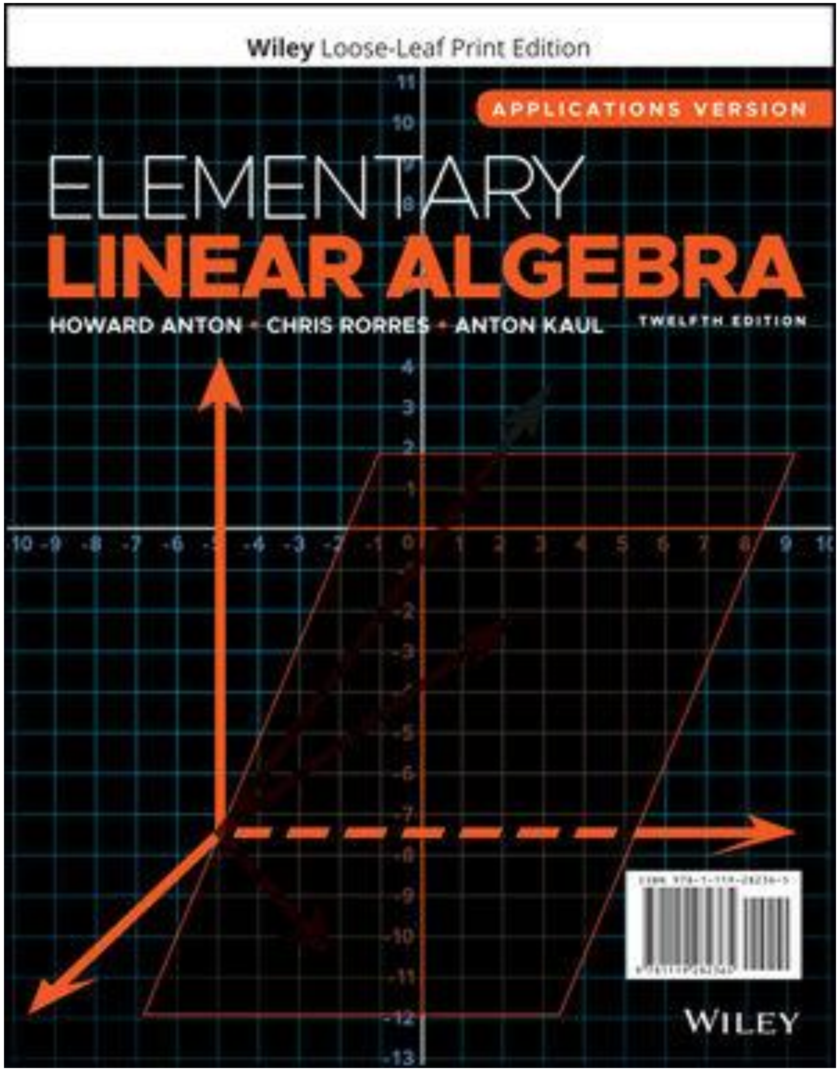
Ortogonalistas pada Ruang Vektor Euclidean

Pertemuan ke 13 – 14

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu melakukan operasi hitung dengan konsep ortogonalitas untuk menentukan sudut, proyeksi vektor, dan panjang proyeksinya (C3, A3)

Materi

1. Vektor-vektor ortogonal
2. Proyeksi vektor
3. Proyeksi skalar
4. Penerapan Ortogonalitas

1. Vektor-Vektor Ortogonal

1. Vektor-Vektor Ortogonal

- Dari perkalian titik, diperoleh rumus menentukan sudut θ antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sebagai berikut
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$
- Berdasarkan definisi diatas, $\theta = \pi/2$ jika dan hanya jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.
- Dua vektor tak nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan **ortogonal** (atau **tegak lurus**) jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.
- Vektor nol $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$ ortogonal terhadap setiap vektor di $\mathbb{R}^n$.

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Tunjukkan bahwa $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ ortogonal di $\mathbb{R}^4$.

Solusi. Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + 3(2) + 1(0) + 4(-1) = 0$, maka kedua vektor saling ortogonal.

Contoh 1.2. Andaikan $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ merupakan himpunan vektor satuan standar di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa setiap pasangan vektor di S saling ortogonal.

Solusi. Setiap pasangan vektor ortogonal jika $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$.

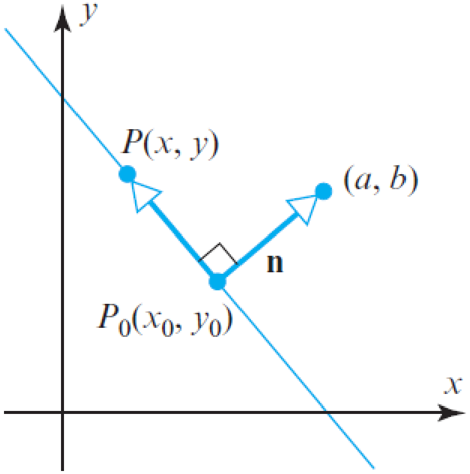
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

1.1. Garis dan Bidang dengan Titik dan Vektor Normal (1)

- Dalam geometri analitik persamaan suatu garis di $\mathbb{R}^2$ dapat ditentukan oleh kemiringan dan salah satu titiknya.
- Persamaan suatu bidang di $\mathbb{R}^3$ juga dapat ditentukan dengan menggunakan kemiringan dan salah satu titiknya.
- Salah satu cara menentukan kemiringan adalah dengan menggunakan vektor tak nol $\mathbf{n}$,disebut **vektor normal**, yang ortogonal terhadap garis atau bidang tersebut.

1.1. Garis dan Bidang dengan Titik dan Vektor Normal (2)

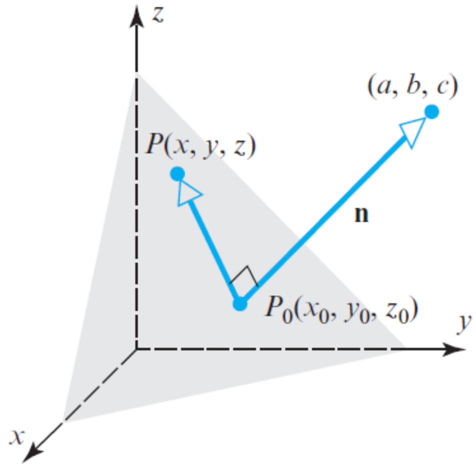
- Sebagai contoh, gambar disamping menunjuk-kan suatu garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0)$ yang memiliki vektor normal $\mathbf{n} = (a, b)$ dan bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yang memiliki vektor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.



- Garis dan bidang tersebut diwakili oleh persamaan vektor

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

dimana P adalah sembarang titik (x, y) pada garis atau sembarang titik (x, y, z) pada bidang.



1.1. Garis dan Bidang dengan Titik dan Vektor Normal (2)

- Elemen vektor $\overrightarrow{P_0P}$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \qquad \textbf{[garis]}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad \textbf{[bidang]}$$

- Sehingga persamaan garis dan bidang dengan titik dan vektor normal dapat dituliskan sebagai

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad \textbf{[garis]}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{[bidang]}$$

Contoh 1.3. Persamaan $6(x - 3) + (y + 7) = 0$ di $\mathbb{R}^2$ merupakan garis yang melalui titik $(3, -7)$ dengan vektor normal $\mathbf{n} = (6, 1)$. Persamaan $4(x - 3) + 2y - 5(z - 7)$ di $\mathbb{R}^3$ merubakan bidang yang melalui titik $(3,0,7)$ dengan vektor normal $\mathbf{n} = (4,2,-5)$.

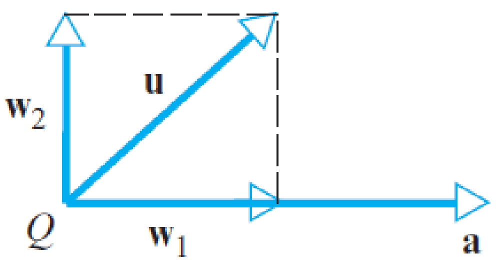
1.1. Garis dan Bidang dengan Titik dan Vektor Normal (3)

- Jika a dan b adalah konstanta yang tak nol, maka persamaan
$$ax + bx + c = 0$$
merupakan sebuah garis di $\mathbb{R}^2$ dengan vektor normal $\mathbf{n} = (a, b)$.
- Jika a, b dan c adalah konstanta yang tak nol, maka persamaan
$$ax + bx + cz + d = 0$$
merupakan sebuah bidang di $\mathbb{R}^2$ dengan vektor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

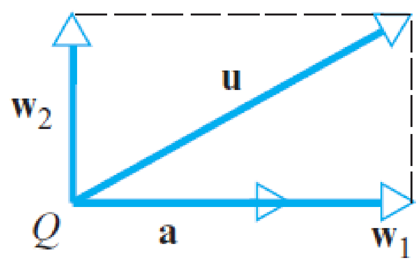
2. Proyeksi Vektor

2.1. Proyeksi Ortogonal (1)

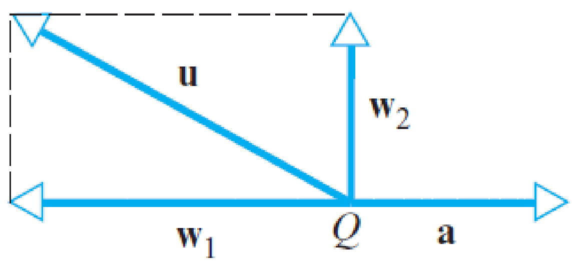
- Dalam berbagai penerapan, vektor $\mathbf{u}$ perlu "didekomposisi " menjadi jumlahan dua suku, satu suku merupakan kelipatan skalar dari vektor bukan nol $\mathbf{a}$ dan suku lainnya ortogonal ke $\mathbf{a}$.
- Misalkan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ yang sedemikian sehingga titik awalnya berada di Q, maka dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



Buat proyeksi dari ujung vektor $\mathbf{u}$ tegak lurus terhadap vektor $\mathbf{a}$



Bentuk vektor $\mathbf{w}_1$ dari Q ke ujung proyeksi vektor $\mathbf{u}$



Bentuk vektor $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$

2.1. Proyeksi Ortogonal (2)

- Karena $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$, maka vektor u dapat didekomposisi menjadi jumlahan dua vektor ortogonal dengan suku pertama perkalian skalar dari $\mathbf{a}$ dan suku kedua ortogonal terhadap $\mathbf{a}$.

Teorema Proyeksi. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, dan jika $\mathbf{a} \neq 0$, maka $\mathbf{u}$ dapat dituliskan dalam bentuk $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, dimana $\mathbf{w}_1$ adalah perkalian skalar dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{w}_2$ ortogonal terhadap $\mathbf{a}$.

2.1. Proyeksi Ortogonal (3)

- Vektor $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$ dalam teorema proyeksi memiliki sebutan khusus, vektor $\mathbf{w}_1$ disebut **proyeksi ortogonal dari $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{a}$** atau **komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$**, dan vektor $\mathbf{w}_2$ disebut **komponen vektor $\mathbf{u}$ ortogonal ke $\mathbf{a}$**.
- Vektor $\mathbf{w}_1$ biasanya dilambangkan dengan simbol $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$, yang berarti $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$.
- Singkatnya

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1. Misalkan $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ dan $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Cari komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ dan komponen vektor $\mathbf{u}$ ortogonal ke $\mathbf{a}$.

Solusi.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 2(4) + (-1)(-1) + 3(2) = 15$$

$$\|\mathbf{a}\| = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

Maka komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ adalah

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor $\mathbf{u}$ ortogonal ke $\mathbf{a}$ adalah

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (4, -1, 2) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

Dapat dicek bahwa vektor $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$ saling ortogonal.

3. Proyeksi Skalar

3. Proyeksi Skalar (1)

- Terkadang norm suatu komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ lebih menarik dari pada komponen vektor itu sendiri.
- Norm atau panjang proyeksi sering disebut sebagai **proyeksi skalar**.
- Rumus norm vektor ini dapat diperoleh dari

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\|$$

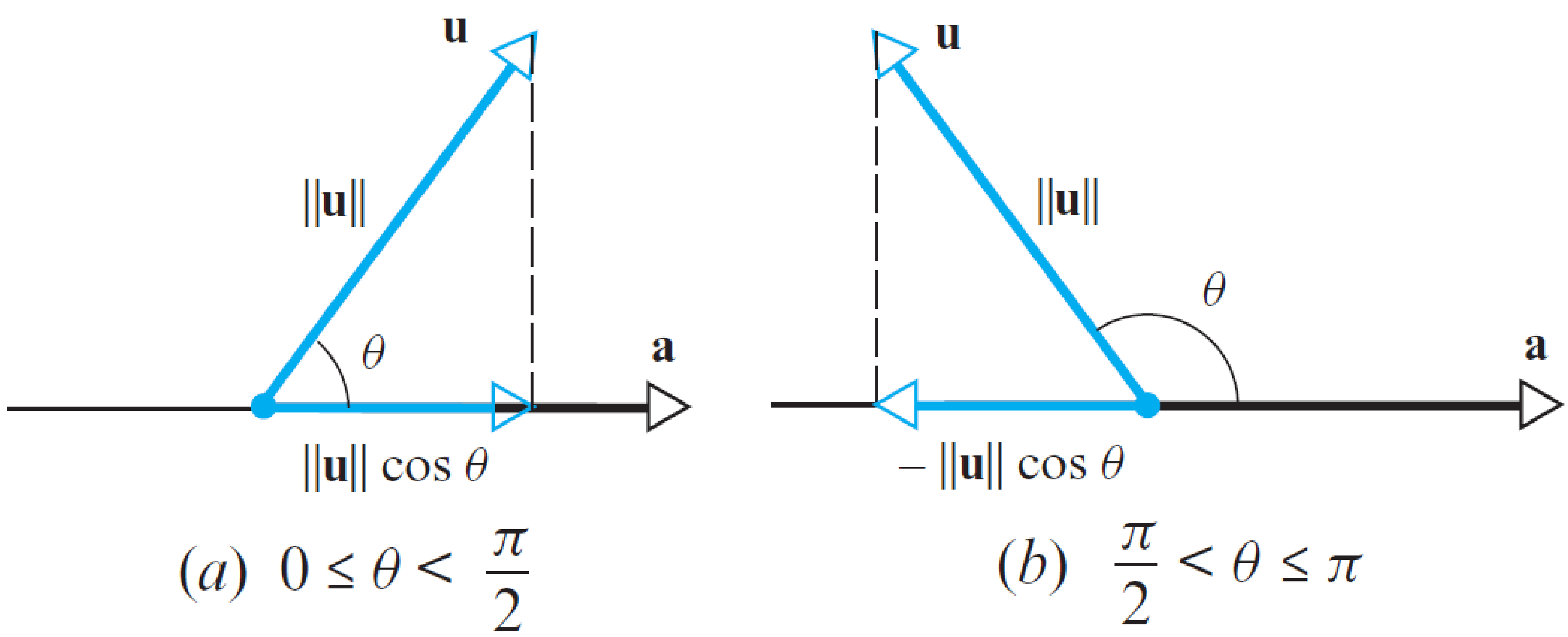
Maka

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

3. Proyeksi Skalar (2)

- Jika θ sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{a}\| \cos\theta$, sehingga

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\ |\cos\theta|$$



CONTOH SOAL

Contoh 3.1. Diketahui vektor $\mathbf{u} = (0,2,-1,3,7)$ dan $\mathbf{v} = (3,4,1,-2,0)$. Tentukan proyeksi vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$ dan panjang proyeksinya.

Solusi. Proyeksi vektor $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{1}{30}(3,4,1,-2,0) = \left(\frac{1}{10},\frac{2}{15},\frac{1}{30},\frac{-1}{15},0\right)$$

Panjang proyeksi

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\| = \frac{1}{30}$$

4. Penerapan Ortogonalitas

4. Penerapan Ortogonalitas

Ortogonalitas dapat digunakan untuk menyelesaikan tiga masalah jarak berikut:

1. Mencari jarak antara titik dan garis di $\mathbb{R}^2$.
2. Mencari jarak antara titik dan bidang di $\mathbb{R}^3$.
3. Mencari jarak antara dua bidang sejajar di $\mathbb{R}^3$.

4.1. Jarak Titik dan Garis di $\mathbb{R}^2$

Dalam $\mathbb{R}^2$ jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis $ax + by + c = 0$ adalah

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Contoh 4.1. Tentukan jarak titik $(3, -1)$ dan garis $3x + 4y = 1$.

Solusi. Persamaan garis dapat dituliskan sebagai $3x + 4y - 1 = 0$, sehingga

$$D = \frac{|3(3) + 4(-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9 - 4 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

4.2. Jarak Titik dan Bidang di $\mathbb{R}^3$

Dalam $\mathbb{R}^3$ jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Contoh 4.2. Tentukan jarak titik $(1, -4, -3)$ dan bidang $2x - 3y + 6z = -1$.

Solusi. Persamaan bidang dapat dituliskan sebagai $2x - 3y + 6z + 11 = 0$, sehingga

$$D = \frac{|2(1) - 3(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|2 + 12 - 18 + 1|}{\sqrt{49}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

4.3. Jarak Dua Bidang Sejajar

- Jarak dua bidang sejajar $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ dan $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ dapat dicari dengan menentukan sembarang titik di bidang 1 dan mencari jarak titik tersebut dengan bidang yang lain.

Contoh 4.3. Tentukan dua bidang sejajar berikut:

$$x + 2y - 2z = 3 \text{ dan } 2x + 4y - 4z = 7$$

Solusi. Diambil sembarang titik di bidang pertama, misalkan $y = z = 0$, maka diperoleh $P_0(3,0,0)$. Persamaan bidang kedua dapat dituliskan dengan $2x + 4y - 4z - 7 = 0$. Sehingga

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) - 4(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 7|}{\sqrt{36}} = \frac{|-1|}{6} = \frac{1}{6}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Tentukan apakah vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ saling ortogonal.

a. $\mathbf{u} = (2, 3), \ \mathbf{v} = (5, -7)$

b. $\mathbf{u} = (6, 1, 4), \ \mathbf{v} = (2, 0, -3)$

c. $\mathbf{u} = (4, 1, -2, 5), \ \mathbf{v} = (-1, 5, 3, 1)$

SOAL 2

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P dan memiliki vektor normal $\mathbf{n}$ berikut.

a. $P(1, 1, 4); \ \mathbf{n} = (1, 9, 8)$ b. $P(-1, 3, -2); \ \mathbf{n} = (-2, 1, -1)$

LATIHAN SOAL

SOAL 3

Tentukan apakah bidang berikut sejajar.

a. $4x - y + 2z = 5$ dan $7z - 3y + 4z = 8$

b. $x - 4y - 3z - 2 = 0$ dan $3x - 12y - 9z - 7 = 0$

c. $2y = 8x - 4z + 5$ dan $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

SOAL 4

Tentukan apakah bidang berikut saling tegak lurus.

a. $3x - y + z - 4 = 0$ dan $x + 2z = -1$

b. $x - 2y + 3z = 4$ dan $-2x + 5y + 4z = -1$

LATIHAN SOAL

SOAL 5

Tentukan $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\|$, jika

a. $\mathbf{u} = (1, -2), \ \ \mathbf{a} = (-4, -3)$

b. $\mathbf{u} = (3, -2, 6), \ \ \mathbf{a} = (1, 2, -7)$

SOAL 6

Tentukan komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ dan komponen vektor $\mathbf{u}$ ortogonal ke $\mathbf{a}$.

a. $\mathbf{u} = (-1, -2), \ \ \mathbf{a} = (-2, 3)$

b. $\mathbf{u} = (2, 0, 1), \ \ \mathbf{a} = (1, 2, 3)$

c. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7), \ \ \mathbf{a} = (2, 1, -1, -1)$

LATIHAN SOAL

SOAL 7

Carilah jarak antara titik dan garis berikut

a. $(1,8); 3x + y = 5$

b. $(-1,4); x - 3y + 2 = 0$

SOAL 8

Carilah jarak antara titik dan bidang berikut.

a. $(3,1,-2); x + 2y - 2z = 4$

b. $(-1,-1,2); 2x + 5y - 6z = 4$

SOAL 9

Carilah jarak kedua bidang sejajar berikut:

$$2x - y - z = 5 \text{ dan } -4x + 2y + 2z = 12$$

RINGKASAN

- Dua vektor tak nol dikatakan **ortogonal** atau tagak lurus jika hasil kali titik kedua vektor sama dengan nol.
- Persamaan suatu garis di $\mathbb{R}^2$ atau bidang di $\mathbb{R}^3$ dapat dicari dengan menggunakan **vektor normal** dan salah satui titik pada garis atau bidang tersebut.
- Suatu vektor $\mathbf{u}$ dapat **didekomposisi** menjadi dua suku, suku pertama merupakan kelipatan suatu vektor tak nol **a** dan suku lainnya ortogonal ke **a**.
- Suku yang pertama disebut **komponen vektor u sepanjang a** atau **proyeksi ortogonal u pada a** dan suku kedua disebut **komponen vektor u ortogonal ke a**

RINGKASAN

- Norm atau panjang proyeksi ortogonal disebut sebagai **proyeksi skalar**.
- Konsep ortogonal dapat digunakan untuk menyelesaikan tiga masalah jarak; yakni jarak antara titik dan garis di $\mathbb{R}^2$, jarak antara titik dan bidang di $\mathbb{R}^3$, serta jarak antara dua bidang yang sejajar di $\mathbb{R}^3$.

Terima Kasih