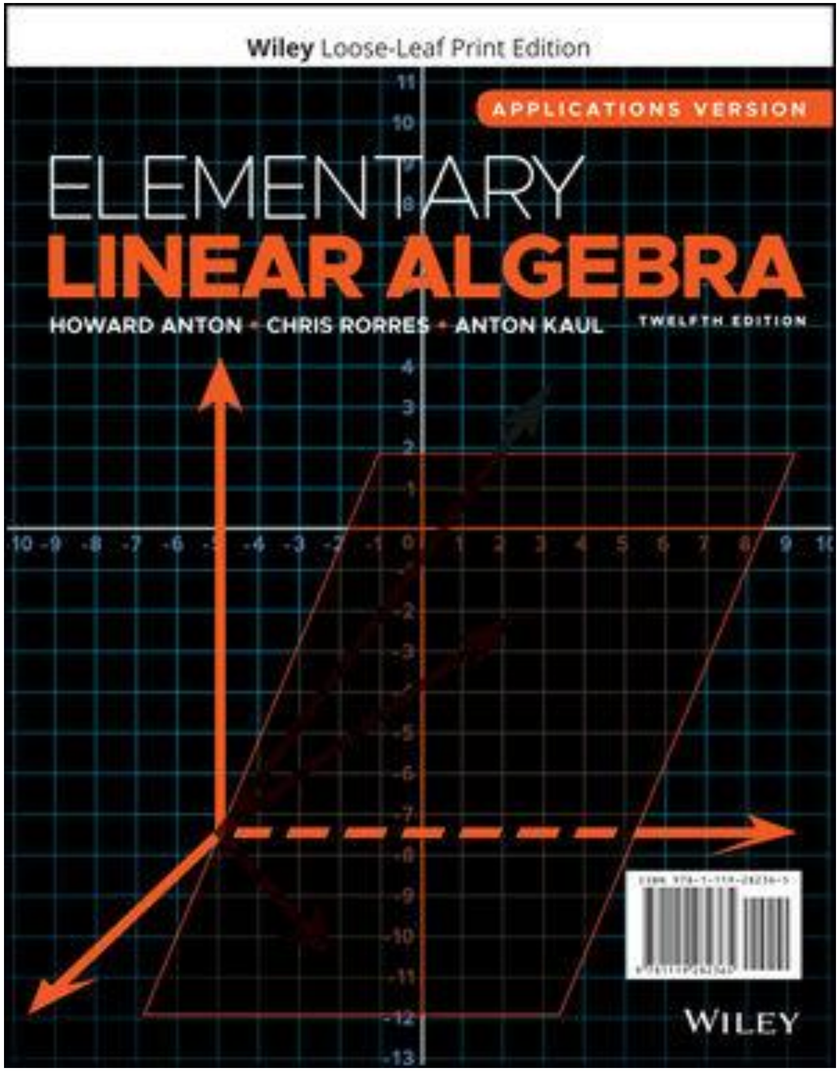
Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pertemuan ke 21 – 22

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa dapat melakukan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen untuk melakukan diagonalisasi matriks (C3, A3)

Materi

1. Nilai eigen dan vektor eigen
2. Diagonalisasi

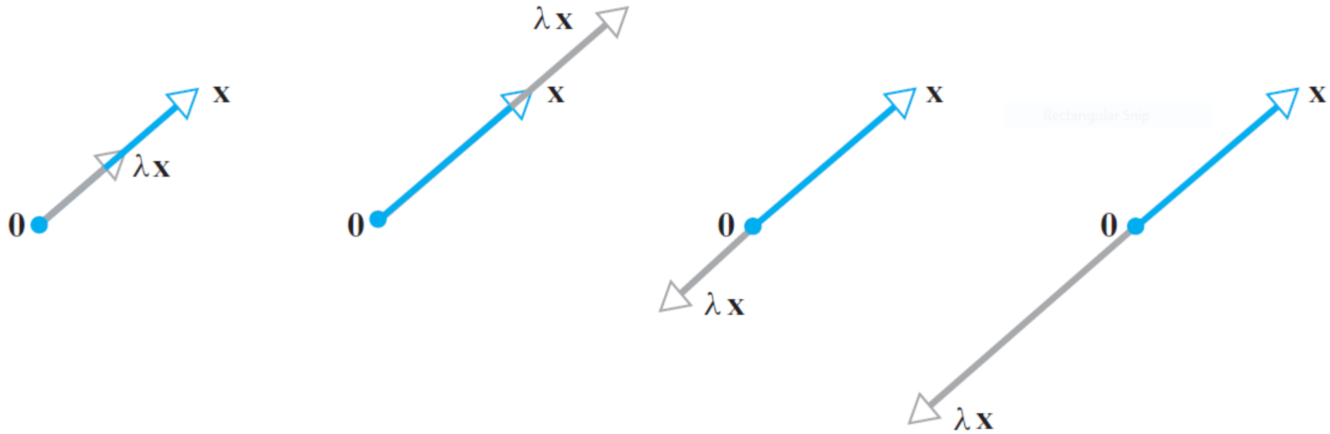
1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

1.1. Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut **vektor eigen** dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah perkalian skalar dari $\mathbf{x}$; yakni,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A (atau dari T_A), dan $\mathbf{x}$ adalah **vektor eigen** yang bersepadanan dengan λ.



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$ (c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

CONTOH SOAL

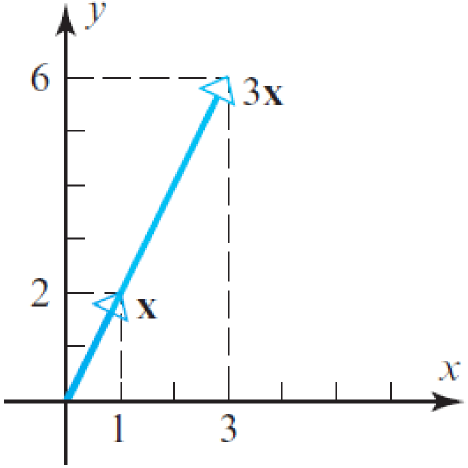
Contoh 1.1. Diketahui vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dari A.

Solusi.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) + 0(2) \\ 8(1) - 1(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Jadi nilai eigen $\lambda = 3$.

Secara geometris, perkalian dengan matriks A memperpanjang vektor $\mathbf{x}$ menjadi 3 kali lipat.



1.2. Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen

- Dari persamaan sebelumnya diketahui

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \Rightarrow (\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

- Jika A adalah matriks $n \times n$, maka λ merupakan **nilai eigen** dari A jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Persamaan tersebut merupakan **persamaan karakteristik** dari A.

Universitas Bunda Mulia

CONTOH SOAL

Contoh 1.2 Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dari A.

Solusi. Dari contoh 1.1 diketahui bahwa $\lambda = 3$, namun tidak ada penjelasan bagaimana cara mencari nilai tersebut.

Pertama-tama, dicari persamaan karakteristik dari A, yakni

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$.

Hal ini menunjukkan bahwa nilai eigen dari A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

CONTOH SOAL

Contoh 1.3. Tentukan nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.

Solusi. Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Nilai eigen dari A dapat diperoleh dari solusi persamaan

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda = 2 - \sqrt{3}$.

1.3. Nilai Eigen dari Matriks Segitiga

- Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka nilai eigen dari A adalah **elemen dari diagonal utama matriks A**.

Contoh 1.4. Tentukan nilai eigen dari $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Solusi. Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - \frac{2}{3} & 0 \\ -5 & 8 & \lambda + \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{2})(\lambda - \tfrac{2}{3})(\lambda + \tfrac{1}{4}) = 0$$

Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ dan $\lambda = -\frac{1}{4}$

1.4. Mencari Vektor Eigen dan Basis Ruang Eigen

- **Vektor eigen** dari A dengan nilai eigen tak nol λ adalah vektor tak nol yang memenuhi

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

- Ruang penyelesaian dari vektor eigen disebut sebagai **ruang eigen** dari A, yang juga dapat dilihat sebagai:
  1. Rang null dari matriks $\lambda I - A$
  2. Kernel dari matriks operator $T_{\lambda I - A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
  3. Himpunan vektor dimana $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

CONTOH SOAL

Contoh 1.5. Carilah basis ruang eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solusi. Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

Sehingga nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = -3$. Jadi, ada dua ruang eigen dari A, masing-masing untuk setiap nilai eigen.

Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari A untuk setiap nilai eigen λ jika dan hanya jika $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yakni saat

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.5 (lanjutan). Pada saat $\lambda = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang memiliki penyelesaian umum $x_1 = t$ dan $x_2 = t$ (cek). Penyelesaian ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan basis ruang vektor untuk $\lambda = 2$. Dengan cara yang sama diperoleh vektor $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai basis ruang vektor untuk $\lambda = -3$ (cek).

CONTOH SOAL

Contoh 1.6. Carilah basis ruang eigen dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi. Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

sehingga diperoleh $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Jadi nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, maka terdapat dua ruang eigen dari A.

Akan dicari vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ yang merupakan solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

CONTOH SOAL

Contoh 1.6 (lanjutan). Dalam bentuk matriks, dicari solusi dari

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$,penyelesaian dari $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan eliminasi Gauss (cek) menghasilkan

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

Jadi vektor eigen dari A untuk $\lambda = 2$ adalah vektor tak nol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.6 (lanjutan).

Karena vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ saling bebas linier, kedua vektor tersebut membentuk basis ruang eigen untuk $\lambda = 2$.

Untuk $\lambda = 1$, penyelesaian dari $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah $x_1 = -2s,\ x_2 = s,\ x_3 = s$. Jadi vektor eigen tuntuk $\lambda = 1$ adalah vektor tak nol $\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sehingga $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis ruang vektor untuk $\lambda = 1$.

1.5. Nilai Eigen dan Invers Matriks

- Matriks persegi A **memiliki invers** jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan merupakan nilai eigen dari A.

Contoh 1.7. Matriks A pada contoh 1.6 memiliki invers karena memiliki nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, tidak ada yang bernilai nol.

Jika dicek dengan menggunakan determinan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Karena $\det(A) \neq 0$, maka matriks A memiliki invers.

2. Diagonalisasi

2.1. Masalah Diagonalisasi Matriks (1)

- Topik utama dari bagian ini adalah hasil kali matriks $P^{-1}AP$ dimana A dan P adalah matriks $n \times n$ dan P mempunyai invers.
- Terdapat berbagai cara untung memandang perkalian matriks tersebut, salah satunya adalah melihat perkalian tersebut sebagai transformasi

$$A \to P^{-1}AP$$

dimana matriks A dipetakan ke dalam matriks $P^{-1}AP$.

- Transformasi tersebut dikenal sebagai **transformasi similaritas**.
- Transformasi ini penting karena mempertahankan banyak sifat dari matriks A, salah satunya nilai determinannya.

2.1. Masalah Diagonalisasi Matriks (2)

Sifat	Keterangan
Determinan	A dan $P^{-1}AP$ memiliki determinan yang sama
Invers	A memiliki invers jika dan hanya jika $P^{-1}AP$ punya invers
Rank	A dan $P^{-1}AP$ memiliki rank yang sama
Nulitas	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nulitas yang sama
Trace	A dan $P^{-1}AP$ memiliki trace yang sama
Persamaankarakteristik	A dan $P^{-1}AP$ memiliki persamaan karakteristik yang sama
Nilaieigen	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nilai eigen yang sama
Dimensiruangeigen	Jika λ adalah nilai eigen dari A (dan $P^{-1}AP$) maka ruang eigen A (dan $P^{-1}AP$) terhadap λ memiliki dimensi sama

2.1. Masalah Diagonalisasi Matriks (3)

- Jika A dan B adalah matriks persegi, maka matriks $\boldsymbol{B}$ **dikatakan mirip dengan matriks** $\boldsymbol{A}$ jika terdapat matriks P yang memiliki invers sedemikian sehingga $B = P^{-1}AP$.
- Matiks persegi A dikatakan **dapat didagonalisasi** jika terdapat matriks diagonal yang mirip dengan A; yakni, jika terdapat matriks P yang memiliki invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal.
- Matriks P disebut sebagai matriks yang **mendiagonalkan** A.

2.2. Langkah-Langkah Diagonalisasi Matriks

1. Tentukan apakah matriks dapat didiagonalisasi dengan mencari n vektor eigen yang bebas linier. Salah satu cara adalah dengan mencari basis ruang vektor dan hitung jumlah vektor yang diperoleh. Jika terdapat n vektor, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan, jika kurang dari n vektor, maka tidak dapat didiagonalkan.
2. Jika dapat didiagonalkan, bentuk matriks $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$ dengan vektor kolom berisi n basis yang diperoleh dari langkah 1.
3. Bentuk matriks diagonal $P^{-1}AP$ dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai diagonalnya. ($\lambda_i$adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $\mathbf{p}_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$).

CONTOH SOAL

Contoh 2.1. Carilah matriks P yang mendiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi. Pada contoh 1.6 di bagian sebelumnya diperoleh persamaan karakteristik dari A adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

dan diperoleh basis ruang vektor sebagai berikut

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1 (lanjutan). Terdapat total tiga vektor basis, maka

matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mendiagonalkan A. Dapat dicek bahwa

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Secara umum, tidak ada urutan yang khusus untuk kolom matriks P. Karena elemen diagonal ke-i dari $P^{-1}AP$ merupakan nilai eigen untuk vektor kolom ke-i, perubahan letak kolom P hanya mengubah letak nilai eigen pada diagonal $P^{-1}AP$.

CONTOH SOAL

Contoh 2.2. Tunjukkan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ tidak dapat didiagonalkan.

Solusi. Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ (matriks segitiga bawah), sehingga nilai eigennya adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$ dan untuk $\lambda = 2$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Karena A matriks 3×3 dan hanya ada 2 vektor basis, maka A tidak dapat didiagonalkan.

2.3. Nilai Eigen Matriks Berpangkat

- Jika k adalah bilangan bulat positif, λ adalah nilai eigen dari matriks A dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen untuk λ, maka λ^k adalah nilai eigen dari A^k dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigennya.

Contoh 2.3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Carilah nilai eigen dan vektor eigen untuk A^7.

Solusi. Dari contoh 2.2 diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, maka niali eigen dari A^7 adalah $\lambda = 1^7 = 1$ dan $\lambda = 2^7 = 128$.

Vektor eigen $\mathbf{p}_1$ dan $\mathbf{p}_2$ di contoh 2.2 untuk nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$ di A merupakan vektor eigen untuk $\lambda = 1$ dan $\lambda = 128$ di A^7.

2.4. Pangkat Suatu Matriks

- Jika matriks A dapat didiagonalkan oleh P, maka

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

- Hasil pangkat dari D, dapat dituliskan sebagai berikut

$$D^k = P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1}$

CONTOH SOAL

Contoh 2.4. Tentukan matriks A^{13} dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solusi. Dari contoh 2.1, matriks A didiagonalkan oleh

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A^{13} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Carilah persamaan karakteristik, nilai eigen, dan basis ruang eigen untuk setiap matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SOAL 2

Untuk setiap matriks pada soal 1, tentukan apakah matriks tersebut memiliki invers.

LATIHAN SOAL

SOAL 3

Carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks A (jika ada) kemudian cek dengan menghitung $P^{-1}AP$.

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

RINGKASAN

- Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut **vektor eigen** dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah perkalian skalar dari $\mathbf{x}$; yakni, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ.
- Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A (atau dari T_A), dan $\mathbf{x}$ adalah **vektor eigen** yang bersepadanan dengan λ.
- Jika A adalah matriks $n \times n$, maka λ merupakan **nilai eigen** dari A jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Persamaan tersebut merupakan **persamaan karakteristik** dari A.
- Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka nilai eigen dari A adalah **elemen dari diagonal utama matriks A**.

RINGKASAN

- **Vektor eigen** dari A dengan nilai eigen tak nol λ adalah vektor tak nol yang memenuhi $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$.
- Matriks persegi A **memiliki invers** jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan merupakan nilai eigen dari A.
- Matiks persegi A dikatakan **dapat didagonalisasi** jika terdapat matriks diagonal yang mirip dengan A; yakni, jika terdapat matriks P yang memiliki invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal.
- Matriks P disebut sebagai matriks yang **mendiagonalkan** A.
- **Langkah-langkah diagonalisasi** dapat dilihat di slide 22.

RINGKASAN

- Secara umum, tidak ada urutan yang khusus untuk kolom matriks P.
- Karena elemen diagonal ke-i dari $P^{-1}AP$ merupakan nilai eigen untuk vektor kolom ke-i, perubahan letak kolom P hanya mengubah letak nilai eigen pada diagonal $P^{-1}AP$.
- Jika k adalah bilangan bulat positif, λ adalah nilai eigen dari matriks A dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen untuk λ, maka λ^k adalah nilai eigen dari A^k dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigennya.
- Matriks pangkat dapat dicari dengan menggunakan matriks diagonalnya.

Terima Kasih