**PERTEMUAN 11**

**FUNGSI TRANSENDEN**

## Fungsi Eksponen Alami

Selain $\pi = 3{,}14159265.....$ yg sangat sering dipakai dalam berbagai perhitungan matematika, terdapat bilangan lain yg serupa dan sering pula dipakai, yakni

$$e = 2{,}7182818.....$$

bilangan tersebut disebut sebagai bilangan Euler atau eksponen alami. Fungsi eksponen alami adalah fungsi berbentuk

$$f(x) = e^x$$

Dalam beberapa notasi lain bilangan $e$ dinyatakan dalam exp sehingga dapat dituliskan pula

$$f(x) = \exp(x)$$

## Turunan Fungsi Eksponen Alami

Turunan dari fungsi eksponen alami adalah

$$y = e^x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

Contoh :

1. $y = e^{2x} \longrightarrow y' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

2. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \longrightarrow f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \frac{1}{e^x} \rightarrow f(x) = e^{-x} \rightarrow D_x f = e^{-x} \cdot -1 = -\frac{1}{e^x}$

# Integral Fungsi Eksponen Alami

Integral dari Fungsi Eksponen Alami adalah

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

contoh : (1) $\int e^{2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\left(\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{array}\right)$

(2) $\int x\,e^{x^2}\,dx = \int x\,e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ $\left(\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}\right)$

(3) $\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \int_{\frac{1}{2}\cdot 0}^{\frac{1}{2}\cdot 1} \exp(u) \frac{du}{\frac{1}{2}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^u\,du$

$= 2\left[e^u\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left[e^0 - e^{\frac{1}{2}}\right] = 2\left[1 - \sqrt{e}\right]$

# Fungsi Invers dan Turunannya

Fungsi invers, dinotasikan dengan $f^{-1}$, merupakan balikan dari sebuah fungsi. Sebagai contoh:

1) $f(x) = x+1 \longrightarrow f^{-1}(x) = x-1$
2) $f(x) = x-5 \longrightarrow f^{-1}(x) = x+5$
3) $f(x) = 2x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
4) $f(x) = \frac{3}{4}x+7 \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{3}(x-7)$

5) $f(x) = x^2 \longrightarrow$ tidak ada jika Domain $f$ seluruh bilangan real, namun jika domainnya dibatasi, yakni $D_f = \{x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ maka $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Jika $D_f = \{x \leq 0, x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

# Cara mencari fungsi Invers

Contoh : (1) $f(x) = x - 5$

$y = x - 5$

$y - 5 = x$

$\rightarrow y - 5 = f^{-1}(y)$

Jadi, $f^{-1}(x) = x - 5$

(2) $f(x) = \frac{3}{4}x + 7$

$y = \frac{3}{4}x + 7$

$y - 7 = \frac{3}{4}x$

$\frac{4}{3}(y - 7) = x$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{3}(x - 7)$

(3) $f(x) = x^2$

$y = x^2$

$\pm\sqrt{y} = x$ (fungsi tidak boleh memiliki 2 nilai)

$\sqrt{y} = x$ atau $x = -\sqrt{y}$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

(3) $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 7}$

$y = \frac{2x+3}{x-7}$

$xy - 7y = 2x + 3$

$xy - 2x = 7y + 3$

$x(y - 2) = 7y + 3$

$x = \frac{7y+3}{y-2}$

$\rightarrow$ Jadi,

$f^{-1}(x) = \frac{7x+3}{x-2}$

Contoh : (1) misalkan $f(x) = x+5$. Akan dicari $(f^{-1})'(4)$.

Cara 1 : $f^{-1}(x) = x-5$

$(f^{-1})'(x) = 1$

$\rightarrow (f^{-1})'(4) = 1$

Cara 2 :

Menggunakan Teorema

$f'(x) = 1$

karena $y = x-5$

$4 = x-5$

$-1 = x$

maka $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{1} = 1$

(2) $f(x) = x^2+5x+7$. Akan dicari $(f^{-1})'(3)$

mencari inversnya cukup rumit. Menggunakan teorema

$f'(x) = 2x+5$

karena $y = x^2+5x+7$

$3 = x^2+5x+7$

$0 = x^2+5x+4$

$0 = (x+4)(x+1)$

$x=-4$ atau $x=-1$

maka $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(-4)}$

$= \frac{1}{2(-4)+5} = \frac{1}{-3}$

atau $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2(-1)+5} = \frac{1}{3}$

# Turunan Fungsi Invers

Teorema : misalkan $f$ dapat diturunkan dan $f$ memiliki invers pada selang $I$, jika $f'(x) \neq 0$ untuk $x \in I$, dan pada $y = f(x)$, $f^{-1}(y)$ juga dapat diturunkan, maka

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Teorema ini bertujuan untuk mencari turunan fungsi invers pada suatu titik tanpa harus mencari turunannya secara langsung pada fungsi inversnya.

# Fungsi Logaritma Alami

Ingat kembali fungsi eksponen alami, $f(x) = e^x$.

Inversnya adalah

$$y = e^x$$

$$\log y = \log e^x = x \log e$$

$$\frac{\log y}{\log e} = x$$

$$^e\log y = x \longrightarrow f^{-1}(x) = {}^e\log x$$

Fungsi invers ini dinamakan fungsi logaritma alami, yang penulisannya diubah menjadi $\ln x$.

Dengan kata lain, $\ln x$ adalah logaritma dg basis $e$.

Jadi, fungsi logaritma alami adalah

$$f(x) = \ln x = {}^e\log x$$

## Fungsi logaritma Asli Sebagai Integral dari 1/x

Ingat kembali bahwa $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Hal tersebut hanya berlaku ketika $n \neq -1$, karena apabila dipaksakan

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C,$$ tidak terdefinisi.

Untuk itu misalkan $y = \ln x \longrightarrow \begin{matrix} x = e^y \\ dx = e^y \, dy \end{matrix}$

maka $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{e^y} \cdot e^y \, dy = \int 1 \, dy = y + C = \ln x + C$

Jadi,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

# Turunan Logaritma Alami

Karena $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$ , maka turunan dari logaritma Alami adalah

$$y = \ln x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Contoh : 1) Turunan dari $y = \ln x^2$ adalah

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

2) Turunan dari $y = e^x \ln 2x$ adalah

$$y' = e^x \ln 2x + e^x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = e^x \ln 2x + \frac{e^x}{x}$$

# Fungsi Eksponen Umum dan Logaritma Umum

Fungsi eksponen umum berbentuk :

$$f(x) = a^x \quad , \; a \in \mathbb{R}$$

Sedangkan fungsi logaritma umum berbentuk

$$f(x) = {}^{a}\log x \quad , \; a > 0 \, , \, a \neq 1 \, , \, x > 0$$

Contoh :

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = 3^x$
3. $f(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^a$
4. $f(x) = {}^{2}\log x$
5. $f(x) = {}^{3}\log 4x$
6. $f(x) = {}^{1/2}\log(4x^2+1)$

Fungsi Eksponen umum dan logaritma umum merupakan fungsi saling invers

$$f(x) = a^x \longrightarrow f^{-1}(x) = {}^a\log x$$

$$f(x) = {}^a\log x \longrightarrow f^{-1}(x) = a^x$$

Dengan demikian,

$$a^{{}^a\log x} = x \quad \text{dan} \quad {}^a\log a^x = x$$

# Turunan dan Integral dari Eksponen Umum

Jika $f(x) = a^x$ , maka $f'(x) = a^x \ln a$

Sedangkan $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Contoh : 1) $y = 4^x \longrightarrow D_x y = 4^x \ln 4$

2) $y = (\frac{1}{2})^{x^2} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = (\frac{1}{2})^{x^2} \ln(\frac{1}{2}) \cdot 2x$

$= 2x \ln(\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^{x^2}$

3) $\int 2^{-4x} \, dx = \int 2^u \dfrac{du}{-4} = -\frac{1}{4} \int 2^u \, du = -\frac{1}{4} \cdot \dfrac{2^u}{\ln 2} + C$

$= \dfrac{-2^{-4x}}{4 \ln 2} + C$

# Turunan Fungsi Logaritma Umum

Jika $y = {}^{a}\log x$, maka $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Contoh : (1) $y = {}^{2}\log x^2 \rightarrow y' = \frac{1}{x^2 \ln 2} \cdot 2x = \frac{2}{x \ln 2}$

(2) $y = x^x$

$\log y = \log x^x = x \log x$

maka $\frac{1}{y \log 10} = 1 . \log x + x . \frac{1}{x \log 10} \rightarrow \frac{1}{y} = \log 10 . \log x + \frac{\log 10}{\log 10}$

$\frac{1}{y} = 1 . \log x + 1$

$y = \frac{1}{\log x + 1}$