TURUNAN (Bagian 2)

Pertemuan: 4

Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.

Materi:

5. Turunan Tingkat Tinggi
6. Turunan Implisit
7. Laju yang berkaitan
8. Diferensial dan Aproksimasi

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan aturan turunan untuk menghitung hasil turunan.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon.(2010).Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta

---

5. Turunan Tingkat Tinggi

Sebelumnya telah dijelaskan mengenai konsep turunan yang kaitannya adalah mengenai sebuah kemiringan atau gradien. Pandang kembali definisi turunan tersebut, yakni

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Jika dilihat melalui pendekatan lain, definisi tersebut memperlihatkan bahwa turunan dari f merupakan perubahan yang terjadi pada $f(x)$ terhadap perubahan pada x. Dengan demikian, jika diibaratkan $S(t)$ adalah sebuah posisi pada saat waktu t, maka turunannya merupakan perubahan posisi setiap waktu. Di dalam ilmu fisika, perubahan ini disebut sebagai laju/kecepatan $v(t)$, sehingga

$$v(t) = S'(t)$$

Selanjutnya apabila kecepatan tersebut diturunkan kembali, maka akan menunjukkan sebuah perubahan kecepatan setiap waktunya atau disebut sebagai percepatan $a(t)$, yakni

$$a(t) = v'(t) = S''(t)$$

Kasus di atas menunjukkan adanya sebuah turunan yang lebih tinggi yakni turunan dari sebuah turunan atau yang disebut sebagai turunan kedua. Lebih jauh, akan ada turunan ketiga, keempat, dan seterusnya, sesuai kebutuhannya pada penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam banyak kasus di fisika, turunan tingkat tinggi sangat dibutuhkan untuk membuat persamaannnya.

Tingkat dalam turunan disebut sebagai orde. Tentu saja untuk setiap ordenya, turunan memiliki notasi yang berbeda bergantung notasi apa yang dipakai. Seperti halnya pada turunan pertama yang notasinya bermacam-macam seperti $f'(x)$, y', $D_x(y)$, atau notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}$. Berikut adalah notasi yang juga dapat digunakan untuk setiap ordenya.

Turunan ke -	Notasi y'	Notasi D	Notasi $Leibniz$
1	y'	$D_x(y)$	$\frac{dy}{dx}$
2	y''	$D_x^2(y)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
3	y'''	$D_x^3(y)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
4	$y^{(4)}$	$D_x^4(y)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
5	$y^{(5)}$	$D_x^5(y)$	$\frac{d^5y}{dx^5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$y^{(n)}$	$D_x^n(y)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh:

1) Jarak atau posisi pergerakan suatu benda bergerak setelah t detik dihitung dari titik awal ditentukan oleh fungsi

$$S(t) = 2t^2 - 12t + 8 \ \text{(meter)}$$

Sebagai contoh, saat 5 detik, benda tersebut berada pada jarak $S(5) = 2.5^2 - 12.5 + 8 = -2$, yang artinya benda tersebut terletak 2 meter di belakang posisi awal. Sedangkan setelah 10 detik, benda tersebut berada pada jarak $S(10) = 2.10^2 - 12.10 + 8 = 88$, yang artinya benda tersebut terletak 88 meter di depan posisi awal.

Fungsi kecepatannya adalah

$$v(t) = S'(t) = 4t - 12$$

Sebagai contoh, saat 5 detik, kecepatan tersebut adalah $v(5) = 4.5 - 12 = 8$, yang artinya benda tersebut bergerak dengan kecepatan 8 m/s ke arah depan posisi awal.

Sedangkan fungsi percepatannya adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 4$$

Artinya percepatan benda untuk setiap detiknya selalu 4 m/s^2. Dengan kata lain, kecepatannya selalu meningkat secara tetap 4 m/s^2 setiap detiknya.

2) Misalkan $y = f(x) = \sin 3x$, maka turunan pertamanya

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

Turunan keduanya

$$D_x^2(y) = 3.3(-\sin 3x) = -9\sin 3x$$

Turunan ketiganya

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -9(3\cos 3x) = -27\cos 3x$$

Dan turunan keempatnya

$$y^{(4)} = -27.3(-\sin 3x) = 81\sin 3x$$

■

6. Turunan Implisit

Perhatikan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dapat menjadi fungsi berikut

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{dan} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Turunan dari $y = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ adalah

$$y' = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Sedangkan turunan dari $y = -\sqrt{4 - x^2} = -(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ adalah

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Turunan yang dihasilkan melalui proses menurunkan bentuk fungsi $y = f(x)$ disebut sebagai **turunan eksplisit**. Sekarang perhatikan proses turunan berikut.

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$$
$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(apabila menerapkan fakta bahwa $y = \sqrt{4 - x^2}, maka \ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, sama seperti hasil di atas)

Turunan yang dilakukan tanpa menggunakan fungsi $y = f(x)$ disebut sebagai **turunan implisit**. Turunan implisit sangat berguna untuk persamaan-persamaan yang tidak dapat dibuat dalam fungsi $y = f(x)$. Sebagai contoh, persamaan harga elastis dari fungsi permintaan di bidang ekonomi diperoleh dari persamaan implisit $p^2 - pq + q^2 = 400$. Fungsi ini tidak dapat dibuat dalam $p = f(q)$ atau sebaliknya.

Contoh:

1) Turunan implisit dari $p^2 - pq + q^2 = 400$ adalah

$$\frac{d(p^2 - pq + q^2)}{dq} = \frac{d(400)}{dq}$$
$$2p\frac{dp}{dq} - \left(q\frac{dp}{dq} + p\right) + 2q = 0$$
$$\frac{dp}{dq}(2p - q) - p + 2q = 0$$
$$\frac{dp}{dq}(2p - q) = p - 2q$$
$$\frac{dp}{dq} = \frac{p - 2q}{2p - q}$$

2) Gradien di titik $(2,1)$ dari persamaan implisit $y^5 - y^2 = x^2y + 1$ adalah

$$\frac{d(y^5 - y^2)}{dx} = \frac{d(x^2y + 1)}{dx}$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} - 2y\,\frac{dy}{dx} = \left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) + 0$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} - 2y\,\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(5y^4 - 2y - x^2) = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{5y^4 - 2y - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}(2,1) = \frac{2\,.\,2\,.\,1}{5.\,1^4 - 2\,.\,1 - 2^2} = \frac{4}{-1} = -4$$

7. Laju yang Berkaitan

Pandang kembali fungsi laju/kecepatan $v(t)$, sebagai diferensial dari fungsi posisi $S(t)$ yakni

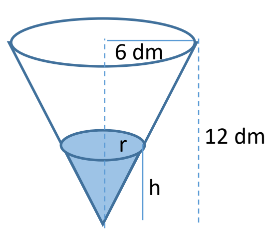
$$v(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$$

Secara umum untuk berbagai hal, dy/dx merupakan laju perubahan dari suatu fungsi $y = f(x)$. Sebagai contoh, jika y menyatakan volume air yang dialiri oleh air dari suatu keran, maka dy/dt merupakan laju air yang mengalir dari keran. Jika y merupakan jari-jari suatu cakram yang sedang dipanaskan, maka dy/dx merupakan laju pertambahan jari-jari terserbut.

<u>Contoh</u>:

Air mengalir dari sebuah keran ke dalam wadah berbentuk kerucut terbalik dengan laju 8 $liter/detik$. Jika tinggi kerucut adalah 12 dm dan jari-jarinya adalah 6 dm. Akan dihitung laju kenaikan tinggi air saat ketinggiannya 4 dm, yakni dh/dt saat $h = 4$.

Misalkan V menyatakan volume air saat t, karena laju yang mengalir ke wadah adalah 8, maka



$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow r = \frac{1}{2}h$$

$$laju = \frac{dV}{dt} = 8 \quad \rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)}{dt} = 8 \quad \rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h\right)}{dt} = 8$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{1}{12}\pi h^3\right)}{dt} = 8 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{12}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 8$$

$$\text{untuk } h = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{12}\pi(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 8 \quad \rightarrow \quad 4\pi \cdot \frac{dh}{dt} = 8$$

$$\rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{8}{4\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637 \;\; dm$$

8. Diferensial dan Aproksimasi

Terdapat kesalahpahaman bahwa turunan dan diferensial adalah hal yang sama. Hal tersebut dapat dimaklumi sebab keduanya memiliki aturan yang hampir serupa. Namun, secara pengertian keduanya adalah hal yang sangat berbeda. Sebelumnya kita mengenali turunan sebagai kemiringan/gradien atau juga sebagai laju perubahan y terhadap perubahan x, yang dinotasikan sebagai dy/dx.

Diferensial adalah hal yang berbeda. Diferensial sesuai namanya yaitu *diference* (selisih/perubahan), hanya menyatakan sebuah perubahan dari y atau perubahan dari x, bukan laju, sehingga secara notasi hanya dinyatakan dalam dy atau dx.

Meskipun begitu, turunan dan diferensial memang memiliki hubungan yang sangat erat. Perhatikan kembali mengenai persamaan garis singgung suatu kurva pada suatu titik (x_0, y_0), yaitu

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\,\Delta x$$

Karena suatu kurva dapat mengalami perubahan kemiringan yang begitu cepat, maka untuk mencari perubahan pada titik (x_0, y_0), nilai x dan y tentunya harus sedekat mungkin dengan x_0 dan y_0 sehingga $\Delta y \to dy$ dan $\Delta x \to dx$. Akibatnya

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\,\Delta x \quad \to \quad dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

Ingat bahwa dy/dx pada persamaan di atas hanyalah simbol untuk turunan, bukan berarti dy dibagi dx. Oleh karena itu, untuk membedakannya, lebih baik digunakan notasi y' atau $f'(x)$, yakni

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Uniknya, jika kedua ruas dibagi oleh dx, maka diperoleh

$$\text{(artinya } dy \text{ dibagi } dx\text{)} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{(artinya turunan } y \text{ terhadap } x\text{)}$$

Hal ini "cocok" dengan notasi turunan. Warna kuning di atas dimaksudkan untuk membedakan notasi dy/dx untuk masing-masing istilah. Jadi, kesimpulannya adalah turunan merupakan pembagian antara dua diferensial. Berikut adalah definisi formal dari diferensial

DIFERENSIAL

DEFINISI DIFERENSIAL

Misalkan $y = f(x)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan di x. Diferensial dari x merupakan perubahan dari x, sedangkan diferensial dari y adalah dy dan berlaku

$$dy = f'(x)\,dx$$

Karena diferensial berhubungan dengan turunan, maka setiap aturan yang ada di turunan akan berlaku pada diferensial. Berikut contoh untuk membedakan turunan dan diferensial.

Contoh:

1) Misalkan $x^2 + y^2 = 25$

   Turunan implisitnya adalah

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

   Sedangkan diferensial implisitnya adalah

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$
$$2y\,dy = -2x\,dx$$
$$dy = -\frac{x}{y}\,dx$$

2) Misalkan $y = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 100$

   Turunannya adalah

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x^2 + \frac{1}{2}$$

   Sedangkan diferensialnya

$$dy = \left(3x^2 - 3x^2 + \frac{1}{2}\right)\,dx$$

3) Diferensial dari $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ adalah

$$dy = d\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right) = d\left((x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)\,dx$$
$$dy = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}\,dx$$

APROKSIMASI

Seperti halnya turunan, diferensial sangat berperan penting dalam kehidupan. Pada pembahasan ini, diferensial akan digunakan untuk membuat aproksimasi (menghitung hampiran) dari suatu nilai. Sekarang misalkan $y = f(x)$, untuk suatu pertambahan sebesar Δx terhadap x, yakni $(x + \Delta x)$, maka $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$. Untuk Δx yang kecil maka nilai dari $f(x + \Delta x) \approx f(x + dx) \approx f(x) + dy$

APPROKSIMASI MELALUI DIFERENSIAL

Misalkan $f(x)$ merupakan fungsi yang terdiferensialkan. Misalkan diberikan pertambahan sebesar Δx pada x, maka aproksimasi dari nilai $f(x + \Delta x)$ adalah

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

Contoh:

1) Akan digunakan aproksimasi diferensial untuk menaksir nilai dari $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$.

   Misalkan $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, maka $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x$, maka

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx f(x) + dy \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x$$

   maka aproksimasinya adalah

$$\sqrt{4,6} = \sqrt{4 + 0,6} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,6$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,6$$

$$\sqrt{4,6} \approx 2,15$$

   Sedangkan untuk

$$\sqrt{8,2} = \sqrt{9 + (-0,8)} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0,8)$$

$$= 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0,8)$$

$$\sqrt{8,2} \approx 2,8667$$