LIMIT (Bagian 2)

Pertemuan: 2

Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.

Materi:

4. Limit dengan Fungsi Trigonometri
5. Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Berhingga
6. Kontinuitas Fungsi

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan teoema limit untuk nilai menghitung limit.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

4. Limit dengan Fungsi Trigonometri

Untuk memahami limit dengan fungsi trigonometri maka Anda sangat diharapkan untuk mempelajari kembali konsep trigonometri. Pada pembahasan di sini, Anda dianggap sudah menguasai dasar-dasar konsep trigonometri. Berikut beberapa contoh rumus dasar yang diperlukan:

1. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
2. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
3. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
4. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
6. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
7. $\pi \text{ rad} = 180^o$
8. $x \text{ rad} = \left(\frac{180x}{\pi}\right)^o$
9. $x^o = \left(\frac{\pi x}{180}\right) \text{ rad}$

Fungsi trigonometri $\boldsymbol{\sin \alpha x}$ dan $\boldsymbol{\cos \alpha x}$ merupakan **fungsi yang terdefinisi di setiap nilai x**, sehingga untuk mencari nilai limitnya pada setiap nilai x **berlaku teorema substitusi**, yakni

TEOREMA A TRIGONOMETRI

$$\lim_{x \to c} \sin \alpha x = \sin \alpha c \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to c} \cos \alpha x = \cos \alpha c$$

Contoh 4.1:

1. $\lim_{x \to 0} \sin 2x = \sin(2.0) = \sin 0 = 0$
2. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\sin \frac{x}{2} - \cos 2x\right] = \sin \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (-1) \approx 1,71$
3. $\lim_{x \to 60^o} [\sin(\pi - x)] = \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.87$

Sedangkan Untuk fungsi trigonometri seperti **$\tan \alpha x$, $\sec \alpha x$, $\csc \alpha x$, dan $\cot \alpha x$** merupakan fungsi yang **tidak terdefinisi di beberapa nilai x**, seperti **$\tan \frac{\pi}{2}$, $\sec \frac{\pi}{2}$, $\csc 0$, dan $\cot 0$**, sehingga **teorema substitusi hanya berlaku selain di nilai-nilai x tersebut**. Sedangkan nilai limit pada nilai-nilai x tersebut adalah tidak terdefinisi (ingat hasil $\frac{1}{0}$ pada pembahasan limit sebelumnya).

Contoh 4.2

1. $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \tan x = tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \approx -1.73$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \text{ tak terdefinisi}$

   Karena

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \tan \frac{\pi^-}{2} \;\; (kuadran\ 1) = \infty \qquad \left(ambil\ sampel\ \frac{\pi^-}{2} = 89{,}99999^o\right)$$

   Sedangkan

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \tan \frac{\pi^+}{2} \;\; (kuadran\ 2) = -\infty \qquad \left(ambil\ sampel\ \frac{\pi^+}{2} = 90{,}00001^o\right)$$

   Perhatikan bahwa <u>limit kirinya berbeda dengan limit kanan.</u>

3. $\lim\limits_{x \to 0} \csc x = \text{ tak terdefinisi}$

   Karena

   $$\lim_{x \to 0^-} \csc x = \csc 0^- = \frac{1}{\sin 0^-} (kuadran\ 4) = -\infty \qquad (ambil\ sampel\ 0^- = -0{,}000001^o)$$

   Sedangkan

   $$\lim_{x \to 0^+} \csc x = \csc 0^+ = \frac{1}{\sin 0^+} (kuadran\ 1) = -\infty \qquad (ambil\ sampel\ 0^+ = 0{,}000001^o)$$

   Perhatikan bahwa <u>limit kirinya berbeda dengan limit kanan.</u>

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sec^2 x = \infty$

   Karena

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec^2 x = \left(\sec \frac{\pi^-}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi^-}{2}}\right)^2 = \infty^2 = \infty$$

   Sedangkan

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec^2 x = \left(\sec \frac{\pi^+}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi^+}{2}}\right)^2 = (-\infty)^2 = \infty$$

   Perhatikan bahwa <u>limit kirinya sama dengan limit kanan.</u>

Bentuk seperti contoh-contoh di atas memberikan hasil yang jelas, termasuk tak hingga ataupun tak terdefinisi. Seperti sebelumnya, terdapat hasil yang belum jelas seperti 0/0, yang memberikan hasil beragam. Teorema berikut dan selanjutnya berguna untuk limit trigonometri ketika hasilnya 0/0.

TEOREMA APIT

Jika $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, dan $\boldsymbol{h}$ adalah fungsi sehingga **untuk setiap $\boldsymbol{x}$ mendekati $\boldsymbol{c}$** berlaku

$$\boldsymbol{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}$$

kemudian $\lim\limits_{x\to c} \boldsymbol{f(x)} = \lim\limits_{x\to c} \boldsymbol{h(x)} = \boldsymbol{L}$

maka $\lim\limits_{x\to c} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{L}$

Contoh 4.3

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \cdots$

   Perhatikan bahwa berapapun "sudutnya" nilai $sin\ \alpha$ selalu di antara -1 dan 1, maka

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \qquad \{kalikan\ dengan\ x\}$$

$$\lim_{x\to 0}(-x) \leq \lim_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq \lim_{x\to 0} x$$

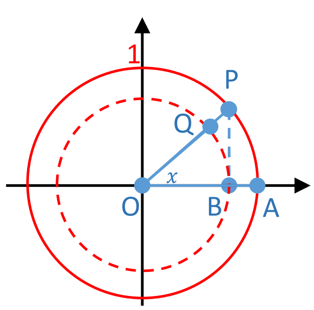
$$0 \leq \lim_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq 0$$

   Maka menurut Teorema Apit

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

---

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \cdots$



Perhatikan bahwa

$$Luas\ OBQ \leq Luas\ \triangle OBP \leq Luas\ OAP$$

$$\frac{x}{2\pi}.\pi.OB^2 \leq \frac{OB.BP}{2} \leq \frac{x}{2\pi}.\pi.OA^2$$

$$\frac{x}{2}.(\cos x)^2 \leq \frac{\cos x.\sin x}{2} \leq \frac{x}{2}.1^2$$

$$x.\cos x \leq \sin x \leq \frac{x}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x \leq \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \leq 1$$

   Maka menurut Teorema Apit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Berdasarkan hasil pada contoh di atas, didapatkan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Hasil tersebut menjadi teorema berikut yang akan berguna dalam berbagai pengerjaan limit fungsi trigonometri.

TEOREMA LIMIT B TRIGONOMETRI KHUSUS

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

Contoh 4.4

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$ {penyebut dan pembilang dikali $\frac{1}{x}$ agar muncul $\frac{\sin x}{x}$}

$=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{x}\right)+\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(\frac{3x}{x}\right)+\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1+1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{x}$ {ingat rumus dasar trigonometri di atas: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$}

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2x\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2x\left(\frac{1}{\sin x}\right)}$ {$\csc x=\frac{1}{\sin x}$}

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}=\frac{3}{2}.1=\frac{3}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ {$1-\cos^2 x=\sin^2 x$}

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot 1=1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{0}{1}=0$ {dikali $\frac{1}{x}$ agar muncul $\frac{1-\cos x}{x}$ dan $\frac{\sin x}{x}$}

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\cdot\left(\frac{2x}{2}\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot y}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{2}{3}$ {dimisalkan $y=2x$ agar muncul $\frac{\sin y}{y}$}

8) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin(6x-4\pi)}{(9x-6\pi)}=\lim\limits_{3x\to 2\pi}\frac{\sin 2(3x-2\pi)}{3(3x-2\pi)}=\lim\limits_{(3x-2\pi)\to 0}\frac{\sin 2(3x-2\pi)}{3(3x-2\pi)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{3y}=\frac{2}{3}$

Melalui contoh nomor 3), 7), dan 8) maka berikutnya dapat digunakan rumus berikut

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- $\displaystyle \lim_{x\to \frac{d}{c}} \frac{\sin a(cx-d)}{b(cx-d)} = \frac{a}{b}$

9) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{3x} = \frac{4}{3}$

10) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

11) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{1}{2}x}{\sin\frac{3}{2}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\tan\frac{1}{2}x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\right)} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}$

12) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{x^2}$ $\qquad \{1-\cos 2\alpha = \sin^2\alpha\}$

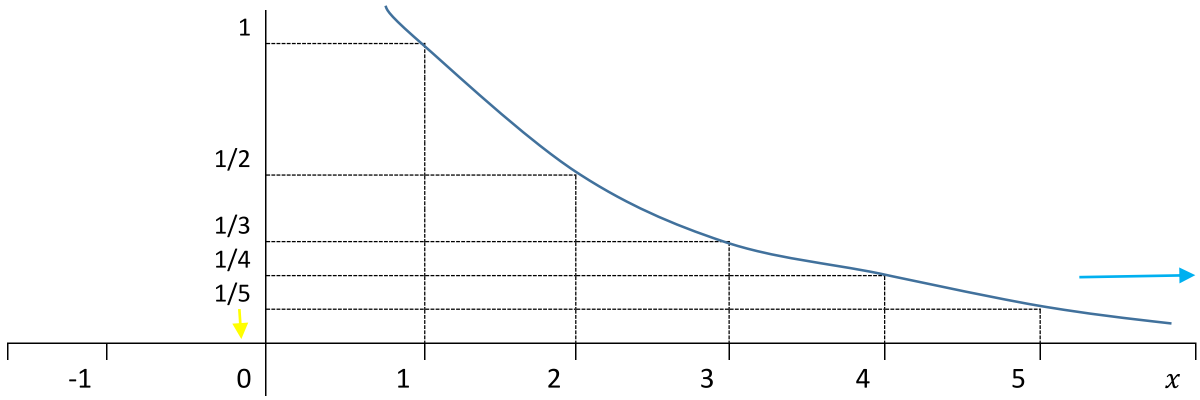
$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}x}{x} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

13) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x-\pi)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

5. Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

LIMIT DI TAK HINGGA

Penerapan dari konsep limit di tak hingga salah satunya adalah untuk menggambarkan *asimtot datar.* Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.



Dapat dilihat pada grafik bahwa jika x semakin besar ($x \to \infty$), nilai $1/x$ semakin menuju 0:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	$1/1 = 1$
2	$1/2 = 0{,}5$
3	$1/3 = 0{,}33$
$\vdots$	$\vdots$
1000000	$1/1000000 = 0{,}000001$
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0

Ini menunjukkan bahwa nilai limit dari fungsi $f(x)$ di tak hingga adalah 0, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Kembali lagi bahwa penulisan di atas **hanyalah berlaku untuk limit**, yang artinya **secara operasi biasa** hal di atas tidak dapat dilakukan yakni

$$\frac{1}{\infty} \quad tidak\ terdefinisi$$

Karena jika berlaku maka

$$\frac{1}{\infty} = 0$$
$$1 = \infty \cdot 0$$
$$\mathbf{1 = 0} \quad (tidaklah\ benar)$$

Sebaliknya pun sama bahwa jika x semakin kecil ($x \to -\infty$), nilai $1/x$ semakin menuju ke 0 ($x \to 0$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-\infty$	$-0 = 0$
$\uparrow$	$\uparrow$
-1000000	$-1/1000000$
$\vdots$	$\vdots$
-3	$-1/3$
-2	$-1/2$
-1	-1

Ini menunjukkan bahwa nilai limit dari fungsi $f(x)$ di minus tak hingga adalah 0, yakni dituliskan

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bukti secara formal bahwa limit di tak hingga di atas memiliki nilai (dalam contoh di atas adalah 0), berikut diberikan definisi berikut.

Definisi (Limit di Tak Hingga)
Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval $[c\,,\infty)$, dikatakan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Jika **untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan M** sehingga **untuk setiap $x > M$** berlaku

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x menuju tak hingga : arti dari notasi untuk setiap $x > M$, yang menunjukkan bahwa untuk semua bilangan yang lebih besar dari suatu bilangan M, tentunya tak akan terbatas menuju tak hingga)

maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L : arti dari $|f(x) - L| < \epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk

<u>Contoh 5.1</u>

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang, pilih $M = 1/\epsilon$

Untuk setiap $x > M$, Perhatikan bahwa

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Sebaliknya, berikut definisi limit di minus tak hingga.

Definisi (Limit di Minus Tak Hingga)
Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval $(-\infty, c]$, dikatakan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Jika **untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan M** sehingga **untuk setiap $x < M$** berlaku

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh 5.2

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Misalkan $\epsilon>0$ sebarang, pilih $M=-1/\epsilon$

Untuk setiap $x<M=-1/\epsilon$, artinya x bilangan negatif, dengan demikian $|x|=-x$. Perhatikan bahwa

$$|f(x)-L|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{-x}<\frac{1}{-(-1/\epsilon)}=\epsilon$$

Jadi, $|f(x)-L|<\epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Seperti halnya bentuk 0/0, sekarang perhatikan bentuk ∞/∞. Tentu bentuk ini tidaklah terdefinisi. Seperti halnya pula pada $0/0$ yang nilainya tak tentu pada limit, bentuk ∞/∞ juga tak tentu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.3

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+\left(\frac{5}{x^2}\right)}$$ {dikali $\frac{1}{x^2}$ agar menghasilkan $\frac{1}{\infty}=0$}

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{3+\left(\frac{1}{\infty}\right)^2}{1+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^2}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^3+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3x^2}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{1+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{3\cdot\frac{1}{\infty}+\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}{1+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^3}\right)+\left(\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{3+\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}{\left(\frac{1}{-\infty}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}=\frac{3+0^-}{0^-+0^-}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^3}\right)+\left(\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{3+\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}{\frac{1}{\infty}+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}=\frac{3+0^+}{0^++0^+}=\frac{3}{0^+}=\infty$$

5) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4+x}{x^2+5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3x^4}{x^4}\right)+\left(\frac{x}{x^4}\right)}{\left(\frac{x^2}{x^4}\right)+\left(\frac{5x}{x^4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{3+\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}{\frac{1}{\infty}+5\cdot\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}=\frac{3+0^-}{0^++0^-}=\frac{3}{0^+}=\infty$$

Mengapa 0^++0^- di atas menjadi 0^+? Karena berasal dari $\left(\frac{1}{-\infty}\right)^2+\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3$

Sebagai ilustrasi, misalkan $-\infty$ diwakili oleh -1000, maka

$$\left(\frac{1}{-1000}\right)^2+\left(\frac{1}{-1000}\right)^3=0{,}000001-0{,}000000001=0{,}000000999\to 0^+$$

Berdasarkan contoh di atas dapat digeneralisasi oleh teorema sebagai berikut.

Teorema (Bentuk ∞/∞)

Dengan a_n dan b_n positif, maka

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^n}{b_1+b_2x+\cdots+b_nx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & jika\ n=m \\ 0 & jika\ n<m \\ \infty & jika\ n>m \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^n}{b_1+b_2x+\cdots+b_nx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & jika\ n=m \\ 0 & jika\ n<m \\ -\infty & jika\ n>m\ dan\ (n-m)\ ganjil \\ \infty & jika\ n>m\ dan\ (n-m)\ genap \end{cases}$

Contoh 5.4

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+5} = \frac{3}{1} = 3$ (karena $n=m=2$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+5} = 0$ (karena $n=2<m=3$)

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = \infty$ (karena $n=3>m=2$)

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = -\infty$ (karena $n=3>m=2$ dan $n-m=3-2=1$ ganjil)

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^4+x}{x^2+5x} = \infty$ (karena $n=4>m=2$ dan $n-m=4-2=2$ genap)

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2-3)(2x+7)}{x^3+5} = \frac{2x^3+p(x)}{x^3+5} = \frac{2}{1} = 2$ {$p(x)$ fungsi tersisa dengan pangkat <3}

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{18x^2-x+3}}{\sqrt{2x^2-8}} = \frac{\sqrt{18x^2+p(x)}}{\sqrt{2x^2+q(x)}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{18x^2-x+3}}{2x-4} = \frac{\sqrt{18x^2+p(x)}}{2x-4} = \frac{\sqrt{18x^2+p(x)}}{\sqrt{4x^2+q(x)}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{18x-1}+3}{2x-4} = \frac{\sqrt{18x}+p(x)}{2x-4} = \frac{\sqrt{18x^1+p(x)}}{\sqrt{4x^2+q(x)}} = 0$

Bentuk tak tentu berikutnya adalah $\infty - \infty$. Tentu bentuk ini tidaklah terdefinisi. Pada konsep limit, seperti halnya ∞/∞ yang nilainya tak tentu, bentuk $\infty - \infty$ juga tak tentu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.5

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7-(4x^2+2x+9)}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-5-2)x+(7-9)}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-5-2)\sqrt{x^2}+(7-9)}{\sqrt{4x^2}+p(x) + \sqrt{4x^2}+q(x)}$$

$$= \frac{(-5-2)}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = -\frac{7}{4}$$

---

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-5x+7-(4x^2+2x+9)}{\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-7x-2}{\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4}-7x-2}{\sqrt{5x^2}+p(x) + \sqrt{4x^2}+q(x)} = \infty$$

---

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{5x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{5x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7-(5x^2+2x+9)}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-7x-2}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\sqrt{x^4}-7x-2}{\sqrt{4x^2}+p(x) + \sqrt{5x^2}+q(x)} = -\infty$$

Berdasarkan contoh di atas dapat digeneralisasi oleh teorema sebagai berikut.

Teorema (Bentuk $\infty - \infty$)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = \begin{cases} \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}} & jika\ a = p \\ \infty & jika\ a > p \\ -\infty & jika\ a < p \end{cases}$$

Contoh 5.6

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9} = \frac{-5-2}{2\sqrt{4}} = -\frac{7}{2\cdot 2} = -7/4$ (karena $a = p = 4$)

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9} = \infty$ (karena $a = 5 > p = 4$)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{5x^2+2x+9} = -\infty$ (karena $a = 4 < p = 5$)

Harap diperhatikan bahwa teorema di atas hanya berlaku jika pangkat tertinggi di dalam akarnya adalah 2, selain itu jika akarnya bukan akar pangkat dua atau pangka didalam akarnya bukan kuadrat maka pengerjaan dapat dilakukan seperti **Contoh 5.5**. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.7

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x+7} - \sqrt{5x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+7} - \sqrt{5x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{5x+9}\right)}{\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{5x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+7-(5x+9)}{\sqrt{5x+7} + \sqrt{5x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{5x^1+7} + \sqrt{5x^1+9}} = 0 \qquad \text{(karena } a = 0 < b = 1\text{)}$$

---

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5x+7} - \sqrt{4x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+7} - \sqrt{4x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{4x+9}\right)}{\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{4x+9}\right)}$$

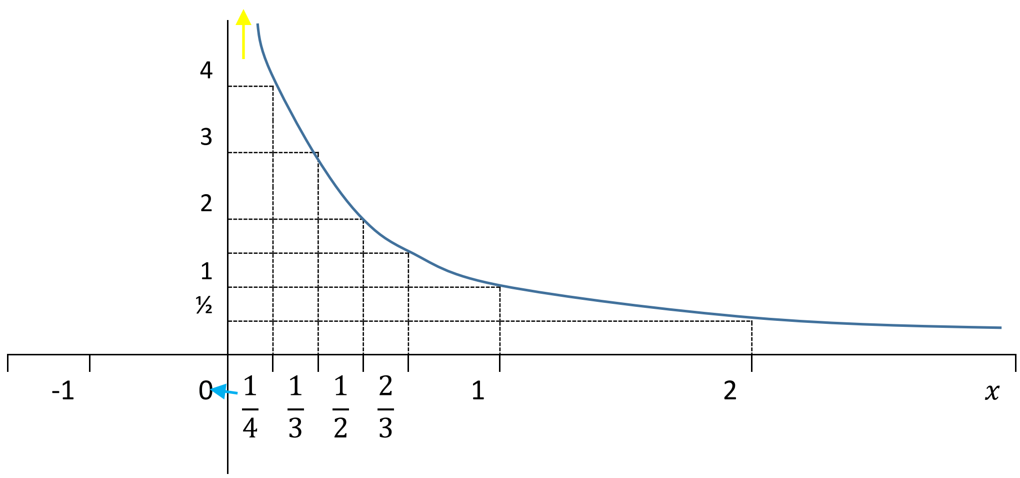
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+7-(4x+9)}{\sqrt{5x+7} + \sqrt{5x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{5x+7} + \sqrt{4x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}-2}{\sqrt{5x^1+7} + \sqrt{4x^1+9}} = \infty \qquad \text{(karena } a = 2 > b = 1\text{)}$$

LIMIT TAK HINGGA

Konsep limit tak hingga sebenarnya sempat dibahas pada saat membahas limit kiri dan limit kanan yakni terkait limit fungsi yang menghasilkan nilai tak berhingga. Penerapan dari konsep limit tak hingga salah satunya untuk menggambarkan *asimtot tegak.* Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.



Dapat dilihat pada grafik bahwa jika x semakin menuju 0 dari kanan ($x \to 0^+$), nilai $1/x$ semakin menuju ∞ (yakni $\frac{1}{x} \to \infty$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	∞
$\uparrow$	$\uparrow$
$1/1000000$	1000000
$\vdots$	$\vdots$
$1/4$	4
$1/3$	3
$1/2$	2
$2/3$	$3/2$
1	1

Ini menunjukkan bahwa jika x mendekati 0^+ maka $f(x) = 1/x$ memiliki nilai limit tak hingga, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty}$$

Sedangkan sebaliknya, jika x semakin menuju 0 dari kiri ($x \to 0^-$), nilai $1/x$ semakin menuju $-\infty$ (yaitu $\frac{1}{x} \to -\infty$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-1	-1
$-1/2$	-2
$-1/3$	-3
$\vdots$	$\vdots$
$-1/1000000$	-1000000
$\downarrow$	$\downarrow$
0	$-\infty$

Ini menunjukkan bahwa jika x mendekati 0^- maka $f(x) = 1/x$ memiliki nilai limit minus tak hingga, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty}$$

Bukti secara formal bahwa suatu fungsi dapat memiliki nilai tak hingga akan diberikan definisi berikut.

Definisi (Limit Tak Hingga)

Dapat dikatakan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

Jika untuk setiap bilangan positif M, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$f(x) > M$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x menuju tak hingga : arti dari notasi untuk setiap $x > M$, yang menunjukkan bahwa untuk semua bilangan yang lebih besar dari suatu bilangan M, tentunya tak akan terbatas menuju tak hingga)

maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L : arti dari $|f(x) - L| < \epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk

---

<u>Contoh</u>

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang, pilih $M = 1/\epsilon$

Untuk setiap $x > M$, Perhatikan bahwa

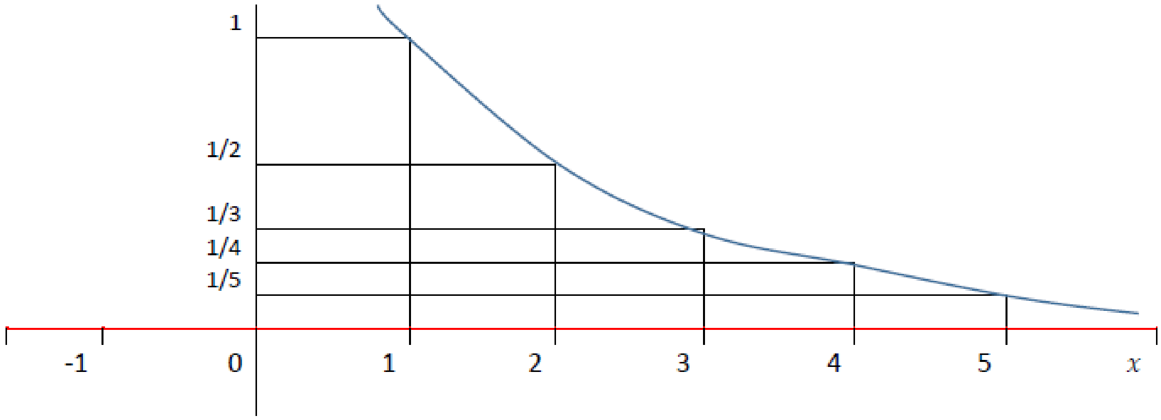
$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

ASIMTOT DATAR DAN ASIMTOT TEGAK

Perhatikan kembali grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.



Perhatikan bahwa, sumbu x atau $y = 0$ (garis merah) merupakan garis yang semakin didekati oleh $f(x) = \frac{1}{x}$ ketika x semakin besar (menurut pembahasan limit di tak hingga sebelumnya). Namun, garis tersebut tidak pernah disentuh oleh fungsi $1/x$ (Anda dapat mencoba bilangan apapun, takkan pernah bernilai 0, yang artinya 0 tidak pernah disentuh). Garis mendatar yang tidak pernah disentuh demikian yang disebut *asimtot datar*.

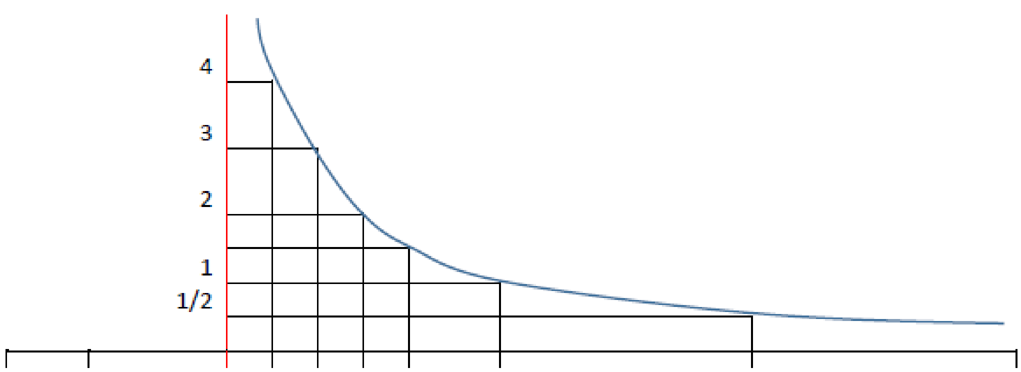
Karena diperoleh melalui limit di tak hingga, maka asimtot datar adalah bilangan hasil limit di tak hingga atau minus tak hingga, yakni:

Jika

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

maka asimtot datar dari $f(x)$ adalah garis $y = b$.

Berikutnya perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.



Perhatikan bahwa, sumbu y atau $x = 0$ (garis merah) merupakan garis di mana nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ semakin dekat ketika $f(x)$ semakin besar menuju tak hingga (menurut pembahasan limit tak hingga sebelumnya). Namun sama seperti sebelumnya, garis tersebut tidak pernah disentuh oleh fungsi $1/x$ (karena garis tersebut adalah $x = 0$ sehingga $1/x$ tidak terdefinisi). Garis tegak atau vertikal yang tidak pernah disentuh demikian yang disebut *asimtot tegak*.

Karena diperoleh melalui limit tak hingga, maka asimtot tegak adalah bilangan yang menghasilkan limit tak hingga atau minus tak hingga, yakni:

Jika

$$\left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \ \text{ atau } -\infty\right) \qquad \text{atau} \quad \left(\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \ \text{ atau } -\infty\right)$$

maka asimtot tegak dari $f(x)$ adalah garis $x = c$.

Contoh 1

Akan dicari asimtot datar dan tegak dari $f(x) = \frac{2x}{1-x}$

Asimtot datar:

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Begitu pula

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Jadi,

$y = -2$ merupakan asimtot datar dari $f(x)$.

Asimtot tegak:

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2(1^+)}{1-1^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Begitu pula

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2(1^-)}{1-1^-} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

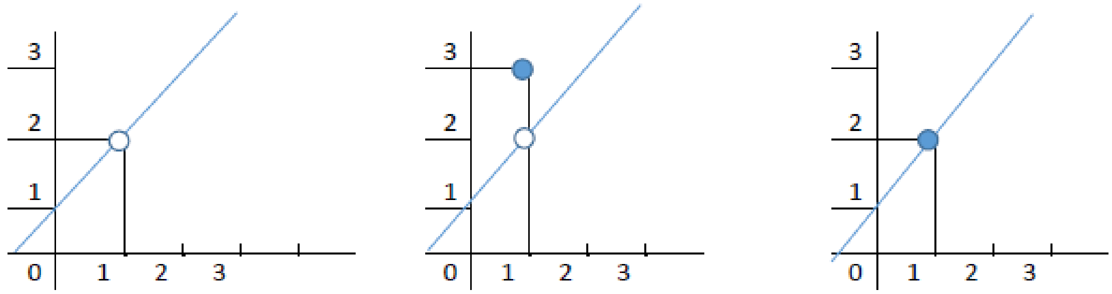
Jadi,

$x = -1$ merupakan asimtot tegak dari $f(x)$.

6. **Kontinuitas Fungsi**

FUNGSI KONTINU VS FUNGSI TIDAK KONTINU

Perhatikan grafik 3 buah fungsi berikut



(1) **(2)** **(3)**

Fungsi dari ketiga grafik di atas memiliki bentuk yang mirip, yakni sebagai berikut.

(1) Fungsi yang tidak terdefinisi di $x = 1$ (nilai $f(1)$ pada grafik tidak ada sehingga jalur grafik fungsi terputus)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(2) Fungsi yang terdefinisi di $x = 1$, namun didefinisikan di luar jalur grafik yakni $f(1) = 3$, sehingga jalur grafik fungsi tetap terputus)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{Jika } x \neq 1 \\ 3 & \text{Jika } x = 1 \end{cases}$$

(3) Fungsi yang terdefinisi di $x = 1$ dan sesuai jalur grafik yakni $f(1) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{Jika } x \neq 1 \\ 2 & \text{Jika } x = 1 \end{cases}$$

- Fungsi nomor (1) jelas bukan fungsi kontinu karena tidak terdefinisi di $x = 1$, sehingga fungsi f terputus di $x = 1$.
- Fungsi nomor (2) juga bukan fungsi kontinu karena meskipun f terdefinisi di $x = 1$, namun $f(1) = 3$, tidak berada pada jalur fungsi f.
- Fungsi nomor (3) merupakan fungsi kontinu f terdefinisi di $x = 1$ dan $f(1) = 2$, berada pada jalur fungsi f.

Mengapa $f(1)$ harus terletak di 2? Seperti yang telah dibahas pada pengantar limit di awal, yakni fungsi f ketika x mendekati 1 $f(x)$ mendekati 2, atau

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

Dari contoh ini secara umum suatu fungsi f dikatakan fungsi kontinu di $x=c$ jika:

1) f terdefinisi di c atau $f(c)$ ada
2) $\lim_{x\to c} f(x)$ ada
3) $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

Contoh 1

Akan dibuktikan bahwa $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \text{Jika } x\neq 1\\ 2 & \text{Jika } x=1\end{cases}$ merupakan fungsi kontinu di $x=1$.

1) Perhatikan bahwa $f(1)=2$, jadi f terdefinisi di $x=1$.
2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$ (nilai limitnya ada)
3) Dapat dilihat bahwa nilai limit dan nilai $f(1)$ sama yaitu 2.

Jadi, terbukti bahwa f merupakan fungsi kontinu.

Contoh 2

Akan diperiksa apakah $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \text{Jika } x\neq 1\\ 3 & \text{Jika } x=1\end{cases}$ merupakan fungsi kontinu di $x=1$.

1) Perhatikan bahwa $f(1)=3$, jadi f terdefinisi di $x=1$.
2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$ (nilai limitnya ada)
3) Namun jika dibandingkan nilai limitnya 2 sedangkan nilai $f(1)=3$, maka berbeda.

Jadi, f bukan merupakan fungsi kontinu.