TURUNAN (Bagian 2)

Pertemuan: 4
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

5. Turunan Tingkat Tinggi
6. Turunan Implisit
7. Laju yang berkaitan
8. Diferensial dan Aproksimasi

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan aturan turunan untuk menghitung hasil turunan.

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

5. Turunan Tingkat Tinggi

Sebelumnya telah dijelaskan mengenai konsep turunan pada dasarnya adalah merupakan sebuah kemiringan atau gradien dari suatu fungsi. Pandang kembali definisi turunan tersebut, yakni

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

Definisi tersebut memperlihatkan bahwa turunan dari f merupakan perubahan yang terjadi pada $f(x)$ terhadap perubahan pada x. Sekarang misalkan fungsi $f(x)$ digantikan dengan fungsi posisi/jarak tempuh $S(t)$ dan variabel x digantikan variabel waktu t, maka turunannya akan memiliki arti perubahan posisi setiap waktu. Di dalam ilmu fisika, perubahan ini disebut sebagai laju/kecepatan $v(t)$. Ini menunjukkan bahwa **kecepatan merupakan turunan dari posisi atau jarak**, yakni

$$v(t) = S'(t)$$

Selanjutnya apabila kecepatan $v(t)$ diturunkan kembali, maka akan memiliki arti perubahan kecepatan setiap waktu atau dengan kata lain disebut sebagai percepatan $a(t)$. Ini menunjukkan pula bahwa **percepatan merupakan turunan dari kecepatan**, lebih lanjut karena kecepatan merupakan turunan dari posisi atau jarak maka **percepatan merupakan turunan dari turunan posisi**, yakni

$$a(t) = v'(t) = (S')'(t)$$

Dari kasus mengenai percepatan tersebut menunjukkan bahwa bahkan dalam aplikasinya, suatu fungsi tidak hanya bisa diturunkan satu kali melainkan bisa lebih tinggi lagi yakni turunan dari sebuah turunan atau yang disebut sebagai turunan kedua. Lebih jauh, akan ada turunan ketiga, keempat, dan seterusnya, sesuai kebutuhannya pada penerapan dalam kehidupan sehari-hari.

Tingkat dalam turunan disebut sebagai orde. Untuk setiap ordenya, turunan memiliki notasi yang berbeda bergantung notasi apa yang dipakai. Seperti halnya pada turunan pertama yang notasinya bermacam-macam seperti $f'(x)$, y', $D_x(y)$, atau notasi Leibniz dy/dx. Berikut adalah notasi yang juga dapat digunakan untuk setiap ordenya.

Turunan ke -	Notasi y'	Notasi D	Notasi $Leibniz$
1	y'	$D_x(y)$	$\frac{dy}{dx}$
2	y''	$D_x^2(y)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
3	y'''	$D_x^3(y)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
4	$y^{(4)}$	$D_x^4(y)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
5	$y^{(5)}$	$D_x^5(y)$	$\frac{d^5y}{dx^5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$y^{(n)}$	$D_x^n(y)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh 5.1 (Turunan Tingkat Tinggi)

1) Jarak pergerakan suatu benda bergerak setelah t detik dari titik awal ditentukan oleh fungsi

$$S(t) = 2t^2 - 12t + 8 \ \text{(meter)}$$

Sebagai contoh, saat 5 detik, $S(5) = 2.5^2 - 12.5 + 8 = -2$, yang artinya benda tersebut terletak 2 meter di belakang posisi awal. Sedangkan setelah 10 detik, $S(10) = 2.10^2 - 12.10 + 8 = 88$, yang artinya benda tersebut terletak 88 meter di depan posisi awal.

Fungsi kecepatannya adalah turunan pertama dari fungsi posisi, yakni

$$v(t) = S'(t) = 4t - 12 \quad (m/s)$$

Sebagai contoh, saat 5 detik, $v(5) = 4.5 - 12 = 8$, yang artinya benda tersebut bergerak dengan kecepatan 8 m/s ke arah depan posisi awal.

Sedangkan fungsi percepatannya adalah turunan kedua dari fungsi posisi

$$a(t) = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 4$$

Artinya percepatan benda untuk setiap detiknya selalu 4 m/s^2. Dengan kata lain, kecepatannya selalu meningkat konstan sebesar 4 m/s^2 setiap detiknya.

2) Misalkan $y = f(x) = \sin 3x$, maka

turunan pertamanya: $f'(x) = 3\cos 3x$

turunan keduanya: $D_x^2(y) = 3.3(-\sin 3x) = -9\sin 3x$

turunan ketiganya: $\frac{d^3y}{dx^3} = -9(3\cos 3x) = -27\cos 3x$

tan turunan keempatnya: $y^{(4)} = -27.3(-\sin 3x) = 81\sin 3x$

6. Turunan Implisit

Tidak semua permasalahan akan berbentuk fungsi $y = f(x)$ sehingga dapat diturunkan secara langsung menggunakan aturan-aturan seperti yang telah dibahas pada pembahasan sebelumnya. Turunan yang dilakukan secara langsung untuk fungsi $y = f(x)$ disebut sebagai **turunan eksplisit.**

Perhatikan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Persamaan ini tidak berbentuk $y = f(x)$ namun masih bisa "diusahakan" menjadi bentuk tersebut, yakni

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 \quad &\rightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \\ &\rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Karena dapat dibuat menjadi $y = f(x)$ maka turunan eksplisit dapat dilakukan. Namun, karena terdapat dua bentuk $y = f(x)$ untuk persamaan ini (plus dan minus), maka perlu ditinjau per bagian. Untuk bentuk $y = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, turunan eksplisitnya adalah

$$y' = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

Sedangkan turunan eksplisit dari bentuk $y = -\sqrt{4 - x^2} = -(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ adalah

$$y' = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\left(-\sqrt{4 - x^2}\right)} = -\frac{x}{y}$$

Contoh di atas memberikan gambaran bahwa "memaksakan" turunan eksplisit untuk persamaan yang tidak berbentuk $y = f(x)$ tidaklah sederhana. Belum lagi tidak semua fungsi mudah atau bisa diusahakan berbentuk $y = f(x)$. Berikut aturan turunan yang lebih sederhana untuk semua persamaan, terutama jika tidak berbentuk $y = f(x)$, yang akan disebut sebagai **turunan implisit**.

ATURAN TURUNAN IMPLISIT

Misalkan $\boldsymbol{f(x)g(y) + h(x) = k}$**,** di mana y adalah fungsi dalam x dan k konstanta. Turunan (implisit) persamaan tersebut adalah

$$\left[\frac{df(x)}{dx}.g(y) + f(x).\left(\frac{dg(y)}{dx}.\frac{dy}{dx}\right)\right] + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Contoh 6.1 (Turunan Implisit)

1) Perhatikan kembali persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di atas. Turunan implisitnya adalah

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

2) Tentukan gradien di titik $(2,1)$ dari persamaan implisit $y^5 - y^2 = x^2 y + 1$.

$$\frac{d(y^5)}{dx} - \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(x^2 y)}{dx} + 0$$

$$5y^4 . \frac{dy}{dx} - 2y\ \frac{dy}{dx} = \left(2xy + x^2\left(1.\frac{dy}{dx}\right)\right) + 0$$

$$5y^4 \frac{dy}{dx} - 2y\ \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(5y^4 - 2y - x^2) = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{5y^4 - 2y - x^2}$$

Dengan demikian, **gradiennya di titik** $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ adalah

$$\frac{dy}{dx}(2,1) = \frac{2\,.2\,.1}{5.1^4 - 2\,.1 - 2^2} = \frac{-4}{1} = -4$$

3) Tentukan p agar turunan dari $p^2 - pq + q^2 - 400 = 0$ (di mana <u>p fungsi dalam q</u>) adalah 0.

$$\frac{d(p^2)}{dq} - \frac{d(pq)}{dq} + \frac{d(q^2)}{dq} - \frac{d(400)}{dq} = 0$$

$$2p.\frac{dp}{dq} - \left(\left(1.\frac{dp}{dq}\right).q + p.1\right) + 2q - 0 = 0$$

$$\frac{dp}{dq}(2p - q) - p + 2q = 0$$

$$\frac{dp}{dq}(2p - q) = p - 2q$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p - 2q}{2p - q}$$

Dengan demikian, agar $\frac{dp}{dq} = 0$ maka

$$\frac{p - 2q}{2p - q} = 0 \quad \rightarrow \quad p - 2q = 0$$

$$\rightarrow \quad p = 2q$$

Maka nilai p bergantung pada pemilihan q. Misalkan $q = 1$ maka $p = 2$, jika $q = \frac{1}{2}$ maka $p = 1$. Tentunya p dan q tidak boleh 0 karena akan mengakibatkan dp/dq tidak terdefinisi.

7. Laju yang Berkaitan

Pandang kembali fungsi laju/kecepatan $v(t)$ pada awal pembahasan sebagai turunan dari fungsi posisi $S(t)$ yakni

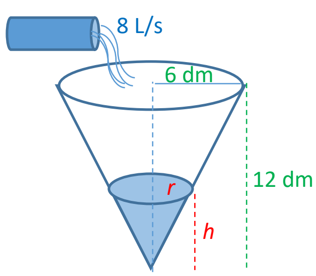
$$v(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$$

Laju/kecepatan tidak hanya berlaku untuk perubahan posisi terhadap waktu dalam dimensi garis. Perubahan terhadap waktu dapat berlaku dalam berbagai hal seperti perubahan suhu, perubahan volume, perubahan konsentrasi cairan, perubahan dalam ekonomi, dan sebagainya.

Untuk itu, karena laju diidentifikasikan sebagai turunan, maka secara umum untuk berbagai hal, $\frac{dy}{dt}$ merupakan laju perubahan dari suatu fungsi $y = f(t)$ terhadap waktu. Sebagai contoh, jika y menyatakan volume air yang dialiri oleh air dari suatu keran untuk setiap waktu t, maka $\frac{dy}{dt}$ merupakan laju air yang mengalir dari keran. Jika y merupakan jari-jari suatu cakram yang sedang dipanaskan, maka $\frac{dy}{dx}$ merupakan laju pertambahan jari-jari terserbut terhadap waktu.

Contoh 7.1 (Laju Kenaikan Ketinggian Air di Suatu Wadah)

Air mengalir dari sebuah keran ke dalam wadah berbentuk kerucut terbalik dengan laju $8\ liter/detik$. Jika tinggi kerucut adalah $12\ dm$ dan jari-jarinya adalah $6\ dm$. Akan dihitung **laju perubahan kenaikan tinggi air** saat ketingginnya $4\ dm$, yakni $\frac{dh}{dt}$ saat $h = 4$.



$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2}h$$

Misalkan V menyatakan volume air saat t, karena laju yang mengalir ke wadah adalah 8, maka

$$laju\ aliran = \frac{dV}{dt} = 8$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)}{dt} = 8$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h\right)}{dt} = 8$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{12}\pi h^3\right)}{dt} = 8$$

$$\frac{3}{12}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 8$$

$$\text{untuk } h = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{12}\pi(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 8$$

$$4\pi \cdot \frac{dh}{dt} = 8$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{4\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637\ dm$$

8. Diferensial dan Aproksimasi

Seringkali terdapat kesalahpahaman bahwa turunan dan diferensial adalah hal yang sama. Hal ini dapat dimaklumi sebab keduanya memiliki aturan yang hampir serupa. Namun, secara pengertian keduanya adalah hal yang sangat berbeda. Kita sudah mengenali turunan sebagai kemiringan/gradien atau juga sebagai laju perubahan y terhadap perubahan x, yang dinotasikan sebagai dy/dx.

Diferensial adalah hal yang berbeda. **Diferensial**, sesuai namanya yaitu *diference* (selisih/perubahan), hanya menyatakan **sebuah perubahan tanpa pembanding baik itu dari perubahan y atau perubahan dari x**, sehingga **secara notasi** hanya dinyatakan dalam dy atau dx.

Meskipun begitu, turunan dan diferensial memang memiliki hubungan yang sangat erat. Perhatikan kembali mengenai persamaan garis singgung suatu kurva pada suatu titik (x_0, y_0), yaitu

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$$

Karena suatu kurva dapat mengalami perubahan kemiringan yang begitu cepat, maka untuk mencari perubahan pada titik (x_0, y_0), nilai x dan y tentunya harus sedekat mungkin dengan x_0 dan y_0 sehingga $\Delta y \to dy$ dan $\Delta x \to dx$. Akibatnya

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x \quad \to \quad \boxed{dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx}$$

Ini menunjukkan hubungan antara diferensial dengan turunan, yang mana dy dan dx adalah simbol untuk diferensial, sedangkan $\frac{dy}{dx}$ merupakan **simbol untuk turunan**, bukan berarti dy dibagi dx. Oleh karena itu, untuk membedakannya, lebih baik digunakan notasi y' atau $f'(x)$, sehingga

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Namun menariknya, jika kedua ruas dibagi oleh dx, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

artinya diferensial y dibagi diferensial x artinya artinya turunan y terhadap x

Jadi, kesimpulannya adalah **turunan merupakan pembagian antara dua diferensial**. Berikut adalah definisi formal dari diferensial

DEFINISI DAN ATURAN DIFERENSIAL

Misalkan $\boldsymbol{y = f(x)}$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan di x. Diferensial dari x merupakan perubahan dari x, sedangkan diferensial dari y adalah dy dan berlaku

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\, dx}$$

Karena diferensial berhubungan dengan turunan, maka **setiap aturan yang ada di turunan akan berlaku pada diferensial**. Berikut contoh untuk membedakan turunan dan diferensial.

<u>Contoh 8.1</u> (Diferensial vs Turunan)

1) Misalkan $y = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 100$

   Turunannya adalah

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x^2 + \frac{1}{2}$$

   Sedangkan diferensialnya

$$dy = \left(3x^2 - 3x^2 + \frac{1}{2}\right) dx$$

2) Misalkan $x^2 + y^2 = 25$

   Turunan implisitnya adalah

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

   Sedangkan diferensial implisitnya adalah

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$
$$2y\,dy = -2x\,dx$$
$$dy = -\frac{x}{y}\,dx$$

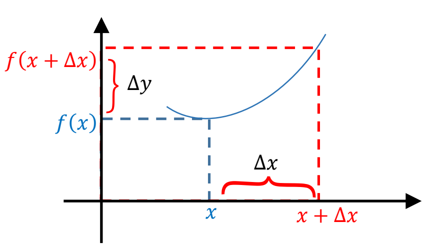
3) Diferensial dari $y = \sqrt{x^2 + 3x} = (x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}}$ adalah

$$dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)\,dx$$

$$dy = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}\,dx$$

Seperti halnya pada turunan, diferensial sangat berperan penting dalam kehidupan. Salah satu kegunaan diferensial yang akan di bahas di sini adalah untuk membuat aproksimasi (menghitung hampiran) dari suatu nilai.

Perhatikan grafik $y = f(x)$ berikut.



Misalkan $y = f(x)$. Untuk suatu pertambahan sebesar Δx terhadap x, yakni $(x + \Delta x)$, maka

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$

Jika Δx kecil maka Δy akan dekat dengan Δx sehingga

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \approx f(x) + dy$$

APPROKSIMASI MELALUI DIFERENSIAL

Misalkan $\boldsymbol{f(x)}$ merupakan fungsi yang terdiferensialkan. Misalkan diberikan pertambahan sebesar $\boldsymbol{\Delta x}$ pada x, maka aproksimasi dari nilai $\boldsymbol{f(x + \Delta x)}$ adalah

$$\boldsymbol{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

<u>Contoh 8.2</u> (Aproksimasi)

1) Akan digunakan aproksimasi diferensial untuk menaksir nilai dari $\sqrt{4{,}6}$ dan $\sqrt{8{,}2}$.

   Karena akan menaksir nilai akar maka misalkan $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

   Akibatnya

$$dy = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

   Dengan demikian berlaku

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx f(x) + dy \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x$$

   maka aproksimasinya adalah

$$\sqrt{4{,}6} = \sqrt{4 + 0{,}6} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}6$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}6$$

$$\sqrt{4{,}6} \approx 2{,}15$$

   dan

$$\sqrt{8{,}2} = \sqrt{9 + (-0{,}8)} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0{,}8)$$

$$= 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0{,}8)$$

$$\sqrt{8{,}2} \approx 2{,}8667$$