LIMIT (Bagian 2)

Pertemuan: 2

Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.

Materi:

4. Limit dengan Fungsi Trigonometri
5. Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Berhingga
6. Kontinuitas Fungsi

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan teoema limit untuk nilai menghitung limit.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon.(2010).Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan).Erlangga,Jakarta

4. Limit dengan Fungsi Trigonometri

TEOREMA APIT

Berikut adalah teorema apit:

Jika f, g, dan h adalah fungsi sehingga untuk setiap x mendekati c berlaku $f(x) \leq g(x) < h(x)$, kemudian $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$

<u>Contoh:</u>

Akan ditunjukkan $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$ menggunakan teorema apit.
Perhatikan bahwa

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

Karena

$$\lim_{x \to 0} (-x) = -0 = 0 \quad \text{dan}$$

$$\lim_{x \to 0} (x) = 0$$

maka menurut teorema apit

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Seperti halnya pada teorema substitusi, hal yang sama berlaku pula pada fungsi trigonometri (silakan baca buktinya pada sumber buku tercantum di atas).

Teorema A (Limit fungsi trigonometri)
Jika c adalah sebarang bilangan real, maka

1) $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$
2) $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$
3) $\lim_{x \to c} \tan x = \sin c$
4) $\lim_{x \to c} \sec x = \sec c$
5) $\lim_{x \to c} \csc x = \csc c$
6) $\lim_{x \to c} \cot x = \cot c$

Contoh:

1) $\lim_{x \to \pi/6} \sin x = \sin \pi/6 = \sin 30^o = 1/2$ (ingat kembali π radian = 180°)

2) $\lim_{x \to 150^o} \cos x = \cos 150^o = -\cos(180 - 150^o) = -\cos 30^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3) $\lim_{x \to c} \sin 2x = \lim_{2x \to 2c} \sin 2x = \lim_{y \to 2c} \sin y = \sin 2c$ (Misalkan $y = 2x$)

Melalui contoh 3), berikutnya jika bertemu kasus untuk sebarang fungsi trigonometri $f(x)$

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(2x) = f(2c)}$$

4) $\lim_{x \to \pi/2} \sec 2x = \sec 2(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\cos \pi} = \frac{1}{\cos 180^o} = \frac{1}{-\cos(180^o - 180^o)} = \frac{1}{-\cos 0^o} = \frac{1}{-1} = -1$

LIMIT TRIGONOMETRI KHUSUS

Berikut adalah sifat dari limit trigonometri khusus yang sering dipakai dalam berbagai bentuk limit trigonometri (Bukti silakan dipelajari pada sumber tercantum di atas).

Teorema B (Limit trigonometri khusus)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

<u>Contoh:</u>

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{3\text{x} + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1+1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\cdot1 = 1$ (ingat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (ingat $1-\cos kx = 2\sin^2\frac{1}{2}x$)

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx} = \lim\limits_{ax\to0}\frac{\sin ax}{b\cdot\frac{ax}{a}} = \lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{\frac{b}{a}\cdot y} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$

Melalui contoh 6), maka dapat digunakan kasus berikut

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}}$$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

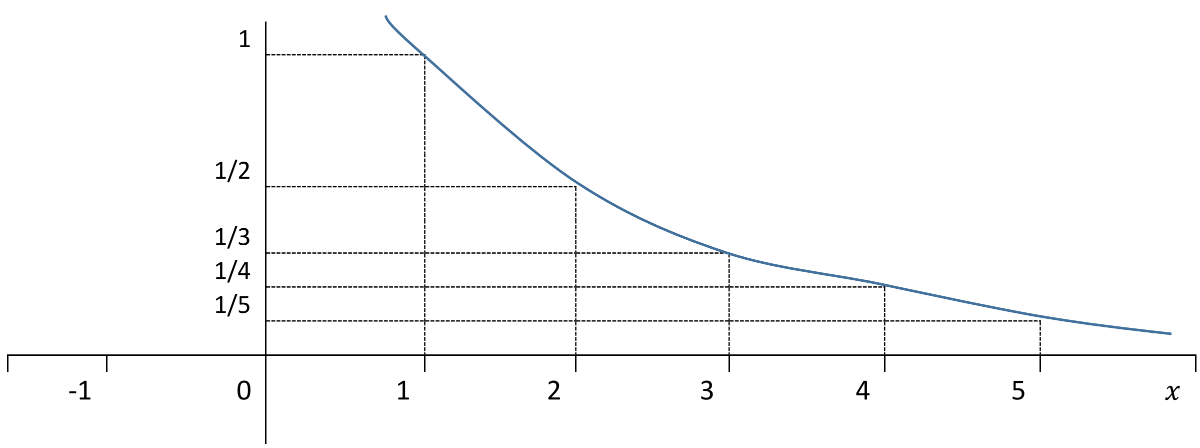
9) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(2x-4)}{(x-2)} = \lim\limits_{x-2\to2-2}\frac{\sin 2(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{y\to0}\frac{\sin 2y}{y} = \frac{2}{1} = 2$ (misalkan $y = x-2$)

---

5. Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

LIMIT DI TAK HINGGA

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.



Dapat dilihat pada grafik bahwa jika x semakin besar ($x \to \infty$), nilai $1/x$ semakin menuju 0:

x	$f(x)$
1	$1/1 = 1$
2	$1/2 = 0{,}5$
3	$1/3 = 0{,}33$
$\vdots$	$\vdots$
1000000	$1/1000000 = 0{,}000001$
$\downarrow$	$\downarrow$

∞	0

Ini menunjukkan bahwa nilai limit dari fungsi $f(x)$ di tak hingga adalah 0, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0}$$

Kembali lagi bahwa penulisan di atas hanyalah berlaku untuk limit, yang artinya secara operasi biasa hal di atas tidak dapat dilakukan yakni

$$\frac{1}{\infty}\quad tidak\ terdefinisi$$

Karena jika berlaku

$$\frac{1}{\infty}=0$$
$$1=\infty\cdot 0$$
$$1=0\quad (tidaklah\ benar)$$

Sebaliknya pun sama bahwa jika x semakin kecil ($x\to-\infty$), nilai $1/x$ semakin menuju ke 0 ($x\to 0$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$-\infty$	$-0=0$
$\uparrow$	$\uparrow$
-1000000	$-1/1000000$
$\vdots$	$\vdots$
-3	$-1/3$
-2	$-1/2$
-1	-1

Ini menunjukkan bahwa nilai limit dari fungsi $f(x)$ di minus tak hingga adalah 0, yakni dituliskan

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0}$$

Bukti secara formal bahwa limit di tak hingga di atas memiliki nilai (dalam contoh di atas adalah 0), berikut diberikan definisi berikut.

Definisi (Limit di Tak Hingga)

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval $[c,\infty)$, dikatakan

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$$

Jika untuk setiap $\epsilon>0$, terdapat suatu bilangan M sehingga untuk setiap $x>M$ berlaku

$$|f(x)-L|<\epsilon$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x menuju tak hingga	: arti dari notasi untuk setiap $x>M$, yang menunjukkan bahwa untuk semua bilangan yang lebih besar dari suatu bilangan M, tentunya tak akan terbatas menuju tak hingga)
maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L	: arti dari $|f(x)-L|<\epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan

yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk

---

Contoh

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang, pilih $M = 1/\epsilon$

Untuk setiap $x > M$, Perhatikan bahwa

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Sebaliknya, berikut definisi limit di minus tak hingga.

Definisi (Limit di Minus Tak Hingga)

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval $(-\infty, c]$, dikatakan

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan M sehingga untuk setiap $x < M$ berlaku

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x menuju minus tak hingga	: arti dari notasi untuk setiap $x < M$, yang menunjukkan bahwa untuk semua bilangan yang kurang dari suatu bilangan M, tentunya tak akan terbatas menuju minus tak hingga)
maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L	: arti dari $|f(x) - L| < \epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk

---

Contoh

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang, pilih $M = -1/\epsilon$

Untuk setiap $x < M = -1/\epsilon$, artinya x bilangan negatif, dengan demikian $|x| = -x$. Perhatikan bahwa

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{-x} < \frac{1}{-(-1/\epsilon)} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Sekarang perhatikan bentuk ∞/∞. Tentu bentuk ini tidaklah terdefinisi. Seperti halnya $0/0$ yang nilainya tak tentu, bentuk ∞/∞ juga tak tentu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{3+\left(\frac{1}{\infty}\right)^2}{1+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^2} = \frac{3+0}{1+0} = 3$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{1+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{3\cdot\frac{1}{\infty}+\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}{1+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^3} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\frac{1}{x}+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{3+\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}{\frac{1}{-\infty}+5\cdot\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3} = \frac{3+0^-}{0^-+0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\frac{1}{x}+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{3+\left(\frac{1}{\infty}\right)^3}{\frac{1}{\infty}+5\cdot\left(\frac{1}{\infty}\right)^3} = \frac{3}{0^++0^+} = \frac{3}{0^+} = \infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^4+x}{x^2+5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{5x}{x^4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3+\left(\frac{1}{x}\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{3+\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3}{\frac{1}{\infty}+5\cdot\left(\frac{1}{-\infty}\right)^3} = \frac{3+0^-}{0^++0^-} = \frac{3}{0^+} = \infty$

   Mengapa $0^+ + 0^-$ di atas menjadi 0^+? Karena berasal dari $\left(\frac{1}{-\infty}\right)^2 + \left(\frac{1}{-\infty}\right)^3$

   Sebagai ilustrasi, misalkan $-\infty$ diwakili oleh -1000, maka

$$\left(\frac{1}{-1000}\right)^2 + \left(\frac{1}{-1000}\right)^3 = 0{,}000001 - 0{,}000000001 = 0{,}000000999 \to 0^+$$

Berdasarkan contoh di atas dapat digeneralisasi oleh teorema sebagai berikut.

Teorema (Bentuk ∞/∞)

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^n}{b_1+b_2x+\cdots+b_nx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & jika\ n = m \\ 0 & jika\ n < m \\ \infty & jika\ n > m \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^n}{b_1+b_2x+\cdots+b_nx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & jika\ n = m \\ 0 & jika\ n < m \\ -\infty & jika\ n > m\ dan\ (n-m)\ ganjil \\ \infty & jika\ n > m\ dan\ (n-m)\ genap \end{cases}$

Contoh

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+5} = \frac{3}{1} = 3$ (karena $n = m = 2$)

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+5} = 0$ (karena $n = 2 < m = 3$)

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = -\infty$ (karena $n = 3 > m = 2$ dan $n - m = 3 - 2 = 1$ ganjil)

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+5} = \infty$ (karena $n = 3 > m = 2$)

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+x}{x^2+5x} = \infty$ (karena $n = 4 > m = 2$ dan $n - m = 4 - 2 = 2$ genap)

Bentuk tak tentu berikutnya adalah $\infty - \infty$. Tentu bentuk ini tidaklah terdefinisi. Seperti halnya $0/0$ yang nilainya tak tentu, bentuk $\infty - \infty$ juga tak tentu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

1) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7-(4x^2+2x+9)}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7x-2}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{7x}{x} - \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{9}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7 - \frac{2}{x}}{\sqrt{4 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$\frac{-7 - \frac{2}{\infty}}{\sqrt{4 - \frac{5}{\infty} + \frac{7}{\infty^2}} + \sqrt{4 + \frac{2}{\infty} + \frac{9}{\infty^2}}} = -\frac{7}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = -\frac{7}{4}$$

2) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{5x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x^2-5x+7} - \sqrt{4x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-5x+7-(4x^2+2x+9)}{\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-7x-2}{\sqrt{5x^2-5x+7} + \sqrt{4x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{5x^2}{x^4} - \frac{5x}{x^4} + \frac{7}{x^4}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^4} + \frac{2x}{x^4} + \frac{9}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{5}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}} + \sqrt{\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{9}{x^4}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{7}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}}{\sqrt{\frac{5}{\infty^2} - \frac{5}{\infty^3} + \frac{7}{\infty^4}} + \sqrt{\frac{4}{\infty^2} + \frac{2}{\infty^3} + \frac{9}{\infty^4}}} = \frac{1}{\sqrt{0^+} + \sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

3) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{5x^2+2x+9}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-5x+7} - \sqrt{5x^2+2x+9}\right) \times \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7-(5x^2+2x+9)}{\sqrt{4x^2-5x+7} + \sqrt{5x^2+2x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - 7x - 2}{\sqrt{4x^2 - 5x + 7} + \sqrt{5x^2 + 2x + 9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^4} - \frac{5x}{x^4} + \frac{7}{x^4}} + \sqrt{\frac{5x^2}{x^4} + \frac{2x}{x^4} + \frac{9}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1 - \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}} + \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{9}{x^4}}}$$

$$= \frac{-1 - \frac{7}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}}{\sqrt{\frac{4}{\infty^2} - \frac{5}{\infty^3} + \frac{7}{\infty^4}} + \sqrt{\frac{5}{\infty^2} + \frac{2}{\infty^3} + \frac{9}{\infty^4}}} = \frac{-1}{\sqrt{0^+} + \sqrt{0^+}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Berdasarkan contoh di atas dapat digeneralisasi oleh teorema sebagai berikut.

Teorema (Bentuk ∞/∞)

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}} & jika\ a = p \\ \infty & jika\ a > p \\ -\infty & jika\ a < p \end{cases}$$

Contoh

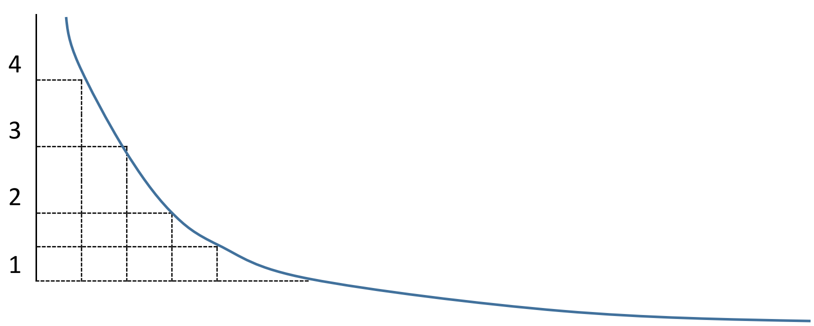
1) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - 5x + 7} - \sqrt{4x^2 + 2x + 9} = \frac{-5-2}{2\sqrt{4}} = -\frac{7}{2\cdot 2} = -7/4$ (karena $a = p = 4$)

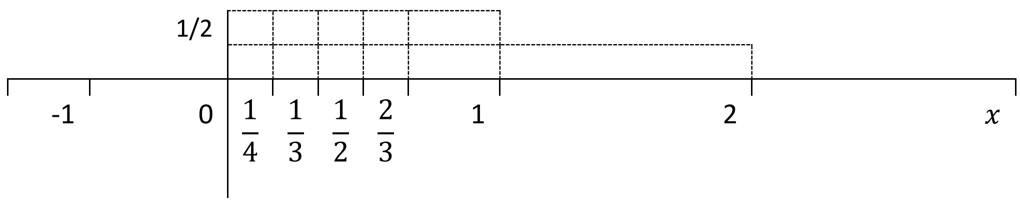
2) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{5x^2 - 5x + 7} - \sqrt{4x^2 + 2x + 9} = \infty$ (karena $a = 5 > p = 4$)

3) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - 5x + 7} - \sqrt{5x^2 + 2x + 9} = -\infty$ (karena $a = 4 < p = 5$)

LIMIT TAK HINGGA

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ berikut.





Dapat dilihat pada grafik bahwa jika x semakin menuju 0 dari kanan ($x \to 0^+$), nilai $1/x$ semakin menuju ∞ ($\frac{1}{x} \to \infty$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	∞
$\uparrow$	$\uparrow$
$1/1000000$	1000000
$\vdots$	$\vdots$
$1/4$	4
$1/3$	3
$1/2$	2
$2/3$	$3/2$
1	1

Ini menunjukkan bahwa jika x mendekati 0^+ maka $f(x) = 1/x$ memiliki nilai limit tak hingga, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty}$$

Sedangkan sebaliknya, jika x semakin menuju 0 dari kiri ($x \to 0^-$), nilai $1/x$ semakin menuju $-\infty$ (yaitu $\frac{1}{x} \to -\infty$):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-1	-1
$-1/2$	-2
$-1/3$	-3
$\vdots$	$\vdots$
$-1/1000000$	-1000000
$\downarrow$	$\downarrow$
0	$-\infty$

Ini menunjukkan bahwa jika x mendekati 0^- maka $f(x) = 1/x$ memiliki nilai limit minus tak hingga, atau dapat dituliskan

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty}$$

Bukti secara formal bahwa suatu fungsi dapat memiliki nilai tak hingga akan diberikan definisi berikut.

Definisi (Limit di Tak Hingga)
Dapat dikatakan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

Jika untuk setiap bilangan positif M, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$f(x) > M$$

Interpretasi dari definisi di atas adalah

Jika x menuju tak hingga : arti dari notasi untuk setiap $x > M$, yang menunjukkan bahwa untuk semua bilangan yang lebih besar dari suatu bilangan M, tentunya tak akan terbatas menuju tak hingga)

maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L : arti dari $|f(x) - L| < \epsilon$, yang mana mengartikan $f(x)$ dan L sangatlah dekat, karena ϵ adalah setiap bilangan yang > 0 sehingga 0,00000001 bahkan lebih kecil dari itu pun termasuk

---

<u>Contoh</u>

Akan dibuktikan secara formal bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang, pilih $M = 1/\epsilon$

Untuk setiap $x > M$, Perhatikan bahwa

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

Jadi, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Artinya berdasarkan definisi limit di tak hingga, terbukti benar bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
