PERTEMUAN 12
KALKULUS
MATERI:

1. PERTUMBUHAN DAN PELURUHAN EKSPONEN
2. PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

SUMBER: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

PERTUMBUHAN DAN PELURUHAN EKSPONEN

Misalkan $y = f(t)$ adalah banyaknya atau Volume sesuatu pada saat waktu t. Jika $y_0 = f(t_0)$ dan $y_1 = f(t_1)$ merupakan volume pada saat awal (t_0) dan waktu tertentu (t_1).

Perubahan Volume dari t_0 menuju t_1 tentunya merupakan kelipatan dari Volume y, yakni

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

Karena perubahan tersebut tentunya tidak instan, yakni tidak langsung lompat dari t_0 ke t_1 melainkan sepanjang t_0 ke t_1. Akibatnya, Perubahannya adalah

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Jika $k > 0$, maka Volume meningkat atau disebut pertumbuhan.

Sedangkan Jika $k < 0$, maka Volume berkurang atau disebut peluruhan.

Bagaimana Cara memprediksi Volume pada waktu tertentu berdasarkan rumusan pertumbuhan/peluruhan diatas?

Perhatikan bahwa $\frac{dy}{dt} = ky \rightarrow dy = ky\ dt$

$$\rightarrow \frac{1}{y} dy = k\ dt$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int k\ dt$$

$$\ln y + C_1 = kt + C_2$$

$$\ln y = kt + C$$

Karena pada saat $t_0 = 0$, $f(t_0) = y_0$, maka

$$\ln y_0 = k \cdot 0 + C = C \rightarrow C = \ln y_0$$

Jadi,

$$\ln y = kt + \ln y_0$$

$$\rightarrow \ln y - \ln y_0 = kt$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

$$e^{\ln y/y_0} = e^{kt}$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

$$\boxed{y = y_0 e^{kt}}$$

Inilah rumus pertumbuhan/peluruhan Jika diketahui pada saat $t_0 = 0$ $f(t_0) = y_0$

Contoh:

1) Pada 1975, Jumlah penduduk dunia adalah sekitar 4 Milyar. Berapakah perkiraan jumlah penduduk pada tahun 2000? (Riset dunia menyebutkan $k = 0{,}0198$)

Misalkan $1975 \rightarrow t_0 = 0$ sehingga $y_0 = 4$ Milyar

Berdasarkan rumus pertumbuhan

$$y = y_0 e^{kt} = 4e^{kt} = 4e^{0{,}0198t}$$

Maka pada tahun $2000 \rightarrow t = 2000 - 1975 = 25$,

$$y = 4e^{0{,}0198(25)} \approx 6{,}6 \text{ Milyar}$$

(2) Dengan soal yang sama dengan di atas, kapan penduduk dunia akan mencapai 2 kali lipat dari tahun 1975?

Karena pada 1975 $\longrightarrow y = 4$
maka 2 kali lipatnya adalah saat $y = 4 \times 2 = 8$, sehingga

$$8 = 4e^{0,0198t}$$

$$2 = e^{0,0198t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0,0198t} = 0,0198t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,0198} \simeq 35 \text{ tahun}$$

(3) Banyak bakteri pada tengah hari adalah 10.000. 2 jam kemudian menjadi 4 kali lipatnya. Berapa banyak bakteri pada pukul 17.00?

Tengah hari (12.00) $\longrightarrow t_0 = 0 \longrightarrow y_0 = 10.000$

maka

$$y = 10000\, e^{kt}$$

2 jam kemudian 4 kali lipat $\longrightarrow t = 2$, $y = 4 \times 10.000 = 40000$
maka

$$40.000 = 10.000\, e^{k \cdot 2}$$

$$4 = e^{2k}$$

$$\ln 4 = \ln e^{2k} = 2k$$

$$k = \frac{\ln 4}{2} \simeq 0,693$$

Jadi, $y = 10000\, e^{0,693t}$.

Pukul 17.00 $\rightarrow t = 17.00 - 12.00 = 5$

$$\rightarrow y = 10000\, e^{0,693(5)}$$

$$\simeq 320.000$$

(4) Senyawa karbon-14 merupakan zat radioaktif. Zat tersebut meluluh dengan laju sebanding dengan banyaknya zat tersebut pada saat t.
Jika setengah umurnya adalah 5370 tahun, maka berapakah sisa zat tersebut setelah 2000 tahun jika awalnya ada seberat 10 gram?

Berat awal 10 gram $\rightarrow t_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 10$ maka

$$y = 10e^{kt}$$

setengah umur $\longrightarrow t = 5370$, $y = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ maka

$$5 = 10\, e^{k.(5370)} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{5370k} \longrightarrow k \simeq -0{,}000121$$

Jadi, $y = 10\, e^{-0{,}000121t}$

$$\rightarrow t = 2000 \longrightarrow y = e^{-0{,}000121(2000)} \simeq 7{,}8 \text{ gram.}$$

(5) Misalkan John menyimpan uang \$500 dengan bunga majemuk 13% p.a. dihitung kontinum (setiap saat). Berapakah tabungan John setelah 2 tahun?

$t_0 = 0 \longrightarrow y = 500$, dan $k = 13\% = 0{,}13$

maka $y = 500\, e^{0{,}13t}$

Jadi, setelah 2 tahun

$$y = 500\, e^{0{,}13(2)} \approx \$\,648{,}47.$$

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE 1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung diferensial ataupun turunan di dalamnya.

contoh:
1. $y' + 2y = 5$
2. $y'' - 2y' - 5y = 0$
3. $x\,dy - y\,dx = 1$
4. $\frac{dy}{dx} + 5 = \cos x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$

Sedangkan persamaan diferensial linier orde 1 adalah persamaan diferensial yang hanya mengandung turunan atau diferensial pertama dan semuanya bersifat linier, yakni

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x)$$

Misalkan $H(x) = y \cdot e^{\int p(x)\,dx}$

Perhatikan bahwa

$$\frac{dH}{dx} = 1 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot e^{\int p(x)\,dx} + y \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot p(x)$$

$$= e^{\int p(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right)$$

Maka

$$\underbrace{e^{\int p(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right)}_{\frac{dH}{dx}} = e^{\int p(x)\,dx}\left[Q(x)\right]$$

$$\frac{dH}{dx} = e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)$$

$$dH = e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)$$

$$\int dH = \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

$$H = \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

$$y \cdot e^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)\,dx$$

$$\boxed{y = \frac{\int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx}{e^{\int p(x)\,dx}}} \rightarrow \text{Solusi PDLI}$$

$e^{\int p(x)}$ disebut faktor Integrasi.

Contoh:

(1) Akan dicari solusi dari PDLI:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = x e^{3x}$$

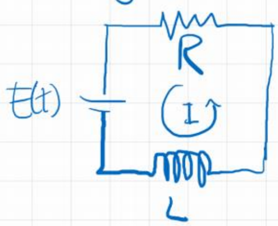
Maka $p(x) = -3$ dan $Q(x) = x e^{3x}$.

Berdasarkan formula solusi, maka

$$y = \frac{\int e^{\int (-3)\,dx} \cdot x e^{3x}\,dx}{e^{\int (-3)\,dx}} = \frac{\int \cancel{e^{-3x}} \cdot x \cancel{e^{3x}}\,dx}{e^{-3x}}$$

$$= \frac{\int x\,dx}{e^{-3x}} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + C}{e^{-3x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 e^{3x} + C e^{3x}}}$$

2. Rangkaian Seri RL



Hukum tegangan Kirchoff :

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Akan dicari persamaan solusi dari Arus.

Hukum tegangan di atas, jika dibagi dg L maka

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{E(t)}{L}, \text{ maka } p(t) = \frac{R}{L} \text{ dan } Q(t) = \frac{E(t)}{L}$$

Akibatnya,

$$I = \frac{\int e^{\int R/L\, dt} \cdot E(t)/L \, dt}{e^{\int R/L\, dt}}$$

Jika diketahui pada saat $t=0$, $I=0$ dan $R = 10^6\,\Omega$, $L=1$, dan $E = 1V$ maka

$$I = \frac{\int e^{\int 10^6/1\, dt} \cdot 1/1 \, dt}{e^{\int 10^6/1\, dt}} = \frac{\int e^{10^6 t}\, dt}{e^{10^6 t}} = \frac{\frac{1}{10^6} e^{10^6 t} + C}{e^{10^6 t}}$$

$$I = \frac{1}{10^6} + \frac{C}{e^{10^6 t}}$$

Karena saat $t=0$, $I=0$ maka $0 = \frac{1}{10^6} + \frac{C}{e^0}$

$$C = -\frac{1}{10^6}$$

Jadi, $I(t) = \frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^6 e^{10^6 t}} = 10^{-6}\left(1 - e^{-10^6 t}\right)$