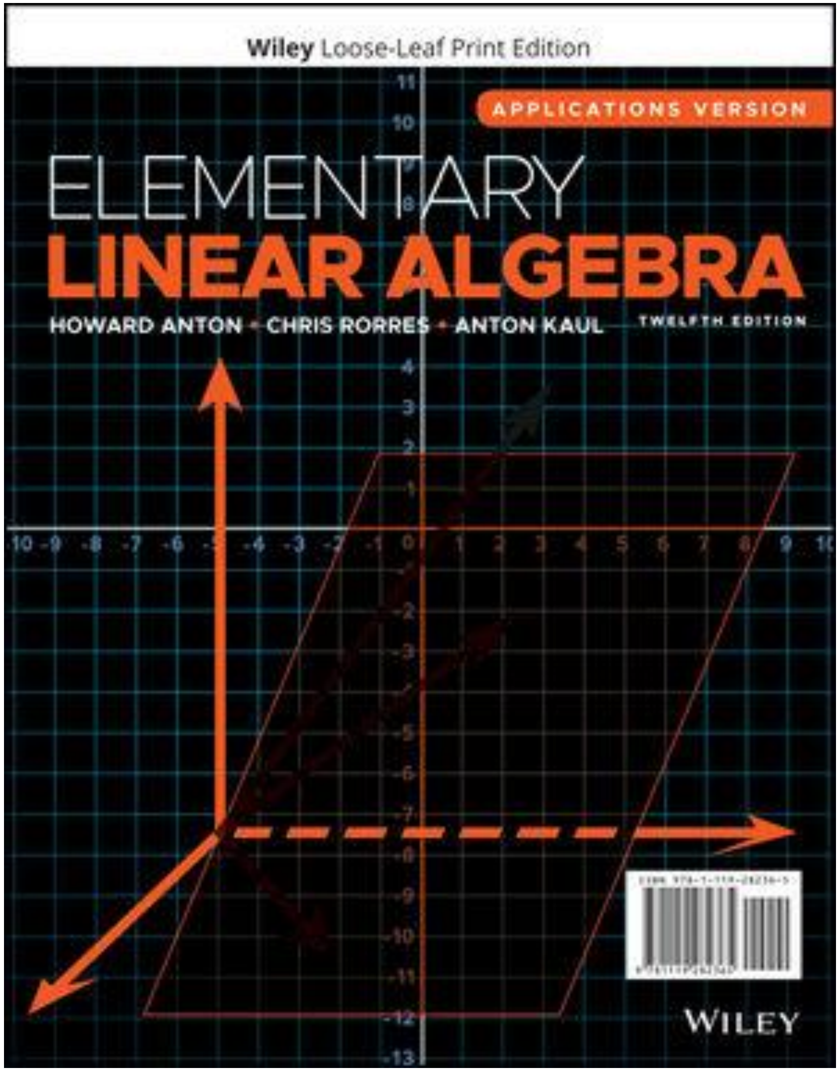
# Ruang Vektor Euclidean

## Pertemuan ke 9 – 12

Universitas Bunda Mulia

## Diadopsi dari sumber :



# Sub-CPMK

- Mahasiswa dapat melakukan operasi hitung dengan menggunakan konsep ruang vektor dimensi-2, dimensi-3 dan ruang vektor euclidean (C3, A3)

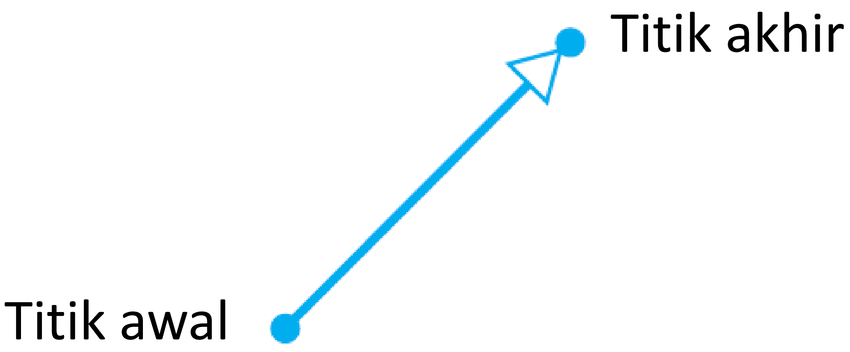
# Materi

1. Vektor pada ruang dimensi-2, dimensi-3 dan dimensi-$n$
2. Norm, hasil kali titik dan jarak pada ruang dimensi-$n$
3. Hasil kali silang

# 1. Vektor pada Ruang Dimensi-2, Dimensi-3 dan Dimensi-$n$

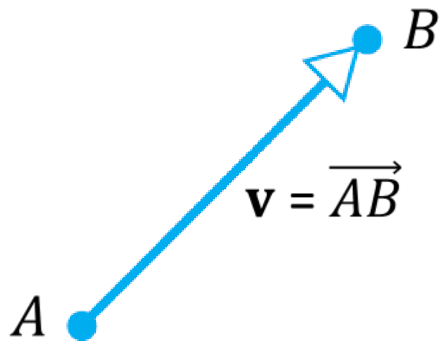
# 1.1. Vektor Geometris (1)

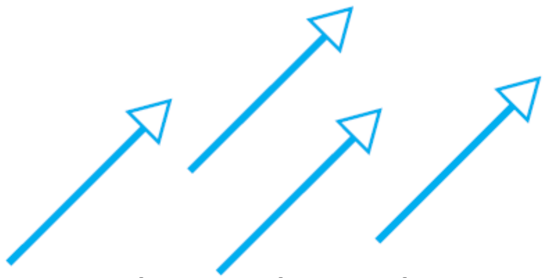
- Vektor 2 dimensi dan 3 dimensi direpresentasikan dengan menggunakan garis panah.
- Arah panah menentukan **arah** vektor dan **panjang** panah menentukan besarnya.
- Secara matematika ini dikenal sebagai vektor **geometris**.
- Ekor panah disebut **titik awal (*initial*)** vektor dan ujungnya adalah **titik akhir (*terminal*)**.



# 1.1. Vektor Geometris (2)

- Vektor $\mathbf{v}$ dengan titik awal $A$ dan titik akhir $B$ dapat dituliskan sebagai $\overrightarrow{AB}$.
- Vektor dengan panjang dan arah yang sama dikatakan **ekuivalen**.
- Disini vektor ditentukan oleh panjang dan arahnya, sehingga vektor ekiuvalen dianggap sebagai vektor yang sama meskipun berada pada posisi yang berbeda.
- Dua vektor ekuivalen dapat dituliskan dengan $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.



Vektor ekuivalen

# 1.2. Penjumlahan Vektor (1)

**Aturan Jajar Genjang.** Jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada dimensi-2 atau dimensi-3 yang diposisikan sedemikian sehingga titik awal kedua vektor sama, sehingga kedua vektor membentuk sisi yang berdekatan dari sebuah jajar genjang, dan jumlah $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah vektor yang direpresentasikan oleh panah dari titik awal yang sama ke titik berlawanan dari jajar genjang.

**Aturan Segitiga.** Jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada dimensi-2 atau dimensi-3 yang diposisikan sedemikian sehingga titik awal $\mathbf{w}$ berada di titik akhir $\mathbf{v}$, maka jumlah $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ diwakili oleh panah dari titik awal $\mathbf{v}$ ke titik akhir $\mathbf{w}$.

# 1.2. Penjumlahan Vektor (2)

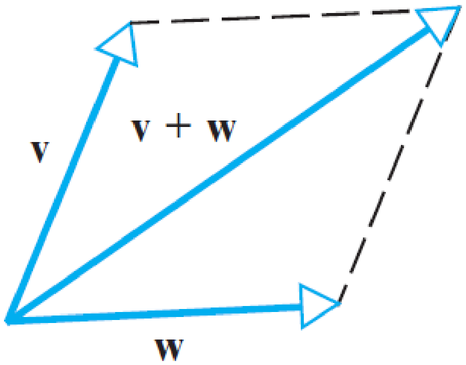
**Penjumlahan dengan Translasi.** Jika $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dan $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ diposisikan sedemikian sehingga titik awal ketiganya sama, maka titik terminal $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ dapat dicari dengan dua cara:

1. Titik terminal $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah titik yang diperoleh jika titik terminal $\mathbf{v}$ ditranslasikan ke arah $\mathbf{w}$ dengan jarak yang sama dengan panjang $\mathbf{w}$.
2. Titik terminal $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah titik yang diperoleh jika titik terminal $\mathbf{w}$ ditranslasikan ke arah $\mathbf{v}$ dengan jarak yang sama dengan panjang $\mathbf{v}$.

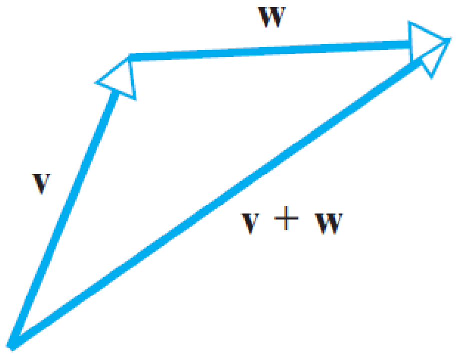
Hal ini berarti, dapat dikatakan bahwa $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ merupakan translasi dari $\mathbf{v}$ oleh $\mathbf{w}$, atau translasi dari $\mathbf{w}$ oleh $\mathbf{v}$.

# 1.2. Penjumlahan Vektor (3)

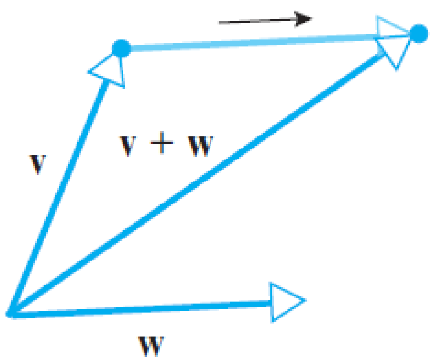
- Aturan Jajar Genjang

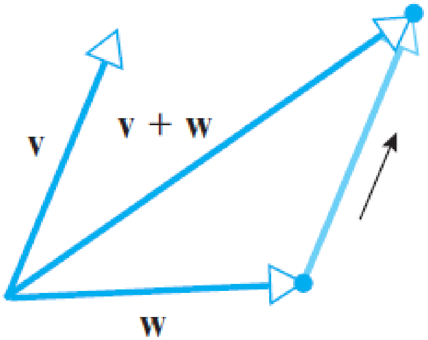



- Aturan Segitiga



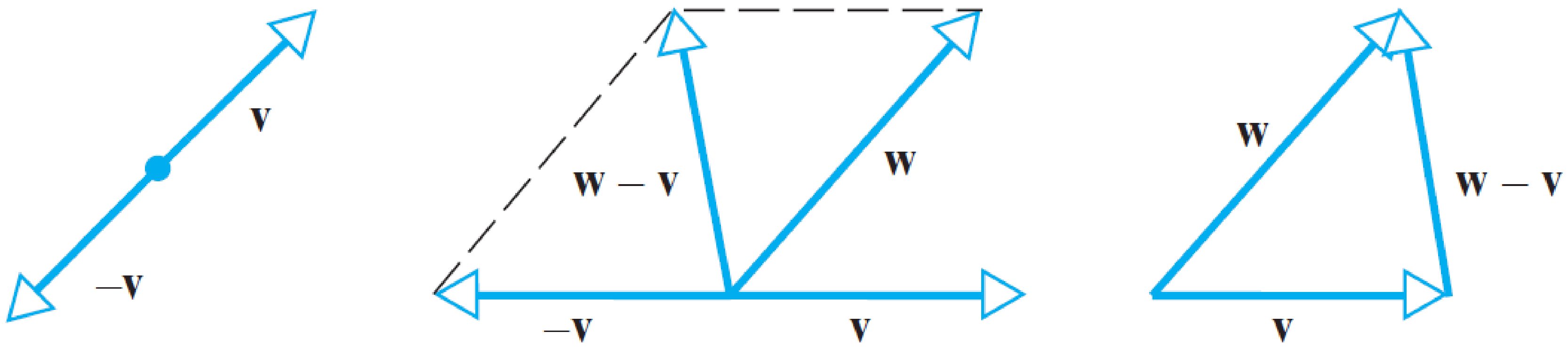

- Penjumlahan dengan Translasi



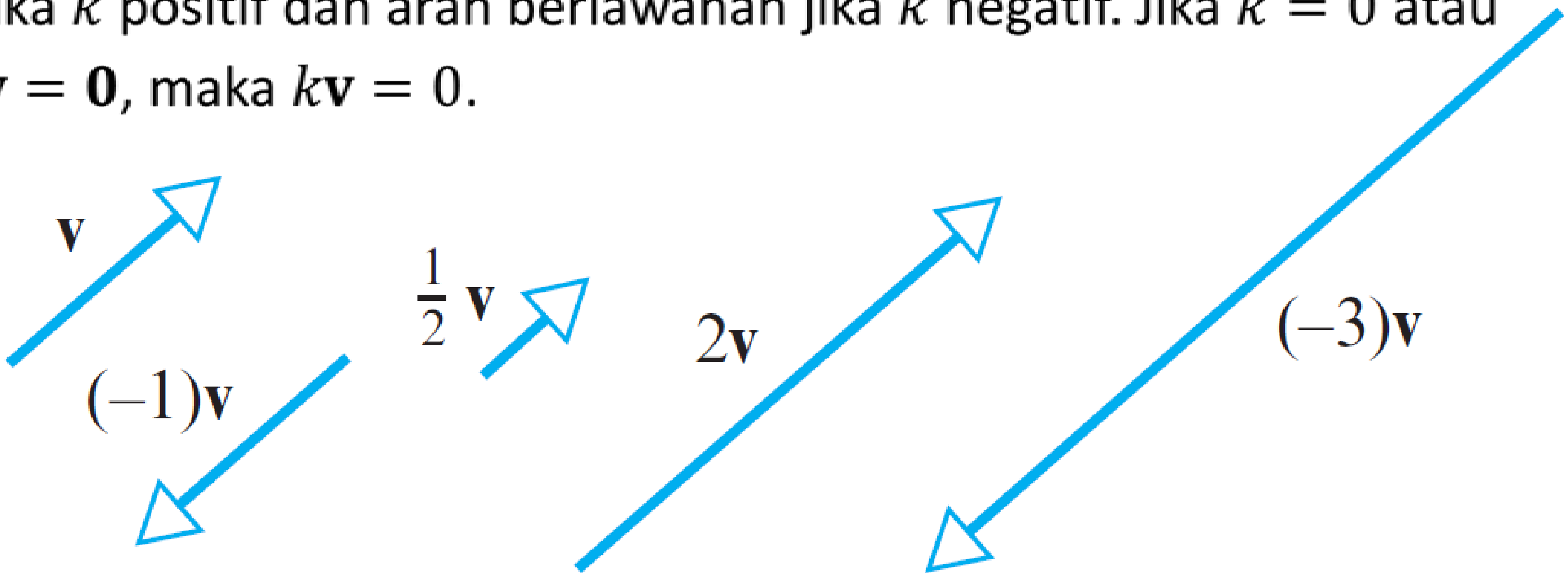
# 1.3. Pengurangan Vektor

- Vektor **negatif** dari vektor $\mathbf{v}$ dituliskan sebagai – $\mathbf{v}$, adalah vektor yang memiliki panjang yang sama dengan vektor $\mathbf{v}$ namun memiliki arah yang berlawanan.
- Selisih antara vektor $\mathbf{v}$ dan vektor $\mathbf{w}$, dinotasikan $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ adalah jumlah dari $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$.



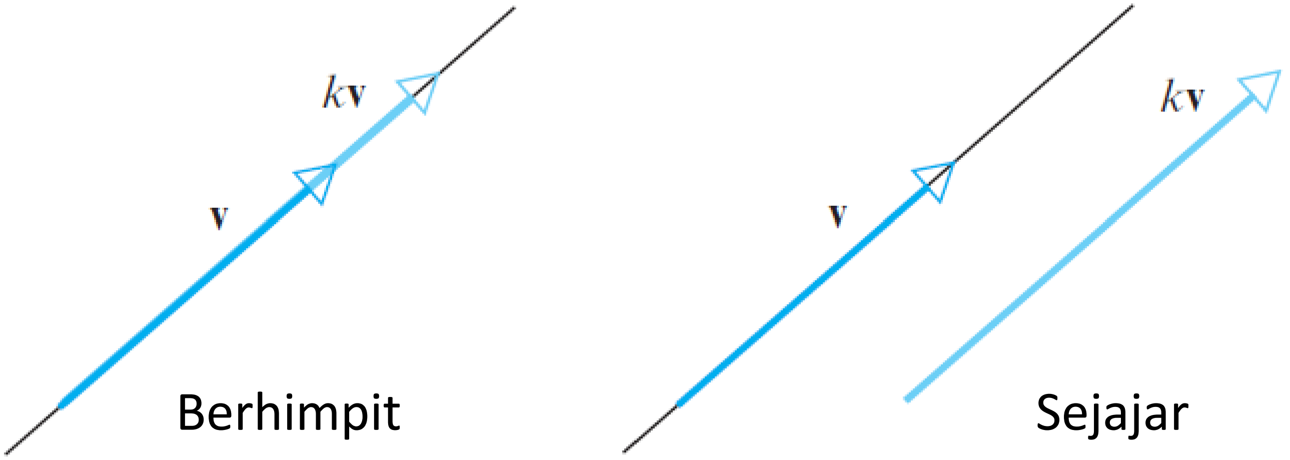
# 1.4. Perkalian Skalar

Jika vektor $\mathbf{v}$ adalah vektor tak nol pada ruang dimensi-2 atau dimensi-3, dan jika $k$ adalah suatu konstanta bukan nol, maka dapat didefinisikan **perkalian skalar $\boldsymbol{v}$ dengan $\boldsymbol{k}$** merupakan vektor dengan panjang $|k|$ kali panjang vektor $\mathbf{v}$ dengan arah yang sama jika $k$ positif dan arah berlawanan jika $k$ negatif. Jika $k = 0$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka $k\mathbf{v} = 0$.



# 1.4. Vektor Berhimpit dan Sejajar

- Andaikan vektor **v** dan **w** adalah vektor pada ruang dimensi-2 atau dimensi-3 dengan titik awal yang sama. Jika salah satu vektor merupakan kelipatan lainnya, maka kedua vektor tersebut segaris atau **berhimpit**.
- Jika salah satu vektor ditranslasikan, maka kedua vektor menjadi **sejajar**.

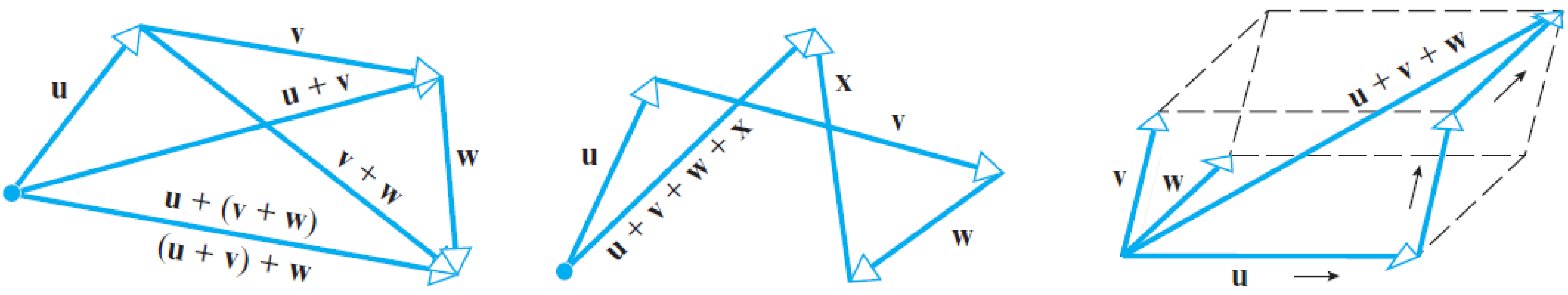


# 1.5. Penjumlahan Tiga Vektor atau Lebih

- Penjumlahan vektor memenuhi **aturan assosiatif penjumlahan**, artinya saat terdapat tiga vektor, misalkan $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$, tidak masalah vektor mana yang dijumlahkan terlebih dahulu.

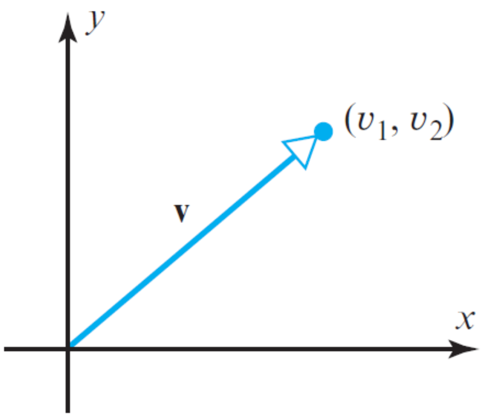
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

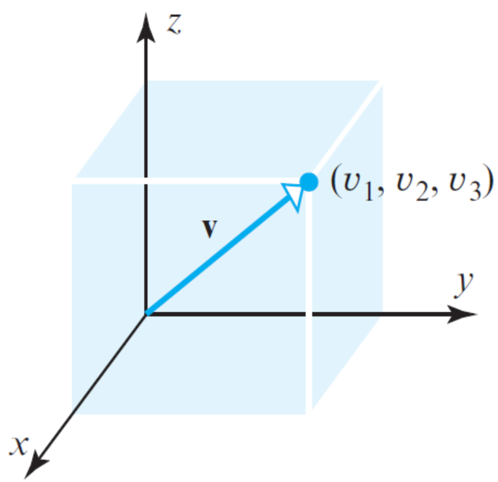
- Penjumlahan tiga vektor atau lebih memiliki hasil yang sama, tidak tergantung pada urutan vektor yang dijumlahkan.



# 1.6. Vektor pada Sistem Koordinat (1)

- Jika verktor **v** pada ruang dimensi-2 atau dimensi-3 memiliki titik awal di titik asal sistem koodinat, maka vektor tersebut dinyatakan dengan koordinat titik akhirnya.
- Koordinat ini disebut **komponen** dari **v** relatif terhadap sistem koordinat.



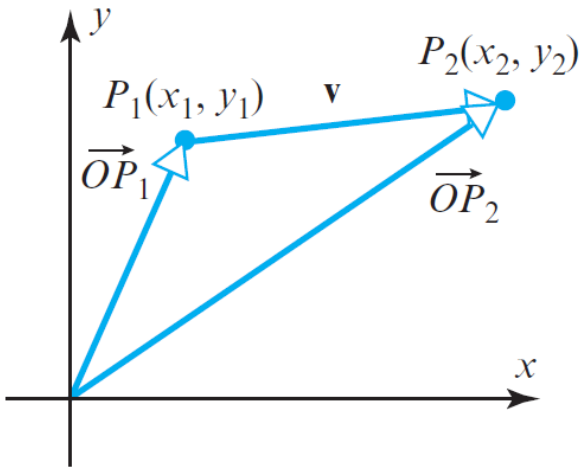
# 1.6. Vektor pada Sistem Koordinat (2)

- Terkadang vektor tidak memiliki titik awal tidak di pusat sistem koordinat.
- Jika $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah vektor dengan titik awal $P_1(x_1, y_1)$ dan titik akhir $P_2(x_2, y_2)$, maka elemen vektor tersebut dapat didefinisikan sebagai

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- Untuk ruang dimensi-3,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



# 1.7. Ruang Vektor Dimensi-$n$

- Himpunan semua bilangan real secara geometri merupakan sebuah garis yang disebut **garis bilangan real** yang dinotasikan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{R}^1$.
- Indeks pangkat digunakan untuk memperjelas bahwa garis merupakan satu dimensi.
- Himpunan semua pasangan terurut dan semua triple terurut dari bilangan real masing-masing dinotasikan dengan $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$.
- Jika $n$ merupakan suatu bilangan bulat positif, maka pasangan berurutan-$n$ adalah barisan $n$ bilangan real $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- Himpunan semua pasangan berurutan-$n$ disebut ruang vektor dimensi-$n$ dan dinotasikan $\mathbb{R}^n$.

# 1.8. Operasi Vektor di $\mathbb{R}^n$ (1)

- Suatu vektor $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan vektor $\mathbf{0} = (0,0, \ldots, 0)$ disebut sebagai **vektor nol**.
- Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan **ekuivalen** (sama) jika $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, ..., $v_n = w_n$. Dituliskan $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$ dan $k$ konstanta skalar, maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$
$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$
$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$$
$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n)$$

# CONTOH SOAL

**Contoh 1.1.** Elemen vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik awal $P_1(2, -1,4)$ dan titik akhir $P_2(7,5, -8)$ adalah

$$\mathbf{v} = (7 - 2,5 - (-1), (-8) - 4) = (5,6, -12)$$

**Contoh 1.2.** Vektor$(a, b, c, d) = (1, -4,2,7)$ jika dan hanya jika $a = 1, b = -4, c = 2$, dan $d = 7$.

**Contoh 1.3.** Jika $\mathbf{v} = (1, -3,2)$ dan $\mathbf{w} = (4,2,1)$, maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1,3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6,4),$$

$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \qquad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5,1)$$

# 1.8. Operasi Vektor di $\mathbb{R}^n$ (2)

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$ dan jika $k$ dan $m$ adalah kosntanta skalar, maka:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
- $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

# 1.9. Kombinasi Linier

- Penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar sering digunakan sebagai kombinasi untuk menyusun vektor baru.
- Contoh: $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ dan $\mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$.
- Jika $\mathbf{w}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{w}$ dikatakan **kombinasi linier** dari vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ jika dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

  dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ skalar. Nilai skalar ini disebut **koefisien** dari kombinasi linier.

- Pada kasus dimana $r = 1$, formula diatas menjadi $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, sehingga kombinasi linier dari suatu vektor merupakan perkalian skalar dari vektor tersebut.

# 2. Norm, Hasil Kali Titik dan Jarak pada Ruang Dimensi-$n$

# 2.1. Norm suatu Vektor (1)

- Panjang suatu vektor $\mathbf{v}$ atau biasa disebut **norm** vektor $\mathbf{v}$, dituliskan sebagai $\|\mathbf{v}\|$.
- Berdasarkan teorema Phytagoras, norm vektor $(v_1, v_2)$ pada ruang dimensi-2 adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

- Dengan cara yang sama, norm vektor $(v_1, v_2, v_3)$ pada ruang dimensi-3 adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

# 2.1. Norm suatu Vektor (2)

- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, maka norm dari $\mathbf{v}$ dinotasikan $||\mathbf{v}||$, dan didefinisikan oleh

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- Jika $\mathbf{v}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, dan jika $k$ sembarang salar, maka
  a. $||\mathbf{v}|| \geq 0$
  b. $||\mathbf{v}|| = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$
  c. $||k\mathbf{v}|| = |k|\,||\mathbf{v}||$

# 2.2. Vektor Satuan

- Suatu vektor dengan norm 1 disebut **vektor satuan**.
- Vektor ini dapat diperoleh dari vektor tak nol $\mathbf{v}$ dengan arah yang sama dan mengalikan $\mathbf{v}$ dengan kebalikan dari panjangnya.
- Misalnya, jika $\mathbf{v}$ merupakan vektor dengan panjang 2 di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, maka $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ adalah vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{v}$.
- Vektor unit suatu vektor tak nol $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$, didefinisikan sebagai:

$$u = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$$

# CONTOH SOAL

**Contoh 2.1.** Norm dari vektor $\mathbf{v} = (-3,2,1)$ di $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

dan norm dari vektor $\mathbf{v} = (2,-1,3,-5)$ di $\mathbb{R}^4$ adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$

**Contoh 2.2.** Tentukan vektor satuan $\mathbf{u}$ dari $\mathbf{v} = (2,2,-1)$.

**Solusi.** Vektor $\mathbf{v}$ memiliki panjang

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Sehingga

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Dapat dicek bahwa $\|\mathbf{u}\| = 1$.

# 2.3. Vektor Satuan Standar (1)

- Pada sistem koordinat di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, vektor satuan yang searah dengan sumbu positif disebut **vektor satuan standar**.
- Di $\mathbb{R}^2$ vektor ini dinotasikan oleh $\mathbf{i} = (1{,}0)$ dan $\mathbf{j} = (0{,}1)$ dan di $\mathbb{R}^3$ dinotasikan oleh $\mathbf{i} = (1{,}0{,}0)$, $\mathbf{j} = (0{,}1{,}0)$ dan $\mathbf{k} = (0{,}0{,}1)$.
- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dan setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari vektor satuan standar.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1{,}0) + v_2(0{,}1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) &= v_1(1{,}0{,}0) + v_2(0{,}1{,}0) + v_3(0{,}0{,}1)\\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

# 2.3. Vektor Satuan Standar (2)

- Secara umum untuk vektor di $\mathbb{R}^n$, vektor satuan standar didefinisikan oleh

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\dots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \mathbf{e}_n = (0,0,0\dots,1)$$

dimana setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

**Contoh 2.3.** Vektor $(2,-3,4)$ dan $(7,3,-4,5)$ dapat dituliskan sebagai

$$(2,-3,4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$(7,3,-4,5) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$$

# 2.4. Jarak di $\mathbb{R}^n$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ merupakan titik di $\mathbb{R}^n$ maka jarak kedua titik didefinisikan sebagai

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

**Contoh 2.4.** Jika $\mathbf{u} = (0,2,-1,3,7)$ dan $\mathbf{v} = (3,4,1,-2,0)$ maka jarak vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|(0,2,-1,3,7) - (3,4,1,-2,0)\| = \|(-3,-2,-2,5,7)\|$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 5^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{9 + 4 + 4 + 25 + 49}$$
$$= \sqrt{91}$$

# 2.5. Hasil Kali Titik (1)

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor tak nol di ruang dimensi-2 atau dimensi-3, dan jika $\theta$ adalah sudut antara vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka hasil kali titik dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

- Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$
- Dari rumus hasil kali titik, diperoleh rumus menentukan sudut antara 2 vektor

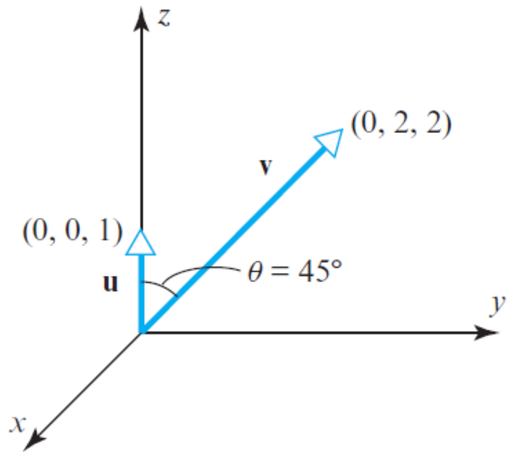
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, maka $\theta = {}^{\pi}/_{2}$ jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0,$

$\theta$ lancip jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, $\theta$ tumpul jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0.$

# CONTOH SOAL

**Contoh 2.5.** Tentukan hasil kali titik dari vektor pada gambar disamping.




**Solusi.** Panjang masing-masing vektor adalah

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \text{ dan}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

dan kosinus dari sudut $\theta$ diantara kedua vektor adalah

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Maka dari definisi perkalian titik, diperoleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (1)\left(2\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{2}\right) = 2$$

# 2.5. Hasil Kali Titik (2)

- Hasil kali titik dapat dicari dengan menggunakan elemen vektor.
- Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor tak nol. Maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

- Dengan cara yang sama, diperoleh hasil kali titik untuk vektor pada ruang dimensi-2 adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor pada $\mathbb{R}^n$, maka perkalian titik (perkalian dalam Euclidean) dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

# CONTOH SOAL

**Contoh 2.6.** Gunakan definisi hasil kali titik dengan menggunakan elemen untuk mencari hasil kali titik vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada contoh 2.5.

**Solusi.** Bentuk elemen dari vektor $\mathbf{u} = (0,0,1)$ dan $v = (0,2,2)$. Maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

**Contoh 2.7.** Hitung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk vektor di $\mathbb{R}^5$ berikut

$$\mathbf{u} = (0,2,-1,3,7), \qquad \mathbf{v} = (3,4,1,-2,0)$$

**Solusi.**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(3) + (2)(4) + (-1)(1) + (3)(-2) + (7)(0) = 1$$

# 2.6. Sifat-Sifat Perkalian Titik

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor pada $\mathbb{R}^n$, dan jika $k$ adalah konstanta skalar, maka:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (Simetris)

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (Distributif)

c) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ (Homogenitas)

d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Kepositifan)

Sifat lainnya

a) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

d) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

e) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

# 2.7. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut di $\mathbb{R}^n$

- Sudut antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ didefinisikan oleh

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

- Nilai invers dari cosinus harus memenuhi persamaan

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

**Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz.** Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

atau dalam bentuk elemen

$$|u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n| \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}\,(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}$$

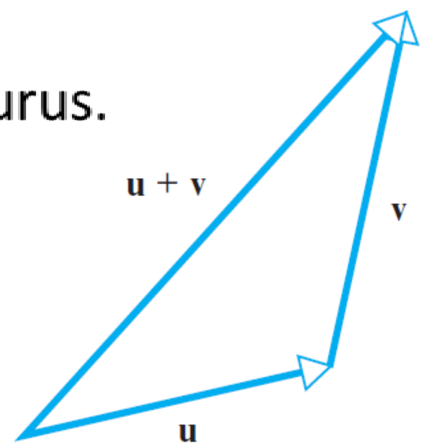
# 2.8. Geometri di $\mathbb{R}^n$ (1)

- Sebelumnya, banyak konsep-konsep di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang bisa diperluas ke $\mathbb{R}^n$.
- Berikut dua teorema dasar geometri yang diperluas ke $\mathbb{R}^n$:
  a) Jumlah panjang dua sisi segitiga setidaknya sama dengan yang ketiga.
  b) Jarak terpendek antara dua titik adalah garis lurus.

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor pada $\mathbb{R}^n$, maka

a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$

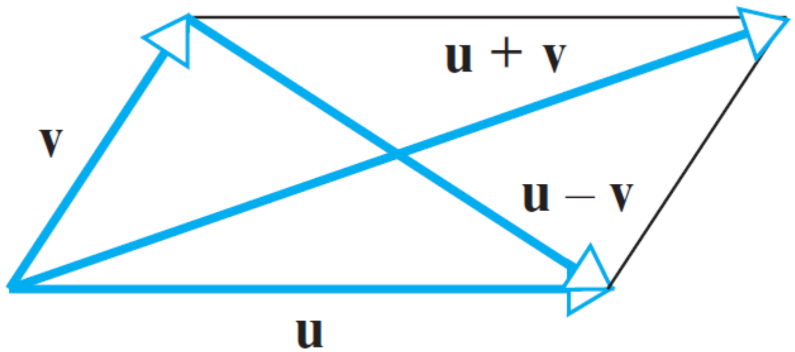



$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

# 2.8. Geometri di $\mathbb{R}^n$ (2)

**Persamaan Jajar Genjang untuk Vektor.** Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$




Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$ dengan perkalian dalam Euclidean, maka

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

# 2.9. Perkalian Titik sebagai Perkalian Matriks (1)

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ matriks kolom. Maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$

  **Contoh:** Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7, \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$$

- Jika $\mathbf{u}$ matriks baris, $\mathbf{v}$ matriks kolom. Maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}^T$

  **Contoh:** Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $$\mathbf{u}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7, \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$$

# 2.9. Perkalian Titik sebagai Perkalian Matriks (2)

- Jika $\mathbf{u}$ matriks kolom, $\mathbf{v}$ matriks baris. Maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\mathbf{u}=\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T$

  **Contoh:** Jika $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}$

  $$\mathbf{v}\mathbf{u}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7, \qquad \mathbf{u}^T\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$$

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ matriks baris. Maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\mathbf{v}\mathbf{u}^T$

  **Contoh:** Jika $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}$

  $$\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7, \qquad \mathbf{v}\mathbf{u}^T=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$$

# 2.9. Perkalian Titik sebagai Perkalian Matriks (3)

Jika $A$ merupakan matriks $n \times n$ serta $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan matriks $n \times 1$, maka

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

**Contoh 2.8.** Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Maka

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, A^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\quad A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11$

$$\mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} = (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11$$

Silahkan buktikan untuk $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

# 3. Hasil Kali Silang

# 3.1. Hasil Kali Silang Vektor

Jika vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ merupakan vektor pada ruang dimensi-3, maka hasil kali silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

dalam bentuk  vektor baris dituliskan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

atau dalam notasi determinan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

# 3.2. Hubungan Perkalian Silang dan Perkalian Titik

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada ruang dimensi-3, maka:

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tegak lurus terhadap $\mathbf{u}$)

b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tegak lurus terhadap $\mathbf{v}$)

c) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Identitas Lagrange)

d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ (Perkalian silang

e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ tiga vektor)

# CONTOH SOAL

**Contoh 3.1.** Tentukan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, jika $\mathbf{u} = (1,2,-2)$ dan $\mathbf{v} = (3,0,1)$.

**Solusi.** Digunakan notasi determinan, maka diperoleh

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

**Contoh 3.2.** Perhatikan vektor $\mathbf{u} = (1,2,-2)$ dan $\mathbf{v} = (3,0,1)$.

Pada contoh 3.1, diperoleh

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Karena $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 1(2) + 2(-7) + (-2)(-6) = 0$ dan

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 3(2) + (0)(-7) + 1(-6) = 0$$

Terbukti bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tegak lurus terhadap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

# 3.3. Sifat-Sifat Perkalian Silang

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada ruang dimensi-3, maka:

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

# 3.4. Interpretasi Geometri Perkalian Silang (1)

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor pada ruang dimensi-3, maka norm dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dapat digunakan untuk interpretasi geometri.
- Idetitas Lagrange yang terdapat pada hubungan perkalian silang dan perkalian titik menyatakan bahwa

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

- Jika $\theta$ adalah sudut diantara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ sehingga

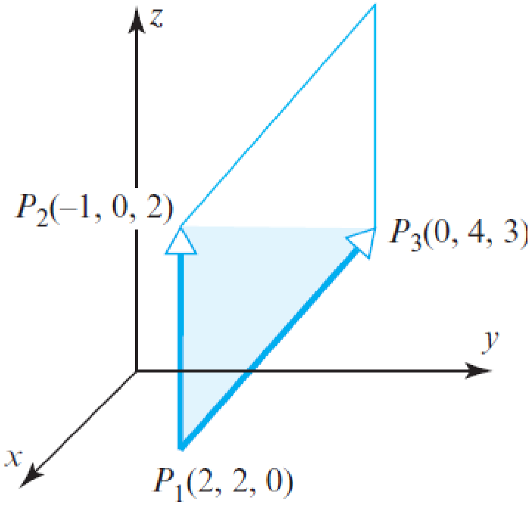
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\theta\end{aligned}$$

- Karena $0 \le \theta \le \pi$, maka $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\theta$.

# 3.4. Interpretasi Geometri Perkalian Silang (2)

**Luas Jajaran Genjang.** Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor pada ruang dimensi-3, maka $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ merupakan luas jajar genjang yang dibentuk oleh $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

**Contoh 3.3.** Tentukan luas area segitiga yang dibentuk oleh titik $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ dan $P_3(0,4,3)$.




**Solusi.** Luas $(L)$ segitiga tersebut merupakan $\frac{1}{2}$ luas jajar genjang yang dibentuk oleh vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-2,2)$ dan $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,3)$. Sehingga $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10,5,-10)$, maka

$$L = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

# 3.4. Interpretasi Geometri Perkalian Silang (3)

- Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada ruang dimensi-3, maka $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ disebut perkalian skalar tiga vektor dari $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

**Contoh 3.4.** Jika $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, maka

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 60 - 11 = 49$$

# LATIHAN SOAL

## SOAL 1

Tentukan elemen dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$, jika

a. $P_1(3,5),\ P_2(2,8)$

b. $P_1(-6,2),\ P_2(-4,-1)$

c. $P_1(5,-2,1),\ P_2(2,4,2)$

d. $P_1(0,0,0),\ P_2(-1,6,1)$

## SOAL 2

Jika diketahui $\mathbf{u} = (1,2,-3,5,0),\ \mathbf{v} = (0,4,-1,1,2)$, dan $\mathbf{w} = (7,1,-4,-2,3)$. Tentukan elemen dari

a. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

b. $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$

c. $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{v})$

d. $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

# LATIHAN SOAL

## SOAL 3

Tentukan norm dan vektor satuan $\mathbf{u}$ dari vektor $\mathbf{v}$, jika

a. $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$

b. $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$

c. $\mathbf{v} = (-2, 3, 3, -1)$

d. $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

## SOAL 4

Jika diketahui $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$, dan $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$.

Tentukan elemen dari

a. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

b. $\|-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|$

c. $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

d. $\|3\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{v}\|$

# LATIHAN SOAL

**SOAL 5**

Carilah $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, jika

a. $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 3, -2)$

b. $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

**SOAL 6**

Carilah jarak Euclidean antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ serta kosinus sudut diantara kedua vektor tersebut. Tentukan apakah sudut tersebut lancip, tumpul atau 90°.

a. $\mathbf{u} = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$

b. $\mathbf{u} = (0, 1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1, 3)$

# LATIHAN SOAL

**SOAL 7**

Diketahui $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$, dan $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Hitung:

a. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

b. $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

c. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

d. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

e. $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

f. $(\mathbf{u} - 3\mathbf{w}) \times (\mathbf{u} - 3\mathbf{w})$

**SOAL 8**

Carilah luas jajar genjang yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ dan $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$.

**SOAL 9**

Carilah luas segitiga yang dibentuk dari titik $A(2, 0)$, $B(3, 4)$, dan $C(-1, 2)$.

# LATIHAN SOAL

**SOAL 10**

Hitunglah perkalian skalar tiga vektor $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, jika

a. $\mathbf{u} = (-2, 0, 6),\ \mathbf{v} = (1, -3, 1),\ \mathbf{w} = (-5, -1, 1)$

b. $\mathbf{u} = (-1, 2, 4),\ \mathbf{v} = (3, 4, -2),\ \mathbf{w} = (-1, 2, 5)$

# RINGKASAN

- Seara **geometris**, vektor dapat direpresentasikan dengan menggunakan garis panah, dimana arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besarnya vektor.
- Terdapat tiga metode **penjumlahan vektor**, yakni aturan jajar genjang, aturan segitiga dan penjumlahan dengan translasi.
- **Vektor negatif** dari vektor **v** adalah vektor yang memiliki panjang yang sama dengan vektor **v** namun memiliki arah yang berlawanan.
- Dua vektor yang **berhimpit** memiliki titik awal yang sama dengan panjang salah satu vektor merupakan kelipatan lainnya. Jika salah satu vektor ditranslasikan, kedua vektor menjadi **sejajar**.

# RINGKASAN

- **Penjumlahan tiga vektor atau lebih** memiliki hasil yang sama, tidak tergantung pada urutan vektor yang dijumlahkan.
- Penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar dari vektor sering digunakan sebagai **kombinasi linier** untuk menyusun vektor baru.
- Panjang suatu vektor disebut **norm** vektor. Suatu vektor dengan norm 1 disebut sebagai **vektor satuan**.
- Pada sistem koordinat, **vektor satuan standar** merupakan vektor satuan yang searah dengan sumbu positif.
- **Jarak dua vektor** didefinisikan sebagai norm dari selisih kedua vektor tersebut.

# RINGKASAN

- **Hasil kali titik** dari dua vektor tak nol dapat digunakan untuk menentukan sudut diantara kedua vektor. Hasil kali titik dapat dicari dengan menggunakan elemen vektor.
- **Hasil kali silang (perkalian silang)** hanya dapat dicari untuk vektor pada ruang dimensi-3.
- Perkalian silang dapat digunakan untuk mencari **luas jajar genjang** yang dibentuk oleh dua vektor.
- **Perkalian skalar tiga vektor** dapat dicari dengan menggunakan konsep determinan.

# Terima Kasih