APLIKASI TURUNAN (Bagian 2 dari 2)

Pertemuan: 5
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

5. Penggambaran Grafik Fungsi
6. Teorema Nilai Rataan untuk Turunan
7. Anti Turunan

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan rumus rumus turunan untuk menghitung aplikasi turunan.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

5. PENGGAMBARAN GRAFIK FUNGSI

Ingat kembali materi pada pertemuan sebelumnya mengenai komponen grafik suatu fungsi yang terdiri atas 7 komponen. Sebuah grafik dapat digambar dengan presisi yang cukup tinggi melalui semua komponen tersebut. Namun demikian untuk beberapa fungsi tertentu, ketujuh hal tersebut pun belum tentu mencukupi. Seperti nilai x yang tidak terdefinisi, asimtot-asimtot, kesimetrian terhadap sumbu-y atau titik asal $(0,0)$. Dengan demikian, berikut adalah langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk menggambar grafik dari suatu fungsi.

Langkah Menggambar Grafik Fungsi $y = f(x)$

1) Periksa daerah asal untuk melihat apakah terdapat nilai x sehingga $f(x)$ tidak terdefinisi.

2) Cari titik potong dengan sumbu-x ketika $y = 0$ dan sumbu-y ketika $x = 0$.

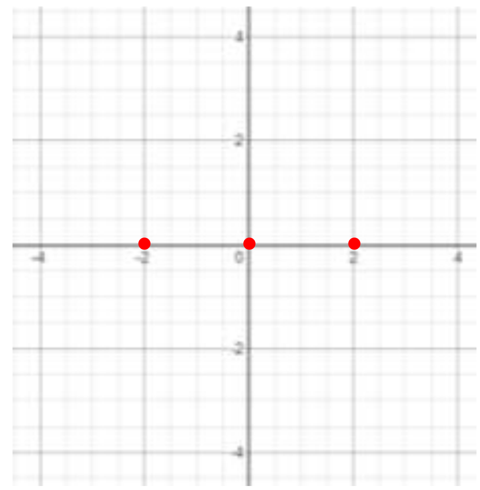
3) Cari titik stasioner yaitu ketika $f'(x) = 0$, kemudian definisikan tanda di sekitarnya untuk memperoleh titik balik (maksimum dan/atau minimum) dan titik belok. Sekaligus mendapatkan interval kemonotonan berdasarkan tanda yang telah diperoleh, yakni jika $f'(x) > 0$ atau positif maka naik, sedangkan $f'(x) < 0$ atau negatif maka turun.

4) Cari kecekungan, yakni titik ketika $f''(x) = 0$, kemudian definisikan tanda di sekitarnya untuk memperoleh cekung ke atas jika $f'(x) > 0$ dan cekung ke bawah jika $f'(x) > 0$.

5) Cari asimtot: datar $y = c$ jika $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$, tegak $x = c$ jika $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, miring $y = ax + b$ jika $f(x) = ax + b + g(x)$ di mana $g(x) \to 0$ ketika $x \to \pm\infty$.

Contoh 1 Akan digambarkan grafik dari fungsi $y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$.

1) Semua x terdefinisi pada $y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$



Ilustrasi proses 2)

2) Titik potong dengan sumbu koordinat

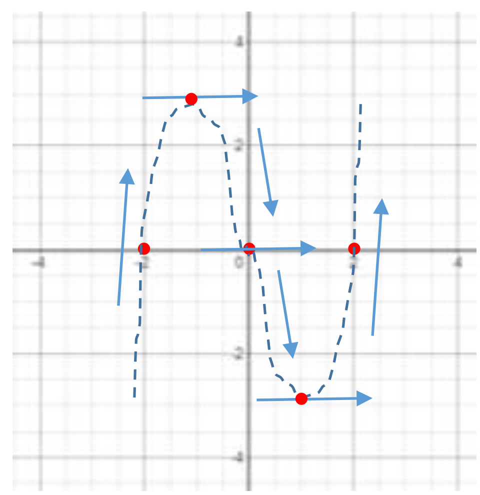
Pada sumbu-x terjadi saat $y = 0$, yakni

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 \\ &= x^5 - 4x^3 \\ &= x^3(x^2 - 4) \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm 2$$

Pada sumbu$-y$ terjadi saat $x = 0$, yakni

$$y = \frac{1}{2}0^5 - 2 \,.\, 0^3 = 0$$



Ilustrasi proses 3)

Garis putus-putus di atas hanyalah perkiraan, sehingga perlu dipastkan melalui proses berikutnya.

3) Titik Stasioner: Balik dan Belok

Terjadi saat $y' = 0$, yakni

$$\begin{aligned} y' = \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 &= 0 \\ 5x^4 - 12x^2 &= 0 \\ x^2(5x^2 - 12) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm\sqrt{12/5} \approx \pm 1.54$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$\begin{array}{cccc} (x = -2) & (x = -1) & (x = 1) & (x = 2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y' = +) & (y' = -) & (y' = -) & (y' = +) \end{array}$$

$$y' \rightarrow \quad \underset{-1.54}{+++\;0} \; \underset{0}{---\;0} \; \underset{1.54}{---\;0} \; +++$$

Dengan demikian,

- $x = -1.54 \rightarrow y = 2.97$ titik balik maksimum
- $x = 1.54 \rightarrow y = -2.97$ titik balik minimum
- $x = 0 \rightarrow y = 0$ titik belok.

Sekaligus didapatkan pula,

- Naik pada interval $(-\infty, -1.54)$ dan $(1.54, \infty)$
- turun pada interval $(-1.54, 0)$ dan $(0, 1.54)$.

4) Titik Kecekungan

Terjadi saat $y'' = 0$, yakni

$$y'' = 10x^3 - 12x = 0$$
$$5x^3 - 6x = 0$$
$$x(5x^2 - 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = \pm\sqrt{6/5} \approx \pm 1.1$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$\begin{array}{cccc} (x=-2) & (x=-1) & (x=1) & (x=2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y''=-) & (y'=+) & (y'=-) & (y'=+) \end{array}$$

$$y'' \rightarrow \quad \underset{-1.1}{---0}\ \underset{0}{+++\ 0}\ \underset{1.1}{---\ 0}\ +++$$

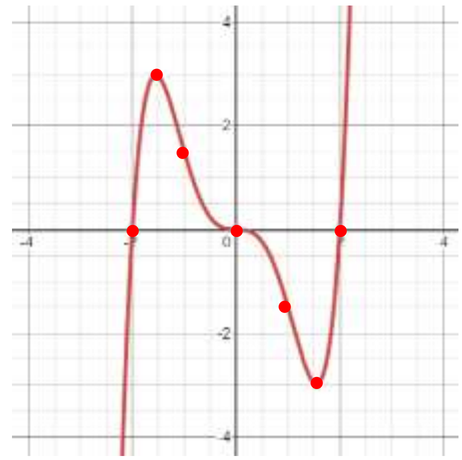
Titik perpindahan kecekungannya adalah

- $x = -1.1 \rightarrow y = 1.84$
- $x = 1.1 \rightarrow y = -1.84$
- $x = 0 \rightarrow y = 0$

Dengan demikian,

- Cekung ke bawah pada $(-\infty, -1.1)$ dan $(0, 1.1)$
- Cekung ke atas pada $(-1.1, 0)$ dan $(1.1, \infty)$

5) Tidak ada asimtot datar, tegak, maupun miring sebab fungsi polinom tidak memiliki batasan.

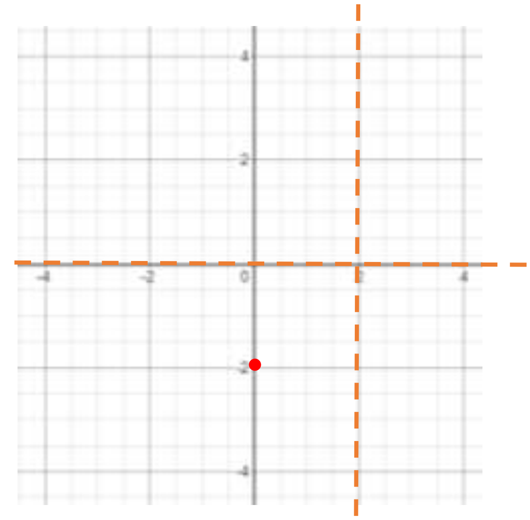


Gambar Grafik $y = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$

Grafik perkiraan sebelumnya cukup sesuai dengan sebenarnya.

Contoh 2 Akan digambarkan grafik dari fungsi $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

1) Fungsi tidak terdefinisi pada $x = 2$



Ilustrasi proses 1) dan 2)
Sepanjang $x = 2$ dan sumbu-$y$tidak boleh disentuh

2) Titik potong dengan sumbu koordinat

Pada sumbu-x terjadi saat $y = 0$

$$0 = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Diskriminan dari $x^2 - 2x + 4$ adalah

$$D = (-2)^2 - 4.4 < 0$$

definit positif. Artinya fungsi tidak akan pernah bernilai y =0 memotong sumbu x

Pada sumbu$-y$ terjadi saat $x = 0$, yakni

$$y = \frac{0^2 - 2(0) + 4}{0 - 2} = -2$$

3) Titik Stasioner: Balik dan Belok

Terjadi saat $y' = 0$, yakni

$$y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 4)}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

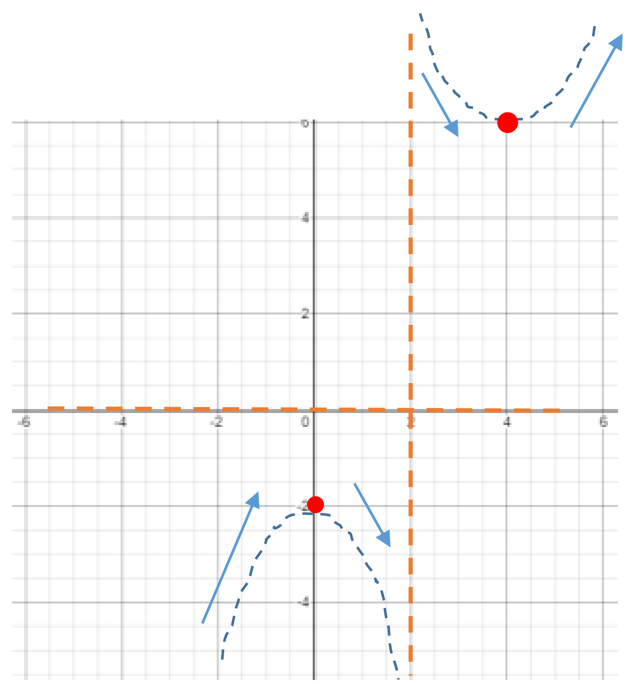
$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$

$$x = 0, \quad x = 4 \quad \text{atau} \quad x \neq 2$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$(x=-1)$	$(x=1)$	$(x=3)$	$(x=5)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$(y' = +)$	$(y' = -)$	$(y' = -)$	$(y' = +)$

$$y' \to \quad + + + \; 0 \; - - - \; 0 \; - - - \; 0 \; + + +$$
$$0 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 4$$



Ilustrasi proses 3)
Garis putus-putus di atas hanyalah perkiraan, sehingga perlu dipastkan melalui proses berikutnya.

Dengan demikian,

- $x = 0 \to y = -2$ titik balik maksimum
- $x = 2 \to y$ tidak terdefinisi
- $x = 4 \to y = 6$ titik balik minimum.

Sekaligus didapatkan pula,

- Naik pada interval $(-\infty, 0)$ dan $(4, \infty)$
- turun pada interval $(0, 2)$ dan $(2,4)$.

4) Titik Kecekungan

Terjadi saat $y'' = 0$, yakni

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$
$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)}{(x-2)^3}$$
$$y'' = \frac{8}{(x-2)^3} = 0$$
$$x = 2$$

Tanda setiap interval dengan batas x di atas:

$$\begin{array}{cc} (x = -0) & (x = 2) \\ \downarrow & \downarrow \\ (y'' = -) & (y' = +) \end{array}$$

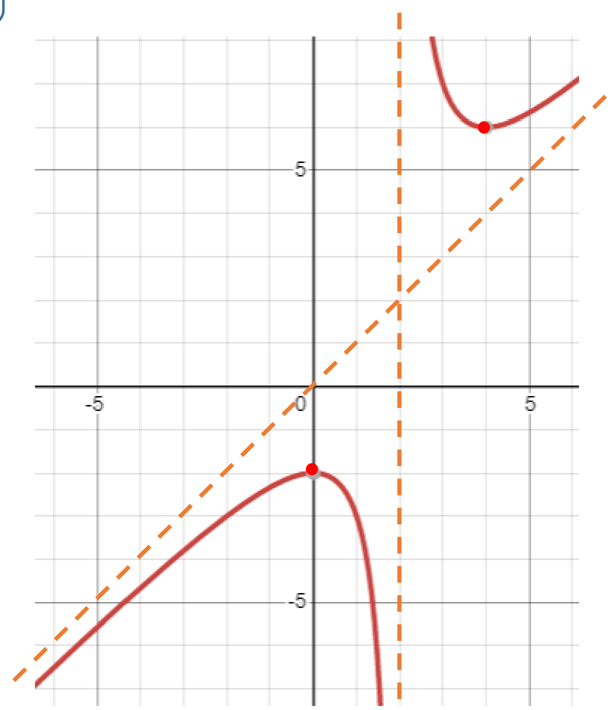
$$y'' \to \underset{2}{\underline{- - - \; 0 \; + + +}}$$

Titik perpindahan kecekungannya adalah

- $x = 2 \to y$ tidak terdefinsi, yang berarti berupa garis yang tidak boleh dilewati (asimtot tegak)

Dengan demikian,

- Cekung ke bawah pada $(-\infty, 2)$
- Cekung ke atas pada $(2, \infty)$



Gambar Grafik $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Terdapat dua asimtot yakni, asimtot datar $x = 2$, dan asimtot miring $y = x$.

Asimtot tegak sudah ditemukan yakni $x = 2$, asimtot datarnya tidak ada karena

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

Asimtot miring, perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{x(x-2)+4}{x-2} = x + \frac{4}{x-2}$$

Karena $\frac{4}{x-2} \to 0$ ketika $x \to \pm\infty$,

maka $f(x) = x$ merupakan asimtot miring.

6. TEOREMA NILAI RATAAN UNTUK TURUNAN

Teorema nilai rata-rata lebih banyak digunakan untuk menghasilkan rumusan baru dibandingkan aplikasinya pada kehidupan. Namun demikian, bukan berarti menjadi sesuatu yang tidak berguna, sebab bagaimanapun banyak rumusan yang dipakai dalam kehidupan sehari-hari membutuhkan teorema ini untuk membuktikan kebenarannya, salah satunya adalah konsep integral yang akan dibahas pada beberapa pertemuan ke depan.

Teorema Nilai Rata-Rata (TNR) untuk Turunan

Jika suatu fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensial pada titik di interval (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Contoh 2 Misal diberikan fungsi $f(x) = 2\sqrt{x}$. Akan dicari nilai $c \in [1, 4]$ sehingga memenuhi TNR. Perhatikan bahwa

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

maka berdasarkan TNR

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{4}{9} \quad \rightarrow \quad c = \frac{9}{4}$$

Contoh 3 Seorang supir truk perusahaan mengantarkan barang ke suatu tempat yang berjarak 112 km dalam waktu 2 jam. Ia dilaporkan melanggar aturan perusahaan karena melebihi batas kecepatan yang diterapkan yakni 55 km/jam. Namun, ia menegaskan bahwa ia tidak pernah berkendara melewati batas kecepatan tersebut. Akan dibuktikan bahwa tuduhan tersebut benar.

Asumsikan supir tersebut tidak pernah berhenti (jika pernah pasti kecepatannya akan lebih tinggi lagi), sehingga jarak $S(t)$ yang ditempuh setelah waktu ke t adalah kontinu. Perhatikan bahwa

$$S(2) - S(0) = 112 - 0 = 112$$

Maka berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata, terdapat $t_0 \in (0, 2 \text{ jam})$ yakni ada saat di tengah perjalanan, supir tersebut melaju dengan kecepatan

$$v(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2) - S(0)}{2 - 0} = \frac{112}{2} = 56 \text{ km/jam}$$

Terbukti melebihi batas kecepatan 55 km/jam.

7. ANTITURUNAN

Hampir setiap konsep khususnya di dalam Matematika memiliki sebuah “anti” atau lawan atau balikan atau invers. Sebagai contoh, operasi penjumlahan memiliki anti berupa pengurangan, anti perkalian adalah pembagian, anti pangkat adalah akar, dan sebagainya. Anti tersebut sesuai namanya merupakan sebuah perangkat yang sifatnya membalikkan suatu proses.

Begitu pula pada konsep turunan, terdapat konsep yang dinamakan antiturunan (selanjutnya akan disebut integral tak tentu). Konsep anti turunan sangat diperlukan dalam banyak hal, contoh yang cukup sederhana adalah apabila diketahui persamaan kecepatan suatu roket setiap detik adalah

$$v(t) = t^2 - 5t$$

Kemudian, ingin diketahui ketinggian maksimal yang dapat ditempuh roket tersebut. Tentu saja hal ini membutuhkan persamaan jarak atau posisi $S(t)$. Padahal turunan dari $S(t)$ adalah $v(t)$, yakni $S'(t) = v(t)$. Dengan demikian untuk mencari $S(t)$ diperlukan konsep anti dari turunan.

Untuk fungsi kecepatan di atas tentunya kita bisa cari antinya, yakni $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2$, karena

$$v(t) = S'(t) = \frac{1}{3}(3t^2) - \frac{5}{2}(2t) = t^2 - 5t$$

Patut berhati-hati bahwa antiturunan tidaklah tunggal, sebagai contoh terdapat $S(t)$ yang lain yakni $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1$ atau $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 100$ yang akan memenuhi $S'(t) = v(t)$. Dengan demikian antiturunan dari $v(t)$ adalah

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2$$

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1$$

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 100$$

Secara umum, antiturunannya adalah

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C$$

Bukti bahwa “harus” ada C dapat ditunjukkan menggunaka Teorema Nilai Rata-rata.

Secara umum, berikut definisi dari anti turunan berikut notasi formalnya.

Definisi Antiturunan

Fungsi F merupakan *antiturunan* dari fungsi f jika $F'(x) = f(x)$ atau $\frac{dF}{dx} = f(x)$ pada interval I. Lebih lanjut, menggunakan notasi Leibniz, antiturunan secara umum disebut sebagai *integral tak tentu*, yakni

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Notasi $\int$ dibaca integral.

Perbedaan mendasar dari istilah antiturunan dan integral tak tentu adalah hasil dari fungsinya. Sebagai contoh, seperti pada pembahasan pengantar di atas, $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2$ merupakan antiturunan dari fungsi $v(t)$, namun fungsi tersebut bukanlah integral tak tentu dari $v(t)$, sebab integral tak tentu dari $v(t)$ haruslah $\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C$.

Contoh 4 Akan dicari antiturunan dan integral tak tentu fungsi berikut.

1) $f(x) = 1$

   Karena $F(x) = x$ memiliki turunan $F'(x) = 1 = f(x)$ maka $F(x) = x$ merupakan antiturunan dari $f(x) = 1$. Dengan demikian,

$$\int 1\, dx = x + C$$

2) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

   Karena $G(x) = -\frac{1}{x} + 10 = -x^{-1} + 10$ memiliki turunan $\frac{dG}{dx} = -(-1x^{-2}) + 0 = \frac{1}{x^2} = g(x)$ maka $G(x) = -\frac{1}{x} + 10$ merupakan antiturunan dari $g(x) = 1/x^2$. Dengan demikian,

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + 10 + C = -\frac{1}{x} + C_2$$

Fungsi-fungsi pada contoh masih dapat dicari antiturunannya melalui intuisi sehingga hasil integral tak tentunya pun mudah. Untuk fungsi lain dapat menyulitkan dalam mencari antiturunannya, misalkan

$$f(x) = \frac{1}{3x^4} + 2x\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^5$$

Berikut aturan pencarian antiturunan sekaligus berupa nilai integral tak tentunya atau antiturunannya secara umum.

Aturan Linier Integral

1) Fungsi konstan:

$$f(x) = k \quad \rightarrow \quad \int k\,dx = kx + C$$

2) Fungsi berpangkat n, di mana n bilangan rasional dan $n \neq -1$:

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

3) Fungsi dikalikan kontanta k:

$$f(x) = k \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad \int k\,.\;g(x)\,dx = k\int g(x)\,dx$$

4) Penjumlahan atau pengurangan Fungsi:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \rightarrow \quad \int [g(x) \pm h(x)]\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$$

Patut dicatat bahwa penulisan dx pada notasi Leibniz sangatlah penting, seperti halnya pada turunan di mana turunan dari y harus dituliskan $\frac{dy}{dx}$, sebab apabila dx dihilangkan maka bukanlah turunan melainkan diferensial. Selain itu juga dx berperan dalam menentukan variabel apa yang ingin diturunkan atau diintegralkan.

Contoh 5 Akan dicari integral tak tentu fungsi berikut.

1) $\int dx = \int 1\,dx = x + C$ (menggunakan Aturan nomor 1)

2) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ (menggunakan Aturan nomor 2)

3) $f(x) = \frac{1}{3x^4} + 2x\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^5 = \frac{1}{3}\,x^{-4} + 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^5$ maka menggunakan Aturan nomor 2, 3, dan 4)

$$\int f(x)\,dx = \int \left[\frac{1}{3}\,x^{-4} + 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^5\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{x^{-3}}{-3} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\frac{x^6}{6} + C$$

$$= -\frac{1}{9x^3} + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{9}x^6 + C$$