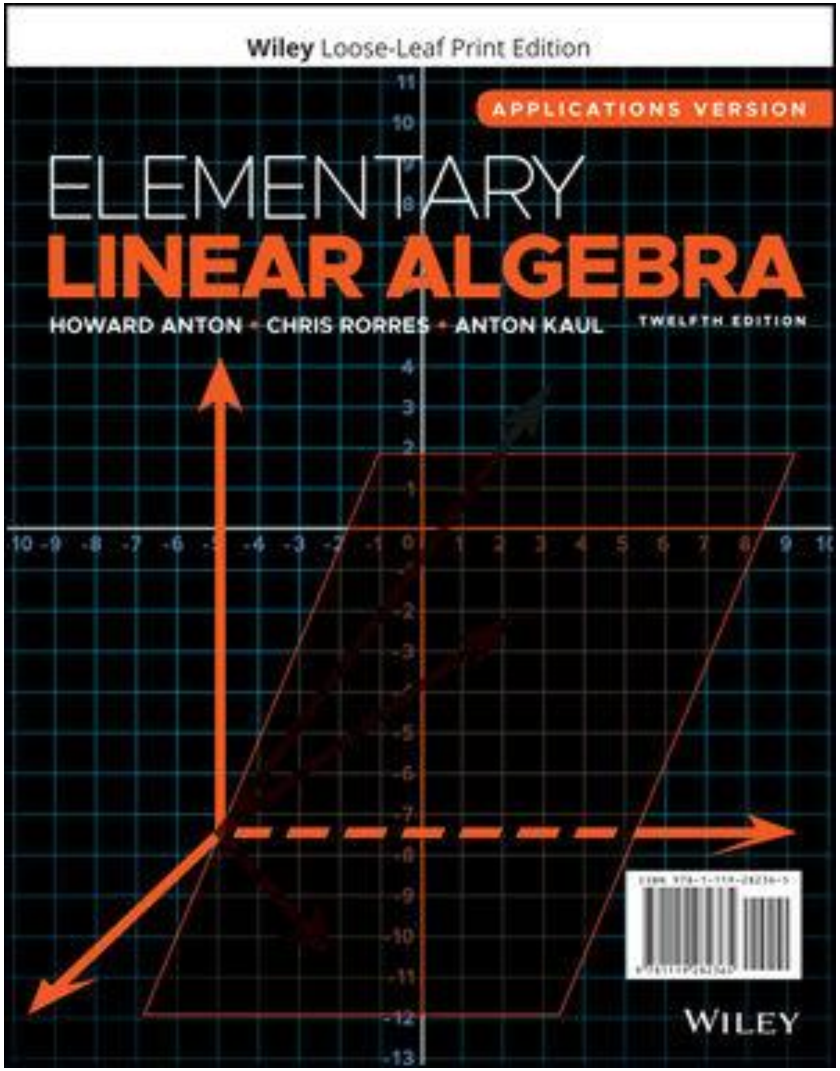
Sistem Persamaan Linier dan Matriks Lanjutan

Pertemuan ke 4 – 6

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu melakukan perhitungan invers matriks pada berbagai jenis matriks (C3, A3)
- Mahasiswa mampu melakukan operasi matriks yang terkait dalam kehidupan sehari-hari (C3, A3)

Materi

1. Matriks elementer dan invers matriks
2. Matriks diagonal, matriks segitiga dan matriks simetrik
3. Penerapan sistem persamaan linier

1. Matriks Elementer dan Invers Matriks

1.1. Matriks Elementer (1)

- Matriks E disebut **matriks elementer** jika matriks tersebut dapat dibentuk dari matriks identitas melakukan satu operasi baris elementer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \times (-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \leftrightarrow B_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + 3B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1. Matriks Elementer (2)

- Jika matriks elementer E diperoleh dari suatu operasi baris elementer pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali matriks EA merupakan matriks hasil operasi baris yang sama terhadap matriks A.

Contoh 1.1. Diketahui matriks A dan matriks elementer E berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil kali $EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ yang sama dengan operasi baris $B_3 + 3B_1$ pada matriks A.

1.2. Invers OBE

- Matriks elementer E merupakan matriks yang diperoleh dari satu operasi elementer pada matriks identitas I, terdapat operasi baris lain yang dilakukan pada matriks E sehingga diperoleh matriks I.
- Kolom kedua dari tabel berikut memperlihatkan ***operasi invers*** dari operasi baris elementer di sebelah kirinya.

Operasi baris pada *I* yang menghasilkan *E*	**Operasi baris pada *E* yang menghasilkan *I***
Mengalikan baris i dengan $c \neq 0$	Mengalikan baris i dengan $1/c$
Menukar baris i dan j	Menukar baris i dan j
Menambah c kali baris i ke baris j	Menambah $-c$ kali baris i ke baris j

1.3. Teorema Ekuivalen

Jika A merupakan matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen, yakni semua bernilai benar atau semua bernilai salah.

a. A mempunyai invers.

b. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial.

c. Matriks eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.

d. A dapat dituliskan sebagai hasil kali matirks elementer.

1.4. Metode Pencarian Invers Matriks (1)

Dengan menentukan matriks partisi $[A|I]$ dan melakukan OBE akan diperoleh matriks akhir $[I|A^{-1}]$

Contoh 1.2. Tentukan invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solusi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[B_3 - B_1]{B_2 - 2B_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 + 2B_2}$$

1.4. Metode Pencarian Invers Matriks (2)

Contoh 1.2 (lanjutan).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 \times (-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[B_2 + 3B_3]{B_1 - 3B_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_1 - 2B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Matriks Diagonal, Matriks Segitiga dan Matriks Simetrik

2.1. Matriks Diagonal (1)

- Matriks diagonal merupakan matriks persegi $(n \times n)$ dengan semua elemen tak nol berada pada diagonal utama.
- Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Bentuk umum:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

2.1. Matriks Diagonal (2)

- Matriks diagonal memiliki invers jika dan hanya jika semua elemen pada diagonal utama tidak nol. Secara umum inversnya adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

- Pangkat k dari matriks diagonal dapat dituliskan sebagai

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

2.2. Matriks Segitiga

- Matriks persegi $(n \times n)$ dengan semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol disebut **matriks segitiga atas**.
- Matriks persegi $(n \times n)$ dengan semua elemen diatas diagonal utama bernilai nol disebut **matriks segitiga bawah**.
- Bentuk umum:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah

2.3. Karakteristik Matriks Segitiga

- Transpose dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah dan sebaliknya.
- Perkalian dua matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.
- Perkalian dua matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah.
- Matriks segitiga memiliki invers jika dan hanya jika elemen diagonal utama tidak nol.
- Invers dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.
- Invers dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah.

2.4. Matriks Simetrik (1)

- Matriks persegi $(n \times n)$ dikatakan simetrik jika $A = A^T$.
- Contoh:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

- Jika A dan B matriks simetrik dengan ordo yang sama dan k adalah konstanta, maka:
  - A^T simetrik
  - $A + B$ dan $A - B$ simetrik
  - kA simetrik
  - A^{-1} simetrik

2.4. Matriks Simetrik (2)

- Jika A memiliki invers, maka $A\,A^T$ dan $A^T A$ juga memiliki invers.
- Perkalian suatu matriks dengan transposenya menghasilkan matriks simetrik.
- Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A\,A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

3. Penerapan Sistem Persamaan Linier

3.1. Analisis Jaringan (1)

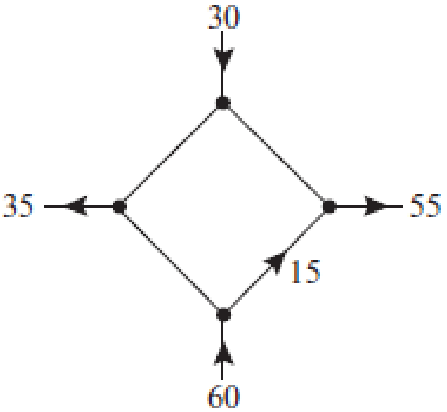
- Konsep jaringan muncul dalam berbagai macam aplikasi.
- Jaringan merupakan ***ranting*** dimana sesuatu “mengalir”.
- Sebagai contoh, ranting tersebut mungkin adalah kabel listrik dimana listrik mengalir, pipa dengan air atau minyak yang mengalir, atau jalan raya dimana kendaraan lalu lalang.
- Pada berbagai jenis jaringan, ranting terhubung di suatu titik yang disebut ***simpul***, dimana aliran membelah.
- Sebagai contoh, pada jaringan listrik, simpul terjadi saat tiga atau lebih kabel bertemu; sedangkan pada jaringan lalu lintas, simpul terjadi pada persimpangan jalan.

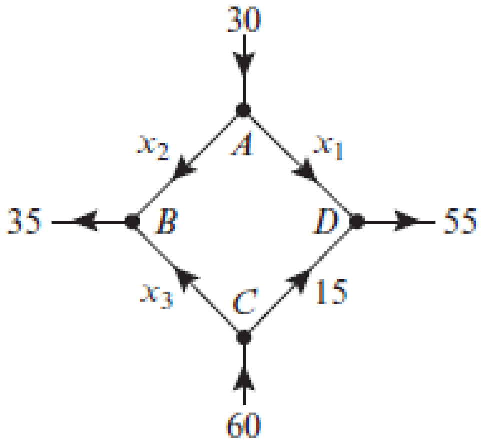
3.1. Analisis Jaringan (2)

- Dalam mempelajari jaringan, terdapat besaran ukuran yang menyatakan laju dimana media mengalir melalui cabang.
- Sebagai contoh, laju aliran listrik diukur dalam ampere, laju lairan air atau minyak diukur dalam liter per menit, dan laju arus lalu lintas dalam jumlah kendaraan per jam.
- Jaringan yang digunakan adalah jaringan dengan laju aliran yang masuk ke suatu simpul manapun sama dengan laju aliran keluar dari simpul tersebut.
- Hal ini digunakan untuk memastikan tidak ada media yang menumpuk di simpul dan memblokir pergerakan media melalui jaringan.

CONTOH SOAL

Contoh 3.1. Gambar disamping menunjukkan jaringan dengan 4 simpul dimana laju dan arah aliran pada setiap cabang diketahui. Carilah laju dan arah aliran pada cabang yang lainnya.



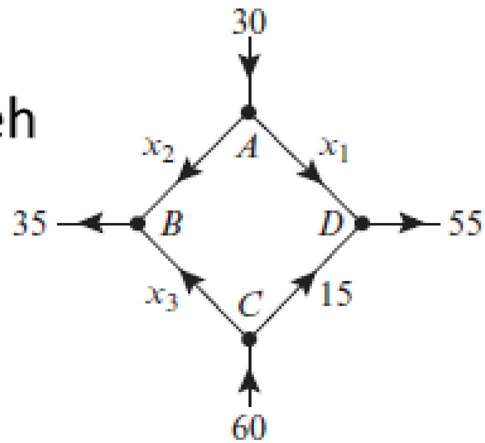


Solusi. Pada gambar disamping, diberikan arah sementara pada laju aliran yang tidak diketahui x_1, x_2, dan x_3. Arah aliran tidak harus benar, karena arah yang salah akan bernilai negatif pada hasil penyelesaiannya.

Dari gambar, laju aliran pada simpul A adalah

$$x_1 + x_2 = 30.$$

CONTOH SOAL



Contoh 3.1 (lanjutan). Dari simpul lainnya diperoleh

$$x_2 + x_3 = 35 \qquad \text{(simpul } B\text{)}$$
$$x_3 + 15 = 60 \qquad \text{(simpul } C\text{)}$$
$$x_1 + 15 = 55 \qquad \text{(simpul } D\text{)}$$

Keempat persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linier

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 30 \\ x_2 + x_3 & = & 35 \\ x_3 & = & 45 \\ x_1 & = & 40 \end{array}$$

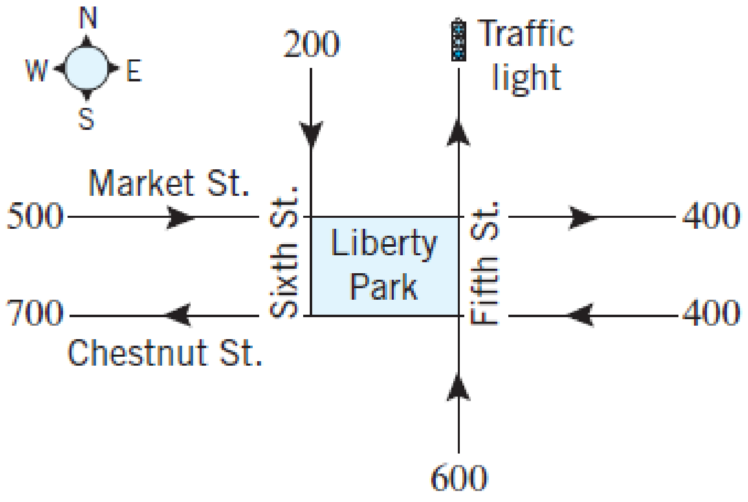
yang dapat digunakan untuk mecari nilai laju aliran yang tidak diketahui. Penyelesaian SPL disamping adalah

$$x_1 = 40, \qquad x_2 = -10, \qquad x_3 = 45$$

Karena nilai x_2 negatif, maka arah aliran sementara pada gambar diatas salah, yakni arah dari cabang tersebut adalah masuk ke A.

CONTOH SOAL

Contoh 3.2. Perhatikan jaringan lalu lintas berikut. Di sebelah utara Fifth Steet terdapat lampu lalu lintas yang diatur oleh komputer. Diagram tersebut menunjukkan jumlah rata-rata kendaraan per jam yang diharapkan keluar-masuk jalan yang membatasi kompleks tersebut. Jika semua jalan satu arah, tentukan berapa banyak kendaraan per jam yang harus melewati lampu lalu lintas agar jumlah kendaraan yang masuk sama dengan jumlah kendaraan yang keluar.



CONTOH SOAL

Solusi. Sama seperti sebelumnya, dimisalkan x adalah jumlah kendaraan per jam yang harus melewati lampu lalu lintas. Sehingga jumlah kendaraan per jam yang masuk dan keluar adalah

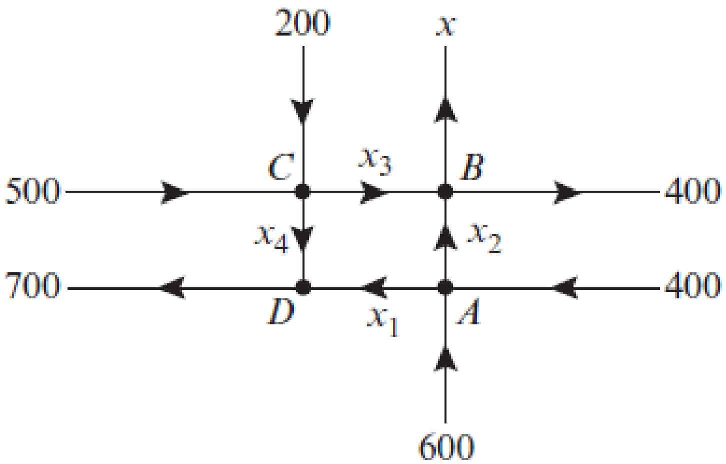
Masuk: $500 + 400 + 600 + 200 = 1700$

Keluar: $x + 700 + 400$

Dengan menyamakan jumlah kendaraan yang keluar dan masuk, diperoleh jumlah kendaraan yang harus melewati lampu lalu lintas adalah $x = 600$ kendaraan per jam

CONTOH SOAL

Contoh 3.3. Dari jaringan lalu lintas pada Contoh 3.2, diasumsikan lampu lalu lintas sudah disetel untuk menyeimbangkan total arus masuk dan keluar kompleks. Tentukan jumlah kendaraan rata-rata per jam yang melewati sepanjang jalan yang membatasi kompleks tersebut.



Solusi. Untuk menghindari kemacetan, arus kendaraan masuk dan keluar setiap persimpangan harus seimbang, maka

Persimpangan	Masuk		Keluar
A	$400 + 600$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$=$	$400 + x$
C	$500 + 200$	$=$	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	$=$	600

CONTOH SOAL

Contoh 3.3 (lanjutan). Dari Contoh 3.2, $x = 600$, maka diperoleh sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1000 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1000 \\ x_3 + x_4 &= 700 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 700 \end{aligned}$$

SPL disamping memiliki solusi tak hingga yang dapat dituliskan dengan persamaan parameter

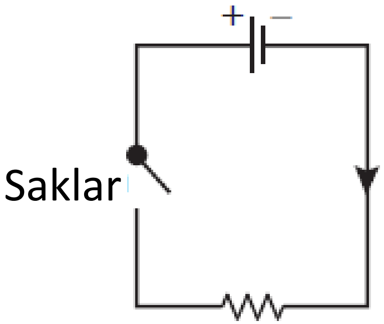
$$x_1 = 700 - t, \qquad x_2 = 300 + t, \qquad x_3 = 700 - t, \qquad x_4 = t$$

Namun nilai t tidak sepenuhnya sembarang karena ada syarat mutlak yang harus dipenuhi, yakni jumlah kendaraan tidak boleh negatif, sehingga t harus memenuhi $0 \le t \le 700$, sehingga

$$0 \le x_1 \le 700, \quad 300 \le x_2 \le 1000, \quad 0 \le x_3 \le 700, \quad 0 \le x_4 \le 700$$

3.2. Rangkaian Listrik (1)

- Selajutnya akan dibahas bagaimana analisis jaringan digunakan untuk menganalisis rangkaian listrik dengan baterai dan resistor.
- **Baterai** merupakan sumbar energi dan **resistor** seperti lampu adalah elemen yang menggunakan energi listrik.
- Gambar disamping menunjukkan rangkaian listrik dengan satu baterai (disimbolkan ⊣|⊢), satu resistor (disimbolkan –ᐱᐱᐱ–) dan sebuah saklar.



- Baterai memiliki **kutub positif** (+) dan **kutub negatif** (−).
- Saat saklar ditutup, arus listrik mengalir dari kutub positif baterai, melalui resistor, dan kembali ke kutub negatif (ditunjukkan oleh arah tanda panah pada gambar).

3.2. Rangkaian Listrik (2)

- Arus listrik, yang merupakan aliran elektron melalui kabel, mengalir seperti aliran air melalui pipa.
- Baterai seperti pompa yang menciptakan “tekanan listrik” untuk meningkatkan laju aliran elektron, dan resistor seperti pembatas dalam pipa yang mengurangi laju aliran elektron.
- Istilah teknis untuk tekanan listrik adalah **tegangan listrik** yang diukur dalam ***volt*** (V).
- Derajat dimana resistor mengurangi tegangan listrik disebut **hambatan** yang diukur dalam ***ohm*** (Ω).
- Laju aliran elektron dalam kabel disebut **arus** yang diukur dalam ***ampere*** atau ***amp*** (A).

3.2. Rangkaian Listrik (3)

- Efek yang tepat dari resistor diberikan oleh hukum Ohm berikut.

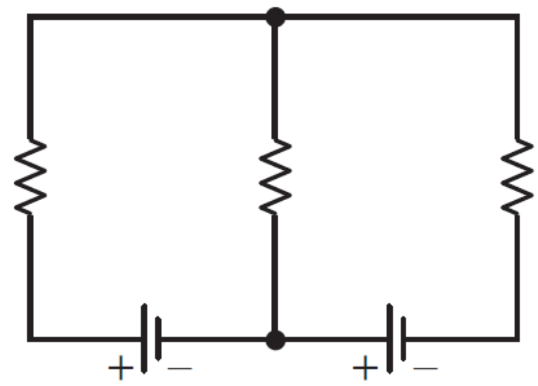
Hukum Ohm. Jika arus sebesar I ampere mengalir melalui resistor dengan hambatan R ohm, maka terdapat penurunan E volt tegangan listrik yang merupakan hasil kali dari arus dan hambatan, yakni

$$E = IR$$

- Suatu jaringan listrik biasanya memiliki beberapa baterai dan resistor yang digabungkan dengan beberapa kabel.
- Titik dimana tiga atau lebih kabel dalam jaringan dihubungkan disebut **simpul** atau **titik percabangan**.

3.2. Rangkaian Listrik (4)

- **Cabang** merupakan kabel yang menghubungkan dua simpul dan **loop tertutup** adalah rangkaian cabang yang dimulai dan diakhiri di simpul yang sama.
- Sebagai contoh, jaringan listrik pada gambar disamping memiliki 2 simpul dan 3 loop tertutup, 2 loop dalam dan 1 loop luar.



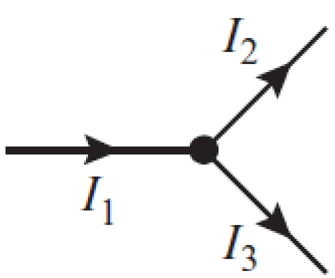
- Saat arus mengalir melalui jaringan listrik, arus tersebut mengalami kenaikan dan penurunan tegangan listrik.
- Perilaku arus di simpul dan sekitar loop tertutup diatur oleh dua hukum dasar, yakni Hukum Kirchhoff I dan II.

3.2. Rangkaian Listrik (5)

Hukum Kirchhoff I. Jumlah arus listrik yang masuk melalui simpul dalam suatu rangkaian listrik sama dengan jumlah arus yang keluar melalui simpul tersebut.

Hukum Kirchhoff II. Pada setiap rangkaian tertutup, jumlah beda potensialnya harus sama dengan nol.

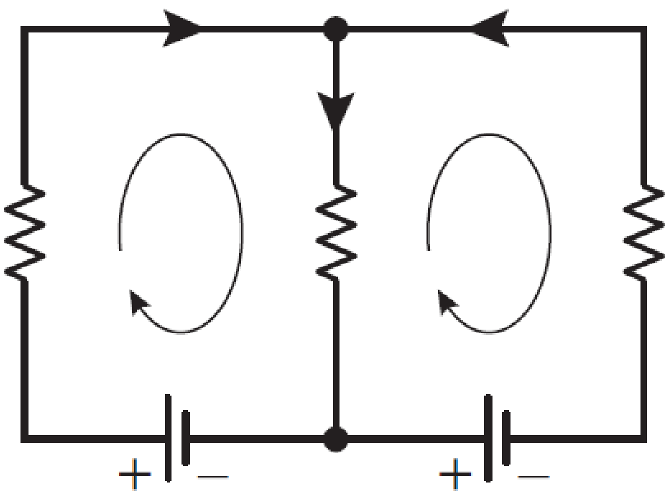
- Hukum Kirchhoff I merupakan pernyataan ulang dari prinsip kekekalan aliran pada sebuah simpul pada jaringan umum.



- Sehingga untuk contoh seperti gambar disamping, arus yang masuk ke simpul harus memenuhi persamaan $I_1 = I_2 + I_3$.

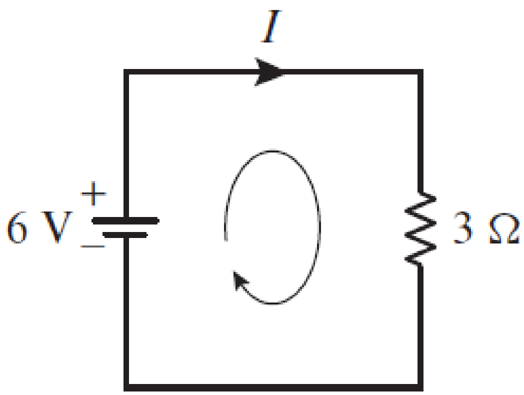
3.2. Rangkaian Listrik (6)

- Pada rangkaian dengan banyak loop dan baterai arah aliran arus sulit diketahui, jadi biasanya ditetapkan sembarang arah dimana arus mengalir pada cabang-cabang dan perhitungan matematik yang akan membuktikan apakah arah tersebut sudah benar.



- Selain menetapkan arah aliran arus, hukum Kirchhoff II memerlukan arah setiap loop tertutup. Arah ini dipilih sembarang, namun untuk konsistensi akan diambil arah searah jarum jam seperti terlihat pada gambar disamping.

CONTOH SOAL



Contoh 3.4. Tentukan arus I pada rangkaian listrik disamping

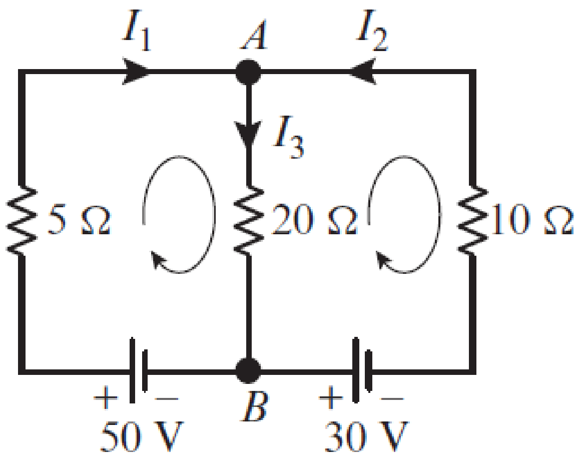
Solusi. Karena arah arus yang melalui resistor sama dengan arah loop, ada penurunan tegangan pada resistor. Menurut hukum Ohm, penurunan tegangan ini sebesar $E = IR = 3I$.

Karena arah loop dari – ke + melalui baterai, ada kenaikan tegangan 6 volt pada baterai. Jadi menurut hukum Kirchhoff II, maka

$$3I = 6$$

sehingga diperoleh arus $I = 2A$. Karena I positif, arah yang ditetapkan ke aliran arus benar.

CONTOH SOAL



Contoh 3.5. Tentukan arus I_1, I_2, dan I_3 pada rangkaian listrik disamping

Solusi. Dengan menggunakan arah aliran arus pada gambar dan hukum Kirchhoff I, diperoleh satu persamaan untuk setiap simpul:

Simpul	ArusMasuk		ArusKeluar
A	$I_1 + I_2$	$=$	I_3
B	I_3	$=$	$I_1 + I_2$

Kedua persamaan diatas sama karena dapat dituliskan sebagai

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.5 (lanjutan). Untuk memperoleh solusi tunggal untuk setiap arus, diperlukan dua persamaan lainnya, untuk itu akan digunakan hukum Kirchhoff II.

Rangkaian listrik tersebut memiliki 3 loop tertutup, loop dalam kiri berisi baterai 50 V, loop dalam kanan berisi baterai 30 V dan loop luar yang berisi kedua baterai.

Sehingga, berdasarkan kukum Kirchhoff II diperoleh 3 persamaan:

	KenaikanTegangan	**PenurunanTegangan**
LoopDalam Kiri	50	$5I_1 + 20I_3$
LoopDalamKanan	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Loop Luar	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

CONTOH SOAL

Contoh 3.5 (lanjutan). Persamaan tersebut dapat dituliskan:

$$
\begin{aligned}
5I_1 \qquad\qquad + 20I_3 &= \ \ 50 \\
10I_2 + 20I_3 &= -30 \\
5I - 10I_2 \qquad\qquad &= \ \ 80
\end{aligned}
$$

Karena persamaan ketiga merupakan selisih dari persamaan pertama dan kedua, maka persamaan ketiga tidak akan digunakan.

Dengan menggabungkan 1 persamaan yang diperoleh dari hukum Kirchhoff I dan 2 persamaan diatas, diperoleh SPL:

$$
\begin{aligned}
I_1 + \quad I_2 - \quad I_3 &= \quad 0 \\
5I_1 \qquad\qquad + 20I_3 &= \ \ 50 \\
10I_2 + 20I_3 &= -30
\end{aligned}
$$

Dari SPL disamping diperoleh $I_1 = 6$, $I_2 = -5$ dan $I_3 = 1$. Karena I_2 negatif, maka arah arus pada cabang tersebut salah.

3.3. Menyeimbangkan Persamaan Kimia (1)

- Senyawa kimia diwakili oleh **rumus kimia** yang menggambarkan susunan atom molekulnya.
- Misalnya air tersusun dari 2 atom hidrogen dan 1 atom oksigen, jadi rumus kimianya adalah H_2O; dan oksigen stabil terdiri dari 2 atom oksigen, sehingga rumus kimianya adalah O_2.
- Ketika beberapa senyawa kimia digabungkan dalam kondisi yang tepat, atom-atom dalam molekulnya disusun ulang untuk membentuk senyawa baru.
- Misalnya ketika metana terbakar, metana (CH_4) dan oksigen (O_2) bereaksi membentuk karbondioksida (CO_2) dan air (H_2O).

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

3.3. Menyeimbangkan Persamaan Kimia (2)

- Molekul di sebelah kiri tanda panah disebut **rektan** dan yang di sebelah kanan disebut **produk**.
- Dalam persamaan ini, tanda plus berfungsi untuk memisahkan molekul, bukan sebagai operasi aljabar.
- Namun persamaan tersebut belum tepat karena gagal proporsi molekul belum lengkap.
- Sebagai contoh, di sisi kanan diperlukan 3 molekul oksigen untuk setiap molekul karbon. Akan tetapi di sisi kiri hanya ada 2 molekul oksigen untuk setiap molekul karbon.
- Jadi di sisi reaktan, rasio metana untuk menstabilkan oksigen bukan merupakan reaksi yang lengkap.

3.3. Menyeimbangkan Persamaan Kimia (3)

- Suatu persamaan kimia dikatakan **seimbang** jika untuk setiap jenis atom dalam reaksi terdapat jumlah atom yang sama pada setiap sisinya.
- Sebagai contoh, versi seimbang dari reaksi metana dan oksigen adalah

$$\mathrm{CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O}$$

  yang artinya 1 molekul metana bereaksi dengan 2 molekul oksigen yang stabil untuk menghasilkan 1 molekul karbon dioksida dan 2 molekul air.
- Secara teori, persamaan ini dapat dikalikan dengan bilangan bulat positif (contoh: $\mathrm{2CH_4 + 4O_2 \rightarrow 2CO_2 + 4H_2O}$).

CONTOH SOAL

Contoh 3.6. Setarakan persamaan kimia berikut:

$$HCl \quad + \quad Na_3PO_3 \quad \rightarrow \quad H_3PO_4 \quad + \quad NaCl$$

[asam klorida] + [natrium fosfat] → [asam fosfat] + [natrium klorida]

Solusi. Misalkan x_1, x_2, x_3, dan x_4 merupakan bilangan bulat yang menyetarakan persamaan

$$x_1(HCl) + x_2(Na_3PO_4) \rightarrow x_3(H_3PO_4) + x_4(NaCl)$$

Dengan menyamakan jumlah atom kedua ruas, diperoleh

Hidrogen (H)	$1x_1 = 3x_3$	**Fosfor (P)**	$1x_2 = 1x_3$
Klorin (Cl)	$1x_1 = 1x\_4$	**Oksigen (O)**	$4x_2 = 4x_3$
Natrium (Na)	$3x_2 = 1x_4$		

CONTOH SOAL

Contoh 3.6 (lanjutan). Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 3x_3 \quad\quad &= 0 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad - x_4 &= 0 \\ 3x_2 \quad\quad\quad - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 \quad\quad &= 0 \\ 4x_2 - 4x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks augmented dari SPL tersebut, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.6 (lanjutan). Diperoleh solusi umum SPL tersebut

$$x_1 = t, \qquad x_2 = t/3\,, \qquad x_3 = t/3\,, \qquad x_4 = t$$

dengan nilai t sembarang.

Untuk memperoleh bilangan bulat positif terkecil yang menyetara-kan persamaan, diambil $t = 3$, sehingga diperoleh $x_1 = 3, x_2 = 1$, $x_3 = 1$, dan $x_4 = 3$.

Jadi persamaan kimia yang setara untuk soal diatas adalah

$$3\mathrm{HCl} + \mathrm{Na_3PO_4} \rightarrow \mathrm{H_3PO_4} + 3\mathrm{NaCl}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Diberikan matriks elementer E dan matriks A sebagai berikut. Tentukan operasi baris pada matriks E dan buktikan bahwa hasil kali EA sama dengan penerapan operasi baris pada matriks A.

a. $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

b. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

SOAL 2

Tentukan apakah matriks berikut memiliki invers, dan jika ada, carilah inversnya.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

SOAL 3

Carilah A^{-1}, A^2, A^{-2}, dan A^{-k} (dengan k bilangan bulat)

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

SOAL 4

Tentukan nilai konstanta a, b, dan c supaya matriks A simetrik.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 5

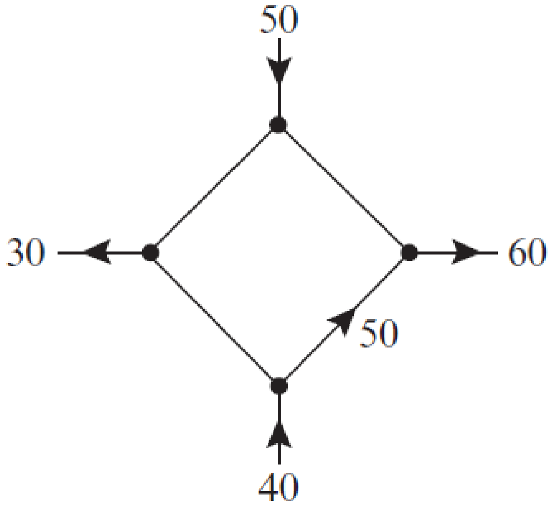
Carilah nilai x supaya matriks A memiliki invers.

a. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

SOAL 6

Gambar berikut menunjukkan jaringan dimana laju dan arah aliran di cabang tertentu diketahui. Carilah laju dan arah aliran di cabang yang lainnya.



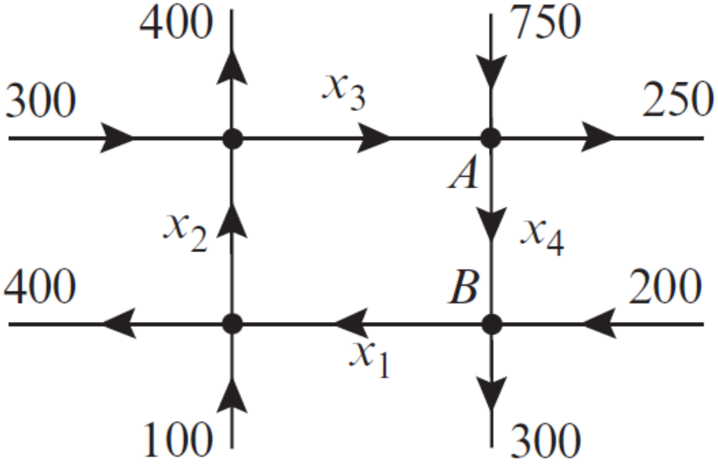
LATIHAN SOAL

SOAL 7

Gambar berikut menunjukkan jaringan jalan satu arah dengan arah lalu lintas seperti pada gambar. Laju aliran di sepanjang jalan diukur dalam jumlah rata-rata kendaraan per jam.

a. Tentukan SPL untuk mencari laju aliran yang tidak diketahui.

b. Selesaikan SPL tersebut untuk mencari laju jalan yang tidak diketahui.

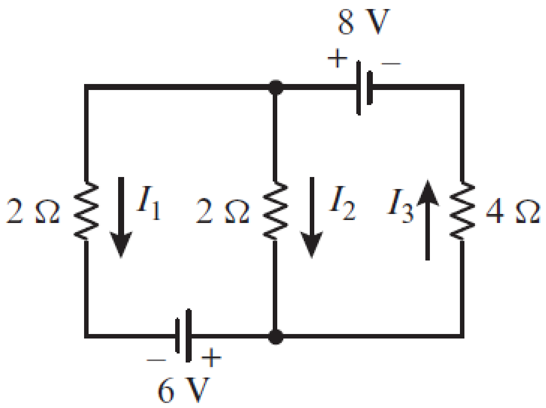


LATIHAN SOAL

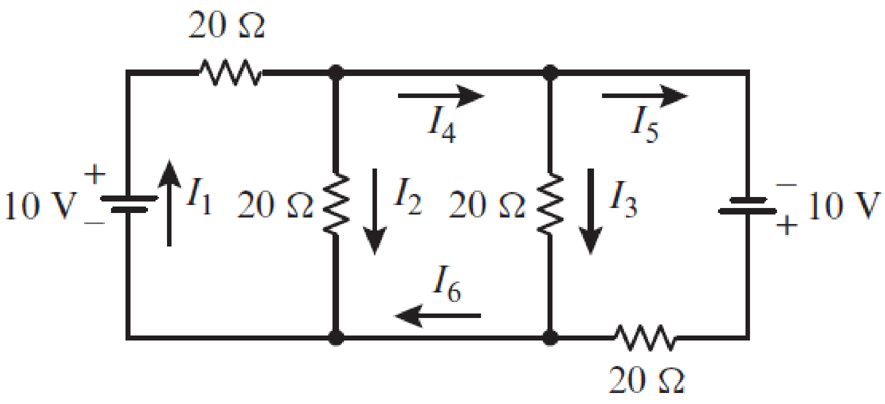
SOAL 8

Analisis rangkaian listrik berikut dengan mencari arus yang tidak diketahui.

a.



b.



SOAL 9

Tuliskan persamaan yang seimbang untuk reaksi kimia berikut.

a. $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (pembakaran propana)

b. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotosintesis)

RINGKASAN

- Matriks E disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat dibentuk dari matriks identitas melakukan satu operasi baris elementer.
- Jika matriks elementer E diperoleh dari suatu operasi baris elementer pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali matriks EA merupakan matriks hasil operasi baris yang sama terhadap matriks A.
- Invers suatu matriks dapat dicari dengan menggunakan konsep matriks identitas, matriks elementer dan operasi baris elementer.
- Matriks diagonal merupakan matriks persegi ($n \times n$) dengan semua elemen tak nol berada pada diagonal utama.
- Matriks diagonal memiliki invers jika dan hanya jika semua elemen pada diagonal utama tidak nol.

RINGKASAN

- Matriks persegi $(n \times n)$ dengan semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga atas.
- Matriks persegi $(n \times n)$ dengan semua elemen diatas diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga bawah.
- Transpose dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah dan sebaliknya.
- Perkalian dua matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.
- Perkalian dua matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah.
- Matriks segitiga memiliki invers jika dan hanya jika elemen diagonal utama tidak nol.
- Invers dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas. Invers dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah.

RINGKASAN

- Matriks persegi $(n \times n)$ dikatakan simetrik jika $A = A^T$.
- Jika A memiliki invers, maka $A\,A^T$ dan $A^T A$ juga memiliki invers.
- Perkalian suatu matriks dengan transposenya menghasilkan matriks simetrik.
- Penerapan SPL antara lain analisis jaringan, rangkaian listrik dan meyeimbangkan persamaan kimia.
- Konsep yang digunakan dalam penerapan analisis jaringan dan rangkaian listrik adalah laju arus yang masuk ke simpul sama dengan laju arus yang keluar.
- Konsep penyetaraan persamaan kimia adalah jumlah molekul di sisi kiri harus sama dengan jumlah molekul di sisi kanan.

Terima Kasih