INTEGRAL TENTU (Bagian 1 dari 1)

Pertemuan: 7
Dosen: Wahyu Hidayat, M.Si.
Materi:

1. Pendahuluan
2. Integral Tentu
3. Teorema Dasar Kalkulus Pertama
4. Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Kompetensi Khusus: Mahasiswa diharapkan mampu menggunakan rumus rumus integral untuk menghitung nilai integral tertentu (C3).

Sumber Materi: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon. (2010). Kalkulus, Jilid 1.9 (Sembilan). Erlangga, Jakarta.

1. PENDAHULUAN

Pada bab sebelumnya mengenai subbab antiturunan, telah diperkenalkan mengenai integral tak tentu yang merupakan sebuah fungsi yang merupakan hasil antiturunan secara umum, yakni jika $F'(x) = f(x)$ maka $F(x) + C$ adalah integral dari $f(x)$ atau

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Melalui definisi tersebut, ingat kembali pada subbab antiturunan tersebut terdapat aturan sehingga mencari integral tak tentu dari suatu fungsi jadi lebih mudah, sebagai contoh:

$$\begin{aligned}\int [\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{5} - 10]\, dx &= \int [\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^{-2} + \frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}} - 10]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - 10x + C \\ &= \frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3x} + \frac{3}{10}x\sqrt{x} - 10x + C\end{aligned}$$

Melalui definisi sebagai antiturunan, integral tak tentu memegang peranan penting dalam mendefinisikan suatu fungsi asal dari suatu turunan. Dengan integral tak tentu, sebuah fungsi kecepatan dapat diintegralkan menjadi fungsi posisi jarak atau ketinggian sehingga dapat dicari posisi jarak atau ketinggian maksimum yang dapat dicapai, begitupun sebuah fungsi biaya marjinal dapat diintegralkan menjadi fungsi total biaya sehingga dapat dicari total biaya minimum, atau dari suatu persamaan gradien apabila diintegralkan maka akan didapat suatu kurva, dan lain sebagainya.

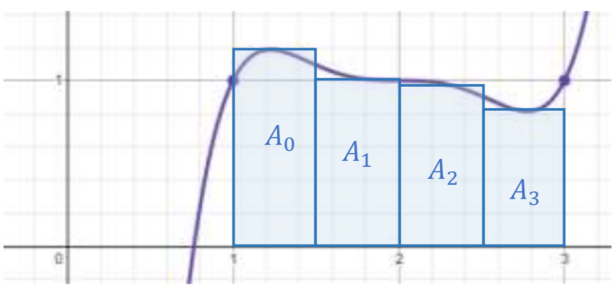
Namun demikian, definisi integral sebagai antiturunan di atas masih belum menjelaskan apa itu integral secara murni seperti halnya turunan yang aslinya merupakan sebuah gradien atau kemiringan atau juga sebagai perubahan y terhadap perubahan x. Pada pembahasan di sini, integral akan didefinisikan sesuai bentuknya seperti halnya turunan.

Untuk memahaminya, akan diperkenalkan terlebih dahulu mengenai bagaimana mencari luas daerah di bawah kurva dengan batasan tertentu menggunakan jumlahan partisi daerah.

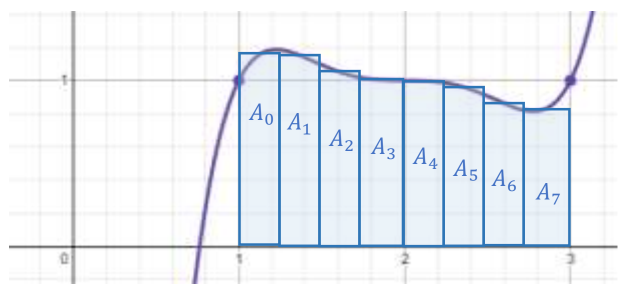
LUAS DAERAH DI BAWAH KURVA

Misalkan daerah di bawah kurva suatu fungsi dari $x = 1$ sd $x = 3$ adalah sebagai berikut.

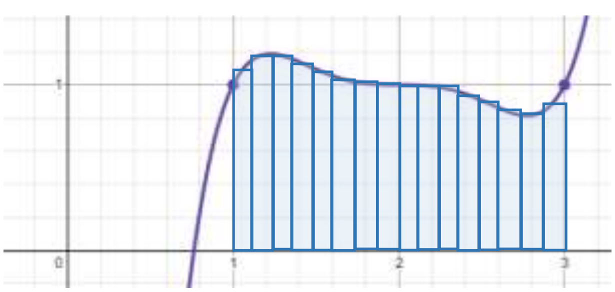
Bentuk daerah yang diarsir pada gambar bukanlah bentuk dari bangun datar populer. Perhatikan jika daerah tersebut dihampiri oleh partisi berupa irisan-irisan persegi panjang berikut.



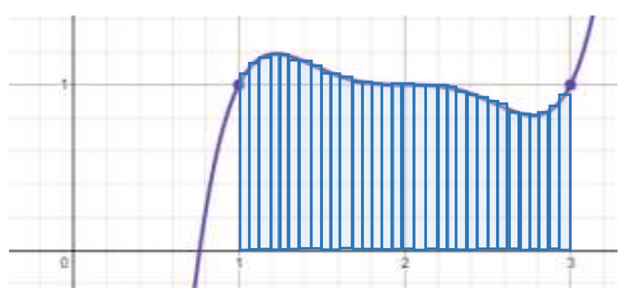
Banyak partisi 4 → $|P| = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$



Banyak partisi 8 → $|P| = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8}$



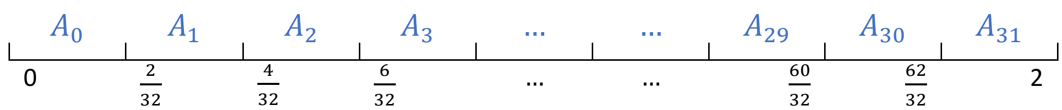
Banyak partisi 16 → $|P| = 16 = \frac{3-1}{16} = \frac{2}{16}$



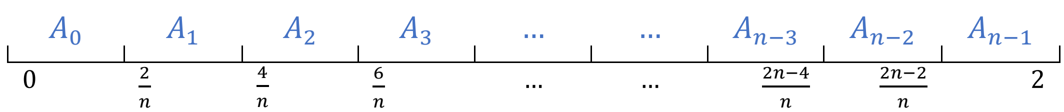
Banyak partisi 32 → $|P| = 32 = \frac{3-1}{32} = \frac{2}{32}$

Dapat dilihat dari keempat pendekatan partisi di atas, semakin banyak partisi maka daerah yang diarsir di bawah kurva akan semakin mendekati luas arsiran aslinya.

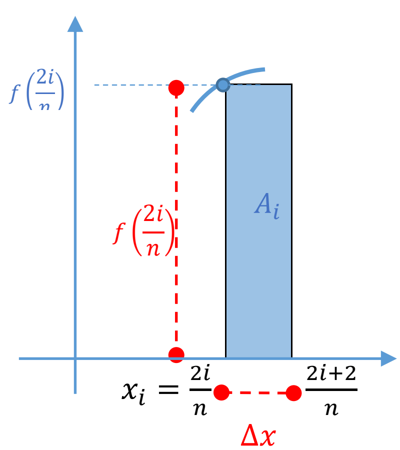
Untuk memudahkan, misalkan akan dicari luas di bawah kurva fungsi $y = f(x) = x^2 + 1$ untuk $x \in [0, 2]$ dengan diambil luas pendekatan menggunakan banyak partisi 32. Jika setiap partisi tersebut memiliki lebar yang sama, maka lebar masing-masingnya adalah $|P| = \Delta x = \frac{2-0}{32} = \frac{2}{32}$ sehingga partisi pada sumbu-x nya adalah



Untuk memperoleh luas yang lebih baik lagi maka perlu partisi yang lebih banyak lagi. Misalkan banyak partisinya n, maka lebar masing-masing partisinya adalah $|P| = \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$.



dan luas untuk satu buah partisinya adalah



$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$$

Dengan demikian, jika R_n adalah daerah keseluruhan (disebut daerah *Riemann*), maka luas semua partisi dari kurva fungsi $f(x) = x^2 + 1$ adalah

$$
\begin{aligned}
A(R_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right) \cdot \frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8}{n^3} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \\
&= \frac{8}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{8}{n^3}(0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2) + \frac{2}{n}(1 + 1 + \cdots + 1) \\
&= \frac{8}{n^3}\left(\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)\right) + \frac{2}{n} \cdot n \\
&= \frac{4}{3}\frac{(2n^2 - 3n + 1)}{n^2} + 2 \\
A(R_n) &= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + 2
\end{aligned}
$$

Telah disebutkan bahwa n merupakan banyaknya partisi, maka $A(R_n)$ merupakan luas daerah di bawah kurva $y = x^2 + 1$ untuk $x \in [0, 3]$ dengan lebar partisi $|P| = \frac{2}{n}$. Proses $A(R_n)$ di atas diperoleh melalui penjumlahan semua partisi yang ada sehingga disebut juga *jumlah Riemann*.

Dengan demikian,
jika $|P| = \frac{2}{4}$ yakni $n = 4$, maka $A(R_4) = \frac{8}{3} + \frac{4}{4} + \frac{4}{3(4)^2} + 2 = 5.75$
Jika $|P| = \frac{2}{8}$ yakni $n = 8$, maka $A(R_4) = \frac{8}{3} + \frac{4}{8} + \frac{4}{3(8)^2} + 2 = 5.19$
Jika $|P| = \frac{2}{16}$ yakni $n = 16$, maka $A(R_4) = \frac{8}{3} + \frac{4}{16} + \frac{4}{3(16)^2} + 2 = 4.92$
Jika $|P| = \frac{2}{32}$ yakni $n = 32$, maka $A(R_4) = \frac{8}{3} + \frac{4}{32} + \frac{4}{3(32)^2} + 2 = 4.79$

Untuk mendapatkan luas yang sesuai dengan kurvanya tanpa cela, maka partisinya sekecil mungkin yang mana banyak partisinya harus tak berhingga, yakni
Jika $|P| \to 0$ artinya $n \to \infty$ maka

$$A(R_4) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + 2\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{\infty} + \frac{4}{2\infty^2} + 2 = \frac{14}{3} + 0 + 0 = \frac{14}{3} \approx 4.67$$

2. INTEGRAL TENTU

Masih bersambung dari permasalahan di atas, Perhatikan bahwa jika $y = f(x) = x^2 + 1$ maka

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2 + 1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x + c$$

Dengan batasan $x = 0$ dan $x = 2$ maka

$$F(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + 2 + c = \frac{8}{3} + 2 + c = \frac{14}{3} + c$$

dan

$$F(0) = \frac{1}{3}(0)^3 + 0 + c = c$$

Dengan demikian

$$F(2) - F(0) = \frac{14}{3} + c - c = \frac{14}{3}.$$

Berikut kesimpulan mengenai perbandingan antara hasil dari jumlah Riemann sebelumnya dan hasil integral tak tentu yang dimasukkan batas awal dan akhirnya di atas.

	Jumlah Riemann	Integral
Notasi Awal	$A(R_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
Hasil Akhir Rumusan	$A(R_n) = \frac{8}{3} + 2 + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$ $= \frac{1}{3}(2)^3 + (2) + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + c$
Hasil Akhir Perhitungan	$A(R_n) = \frac{14}{3}$	$F(2) - F(0) = \frac{14}{3}$

Tabel di atas menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara jumlah Riemann dengan integral yang dibatasi oleh $x_0 = 0$ dan $x_{n-1} = 2$. Secara umum, dapat disimpulkan bahwa *integral dengan batasan merupakan jumlahan partisi yang tak berhingga banyaknya*. Integral dengan batasan disebut sebagai integral tentu atau integral Riemann, sebagaimana definisi berikut.

DEFINISI INTEGRAL TENTU

Misalkan f terdefinisi pada selang tutup $[a, b]$. *Integral tentu* untuk f pada selang $[a, b]$ adalah jumlahan dari semua tak berhingga partisi segiempat di bawah kurva f di mulai dari a hingga b, yakni

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i \qquad \text{untuk } x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

3. TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA

Hasil pada pendahuluan dan integral tentu di atas, menunjukkan bahwa integral tentu dari 0 ke 2 dihasilkan dengan cara mengurangkan antara nilai $x = 2$ dan nilai $x = 0$ pada fungsi hasil integral tak tentu $F(x)$, yakni

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$$

Kita tahu bahwa $F(x)$ mengandung konstanta c yang pada hasil tersebut saling mengilangkan. Dengan demikian, konstanta c tidak penting untuk integral tentu. Akibatnya, F cukup merupakan antiturunan dengan tanpa konstanta. Hasil tersebut dapat ditunjukkan akan memenuhi setiap fungsi yang terintegralkan (hasil jumlah Riemannnya ada). Sebagaimana disebutkan pada teorema dasar kalkulus pertama berikut.

TEOREMA DASAR KALKULUS PERTAMA

Misalkan f kontinu (artinya terintegralkan) pada $[a, b]$. Jika F adalah antiturunan dari f maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Lebih lanjut, hal di atas dapat dinotasikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

CONTOH 1

1) $\int_1^6 100\,dx = [100x]_1^6 = 100(6) - 100(1) = 600 - 100 = 500$

2) $\int_6^1 100\,dx = [100x]_6^1 = 100(1) - 100(6) = 100 - 500 = -500$

3) Perhatikan bahwa

$$\int_{-1}^{1} \left[x + \frac{1}{2x^2}\right] dx = \int_{-1}^{1} \left[x + \frac{1}{2}x^{-2}\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2(1)}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{1}{2(-1)}\right) = 0 - 1 = -1$$

SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

Misalkan f terintegralkan pada $[-a, a]$ dan $[a, b]$, maka

1) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

2) $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ untuk $a < c < b$

4) $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

5) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

6) $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$ jika $f(-x) = -f(x)$ atau disebut *fungsi ganjil*.

7) $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ jika $f(-x) = f(x)$ atau disebut *fungsi genap*.

CONTOH 2

1) $\int_{10}^{10} 100x^{10000}\, dx = 0$ (sifat nomor 1)

2) Misalkan $\int_{-3}^2 f(x)\, dx = 5$, sedangkan $\int_{-3}^0 f(x)\, dx = 4$, akan dicari $\int_0^2 5f(x)\, dx$

   Berdasarkan sifat nomor 3, maka

$$\int_{-3}^{2} f(x)\, dx = \int_{-3}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx$$

$$5 = 4 + \int_{0}^{2} f(x)\, dx$$

$$1 = \int_{0}^{2} f(x)\, dx$$

   Dan berdasarkan sifat nomor 4,

$$\int_{0}^{2} 5f(x)\, dx = 5\int_{-0}^{2} f(x)\, dx = 5 \cdot 1 = 5$$

3) Perhatikan jika $f(x) = x^2$ berlaku $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, fungsi genap, maka

$$\int_{-6}^{6} x^2\, dx = 2\int_{0}^{6} x^2\, dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = 2\left(\frac{1}{3}(6)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right) = 2 \cdot 72 = 144$$

4. TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA

Dalam beberapa aplikasi, terutama ketika menjumpai sebuah persamaan diferensial, kita seringkali menemui sebuah fungsi yang belum jadi, dalam artian merupakan integral dari sebuah fungsi. Selanjutnya, melalui fungsi tersebut misalkan akan dicari mengenai turunannya. Maka akan rumit karena fungsinya saja perlu diintegralkan terlebih dahulu, terlebih jika fungsinya rumit untuk diintegralkan. Sebagai contoh, misalkan fungsi $F(x)$ adalah fungsi yang dihasilkan dari

$$F(x) = \int_{1}^{x} t^3 \sqrt{t^2 + 5t - 7}\, dt$$

Kita belum mempelajari teknik pengintegralan untuk bentuk di atas, sehingga untuk saat ini akan rumit menghasilkan $F(x)$. Apabila dikehendaki mencari turunan dari $F(x)$ maka hasilnya adalah

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{1}^{x} t^3 \sqrt{t^2 + 5t - 7}\, dt$$

Kita tahu bahwa integral dan turunan saling anti, yakni integral merupakan antiturunan dan turunan merupakan antiintegral, dengan demikian turunan dan integral akan saling menghilangkan, yakni

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{1}^{x} t^3 \sqrt{t^2 + 5t - 7}\, dt = x^3 \sqrt{x^2 + 5x - 7}$$

Secara umum, teorema berikut menjamin hal tersebut.

TEOREMA DASAR KALKULUS KEDUA

Misalkan f kontinu (artinya terintegralkan) pada $[a, b]$, maka

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)\, dt = f(x)$$

CONTOH 3

1) Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{du}\int_{-500}^{u^2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \frac{\sqrt{u^2}}{\sqrt{\sin u^2}} \cdot (2u) = \frac{2u\sqrt{u^2}}{\sqrt{\sin u^2}}$$

2) Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{t}} 1000\, dx = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{500}{\sqrt{t}}$$