2$, maka

$$\int 300x^2(x^3+5)^{99}\,dx = \int 300x^2(u)^{99}\frac{du}{3x^2} = 100\left(\frac{u^{100}}{100}\right) + C = u^{100} + C = (x^3+5)^{100} + C$$

2) Akan dicari nilai dari

$$\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^{1000}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Misalkan $u = \sqrt{x}$ maka $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ sehingga $dx = 2\sqrt{x}\,du$. Akibatnya

$$\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^{1000}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{(u-2)^{1000}}{\sqrt{x}}\,2\sqrt{x}\,du = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} (u-2)^{1000}\,du$$

$$= \left[\frac{(u-2)^{1001}}{1001}\right]_1^2 = \left(\frac{(2-2)^{1001}}{1001} - \frac{(1-2)^{1001}}{1001}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{1001}\right) = \frac{1}{1001}$$

Pada Contoh 2 nomor 2) di atas, sebetulnya ada konsep yang belum dijelaskan mengenai

$$\int (u-2)^{1000}\,du = \frac{(u-2)^{1001}}{1001} + C$$

Hasil tersebut dikarenakan jika dimisalkan $v = u - 2$ maka $du = 1\,dv$ berupa fungsi konstan, sehingga integralnya bisa langsung dilakukan tanpa pemisalan. Berbeda halnya jika bentuknya adalah

$$\int (u^2-2)^{1000}\,du$$

Hasil sebelumnya tidak dapat dipakai sebab terdapat u^2 yang apabila dimisalkan $w = u^2 - 2$ maka $dw = 2u\,du \;\rightarrow\; du = dw/2$, akibatnya

$$\int (u^2-2)^{1000}\,du = \int (w)^{1000}\frac{dw}{2u}$$

karena u masih tersisa maka terdapat w dan u sehingga tidak dapat diintegralkan langsung. Demikian teorema berikut menjamin integral dari kasus seperti $(u-2)^{1000}$ di atas.

TEOREMA INTEGRAL SUBSTITUSI FUNGSI LINIER

Diberikan fungsi linier yakni $y = ax + b$ dan F adalah antiturunan dari f, maka

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

CONTOH 3

1) Perhatikan bahwa

$$\int 5(2x+7)^4\,dx = 5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+7)^5}{5}\right) + C = \frac{(2x+7)^5}{2} + C$$

2) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\int_{2.25}^{4} 12\sqrt{25-4x}\,dx &= \int_{2.25}^{4} 12(25-4x)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= 12\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{(25-4x)^{3/2}}{3/2}\right]_{0.75}^{4} \\ &= -2\left(\left(25-4(4)\right)^{3/2} - \left(25-4(0.75)\right)^{3/2}\right) \\ &= -2(27-64) \\ &= 74\end{aligned}$$

7. METODE PARSIAL

Teknik pengintegralan menggunakan metode parsial mengharuskan suatu fungsi dan turunannya ada pada satu sistem yang akan diintegralkan sehingga ketika menjumpai fungsi yang tidak demikian, maka tidak akan dapat digunakan metodenya. Terdapat metode lain dalam pengintegralan perkalian dua fungsi tak konstan dengan syarat yang berbeda, yang disebut sebagai metode parsial. Syaratnya adalah jika yang akan diintegralkan merupakan fungsi $f(x)g(x)$ maka $f(x)$ harus dapat diturunkan dan $g(x)$ harus dapat diintegralkan dengan metode yang sudah dimiliki sebelumnya. Tidak cukup sampai disitu, $f'(x)G(x)$ juga harus dapat diintegralkan dengan metode yang sudah dimiliki sebelumnya, dan seterusnya.

Metode ini memang cukup rumit, namun sangat berguna dalam berbagai kasus pengintegralan. Tentu saja karena memiliki syarat, tidak semua integral pula dapat diselesaikan dengan metode parsial. Ada banyak metode yang harus dipelajari untuk dapat menyelesaikan berbagai kasus integral. Berikut adalah teorema mengenai metode parsial untuk integral.

TEOREMA INTEGRAL PARSIAL

Diberikan fungsi f dan g yang terdiferensialkan dan terintegralkan. Jika G adalah antiturunan dari g, maka

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)\,dx$$

atau dalam bentuk lain yang lebih populer, yakni jika $u = f(x)$ dan $dv = g(x)\,dx$ maka

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Menggunakan metode parsial tabel akan lebih mudah dibandingkan menggunakan metode parsial langsung, sebagaimana contoh berikut.

CONTOH 4

Akan dicari integral dari $\int x^2\sqrt{3x+7}\,dx$.

	Turunkan	Integralkan
$+$	x^2	$(2x+7)^{1/2}$
$-$	$2x$	$1/3\,(3x+7)^{3/2}/(3/2)$
$+$	2	$(1/3)(2/3)\,(1/3)(3x+7)^{5/2}/(5/2)$
$-$	0	$(1/3)^2(2/3)(2/5)\,(1/3)(3x+7)^{7/2}/(7/2)$

Jadi, hasil integralnya adalah

$$\int x^2\sqrt{3x+7}\,dx = \frac{2}{9}x^2(3x+7)^{3/2} - \frac{8}{135}x(3x+7)^{5/2} + \frac{16}{2835}(3x+7)^{7/2} + C$$