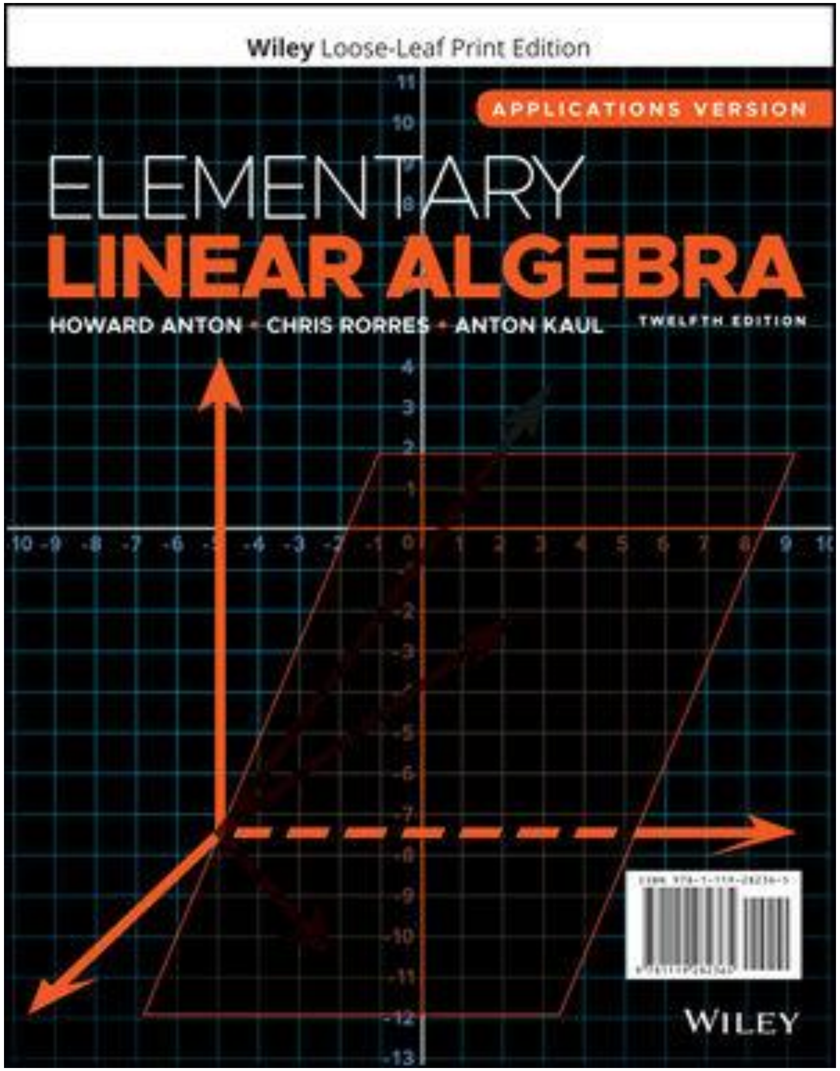
Ruang Hasil Kali Dalam

Pertemuan ke 17 – 20

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa dapat melakukan perhitungan ruang hasil kali dalam pada ruang vektor umum (C3, A3)

Materi

1. Ruang hasil kali dalam
2. Sudut dan ortogonalitas
3. Proses Gramm-Schmidt

1. Ruang Hasil Kali Dalam

1.1. Hasil Kali Dalam (1)

Hasil kali dalam pada ruang vektor V adalah fungsi yang memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk semua vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ di V dan sembarang skalar k.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (aksioma simetris)
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (aksioma penambahan)
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (aksioma homogen)
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (aksioma kepositifan)

Ruang vektor real dengan perkalian dalan disebut **ruang hasil kali dalam (RHKD) real.**

1.1. Hasil Kali Dalam (2)

- Karena aksioma ruang hasil kali dalam (RHKD) didasarkan pada sifat-sifat hasil kali titik, maka hasil kali dalam dapat didefinisikan dengan menggunakan perkalian titik $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$, yaitu
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$
- Jika V adalah ruang hasil kali dalam real, norm (panjang) vektor $\mathbf{v} \in V$ adalah
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$
dan jarak antara vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$$
- Vektor dengan norm 1 disebut **vektor satuan.**

1.1. Hasil Kali Dalam (3)

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor dalam RHKD V, dan jika k adalah sembarang skalar, maka:

a) $||\mathbf{v}|| \geq 0$ bernilai sama dengan jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

b) $||k\mathbf{v}|| = |k|\ ||\mathbf{v}||$.

c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ bernilai sama dengan jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

1.2. Hasil Kali Dalam dengan Bobot (1)

- Meskipun hasil kali dalam Euclidean merupakan hasil kali dalam terpenting di $\mathbb{R}^n$, terdapat berbagai macam aplikasi yang mengharuskan setiap suku diberi **bobot** yang berbeda.
- Misalkan $w_1, w_2, \ldots, w_n$ merupakan bilangan real positif yang disebut pembobot.
- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$, maka

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

merupakan definisi hasil kali dalam $\mathbb{R}^n$ yang disebut **hasil kali dalam Euclidean dengan bobot $\boldsymbol{w_1, w_2, \ldots, w_n}$**

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Diketahui $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^2$. Buktikan bahwa hasil kali dalam berbobot $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ memenuhi 4 aksioma hasil kali dalam.

Bukti.

Aksioma 1 : $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

Terbukti.

Aksioma 2 : Jika $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, maka

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= 3(u_1w_1 + v_1w_1) + 2(u_2w_2 + v_2w_2) \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

Terbukti.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1 (lanjutan).

Aksioma 3 : $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2$

$= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2)$

$= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ Terbukti.

Aksioma 4 : $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$

$3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ jika dan hanya jika $v_1 = v_2 = 0$

atau saat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Terbukti.

1.2. Hasil Kali Dalam dengan Bobot (2)

- Norm dan jarak tergantung pada hasil kali dalam yang digunakan. Jika hasil kali dalam berubah, maka norma dan jarak antar vektor juga berubah.

Contoh 1.2. Untuk vektor $\mathbf{u} = (1, 0)$ dan $\mathbf{v} = (0, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ dengan hasil kali Euclidean memiliki $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ dan

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Namun diubah menjadi hasil kali dalam Euclidean berbobot

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

diperoleh $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$ dan

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2} \\ &= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

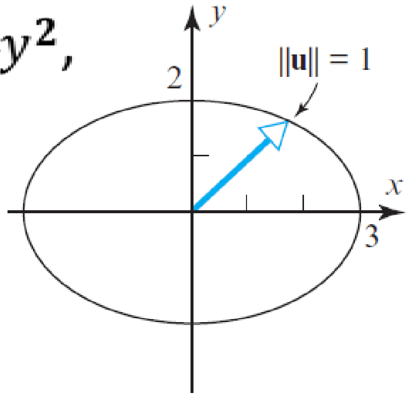
1.3. Lingkaran atau Bola Satuan di RHKD

- Jika V adalah RHKD, maka himpunan titik di V yang memenuhi
$$\|\mathbf{u}\| = 1$$
disebut **bola satuan** atau **lingkaran satuan** di V.

Contoh 1.3. Gambarkan lingkaran satuan pada sistem koordinat-xy di $\mathbb{R}^2$ dengan menggunakan hasil kali dalam Euclidean berbobot
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{9}u_1v_1 + \tfrac{1}{4}u_2v_2.$$

Solusi. Jika $\mathbf{u} = (x, y)$, maka $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2}$,

sehingga persamaan lingkaran satuan adalah
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



1.4. Hasil Kali Dalam dengan Matriks (1)

- Andaikan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor kolom di $\mathbb{R}^n$. Jika A merupakan matriks dengan ordo $n \times n$ dan memiliki invers, maka **hasil kali dalam pada $\mathbb{R}^n$ oleh matriks A** didefinisikan sebagai

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor kolom, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dapat dituliskan sebagai $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$ sehingga definisi diatas dapat diubah menjadi

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{v})^T A\mathbf{u}$$

atau

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T A^T A\mathbf{u}$$

1.4. Hasil Kali Dalam dengan Matriks (2)

- Hasil kali dalam Euclidean standar pada $\mathbb{R}^n$ adalah hasil kali dalam dengan matriks identitas $n \times n$, karena saat $A = I$, maka

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

- Sehingga hasil kali dalam Euclidean dengan bobot

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

dihasilkan oleh matriks

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

- Dapat dilihat bahwa $A^T A$ adalah matriks diagonal $n \times n$ dengan diagonal utama $w_1, w_2, \dots, w_n$.

1.4. Hasil Kali Dalam dengan Matriks (3)

- Jika $\mathbf{u} = U$ dan $\mathbf{v} = V$ adalah vektor dalam ruang vektor M_{nn}, maka

$$\langle u, v \rangle = \mathrm{tr}(U^T V)$$

merupakan definisi hasil kali dalam pada M_{nn} yang disebut **hasil kali dalam standar** pada ruang vektor tersebut.

Contoh 1.4. Jika $\mathbf{u} = U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathrm{tr}(U^T V) = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(U^T U)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(V^T V)} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

1.5. Sifat-Sifat Aljabar Hasil Kali Dalam

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor di RHKD real V, dan jika k adalah suatu skalar, maka:

a) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

d) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

e) $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle$

2. Sudut dan Ortogonalitas

2.1. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

- Dari definisi perkalian titik, diketahui sudut θ antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

- Rumus diatas benar karena memenuhi pertidaksamaan Cauchy-Schwarz yang menyatakan

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

yang diperlukan agar invers kosinus terdefinisi.

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor-vektor di RHKD real V, maka

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$$

2.2. Sudut Antar Vektor

- Dari pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, diperoleh

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

- Terdapat sudut θ dalam radian dimana

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \text{ dan } 0 \leq \theta \leq \pi$$

- Sehingga dapat didefinisikan **sudut θ dantara vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$** adalah

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\right)$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1. Misalkan M_{22} memiliki hasil kali standar. Carilah kosinus dari sudut antara kedua vektor

$$\mathbf{u} = U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v} = V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solusi. Dari contoh 1.4, diperoleh

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 16, \qquad ||\mathbf{u}|| = \sqrt{30}, \qquad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{14}$$

Sehingga diperoleh

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||\,||v||} = \frac{16}{\sqrt{30}\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{420}} \approx 0{,}78$$

2.3. Sifat-Sifat Panjang dan Jarak di RHKD

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di RHKD real V, dan jika k adalah sembarang skalar, maka:

a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (pertidaksamaan segitiga untuk vektor)

b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ (pertidaksamaan segitiga untuk jarak)

2.4. Ortogonalitas

Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di RHKD V dikatakan ortogonal jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Contoh 2.2. Vektor $\mathbf{u} = (1,1)$ dan $\mathbf{v} = (1,-1)$ saling ortogonal terhadap hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^2$ karena

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

Namun keduanya tidak ortogonal terhadap hasil kali dalam dengan bobot $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ karena

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0$$

Contoh 2.3. Vektor $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ di RHKD M_{22} saling ortogonal karena

$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

2.5. Pelengkap Ortogonal

- Jika W merupakan subruang dari RHKD real V, maka himpunan semua vektor di V yang ortogonal dengan semua vektor di W disebut **pelengkap ortogonal** dari W, disimbolkan dengan $W^{\perp}$.
- Jika W adalah subruang dari RHKD real V, maka:
  a) $W^{\perp}$ adalah subruang dari V.
  b) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.
- Jika W adalah subruang dari RHKD real dengan dimensi hingga V, maka pelengkap ortogonal dari $W^{\perp}$ adalah W, dituliskan

$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.4. Misalkan W adalah subruang dari $\mathbb{R}^6$ yang dengan rentang/span

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, 2, 4, -3),$$
$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15), \qquad \mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

Tentukan basis pelengkap ortogonal dari W.

Solusi. Subruang W sama dengan ruang baris matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Karena ruang baris dan ruang null dari A saling ortogonal, maka akan dicari basis ruang null dari matriks A.

CONTOH SOAL

Contoh 2.4 (lanjutan). Dari contoh sebelumnya (cek materi Ruang Vektor Umum, slide Ruang Null) diperoleh vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yang membentuk basis untuk ruang null matriks A. Jadi basis pelengkap ortogonal dari W adalah

$$\mathbf{v}_1 = (-3,1,0,0,0,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (-4,0,-2,1,0,0),$$
$$\mathbf{v}_3 = (-2,0,0,0,1,0)$$

3. Proses Gramm-Schmidt

3.1. Himpunan Ortogonal dan Ortonormal (1)

- Himpunan dua atau lebih vektor di RHKD real dikatakan **ortogonal** jika setiap pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut saling ortogonal.
- Himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki panjang 1 disebut **ortonormal**.

Contoh 3.1. Misalkan

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,0, -1)$$

di $\mathbb{R}^3$ dengan perkalian dalam Euclidean terdefinisi. Himpunan vektor $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonal karena

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$$

3.1. Himpunan Ortogonal dan Ortonormal (2)

- Suatu himpunan ortonormal dapat dibentuk dari vektor-vektor himpunan ortogonal dengan membagi setiap vektor $\mathbf{v}$ dengan panjang vektor tersebut.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Contoh 3.2. Panjang vektor pada contoh 3.1 dalam Euclidean adalah $\|\mathbf{v}_1\| = 1, \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}, \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}$. Sehingga

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (0, 1, 0), \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Himpunan $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ortonormal karena

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0 \text{ dan } \|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{u}_3\| = 1$$

3.1. Himpunan Ortogonal dan Ortonormal (3)

- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan ortogonal dari vektor tak nol dalam suatu RHKD, maka S bebas linier.
- Dalam RHKD, basis yang mengandung vektor-vektor ortogonal disebut **basis ortogonal**.
- Sedangkan basis yang mengandung vektor-vektor ortonormal disebut **basis ortonormal**.
- Contoh sederhana basis ortonormal adalah basis standar untuk $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali Euclidean

  $$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\dots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$$

3.1. Himpunan Ortogonal dan Ortonormal (4)

- Pada contoh 3.2 ditunjukkan bahwa vektor

$$\mathbf{u}_1 = (0,1,0), \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ dan } \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

  membentuk himpunan ortonormal terhadap hasil kali Euclidean dalam $\mathbb{R}^3$.

- Karena $\mathbb{R}^3$ merupakan ruang dimensi-3 dan ketiga vektor tersebut saling bebas linier, maka $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ merupakan basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^3$.

3.2. Koordinat Relatif terhadap Basis Ortogonal

- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis ortogonal untuk RHKD V, dan jika $\mathbf{u}$ adalah sembarang vektor di V, maka

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$

- Sehingga, koordinat relatif dari $\mathbf{u}$ terhadap basis ortogonal $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah

$$(\mathbf{u})_S = \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \right)$$

3.3. Koordinat Relatif terhadap Basis Ortonormal

- Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis ortonormal untuk RHKD V, dan jika $\mathbf{u}$ adalah sembarang vektor di V, maka
$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$
- Sehingga, koordinat relatif dari $\mathbf{u}$ terhadap basis ortonormal $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah
$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle)$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.3. Misalkan

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

Dapat dicek bahwa $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^3$ dengan hasil kali dalam Euclidean. Tuliskan vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ sebagai kombinasi linier dari vektor di S, dan carilah koordinat vektor $(\mathbf{u})_S$.

Solusi. Hitung hasil kali dalam vektor $\mathbf{u}$ dengan vektor-vektor basis, diperoleh

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1(0) + 1(1) + 1(0) = 1$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = 1\left(-\tfrac{4}{5}\right) + 1(0) + 1\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\tfrac{4}{5} + \tfrac{3}{5} = -\tfrac{1}{5}$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = 1\left(\tfrac{3}{5}\right) + 1(0) + 1\left(\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.3 (lanjutan). Maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

atau

$$(1,1,1) = (0,1,0) - \tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{7}{5}\left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

Sehingga koordinat vektor $\mathbf{u}$ relatif terhadap S adalah

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3\rangle) = \left(1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5}\right)$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.4. Tunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\mathbf{w}_1 = (0,2,0), \qquad \mathbf{w}_2 = (3,0,3), \qquad \mathbf{w}_3 = (-4,0,4)$$

membentuk basis ortogonal untuk $\mathbb{R}^3$ dengan hasil kali dalam Euclidean, dan gunakan basis tersebut untuk mencari basis ortonormal dengan menormalkan setiap vektor.

Solusi. Vektor-vektor tersebut saling ortogonal karena

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = 0$$

Sehingga ketiga vektor tersebut saling bebas linier dan membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$. Dengan menghitung panjang tiap vektor, diperoleh basis ortonomal

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0,1,0), \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.5. Tuliskan vektor $\mathbf{u} = (1, 2, 4)$ sebagai kombinasi linier dari basis ortonormal yang diperoleh dari contoh 3.4.

Solusi. Akan dicari kombinasi linier dimana

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

Karena $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = (1, 2, 4) \cdot (0, 1, 0) = 2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

maka

$$(1, 2, 4) = 2(0, 1, 0) + \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3.4. Proyeksi Ortogonal

- Jika W merupakan sub-ruang dengan dimensi terhingga dari RHKD V, maka setiap vektor $\mathbf{u}$ dalam V dapat dituliskan sebagai
$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$
dimana $\mathbf{w}_1$ di W dan $\mathbf{w}_2$ di $W^\perp$.
- Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah **basis ortogonal** untuk W, dan $\mathbf{u}$ adalah sembarang vektor di V, maka
$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r$$
- Jika$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah **basis ortonormal** untuk W, dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang vektor di V, maka
$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.6. Misalkan $\mathbb{R}^3$ memiliki hasil kali dalam Euclidean dan W merupakan subruang uang direntangkan oleh vektor ortonormal $\mathbf{v}_1 = (0,1,0)$ dan $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$. Dari definisi proyeksi ortogonal dari $\mathbf{u} = (1,1,1)$ pada W adalah

$$\begin{aligned}\text{proj}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0,1,0) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right)\end{aligned}$$

Pelengkap ortogonal dari $\mathbf{u}$ terhadap W adalah

$$\text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u} = (1,1,1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

Perhatikan bahwa $\text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u}$ ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, sehingga vektor ini ortogonal terhadap semua vektor di W yang direntang oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.

3.5. Proses Gram-Schmidt

- Setiap RHKD berdimensi tak hingga bukan nol memiliki basis ortonormal.
- Untuk mengubah basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ menjadi basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, lakukan perhitungan berikut:

Langkah 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

Langkah 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

Langkah 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$\vdots$

(lanjutkan sampai langkah ke-r)

Langkah tambahan

Untuk mengubah basis ortogonal menjadi basis ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r\}$, normalkan vektor basis ortogonal.

CONTOH SOAL

Contoh 3.7. Diketahui vektor $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$ dan $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ merupakan basis pada ruang vektor V. Tentukan basis ortogonal dan basis ortonormalnya.

Solusi. Cek ortogonalitas:

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= 0+1+1 = 2 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle &= 0+0+1 = 1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle &= 0+0+1 = 1 \end{aligned}\right\} \text{Tidak ortogonal}$$

Dibentuk vektor basis ortogonal:

Langkah 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,1)$

Langkah 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

$$= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.7 (lanjutan).

Langkah 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Maka

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

merupakan elemen dari basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$.

Norm ketiga vektor tersebut adalah

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.7 (lanjutan). Sehingga diperoleh vektor satuan

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

yang merupakan basis ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$.

3.6. Dekomposisi-QR

- Algoritma numerik berdasarkan Gram-Schmidt yang dikenal sebagai dekomposisi-QR merupakan dasar ilmu matematika yang penting untuk berbagai macam algoritma numerik.
- Jika A adalah matriks $m \times n$ dengan vektor kolom bebas linier $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ maka A dapat difaktorkan menjadi
$$A = QR$$
dimana Q adalah matriks $m \times n$ dengan vektor kolom ortonormal $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ dan R adalah matriks segitiga atas $n \times n$ yang memiliki invers dengan
$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.8. Carilah dekomposisi-QR dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solusi. Vektor kolom dari A adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan algoritma Gram-Schmidt dan normalisasi setiap vektor kolom, diperoleh vektor ortonormal (contoh 3.7)

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.8 (lanjutan). Sehingga diperoleh

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

maka dekomposisi QR dari matriks A adalah

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{R}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Carilah $\|\mathbf{u}\|$ dan $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ relatif terhadap hasil kali dalam Euclidean $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$ di $\mathbb{R}^2$, jika

a. $\mathbf{u} = (-3,2)$ dan $\mathbf{v} = (1,7)$

b. $\mathbf{u} = (-1,2)$ dan $\mathbf{v} = (2,5)$

SOAL 2

Carilah $\|U\|$ dan $d(U,V)$ relatif terhadap hasil kali dalam standar pada M_{22}, jika

a. $U = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

SOAL 3

Carilah $\|\mathbf{u}\|$ dan $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ untuk vektor $\mathbf{u} = (-1, 2)$ dan $\mathbf{v} = (2, 5)$ relatif terhadap hasil kali dalam pada $\mathbb{R}^2$ oleh matriks A, jika

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

SOAL 4

Carilah kosinus dari sudut antara kedua vektor berikut terhadap perkalian dalam Euclidean.

a. $\mathbf{u} = (1, -3),\ \ \mathbf{v} = (2, 4)$

b. $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1),\ \mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

c. $\mathbf{u} = (4, 1, 8),\ \mathbf{v} = (1, 0, -3)$

LATIHAN SOAL

SOAL 5

Carilah kosinus dari sudut antara A dan B terhadap perkalian dalam pada M_{22}.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

SOAL 6

Tentukan apakah vektor-vektor berikut ortogonal terhadap perkalian dalam Euclidean.

a. $\mathbf{u} = (-1, 3, 2), \;\; \mathbf{v} = (4, 2, -1)$

b. $\mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1), \; \mathbf{v} = (2, 1, -2, 9)$

LATIHAN SOAL

SOAL 7

Carilah basis pelengkap ortogonal dari subruang dari $\mathbb{R}^2$ yang direntangkan oleh vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 2, 2)$.

SOAL 8

Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$, dan $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ membentuk basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^3$ terhadap hasil kali dalam Euclidean. Kemudian tuliskan koordinat vektor $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ relatif terhadap basis ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

LATIHAN SOAL

SOAL 9

Vektor kolom dari matriks Q berikut diperoleh dari menerapkan algoritma Gram-Schmidt terhadap vektor kolom dari matriks A. Carilah dekomposisi QR dari matriks A.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

SOAL 10

Carilah dekomposisi-QR dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

RINGKASAN

- **Hasil kali dalam** pada suatu ruang vektor memenuhi aksioma simetris, penambahan, homogen dan kepositifan.
- Hasil kali dalam dapat didefinisikan dengan menggunakan **perkalian titik dua vektor** dalam ruang Euclidean.
- Hasil kali dalam yang menggunakan bobot disebut **hasil kali dalam Euclidean dengan bobot**.
- Himpunan semua titik pada suatu ruang hasil kali dalam V yang memiliki panjang 1 disebut **bola** atau **lingkaran satuan** di V.
- Hasil kali dalam pada ruang Euclidean dapat dihasilkan oleh suatu matriks berordo $n \times n$ dan memiliki invers.

RINGKASAN

- **Sudut** antara dua vektor dapat dicari dengan menggunakan definisi hasil kali dalam dan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz.
- Dua vektor dikatakan **ortogonal** jika hasil kali dalam kedua vektor sama dengan nol.
- Jika W merupakan subruang dari RHKD real V, maka himpunan semua vektor di V yang ortogonal dengan semua vektor di W disebut **pelengkap ortogonal** dari W, disimbolkan dengan $W^{\perp}$.
- Himpunan dua atau lebih vektor di RHKD real dikatakan **ortogonal** jika setiap pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut saling ortogonal. Himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki panjang 1 disebut **ortonormal**

RINGKASAN

- Dalam RHKD, basis yang mengandung vektor-vektor ortogonal disebut **basis ortogonal**.
- Sedangkan basis yang mengandung vektor-vektor ortonormal disebut **basis ortonormal**.
- Jika $\mathbf{u}$ adalah sembarang vektor di RHKD V, maka dapat dicari **koordinat relatif $\mathbf{u}$** terhadap basis ortogonal atau basis ortonormal RHKD V.
- **Proses Gramm-Schmidt** digunakan untuk mengubah basis RHKD menjadi basis ortogonal.
- Salah satu penerapan proses Gramm-Schmidt adalah dalam dekomposisi QR

Terima Kasih