PENERAPAN INTEGRAL (Bagian 1 dari 2)

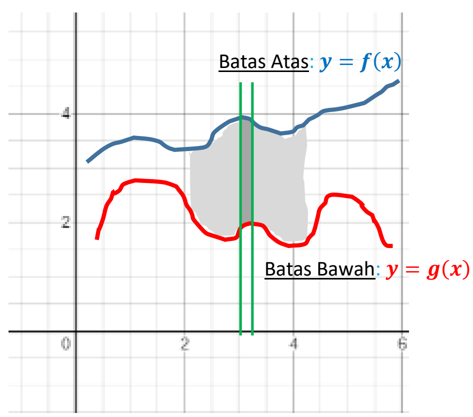
Pertemuan: 9
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

1. Luas Daerah Bidang Datar
2. Volume Benda (Lempengan Cakram dan Cincin)

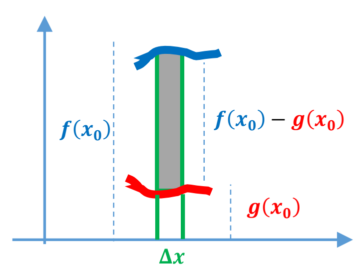
Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menghitung luas daerah dan volume benda putar (C3).
Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

1. Luas Daerah Bidang Datar

Perhatikan gambar berikut



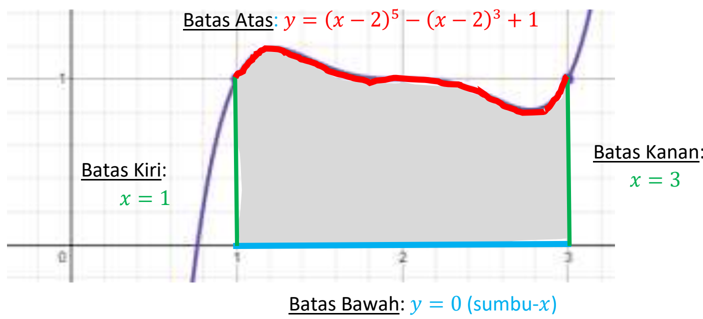
Kita ketahui bahwa luas daerah merupakan jumlahan tak berhingga banyaknya partisi yang sangat kecil. Pada gambar di atas misalkan diambil partisi berwarna gelap dengan batasan warna hijau sebagai perwakilan partisi semuanya, perhatikan bahwa



Dengan demikian, luas satu partisinya adalah $L_P = [f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x$ dan luas keseluruhannya $L = \sum [f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x$ sehingga limitnya $L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$. Rumus ini berikutnya akan menjadi dasar dalam menentukan luas daerah, yakni fungsi apakah yang akan menjadi batas atas dan batas bawahnya.

A. LUAS DAERAH UNTUK SATU FUNGSI DI ATAS SUMBU-x

Perhatikan luas daerah berikut yang terbentuk dengan batasan atas sebuah kurva dan batasan bawah sumbu-x pada interval sejajar sumbu y seperti dari $x = a$ hingga $x = b$



Berdasarkan pembahasan di atas, maka luas untuk daerah diarsir di atas adalah

$$L = \int_1^3 [(x-2)^5 - (x-2)^3 + 1 - 0]\,dx = \int_1^3 [(x-2)^5 - (x-2)^3 + 1]\,dx$$

Angka batasan integral tentu yaitu 1 dan 3 didasarkan atas batasan kiri dan kanan yakni $x = 1$ dan $x = 3$, kemudian fungsi yang diintegralkan adalah merupakan selisih antara batas atas dan batas bawah, yakni kurva $y = (x-2)^5 - (x-2)^3 + 1$ dan garis $y = 0$ (sumbu-x). Namun, pada akhirnya, fungsi yang diintegralkan hanyalah $y = (x-2)^5 - (x-2)^3 + 1$. Jenis luas daerah yang demikian hanya digunakan ketika fungsi yang diintegralkan berada di atas sumbu x pada interval pengintegralannya.

Secara umum, rumus luas untuk jenis ini adalah sebagaimana teorema berikut.

LUAS DAERAH DENGAN SATU FUNGSI DI ATAS SUMBU-x

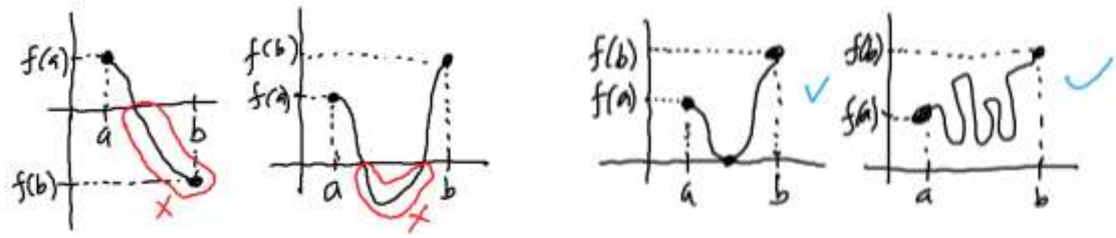
Misalkan f terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Luas daerah yang dibatasi oleh f, sumbu-x, dan selang $[a, b]$ adalah

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

Di atas disebutkan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $[a, b]$ yang artinya bahwa syarat luasnya dapat menggunakan rumus di atas adalah jika pada interval $[a, b]$, kurva f selalu di atas sumbu x. Jika melihat gambar tentunya akan mudah menentukannya, namun seperti yang kita ketahui, menggambarkan grafik perlu proses yang tidak mudah. Cara lain adalah sebagai berikut:

1) $f(a)$ dan $f(b)$ tidak bernilai negatif (karena negatif artinya kurva ada di bawah sumbu-x).
2) $f(x) = 0$ maksimal memiliki satu titik potong dengan sumbu-x pada interval $[a, b]$ (karena jika sudah dipastikan $f(a)$ dan $f(b)$ tidak negatif, maka lebih dari satu titik potong dengan sumbu-x menunjukkan kurva sempat ke bawah sumbu-x kemudian balik lagi ke atas).
3) Untuk titik sampel $c \in [a, b]$, $f(c) > 0$ (menunjukkan $f(x)$ di atas sumbu-x).

Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar berikut



CONTOH 1

1) Luas daerah untuk kasus di atas adalah

$$L = \int_1^3 [(x-2)^5 - (x-2)^3 + 1]\,dx = \left[\frac{(x-2)^6}{6} - \frac{(x-2)^4}{4} + x\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1^6}{6} - \frac{1^4}{4} + 3 - \left(\frac{(-1)^6}{6} - \frac{(-1)^4}{4} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 = 2$$

2) Akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{4-2x}$, sumbu-x, dan sumbu-y. Untuk kasus ini selang $[a, b]$ belum diketahui, maka perlu dicari berdasarkan perpotongan kurva dengan sumbu-x, karena sumbu-y adalah batas maka $x = 0$ akan menjadi a atau b Perpotongannya dengan sumbu-x (artinya $y = 0$) adalah

$$0 = \sqrt{4-2x} \quad \rightarrow \quad 0 = (4-2x) \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Karena hanya satu titik potong dengan sumbu-x, maka selangnya adalah $[0,2]$ sehingga

$$L = \int_0^2 \sqrt{4-2x}\,dx = \left[\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(4-2x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[(4-2(2))^{\frac{3}{2}} - (4-2.(0))^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{1}{3}(-8) = \frac{8}{3}$$

3) Akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$, sumbu-x, dan sumbu-y. Untuk kasus ini juga selang $[a, b]$ belum diketahui, karena sumbu-y adalah batas maka $x = 0$ akan menjadi a atau b, selanjutnya perpotongannya dengan sumbu-x (artinya $y = 0$) adalah

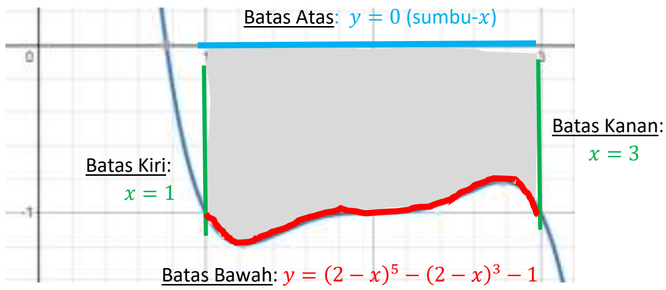
$$0 = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad 0 = (2-x)(2+x) \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

maka selangnya adalah $[0,2]$ sebab sumbu-y harus menjadi batas. Kemudian karena untuk titik sampel $x = 1 \in [0,2]$ berlaku $f(1) = 4 - 1^2 = 3$, positif, sehingga f pada selang $[0,2]$ berada di atas sumbu-x. Jadi, luasnya adalah

$$L = \int_0^2 [4 - x^2]\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[4(2) - \frac{2^3}{3} - 0\right] = \frac{16}{3}$$

B. LUAS DAERAH UNTUK SATU FUNGSI DI BAWAH SUMBU-x

Sebelumnya telah dibahas mengenai luas daerah di mana hanya terdapat satu kurva yang berada di atas sumbu-x. Sekarang, perhatikan untuk sebuah kurva di bawah sumbu-x,



Luas untuk daerah diarsir di atas adalah

$$L = \int_1^3 [0 - ((2-x)^5 - (2-x)^3 - 1)]\, dx = -\int_1^3 [(2-x)^5 + (2-x)^3 - 1]\, dx$$

Angka batasan integral tentu yaitu 1 dan 3 didasarkan atas batasan kiri dan kanan yakni $x = 1$ dan $x = 3$, kemudian fungsi yang diintegralkan adalah merupakan selisih antara batas atas dan batas bawah, yakni garis $y = 0$ (sumbu-x) dan $y = (2-x)^5 - (2-x)^3 - 1$. Namun, pada akhirnya, fungsi yang diintegralkan hanyalah negatif dari $y = (2-x)^5 - (2-x)^3 - 1$. Jenis luas daerah yang demikian hanya digunakan ketika fungsi yang diintegralkan berada di bawah sumbu x pada interval pengintegralannya.

Secara umum, rumus luas untuk jenis ini adalah sebagaimana teorema berikut.

LUAS DAERAH DENGAN SATU FUNGSI DI BAWAH SUMBU-x

Misalkan f terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Luas daerah yang dibatasi oleh f, sumbu-x, dan selang $[a, b]$ adalah

$$L = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Sebaliknya dengan kasus sebelumnya, disebutkan $f(x) \leq 0$ untuk setiap $[a, b]$ yang artinya bahwa syarat luasnya dapat menggunakan rumus di atas adalah jika pada interval $[a, b]$, kurva f selalu di bawah sumbu x. Cara mendeteksinya adalah sebagai berikut:

1) $f(a)$ dan $f(b)$ tidak bernilai positif (karena positif artinya kurva ada di atas sumbu-x).
2) $f(x) = 0$ maksimal memiliki satu titik potong dengan sumbu-x pada interval $[a, b]$ (karena jika sudah dipastikan $f(a)$ dan $f(b)$ tidak positif, maka lebih dari satu titik potong dengan sumbu-x menunjukkan kurva sempat ke atas sumbu-x kemudian balik lagi ke bawah).
3) Untuk titik sampel $c \in [a, b]$, $f(c) < 0$.

CONTOH 2

1) Luas daerah untuk kasus di atas adalah

$$L = -\int_1^3 [(2-x)^5 - (2-x)^3 - 1]\,dx = -\left[\left(\frac{1}{-1}\right)\frac{(2-x)^6}{6} - \left(\frac{1}{-1}\right)\frac{(2-x)^4}{4} - x\right]_1^3$$

$$= -\left[-\frac{(-1)^6}{6} + \frac{(-1)^4}{4} - 3 - \left(-\frac{1^6}{6} + \frac{1^4}{4} - 1\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1\right] = -[-2] = 2$$

2) Akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 5x + 6$ dan sumbu-x
Untuk kasus ini selang $[a, b]$ belum diketahui, maka perlu dicari berdasarkan perpotongan kurva dengan sumbu-x, perpotongannya adalah

$$0 = x^2 - 5x + 6 \quad \rightarrow \quad 0 = (x-2)(x-3) \quad \rightarrow \quad x = 2 \text{ dan } x = 3$$

Perhatikan bahwa untuk titik sampel $x = 2.5 \in [2,3]$, nilai $f(2.5) = -1/4$, negatif, maka pada selang [2, 3], kurva y berada di bawah sumbu-x, akibatnya

$$L = -\int_2^3 (x^2 - 5x + 6)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3$$

$$= -\left[\frac{27}{3} - \frac{5}{2}(9) + 18 - \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{2}(4) + 12\right)\right] = -\left[-\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}$$

3) Akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 5x + 6$, sumbu-x, dan sumbu-y.
Kasus ini seolah-olah sama dengan kasus nomor 2), padahal sama sekali tidak sama, sebab ada sumbu-y yang mengakibatkan daerah luasnya berbeda. Sumbu-y menjadi batas yang mengakibatkan $x = 0$ akan menjadi a atau b. Berdasarkan kasus nomor 2, titik perpotongan dengan sumbu-x adalah $x = 2$ dan $x = 3$, ini berarti selang daerah luasnya akan menjadi $[0,2]$ dan $[2,3]$. Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa pada selang $[2,3]$, kurva y berada di bawah sumbu-x dan memiliki luas sebesar $L_2 = 1/6$.
Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk titik sampel $x = 1 \in [0,2]$, nilai $f(1) = 2$, positif, maka pada selang [0, 2], kurva y berada di atas sumbu-x, akibatnya

$$L_1 = \int_0^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} - \frac{5}{2}(4) + 12 - 0\right] = \frac{14}{3}$$

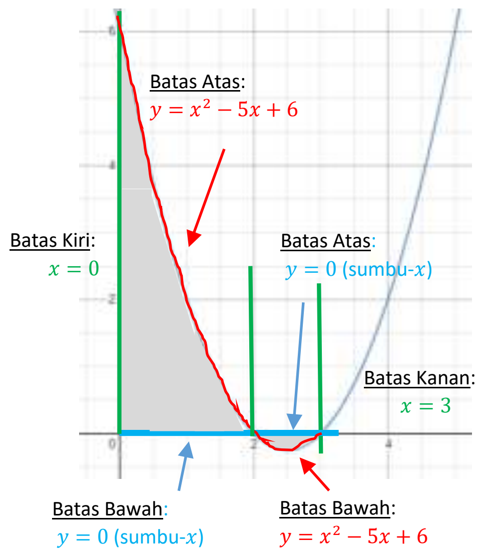
Jadi, Luas keseluruhannya adalah

$$L = L_1 + L_2 = \frac{14}{3} + \frac{1}{6} = \frac{29}{6} \approx 4{,}83$$

Kasus ini sekaligus menunjukkan bahwa luas daerah yang kurvanya terletak di atas dan di bawah kurva memiliki penyelesaian solusi yang berbeda. Dengan fakta bahwa sebenarnya selang [0, 2] dan [2, 3] adalah tersambung, yakni menjadi [0, 3], maka dalam mencari luas daerah, apabila daerahnya terbelah yakni di atas dan di bawah sumbu-x seperti kasus ini pada selang [0,3], maka luasnya bukanlah ditentukan menggunakan batas 0 dan 3, melainkan harus dibagi menjadi [0,2] dan [2,3], seperti pada pembahasan berikutnya di bawah ini.

C. LUAS DAERAH UNTUK SATU FUNGSI DI ATAS DAN BAWAH SUMBU-x

Berikut perhatikan untuk kasus di mana luas daerah yang dicari memiliki daerah yang terletak di atas dan di bawah sumbu-x, yakni kasus pada Contoh 2, nomor 3 di atas untuk $y = x^2 - 5x + 6$



Telah dibahas pada Contoh 2 nomor 3 di atas bahwa Luas daerah diarsir di atas adalah

$$L = \int_0^2 [x^2 - 5x + 6 - 0]\, dx + \int_2^3 [0 - (x^2 - 5x + 6)]\, dx$$
$$= \int_0^2 [x^2 - 5x + 6]\, dx - \int_2^3 [x^2 - 5x + 6]\, dx$$

Jadi, BUKANLAH

$$\cancel{L = \int_0^3 [x^2 - 5x + 6]\, dx}$$

Jadi, ketika dalam sebuah interval sebuah fungsi berada di atas dan di bawah sumbu-x, maka luas daerah pada interval tersebut haruslah dipisah menjadi luas bagian atas dan bagian bawah.

Secara umum, rumus luas untuk jenis ini adalah sebagaimana teorema berikut.

LUAS DAERAH DENGAN SATU FUNGSI DI ATAS DAN DI BAWAH SUMBU-x

Misalkan f terintegralkan pada $[a, b]$, jika $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, c]$ dan $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [c, b]$, maka luas daerah yang dibatasi oleh f, sumbu-x, dan selang $[a, b]$ adalah

$$L = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

Contoh untuk kasus ini sudah cukup jelas di bahas pada kasus di atas dan Contoh 2 nomor 3.

D. LUAS DAERAH YANG DIBATASI DUA FUNGSI

Berikut terdapat 3 kasus utama dalam penentuan luas daerah yang dibatasi oleh dua buah fungsi

LUAS DAERAH DENGAN BATAS DUA FUNGSI

1) Misalkan f dan g terintegralkan pada interval $[a,b]$ dan $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Luas daerah yang dibatasi oleh f dan g pada selang $[a,b]$ adalah

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

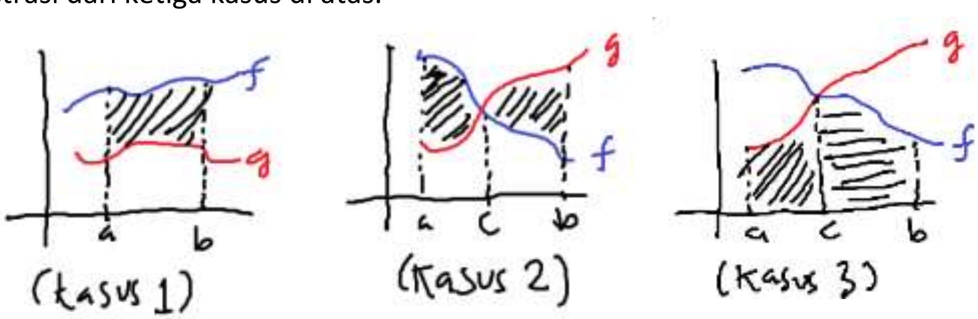
2) Misalkan f dan g terintegralkan pada interval $[a,b]$. Jika $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,c]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [c,b]$, maka luas daerah yang dibatasi oleh f dan g pada selang $[a,b]$ adalah

$$L = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx$$
$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx - \int_c^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

3) Misalkan f dan g terintegralkan pada interval $[a,b]$. Jika $f(x) \geq g(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,c]$ dan $0 \leq f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [c,b]$, maka luas daerah yang dibatasi oleh f, g dan sumbu-x pada selang $[a,b]$ adalah

$$L = \int_a^c [g(x)]\, dx + \int_c^b [f(x)]\, dx$$

Berikut ilustrasi dari ketiga kasus di atas.



Berikut cara mendeteksi apakah fungsinya di atas atau di bawah serta bersilangan

1) Jika $f(a) > g(a)$ sedangkan $f(b) < g(b)$ maka f dan g bersilangan.
2) Jika $f(x) = g(x)$ memiliki solusi $c \in [a,b]$ maka f dan g bersilangan.
3) Jika $f(x) = g(x)$ memiliki solusi $c \notin [a,b]$ atau $c = a$ atau b maka f dan g tak bersilangan.
4) Jika f dan g tak bersilangan dan untuk titik sampel $c \in [a,b]$, $f(c) > g(c)$ maka $f(x) > g(x)$, sebaliknya $f(x) < g(x)$

CONTOH 3

1) Akan di cari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$ dan $y = 4 - x^2$.
Selang $[a, b]$ diperoleh melalui perpotongan kedua kurva yakni
$$x^2 - 4 = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(x+2)(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$
Maka selangnya adalah $[-2, 2]$. Kemudian karena untuk titik sampel $x = 0 \in [-2,2]$ berlaku $f(0) = 0^2 - 4 = -4$ dan $g(0) = 4 - 0^2 = 4$, maka $f(x) < g(x)$, maka luasnya
$$L = \int_{-2}^{2} [4 - x^2 - (x^2 - 4)]\, dx = \int_{-2}^{2} [8 - 2x^2]\, dx$$
$$= \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left[16 - \frac{16}{3} - \left(-16 + \frac{16}{3}\right)\right] = \frac{64}{3}$$

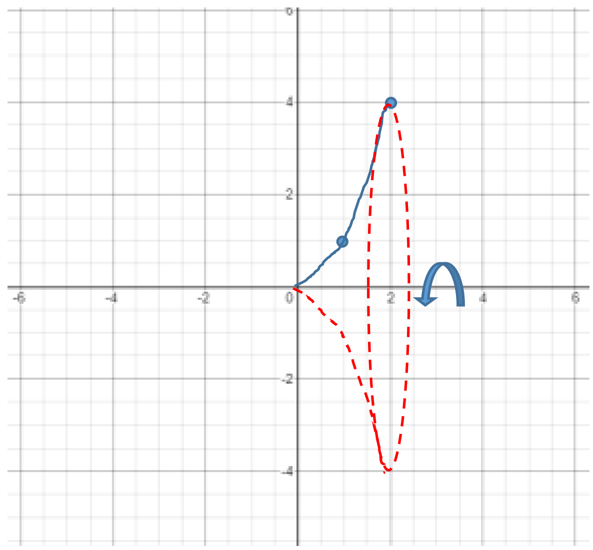
2) Akan di cari luas daerah dengan batas kurva $y = x^2 - 4$ dan $y = 4 - x^2$, pada $[0,4]$.
Berdasarkan nomor 1), solusi $f(x) = g(x)$ salah satunya adalah $x = 2$, maka f dan g bersilangan, maka selangnya harus dibagi dua yaitu $[0, 2]$ dan $[2,4]$. Pada $[0,2]$, untuk sampel $x = 1 \in [0,2]$ berlaku $f(1) = 1^2 - 4 = -3$ dan $g(1) = 4 - 1^2 = 3$, maka $f(x) < g(x)$, sedangkan pada $[2,4]$ sebaliknya. Maka luasnya
$$L = \int_{0}^{2} [4 - x^2 - (x^2 - 4)]\, dx - \int_{2}^{4} [4 - x^2 - (x^2 - 4)]\, dx$$
$$= \int_{0}^{2} [8 - 2x^2]\, dx - \int_{2}^{4} [8 - 2x^2]\, dx$$
$$= \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2} - \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{2}^{4}$$
$$= \left[16 - \frac{16}{3} - 0\right] - \left[32 - \frac{128}{3} - \left(16 - \frac{16}{3}\right)\right] = \frac{64}{3}$$

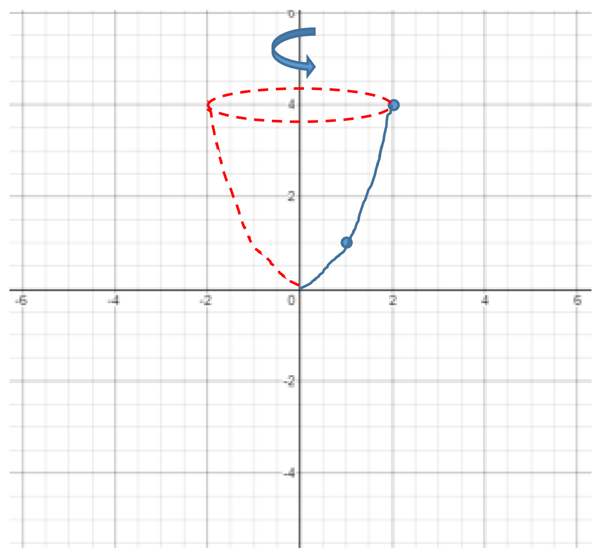
3) Akan di cari luas daerah dengan batas kurva $y = 3x$, $y = 4 - x^2$, sumbu-x, dan sumbu-y.
Sumbu-y adalah batas, maka $x = 0$ adalah a atau b. Perhatikan solusi $f(x) = g(x)$ berikut
$4x = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+4)(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -4$ atau $x = 1$
Maka bersilangan dengan salah satu selangnya adalah $[0, 1]$. Karena sumbu-x juga batas maka harus dicari perpotongan dengan sumbu-x atau $y = 0$. Untuk $y = 3x \rightarrow x = 0$, dan untuk $y = 4 - x^2$, maka $0 = 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) \rightarrow x = \pm 2$. Jadi, selang keduanya adalah $[1,2]$. Kemudian karena bersilangan, dan untuk titik sampel $x = 1/2 \in [0,1]$ berlaku $f(1/2) = 3/2$ dan $g(1/2) = 4 - 9/4 = 7/4$ maka $f < g$ dan pada $[1,2] \rightarrow g > f$, maka
$$L = \int_{0}^{1} 3x\, dx + \int_{1}^{2} [4 - x^2]\, dx = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1} + \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}$$
$$= \left[\frac{3}{2} - 0\right] + \left[8 - \frac{8}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{13}{6}$$

2. Volume Benda

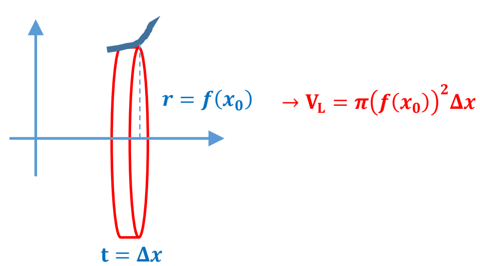
A. BENTUK LEMPENGAN CAKRAM

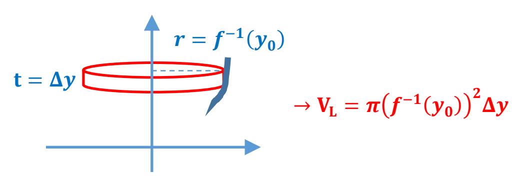
Perhatikan fungsi $y = x^2$ pada interval $[0,2]$ yang diputar 360^o terhadap sumbu-x dan sumbu-y





Dapat dilihat bahwa hasil perputaran terhadap masing-masing sumbu akan berbeda, yakni untuk terhadap sumbu-x berbentuk seperti terompet, sedangkan terhadap sumbu-y seperti mangkuk atau piala. Ini menunjukkan bahwa volume keduanya memiliki nilai yang berbeda. Dengan konsep partisi, volume keduanya dapat dipandang sebagai partisi lempengan cakram berikut





Dari kedua gambar di atas, maka volume yang terbentuk secara keseluruhan adalah

1) $y = x^2$ diputar terhadap sumbu-x pada selang $[0,2]$

$$V = \sum \pi\left(f(x_i)\right)^2 \Delta x \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad V = \pi \int_0^2 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi (x^2)^2 \, \mathrm{d}x$$

2) $y = x^2$ diputar terhadap sumbu-y maka $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$ pada selang $[0^2, 2^2] = [0,4]$

$$V = \sum \pi\left(f^{-1}(y_i)\right)^2 \Delta y \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad V = \pi \int_0^4 \left(f^{-1}(y)\right)^2 \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 \, \mathrm{d}y$$

Secara umum, volume benda putar bentuk cakram adalah sebagaimana teorema berikut.

VOLUME BENDA PUTAR BENTUK CAKRAM

Misalkan f terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan invers pada selang ada dan terintegralkan.

1) Jika f diputar 360° terhadap sumbu-x maka volumenya

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

2) Jika f diputar 360° terhadap sumbu-y dan $f(a) < f(b)$ maka volumenya

$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

CONTOH 4

1) Luas daerah untuk kasus di atas adalah

Terhadap sumbu-x

$$V = \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi \approx 20.11$$

Terhadap sumbu-y

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi \int_0^4 \mathrm{y}\ \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \approx= 25.13$$

2) Akan volumenya jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{4-2x}$, sumbu-x, dan sumbu-y diputar 180^o terhadap sumbu-x dan sumbu-y.

Untuk kasus ini selang $[a, b]$ telah didapat berdasarkan Contoh 1 nomor 2), yakni $[0,2]$.

Maka volume putarnya terhadap sumbu-x

$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{4-2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 [4-2x]\, dx = \pi[4x - x^2]_0^2 = \pi[4(2) - 2^2 - 0] = 4\pi$$

Volume putarnya terhadap sumbu-y membutuhkan $f^{-1}(y)$ yakni

$$y = \sqrt{4-2x} \quad \rightarrow \quad y^2 = 4 - 2x \quad \rightarrow \quad x = (4 - y^2)/2 = f^{-1}(y)$$

Kemudian karena selangnya pada y adalah $\left[\sqrt{4-0}, \sqrt{4-2(2)}\right] = [2,0] \rightarrow [0,2]$ maka

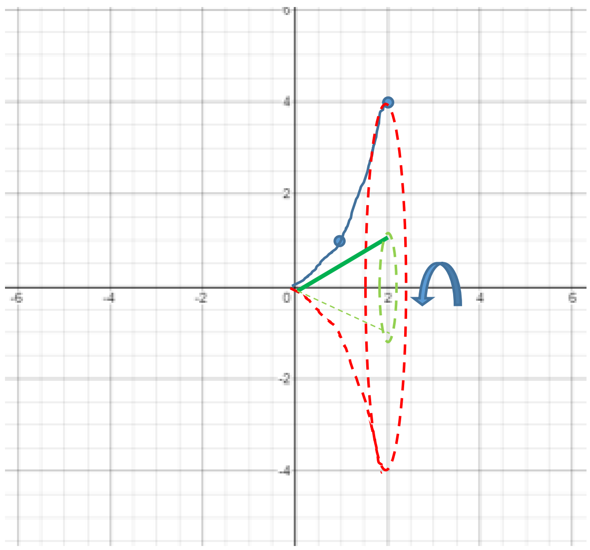
$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left[\frac{16 - 8y^2 + y^4}{4}\right] dx$$

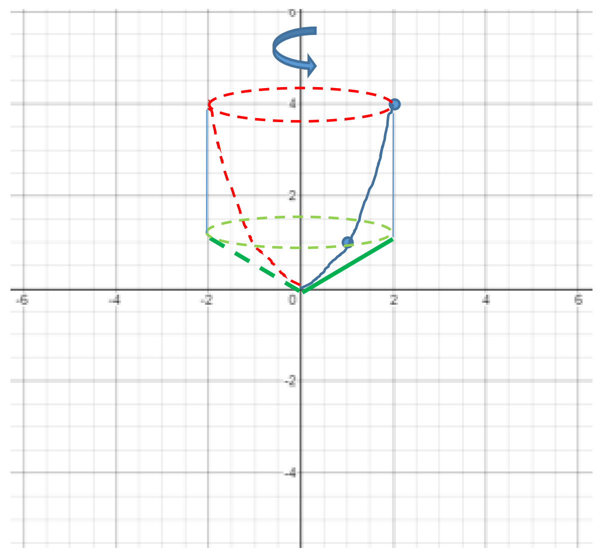
$$= \frac{\pi}{4}\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{y^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \pi\left[32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} - 0\right] = 17\frac{1}{15}\pi$$

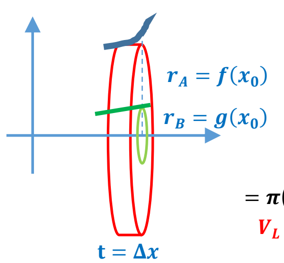
B. BENTUK LEMPENGAN CINCIN

Perhatikan fungsi $y = x^2$ dan $y = 1/2x$ pada interval $[0,2]$ yang diputar 360^o terhadap sumbu-x dan sumbu-y

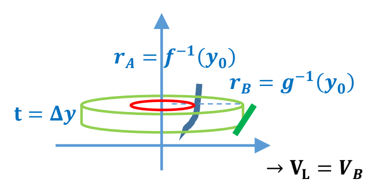




Dapat dilihat bahwa hasil perputaran terhadap masing-masing sumbu berbeda, yakni untuk terhadap sumbu-x berbentuk seperti terompet namun berlubang, sedangkan terhadap sumbu-y seperti mangkuk atau piala yang berlubang. Keduanya berbeda dengan sebelumnya yang padat tak berlubang. Ini menunjukkan bahwa volume keduanya memiliki nilai yang berbeda. Seperti sebelumnya, volume keduanya dapat dipandang sebagai partisi lempengan cincin berikut



$$\rightarrow V_L = V_A - V_B$$
$$= \pi\left(f(x_0)\right)^2 \Delta x - \pi\left(g(x_0)\right)^2 \Delta x$$
$$V_L = \pi\left(f(x_0)^2 - g(x_0)^2\right) \Delta x$$



$$\rightarrow V_L = V_B - V_A$$
$$= \pi\left(g^{-1}(y_0)\right)^2 \Delta y - \pi\left(f^{-1}(y_0)\right)^2 \Delta y$$
$$V_L = \pi\left(g^{-1}(y_0)^2 - f^{-1}(y_0)^2\right) \Delta y$$

Dari kedua gambar di atas, maka volume yang terbentuk secara keseluruhan adalah

3) $y = x^2$ dan $y = 1/2x$ diputar terhadap sumbu-x pada selang $[0,2]$

$$V = \sum \pi\,(f(x_i)^2 - g(x_i)^2)\Delta x \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad V = \pi \int_0^2 \left[(x^2)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

4) $y = x^2$ dan $y = 1/2x$ diputar terhadap sumbu-y pada $[0,1]$ (karena selebihnya berbeda sebab di $b = 2$, fungsi f dan g tidak berpotongan)

$$V = \sum \pi\,[g^{-1}(y_i)^2 - f^{-1}(y_i)^2]\Delta y \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad V = \pi \int_0^1 \left[(2y)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \mathrm{d}y$$

Secara umum, volume benda putar bentuk cakram adalah sebagaimana teorema berikut.

VOLUME BENDA PUTAR BENTUK CINCIN

Misalkan f dan g terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan berpotongan pada $x = a$ dan $x = b$, serta invers keduanya pada selang ada dan terintegralkan. Maka

1) Jika f dan g diputar 360° terhadap sumbu-x maka volumenya
$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\, dx$$
2) Jika f dan g diputar 360° terhadap sumbu-y dan $f(a) < f(b)$ maka volumenya
$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [g^{-1}(y) - f^{-1}(y)]\, dy$$

CONTOH 4

3) Luas daerah untuk kasus di atas adalah

Terhadap sumbu-x
$$V = \pi \int_0^2 \left[(x^2)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right] \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left[x^4 - \frac{1}{4}x^2\right] \mathrm{d}x$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{12}x^3\right]_0^2 = \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{2}{3}\right] = 5\frac{11}{15}\pi$$

Terhadap sumbu-y pada selang [0,1]
$$V_1 = \pi \int_0^1 \left[(2y)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 [4y^2 - y]\, \mathrm{d}y$$
$$= \pi \left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \pi \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 0\right] = \frac{5}{6}\pi$$

Volume keseluruhan terhadap sumbu-y, yakni pada selang [0,1] dan $[1,4]$
$$V = V_1 + \pi \int_1^4 \left[(2)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \mathrm{d}y = \frac{5}{6}\pi + \pi \int_1^4 [4 - y]\, \mathrm{d}y$$
$$= \frac{5}{6}\pi + \pi \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4$$
$$= \frac{5}{6}\pi + \pi \left[16 - 8 - \left(4 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{5}{6}\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{16}{3}\pi$$