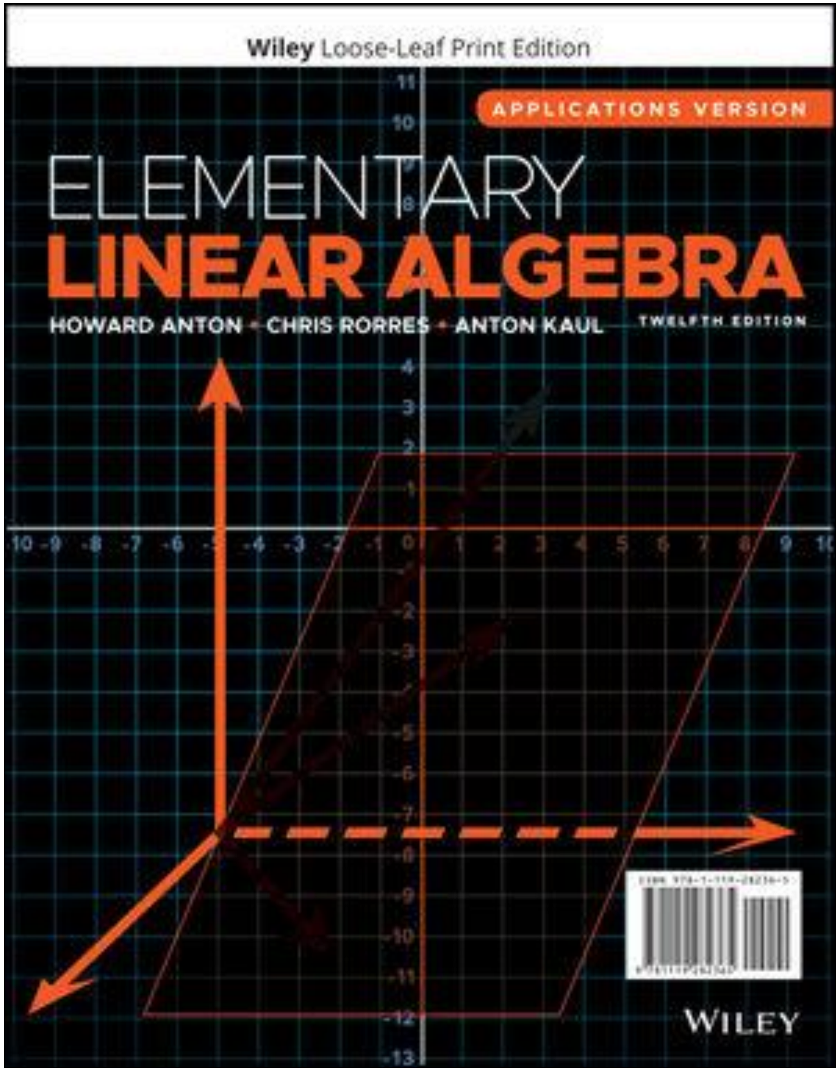
Transformasi Linier

Pertemuan ke 23 – 26

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa dapat melakukan perhitungan transformasi linier pada ruang vektor (C3, A3)

Materi

1. Transformasi linier umum
2. Invers transformasi linier
3. Matriks transformasi linier umum

1. Transformasi Linier Umum

1.1. Definisi dan Terminologi

- Jika $T : V \to W$ adalah pemetaan dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T disebut **transformasi linier** dari V ke W; jika untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V dan sembarang skalar k:
  1. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ **[Sifat homogenitas]**
  2. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Sifat penjumlahan]**
- Saat $V = W$, transformasi linier T disebut **operator linier** pada ruang vektor V.
- Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier, maka:
  a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
  b) $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ untuk setiap $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Jika V adalah ruang vektor dan k sembarang skalar, maka pemetaan $T: V \to V$ yang didefinisikan oleh $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ adalah operator linier pada V. Untuk sembarang skalar c dan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V, maka

$$T(c\mathbf{u}) = k(c\mathbf{u}) = c(k\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$
$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Contoh 1.2. Misalkan M_{22} merupakan ruang vektor pada matriks $n \times n$. Tunjukkan bahwa $T(A) = A^T$ merupakan transformasi linier.

Solusi. $T(kA) = (kA)^T = kA^T = kT(A)$

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

Jadi T merupakan transfromasi linier.

1.2. Mencari Transfromasi Linier dengan Vektor Basis

- Jika $T : V \to W$ merupakan transformasi linier dimana V berdimensi terhingga. Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis dari V, maka peta dari sembarang vektor $\mathbf{v}$ di V dapat dituliskan sebagai

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan koefisien yang diperlukan untuk menuliskan $\mathbf{v}$ sebagai kombinasi linier dari vektor dalam basis S.

CONTOH SOAL

Contoh 1.3. Diketahui $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan basis $\mathbb{R}^3$, dimana

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,1,0), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,0,0)$$

Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ merupakan transformasi linier dengan

$$T(\mathbf{v}_1) = (1,0), \qquad T(\mathbf{v}_2) = (2,-1), \qquad T(\mathbf{v}_3) = (4,3)$$

Tentukan transformasi linier $T(x_1, x_2, x_3)$, kemudian hitunglah $T(2,-3,5)$.

Solusi. Diambil sembarang $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, dicari nilai c_1, c_2, c_3 yang memenuhi transformasi linier

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1,1,1) + c_2(1,1,0) + c_3(1,0,0)$$
$$(x_1, x_2, x_3) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1)$$

CONTOH SOAL

Contoh 1.3 (lanjutan). Diperoleh SPL

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 \quad\quad &= x_2 \\ c_1 \quad\quad\quad\quad &= x_3 \end{aligned}$$

dengan penyelesaian $c_1 = x_3, c_2 = x_2 - x_3, c_3 = x_1 - x_2$, maka

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_1(1,1,1) + (x_2 - x_3)(1,1,0) + (x_1 - x_2)(1,0,0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Jadi, $T(x_1, x_2, x_3) = x_3T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3)$

$$\begin{aligned} &= x_3(1,0) + (x_2 - x_3)(2,-1) + (x_1 - x_2)(4,3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan transformasi linier tersebut,diperoleh

$$T(2,-3,5) = (9,23)$$

1.3. Kernel dan Range

- Jika $T : V \rightarrow W$ merupakan transformasi linier, maka himpunan vektor dalam V yang dipetakan oleh T ke $\mathbf{0}$ disebut **Kernel** dari T, dinotasikan $\ker(T)$.
- Himpunan semua vektor di W yang merupakan hasil pemetaan dari V oleh T disebut **Range** dari T, dinotasikan sebagai $R(T)$.
- Jika $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka:
  a) Kernel dari T adalah subruang dari V.
  b) Range dari T adalah subruang dari W.

1.4. Rank dan Nulitas dari Transformasi Linier

- Andaikan $T : V \to W$ merupakan transformasi linier.
- Jika range dari T berdimensi hingga, maka dimensi dari range disebut **rank dari *T***, dinotasikan $\text{rank}(T)$.
- Jika kernel dari T berdimensi hingga, maka dimensi dari kernel disebut **nulitas dari *T***, dinotasikan $\text{nulitas}(T)$.
- Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier dari ruang vektor berdimensi hingga V ke ruang vektor W, maka range dari T berdimensi hingga dan

$$\text{rank}(T) + \text{nulitas}(T) = \dim(T)$$

2. Invers Transformasi Linier

2.1. Pemetaan Satu-Satu

- Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T dikatakan **satu-satu** jika T memetakan setiap vektor $\mathbf{v}$ di V terdapat tepat satu vektor $\mathbf{w}$ di W.
- Transformasi **satu-satu** memiliki $\ker(\boldsymbol{T}) = \{\mathbf{0}\}$ karena hanya vektor $\mathbf{0} \in V$ yang dipetakan ke $\mathbf{0} \in W$.

Contoh 2.1. Transformasi linier $T_1: P_3 \to \mathbb{R}^4$ dan $T_2: M_{22} \to \mathbb{R}^4$ didefinisikan oleh $T_1(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a, b, c, d)$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

merupakan transformasi satu-satu karena kernel keduanya adalah vektor nol.

2.2. Invers Transformasi Linier

- Jika $T : V \to W$ adalah transformasi satu-satu dengan range $R(T)$, dan jika $\mathbf{w}$ adalah sembarang vektor di $R(T)$, maka terdapat satu vektor $\mathbf{v}$ di V dimana $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
- Invers dari transformasi T (dinotasikan T^{-1}) adalah pemetaan $\mathbf{w} \in R(T)$ ke $\mathbf{v}$, dituliskan sebagai

$$T^{-1} : R(T) \to V$$

- Dapat dibuktikan bahwa pemetaan invers adalah transformasi linier.
- Lebih lanjut, dari definisi T^{-1} berlaku

$$T^{-1}\big(T(\mathbf{v})\big) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$
$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.2. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah operator linier yang didefinisikan sebagai

$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3).$

Apakah T satu-satu? Jika ya, tentukan $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Solusi. Dari transformasi linier, diperoleh matriks transformasi

$$[T]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks transformasi $\det(T) = -1$, artinya T satu-satu.

Karena matriks transformasi T satu-satu, maka matriks T memiliki invers.

CONTOH SOAL

Contoh 2.2 (lanjutan). Invers dari matriks T adalah

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Sehingga $$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = [T^{-1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

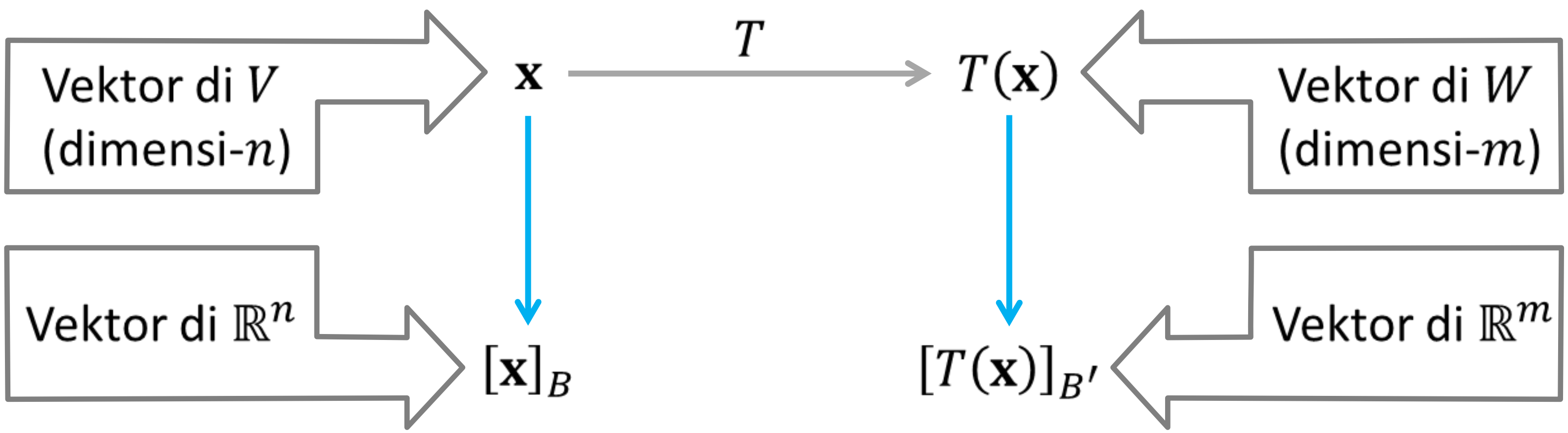
Jika dituliskan dalam notasi horisontal, maka

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$(4x_1 - 2x_2 - 3x_3, -11x_1 + 6x_2 + 9x_3, -12x_1 + 7x_2 + 10x_3)$$

3. Matriks Transformasi Linier Umum

3.1. Matriks Transformasi Linier (1)

- Andaikan V adalah ruang vektor dimensi-n, W adalah ruang vektor dimensi-m, dan $T: V \to W$ adalah transformasi linier.
- Lebih lanjut B adalah basis dari V, B' adalah basis dari W, dan untuk setiap vektor $\mathbf{x}$ di V, koordinat matriks untuk $\mathbf{x}$ dan $T(\mathbf{x})$ adalah $[\mathbf{x}]_B$ dan $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.



3.1. Matriks Transformasi Linier (2)

- Akan dicari matriks A ordo $m \times n$ sedemikian sehingga perkalian matriks A dengan setiap vektor $\mathbf{x}$ di V memetakan vektor $[\mathbf{x}]_B$ ke vektor $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.
- Langkah mencari $T(\mathbf{x})$ secara tidak langsung
  1. Hitung koordinat vektor $[\mathbf{x}]_B$.
  2. Hitung $A[\mathbf{x}]_B$ untuk memperoleh $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.
  3. Bentuk ulang $T(\mathbf{x})$ dari vektor koordinat $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "\text{Perkalian}", "\text{langsung}"'] \arrow[d, "(1)"'] & T(\mathbf{x}) \arrow[d, "(3)"] \\
{[\mathbf{x}]_B} \arrow[r, "\text{Perkalian dgn } A", "(2)"'] & {[T(\mathbf{x})]_{B'}}
\end{tikzcd}$$

3.1. Matriks Transformasi Linier (3)

- Kunci dari permasalahan ini adalah mencari matriks A berordo $m \times n$ yang memenuhi
$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$
- Andaikan $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ merupakan basis dari V, ruang berdimensi-n dan $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ merupakan basis dari W, ruang berdimensi-m.
- Karena persamaan diatas harus berlaku untuk setiap vektor di V, khususnya untuk semus basis di B, yakni
$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \qquad A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'},$$
$$\dots, \qquad A[\mathbf{u}_n]_B = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}$$

3.1. Matriks Transformasi Linier (4)

- Namun $[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ... , $[\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, sehingga

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \ldots,$$

$$A[\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1. Matriks Transformasi Linier (5)

- Jadi $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \dots ,$ $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}$

  yang menunjukkan bahwa kolom-kolom berurutan dari A adalah vektor koordinat $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \dots, T(\mathbf{u}_n)$ terhadap basis B'.

- Jadi matriks A yang memenuhi adalah

$$A = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \right]$$

- Matriks ini disebut **matriks *T* relatif terhadap basis *B* dan *B*′** yang dinotasikan oleh $[T]_{B',B}$. Sehingga

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \right]$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.1. Andaikan $T: P_1 \rightarrow P_2$ merupakan transformasi linier yang didefinisikan oleh

$$T\big(p(x)\big) = xp(x)$$

Carilah matriks T terhadap basis

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ dan } B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

dimana

$$\mathbf{u}_1 = 1, \qquad \mathbf{u}_2 = x; \qquad \mathbf{v}_1 = 1, \qquad \mathbf{v}_2 = x, \qquad \mathbf{v}_3 = x^2$$

Solusi. Dari definisi fungsi T diperoleh

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = x(1) = x$$

$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = x(x) = x^2$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.1 (lanjutan). Sehingga vektor koordinat $T(\mathbf{u}_1)$ dan $T(\mathbf{u}_2)$ relatif terhadap B' adalah

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks T relatif terhadap basis B dan B' adalah

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.2. Andaikan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linier yang didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks transformasi T terhadap basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ dan $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, dimana

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solusi. Dari definisi T diperoleh $T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ dan $T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

CONTOH SOAL

Contoh 3.2 (lanjutan). Dicari kombinasi linier masing-masing vektor tersebut terhadap basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$.

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

diperoleh:
$$\left.\begin{aligned} 1 &= k_1 - k_2 \\ -2 &= 2k_2 + k_3 \\ -5 &= -k_1 + 2k_2 + 2k_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

diperoleh:
$$\left.\begin{aligned} 2 &= c_1 - c_2 \\ 1 &= 2c_2 + c_3 \\ -3 &= -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

CONTOH SOAL

Contoh 3.2 (lanjutan). Diperolah kombinasi linier

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, \qquad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

Jadi,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

maka

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Tentukan apakah T merupakan transfromasi linier. Jika ya, carilah kernelnya.

a. $T: M_{22} \to M_{22}$, dimana $T(A) = A^2$.

b. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dimana $\mathbf{v}_0$ vektor tetap di $\mathbb{R}^3$ dan $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_0$.

c. $T: M_{22} \to \mathbb{R}$, dimana $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$

d. $T: P_2 \to P_2$, dimana
$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$$

e. $T: F(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$ dimana $T\big(f(x)\big) = f(x+1)$.

LATIHAN SOAL

SOAL 2

Diketahui $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ adalah basis dari $\mathbb{R}^2$, dimana $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ dan $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, dan pemetaan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan operator linier dengan $T(\mathbf{v}_1) = (1, -2)$ dan $T(\mathbf{v}_2) = (-4, 1)$. Carilah formula untuk $T(x_1, x_2)$ dan gunakan unutk menghitung $T(5, -3)$.

SOAL 3

Diketahui $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ basis dari $\mathbb{R}^3$, dimana $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$, dan pemetaan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan operator linier dengan $T(\mathbf{v}_1) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v}_2) = (-1, 1)$ dan $T(\mathbf{v}_3) = (0, 1)$. Carilah formula untuk $T(x_1, x_2, x_3)$ dan gunakan unutk menghitung $T(7, 13, 7)$.

LATIHAN SOAL

SOAL 4

Untuk setiap pemetaan berikut, tentukan apakah T merupakan transformasi satu-satu. Jika ya, carilah inversnya.

a. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dimana $T(x, y) = (y, x)$.

b. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dimana $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

c. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dimana $T(x, y) = (2x + y, x - 2y)$.

d. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dimana $T(x, y, z) = (x - z, -y + z, -x + 2z)$.

e. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dimana $T(x, y, z) = (2x + y + z, y, -x + y - z)$.

Universitas Bunda Mulia

LATIHAN SOAL

SOAL 5

Diketahui $T: P_2 \to P_3$ merupakan transformasi linier yang didefinisikan oleh $T(p(x) = xp(x)$. Carilah matriks T relatif terhadap basis standar $B = \{1, x, x^2\}$ dan $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ untuk P_2 dan P_3.

SOAL 6

Diketahui $T: P_2 \to P_1$ merupakan transfromasi linier yang didefinisikan oleh

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

Carilah matriks T relatif terhadap basis standar $B = \{1, x, x^2\}$ untuk P_2 dan $B' = \{1, x\}$ untuk P_1.

LATIHAN SOAL

SOAL 7

Diketahui $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Carilah matriks $[T]_{B',B}$ relatif terhadap basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ dan $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dimana

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

RINGKASAN

- Jika $T : V \rightarrow W$ adalah pemetaan dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T disebut **transformasi linier** dari V ke W; jika untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V dan sembarang skalar k berlaku sifat homogenitas dan sifat penjumlahan.
- Jika $V = W$, maka transformasi linier T disebut **operator linier** pada rang vektor V.
- Jika $T : V \rightarrow W$ merupakan transformasi linier dimana V ber-dimensi terhingga. Jika S adalah basis dari V, maka peta dari sembarang vektor $\mathbf{v}$ di V dapat dituliskan sebagai **kombinasi linier** dari vektor dalam basis S.

RINGKASAN

- Jika $T : V \rightarrow W$ merupakan transformasi linier, maka himpunan vektor dalam V yang dipetakan oleh T ke $\mathbf{0}$ disebut **Kernel** dari T, dinotasikan $\ker(T)$.
- Himpunan semua vektor di W yang merupakan hasil pemetaan dari V oleh T disebut **Range** dari T, dinotasikan sebagai $R(T)$.
- Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka kernel T adalah subruang dari V dan range dari T adalah subruang dari W.
- Jika range dari T berdimensi hingga, maka dimensi dari range disebut **rank dari $\boldsymbol{T}$**, dinotasikan $\mathrm{rank}(T)$.
- Jika kernel dari T berdimensi hingga, maka dimensi dari kernel disebut **nulitas dari $\boldsymbol{T}$**, dinotasikan $\mathrm{nulitas}(T)$.

RINGKASAN

- Jumlahan dari rank dan nulitas suatu transformasi T sama dengan **dimensi dari $\boldsymbol{T}$**.
- Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linier dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T dikatakan **satu-satu** jika T memetakan setiap vektor **v** di V terdapat tepat satu vektor **w** di W.
- Transformasi **satu-satu** memiliki $\ker(\boldsymbol{T}) = \{\mathbf{0}\}$ karena hanya vektor $\mathbf{0} \in V$ yang dipetakan ke $\mathbf{0} \in W$.
- **Invers** dari transformasi T (dinotasikan T^{-1}) adalah pemetaan $\mathbf{w} \in R(T)$ ke **v**, dituliskan sebagai $T^{-1} : R(T) \to V$.
- Invers dari suatu transformasi linier merupakan transformasi linier.

RINGKASAN

- Andaikan V adalah ruang vektor dimensi-n, W adalah ruang vektor dimensi-m, dan $T: V \to W$ adalah transformasi linier.
- Lebih lanjut B adalah basis dari V, B' adalah basis dari W, dan untuk setiap vektor $\mathbf{x}$ di V, koordinat matriks untuk $\mathbf{x}$ dan $T(\mathbf{x})$ adalah $[\mathbf{x}]_B$ dan $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.
- Matriks A berordo $m \times n$ sedemikian sehingga perkalian matriks A dengan setiap vektor $\mathbf{x}$ di V memetakan vektor $[\mathbf{x}]_B$ ke vektor $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.
- Matriks ini disebut **matriks $\boldsymbol{T}$ relatif terhadap basis $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{B'}$** yang dinotasikan oleh $[T]_{B',B}$.

Terima Kasih