MSA07 – ALJABAR LINIER

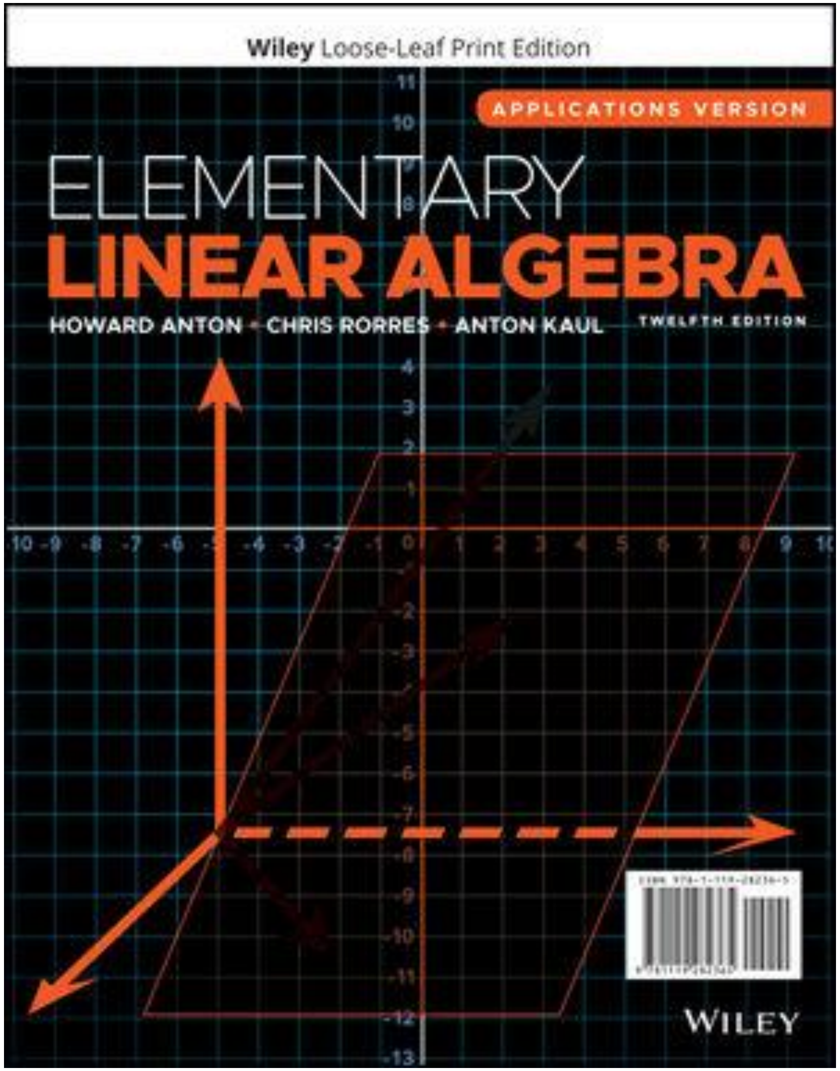
Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa mampu menerapkan konsep-konsep aljabar linear yaitu, matriks, vektor, dan transformasi dalam bidang sains dan teknologi untuk membantu persoalan bidang komputasi matematis pada pemodelan sistem. (C3, A3)

Sistem Persamaan Linier dan Matriks

Pertemuan ke 1 – 3

Diadopsi dari sumber :



Sub-CPMK

- Mahasiswa mampu menjelaskan keterkaitan aljabar linier dengan ilmu komputer (C2, A2)
- Mahasiswa mampu menerapkan operasi matriks dalam menyelesaikan sistem persamaan linier (C3, A3)

Materi

1. Pengantar sistem persamaan linier
2. Eliminasi Gauss
3. Matriks dan operasi matriks

1. Pengantar Sistem Persamaan Linier

1.1. Persamaan Linier (1)

- Persamaan linier 2 dimensi merupakan persamaan garis pada sistem koordinat-xy yang dapat dituliskan sebagai
$$ax + by = c, \qquad a, b \neq 0$$
- Persamaan linier 3 dimensi merupakan persamaan bidang pada sistem koordinat-xyz yang dapat dituliskan sebagai
$$ax + by + cz = d, \qquad a, b, c \neq 0$$
- Kedua persamaan diatas merupakan contoh dari “persamaan linier”, persamaan pertama merupakan persamaan linier dengan variabel x dan y dan persamaan kedua merupakan persamaan linier dengan variabel x, y dan z.

1.1. Persamaan Linier (2)

- Secara umum, didefinisikan persamaan linier dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dituliskan sebagai
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$
dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b merupakan konstanta dan semua nilai a tidak sama dengan nol.
- Dalam suatu kasus khusus dimana $b = 0$, persamaan diatas dapat dituliskan sebagai
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$
yang disebut sebagai **persaman linier homogen** dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

1.1. Persamaan Linier (3)

- Kumpulan beberapa persamaan linier disebut sebagai **sistem persamaan linier (SPL)**.
- Berikut contoh SPL 2 variabel dan 3 variabel

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

- Bentuk umum SPL dengan m persamaan dan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

1.1. Persamaan Linier (4)

- Penyelesaian dari SPL 2 variabel diperoleh $x = 1$ dan $y = -2$, sedangkan untuk contoh SPL 3 variabel diperolej $x_1 = 1, x_2 = 2$ dan $x_3 = -1$.
- Penyelesaian tersebut dapat dituliskan sebagai $(1, -2)$ dan $(1, 2, -1)$ dimana nama variabel dihilangkan.
- Jika enyelesaian SPL dengan n variabel secara umum adalah

$$x_1 = s_1, \qquad x_2 = s_2, \qquad \dots, \qquad x_n = s_n$$

maka penyelesaian tersebut dapat dituliskan sebagai $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ yang disebut **pasangan berurut $\boldsymbol{n}$** (*ordered n-tuple*). Untuk $n = 2$ disebut *ordered pair* (pasangan berurutan) dan untuk $n = 3$ disebut *ordered triple.*

1.2. SPL Dua Variabel (1)

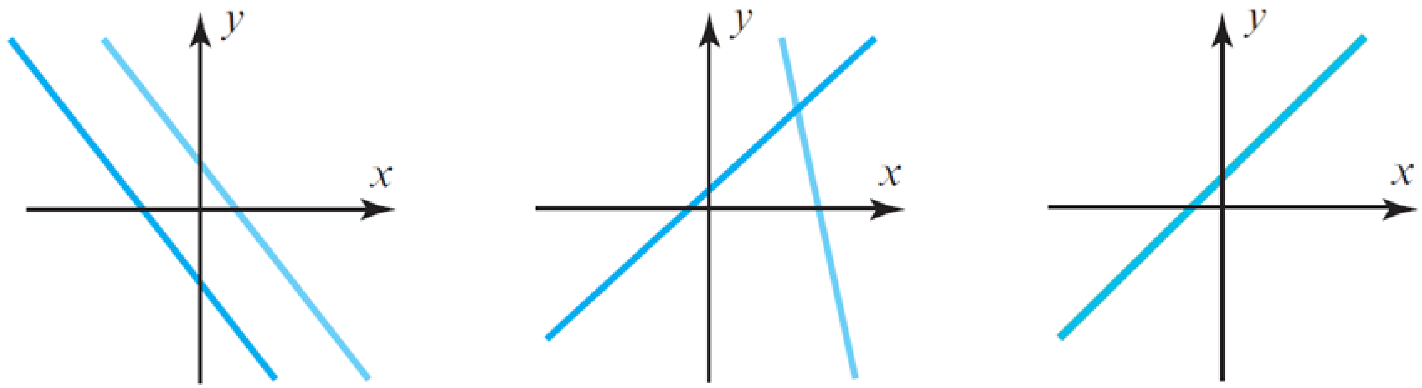
- SPL 2 variabel merupakan perpotongan 2 garis.
- Bentuk umum: $a_1x + b_1y = c_1$

$$a_2x + b_2x = c_2$$

- Terdapat 3 kemungkinan penyelesaian:
  – **Tidak ada penyelesaian**, yakni saat kedua garis paralel dan berbeda, tidak ada titik potong.
  – **Penyelesaian tunggal**, yaitu saat kedua garis berpotongan tepat pada satu titik.
  – **Penyelesaian tak hingga** terjadi ketika kedua garis berhimpit, sehingga banyak titik penyelesaian.

1.2. SPL Dua Variabel (2)

- Secara umum, suatu SPL dikatakan **konsisten** jika memiliki minimal satu penyelesaian dan **tidak konsisten** saat tidak memiliki penyelesaian.
- Sehingga SPL 2 variabel dikatakan konsisten saat memiliki penyelesaian tunggal atau penyelesaian tak hingga.



Tidak ada Penyelesaian | Penyelesaian Tunggal | Penyelesaian Tak Hingga

CONTOH SOAL

Contoh 1.1. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut:

$$x - y = 1$$
$$2x + y = 6$$

Solusi. Variabel x pada persamaan kedua dapat dieliminasi dengan menambakan -2 kali persamaan pertama, sehingga diperoleh

$$x - y = 1$$
$$3y = 4$$

Dari persamaan kedua diperoleh $y = \frac{4}{3}$ dan dengan substitusi nilai y ke persamaan pertama, diperoleh $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Sehingga SPL tersebut memiliki penyelesaian tunggal $\left(\frac{4}{3}, \ \frac{7}{3}\right)$.

CONTOH SOAL

Contoh 1.2. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut:

$$x + y = 4$$
$$3x + 3y = 6$$

Solusi. Variabel x pada persamaan kedua dapat dieliminasi dengan menambakan -3 kali persamaan pertama, sehingga diperoleh

$$x + y = 4$$
$$0 = -6$$

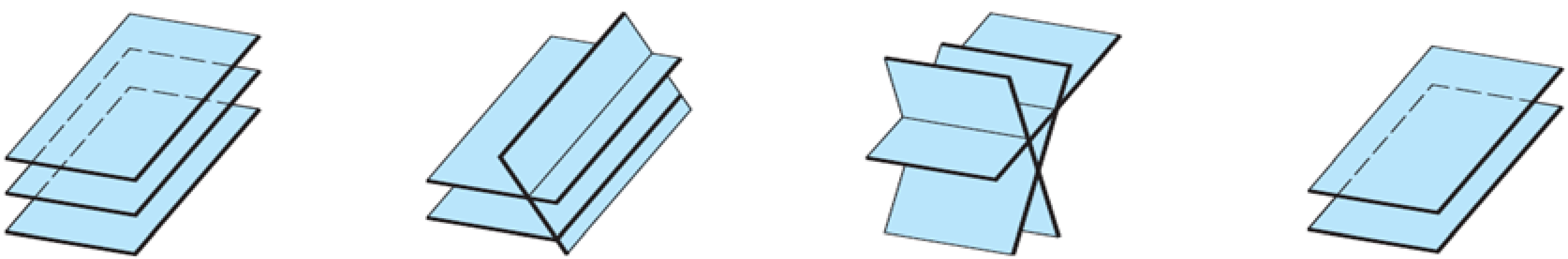
Persamaan kedua kontradiktif, sehingga SPL tersebut tidak memiliki penyelesaian. Secara geometri, hal ini berarti garis-garis yang mengambarkan SPL tersebut paralel dan berbeda.

1.3. SPL Tiga Variabel (1)

- Bentuk umum SPL 3 variabel:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

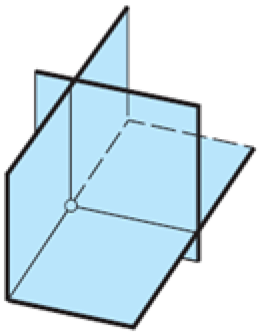
- Terdapat 3 kemungkinan penyelesaian:
  - **Tidak ada penyelesaian**



Ketiga bidang paralel | Dua bidang paralel | Perpotongan ketiga bidang tidak tunggal | Dua bidang berhimpit dan sejajar dengan yang lainnya

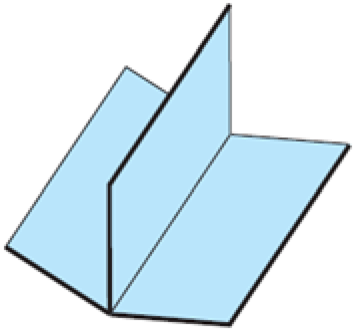
1.3. SPL Tiga Variabel (2)

– **Penyelesaian tunggal**

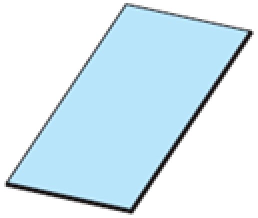


Berpotongan pada
satu titik

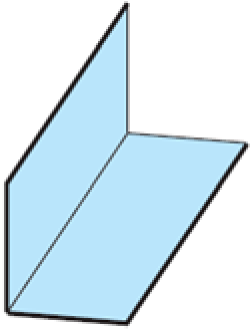
– **Penyelesaian tak hingga**



Perpotongan
ketiga bidang
berupa garis



Semua bidang
berhimpit



Dua bidang berhimpit
dan berpotongan pada
garis dengan lainnya

CONTOH SOAL

Contoh 1.3. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} x - \quad y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Solusi. SPL tersebut dapat diselesaikan dengan inspeksi, karena persamaan kedua dan ketiga merupakan kelipatan dari persamaan pertama. Secara geometri, ketiga bidang tersebut saling berhimpit dan setiap nilai x, y dan z yang memenuhi persamaan

$$x - y + 2z = 5$$

merupakan penyelesaian dari ketiga persamaan.

CONTOH SOAL

Contoh 1.3 (lanjutan).

Penyelesaian dapat diperoleh dengan menuliskan persamaan dari x terhadap y dan z, dan menggunakan parameter r dan s sebagai nilai sembarang dari kedua variabel. Sehingga diperoleh

$$x = 5 + r - 2s, \qquad y = r, \qquad z = s$$

Penyelesaian tertentu dapat diperoleh dengan memilih suatu nilai untuk r dan s. Contohnya, dengan mengambil $r = 1$ dan $s = 0$ diperoleh penyelesaian $(6, 1, 0)$.

1.4. Matriks Augmented dan Operasi Baris Elementer (1)

Jika diketahui SPL dengan n variabel

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

SPL tersebut dapat disederhanakan dengan membuat matriks yang hanya memuat konstanta dan koefisien dari SPL. Matriks ini disebut sebagai **Matriks Augmented** dari SPL.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

1.4. Matriks Augmented dan Operasi Baris Elementer (2)

Sebagai contoh, matriks augmented dari SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{adalah} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode dasar yang digunakan untuk menyelesaikan SPL secara aljabar antara lain

1. Mengalikan persamaan dengan konstanta tak nol.
2. Menukar dua persamaan.
3. Menambah suatu persamaan dengan perkalian konstan persamaan lainnya.

1.4. Matriks Augmented dan Operasi Baris Elementer (3)

Karena setiap baris dari matriks augmented sesuai dengan persamaan SPL, ketiga operasi dasar tersebut dapat digunakan untuk operasi baris pada matriks augmented.

1. Mengalikan baris dengan konstanta tak nol.
2. Menukar dua baris.
3. Menambah suatu baris dengan perkalian konstan baris lainnya.

Operasi ini disebut **Operasi baris Elementer (OBE)** pada matriks.

CONTOH SOAL

Contoh 1.4. Diketahui SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

SPL (augmented matriks) diatas dapat diselesaikan dengan Operasi Baris Elementer (OBE)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 3B_1]{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \times \frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 \times (-2)}$$

CONTOH SOAL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2 + \frac{7}{2}B_3]{B_1 - 2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$.

2. Eliminasi Gauss

2.1. Matriks Eselon (1)

- Pada **Contoh 1.4.** penyelesaian SPL dengan variabel x, y dan z dengan mereduksi matriks augmented ke bentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  sehingga penyelesaian $x = 1, y = 2, z = 3$ terbukti benar.

- Matriks tersebut adalah contoh dari **Matriks Eselon Baris Tereduksi**.

2.1. Matriks Eselon (2)

Syarat matriks eselon baris tereduksi:

1. Jika dalam satu baris terdapat elemen yang tidak nol, maka bilangan tak nol pertama adalah 1 yang disebut **awalan 1**.
2. Jika elemen dalam satu baris semuanya nol, maka baris tersebut harus diletakkan di paling bawah.
3. Jika ada dua baris atau lebih yang memenuhi syarat pertama, maka angka awalan 1 baris bawah harus lebih kanan daripada baris sebelumnya.
4. Setiap kolom yang memiliki angka awalan 1 memiliki angka nol di elemen lainnya.

Matriks yang memiliki syarat 1-3 disebut **Matriks Eselon Baris.**

2.1. Matriks Eselon (3)

- Contoh matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Contoh matriks eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Metode Eliminasi (1)

- Penyelesaian SPL dapat dengan mudah diperoleh saat matriks augmented sudah diubah menjadi matriks eselon baris tereduksi.
- Berikut langkah-langkah **prosedur eliminasi** yang digunakan untuk mereduksi sembarang matriks menjadi matriks eselon baris tereduksi.
- Sebagai ilustrasi dari setiap langkah digunakan contoh matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2. Metode Eliminasi (2)

Step 1. Cari kolom pertama yang memuat elemen tak nol pertama.

Baris ke-2 (B_2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{2 \quad 4 \quad -10 \quad 6 \quad 12 \quad 28} \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Step 2. Tukar baris pertama dengan baris lainnya, jika perlu, untuk meletakkan elemen tak nol dari **Step 1** ke baris pertama.

$$B_1 \leftrightarrow B_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2. Metode Eliminasi (3)

Step 3. Jika elemen yang ditemukan di **Step 1** adalah a, kalikan baris pertama dengan 1/a untuk memperoleh tak nol pertama.

$$B_1 \times \frac{1}{2} \rightarrow B_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Step 4. Kalikan baris pertama dengan suatu bilangan dan jumlahkan dengan baris lainnya sehingga semua elemen di kolom dengan awalan 1 menjadi nol.

$$B_3 - 2B_1 \rightarrow B_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

2.2. Metode Eliminasi (4)

Step 5. Abaikan baris pertama dan ulangi lagi dari **Step 1** sampai matriks menjadi matriks eselon baris.

$$B_2 \times \left(-\tfrac{1}{2}\right) \rightarrow B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$B_3 - 5B_2 \rightarrow B_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 \times 2 \rightarrow B_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Disini diperoleh matriks eselon baris. Langkah tersebut merupakan fase maju (forward phase) yang dikenal sebagai **Eliminasi Gauss**.

2.2. Metode Eliminasi (5)

Step 6. Dimulai dari baris tak nol terakhir, ke atas, kalikan baris tersebut dengan suatu konstanta sehingga diperoleh seluruh elemen diatasnya adalah nol.

$$\begin{matrix} B_1 - 6B_3 \rightarrow B_1 \\ B_2 + \frac{7}{2}B_3 \rightarrow B_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 + 5B_2 \rightarrow B_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Step 6 disebut fase mundur (backward phase). Algoritma dalam memperoleh matriks eselon baris tereduksi disebut **Eliminasi Gauss-Jordan** yang terdiri dari fase maju dan fase mundur.

2.2. Metode Eliminasi (6)

Contoh tersebut memiliki penyelesaian tunggal. Perhatikan contoh berikut.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Di baris terakhir diperoleh $0x + 0y + 0z = 1$. Persamaan tersebut tidak konsisten, atau tidak ada penyelesaian.

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Baris terakhir $0x + 0y + 0z = 0$ dapat diabaikan sehingga diperoleh $x + 3z = -1$ dan $y - 4z = 2$. Terdapat variabel bebas z, misalkan $z = t$, maka diperoleh $x = -1 - 3t, y = 2 + 4t, z = t$.

c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Seperti contoh sebelumnya, diperoleh $x - 5y + z = 4$. Dengan parameter $y = s$ dan $z = t$ diperoleh $x = 4 + 5s - t, y = s, z = t$.

CONTOH SOAL

Contoh 2.1. Gunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan SPL berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

Solusi. Augmented matriks:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1 (lanjutan).

$$\begin{array}{c} B_2 - 2B_1 \\ B_4 - 2B_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_2 \times (-1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B_3 - 5B_2 \\ B_4 - 4B_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1 (lanjutan).

$$B_3 \leftrightarrow B_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 \times \frac{1}{6} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 - 3B_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.1 (lanjutan).

$$B_1 + 2B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh SPL:
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Jika x_2, x_4 dan x_5 (variabel bebas) dimisalkan sebagai r, s dan t, diperoleh penyelesaian

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

2.3. SPL Homogen

- Suatu SPL dikatakan **homogen** jika semua konstanta bernilai nol; yakni sistem dengan bentuk umum:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

- Setiap SPL homogen konsisten karena memiliki solusi trivial

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

Jika memiliki solusi lain, disebut solusi non-trivial.

CONTOH SOAL

Contoh 2.2. Gunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan SPL homogen berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - \ 2x_4 + 4x_5 - \ 3x_6 &= 0 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + \ 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0
\end{aligned}
$$

Solusi. Dibentuk matriks augmented yang berisi koefisien dan konstanta SPL homogen diatas.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0
\end{bmatrix}
$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.2 (lanjutan)

Matriks augmented tersebut sama dengan matriks augmented pada **Contoh 2.1**, kecuali kolom terakhir yang berisi angka nol semua. Sehingga diperoleh matriks eselon baris tereduksi yang sama, kecuali kolom terakhir.

Karena kolom nol tidak dipengaruhi oleh operasi baris elementer, maka diperoleh matrik eselon baris tereduksi berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH SOAL

Contoh 2.2 (lanjutan)

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad\quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Jika x_2, x_4 dan x_5 (variabel bebas) dimisalkan sebagai r, s dan t, diperoleh penyelesaian

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

Penyelesaian diatas trivial saat nilai $r = s = t = 0$.

3. Matriks dan Operasi Matriks

3.1. Notasi dan Terminologi (1)

- Pada bagian sebelumnya, digunakan matriks augmented untuk menyederhanakan bentuk SPL.
- **Matriks** adalah sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom.
- Setiap angka yang ada salam matriks disebut elemen matriks.
- Ordo dari sebuah matriks adalah bilangan yang menunjukkan banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n), dituliskan $m \times n$
- Matriks yang hanya terdiri dari 1 baris disebut matriks baris/vektor baris, dan matriks yang hanya memiliki 1 kolom disebut matriks kolom/vektor kolom.

3.1. Notasi dan Terminologi (2)

- Contoh Matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks 3×2

$$\begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks 3×3

$$[4]$$

Matriks 1×1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Matriks 1×4
(Matriks baris)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriks 2×1
(Matriks kolom)

3.1. Notasi dan Terminologi (3)

- Matriks dinotasikan dengan huruf kapital, sedangkan elemen-elemennya dinotasikan dengan huruf kecil; sehingga dapat dituliskan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Elemen baris i dan kolom j pada matriks A dinotasikan sebagai a_{ij}. Sehingga bentuk umum matriks $m \times n$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1. Notasi dan Terminologi (4)

- Vektor kolom dan vektor baris merupakan bentuk khusus dari matriks, dan biasanya tidak dinotasikan dengan huruf kapital melainkan huruf kecil tebal.
- Untuk matriks-matriks tersebut, tidak diperlukan indeks ganda, sehingga bentuk umum vektor baris $\mathbf{a}$ ordo $1 \times n$ dan vektor kolom $\mathbf{b}$ ordo $m \times 1$ dituliskan sebagai

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3.1. Notasi dan Terminologi (5)

- Suatu matriks A dengan n baris dan n kolom disebut **matriks persegi**, dengan elemen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut sebagai **diagonal utama** matriks A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dua matriks dikatakan **sama** jika memiliki ordo yang sama dan setiap elemen yang berpadanan sama.

3.2. Operasi Matriks (1)

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

- Penjumlahan dan pengurangan dua matriks A dan B dapat dilakukan jika kedua matriks memiliki ordo yang sama.

Contoh 3.1. Diketahui matriks A, B, C sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Namun $A + C, B + C, A - C$ dan $B - C$ tidak terdefinisi karena ordo matriks C berbeda dengan matriks A dan B.

3.2. Operasi Matriks (2)

Perkalian dengan Skalar

- Jika sembarang matriks A dikalikan dengan skalar c, maka setiap elemen dari matriks A dikalikan dengan skalar c.

Contoh 3.2. Dengan menggunakan matriks A dan C dari **Contoh 3.1**, diperoleh

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2C = 2\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ -6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2. Operasi Matriks (3)

Perkalian Dua Matriks

- Jika matriks A (ordo $m \times r$) dikalikan dengan matriks B (ordo $r \times n$) maka hasilnya adalah matriks dengan ordo $m \times n$.

Contoh 3.3. Dengan menggunakan matriks B dan C dari **Contoh 3.1**, diperoleh

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 + (-2)(-3) & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 & 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ 6 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -6 & -4 \\ 27 & 27 & -3 \end{bmatrix}$$

3.3. Transpose Matriks

- Transpose dari matriks A dengan ordo $m \times n$ dinotasikan dengan A^T dengan ordo $n \times m$.

Contoh 3.4.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = [4], \qquad D^T = [4]$$

3.4. Trace

- Trace dari suatu matriks $A_{n\times n}$ adalah jumlah dari elemen pada diagonal utama matriks A.
- Jika A bukan matriks persegi (baris = kolom), maka trace dari A tidak terdefinisi.

Contoh 3.5.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

LATIHAN SOAL

SOAL 1

Tentukan penyelesaian SPL dan SPL homogen berikut dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (Eliminasi Gauss-Jordan).

a.
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 3 \\ 3x - y + z &= 1 \\ -x + 5y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x - 4y - z &= 1 \\ x - 3y + z &= 1 \\ 3x - 5y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z \qquad &= 0 \\ - y - 3z + w &= 0 \\ 3x + y + z + 2w &= 0 \\ x + 3y - 2z - 2w &= 0 \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL

SOAL 2

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $2A + C^T$

b. $BA^T - \mathrm{C}$

c. $B + CA$

d. $tr(AC)$

e. $tr(CA)$

RINGKASAN

- Persamaan linier 2 dimensi merupakan persamaan garis pada sistem koordinat-xy, sedangkan persamaan linier 3 dimensi merupakan persamaan bidang pada sistem koordinat-xyz.
- Persamaan linier dikatakan homogen jika nilai konstanta $b = 0$.
- Kumpulan beberapa persamaan linier disebut sebagai sistem persamaan linier (SPL).
- Penyelesaian SPL dengan n variabel dituliskan sebagai pasangan berurut n (*ordered* n*-tuple*).
- Terdapat tiga jenis penyelesaian dari SPL, yakni tidak ada penyelesaian, penyelesaian tunggal dan penyelesaian tak hingga.

RINGKASAN

- Secara umum, suatu SPL dikatakan konsisten jika memiliki minimal satu penyelesaian dan tidak konsisten saat tidak memiliki penyelesaian.
- Matriks augmented adalah matriks yang memuat semua koefisien dan konstanta dari suatu SPL.
- Terdapat tiga konsep dari operasi baris elementer (OBE), yakni perkalian baris dengan konstanta tak nol, pertukaran baris dan pemjumlahan suatu baris dengan perkalian konstan baris lainnya.
- Penyelesaian dari OBE adalah matiks eselon baris tereduksi.

RINGKASAN

- Terdapat 5 langkah eliminasi Gauss yang dikenal sebagai fase maju yang digunakan untuk memperoleh matriks eselon baris dari suatu matriks.
- Fase mundur digunakan untuk memperoleh matriks eselon baris tereduksi.
- Gabungan dari fase maju dan fase mundur dikenal sebagai eliminasi Gauss-Jordan.
- Suatu SPL homogen dikatakan konsisten saat memiliki solusi trivial (semua variabel bernilai nol). Jika terdapat penyelesaian lain, maka disebut solusi non-trivial.

RINGKASAN

- Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom.
- Matriks yang hanya terdiri dari 1 baris disebut matriks baris/vektor baris, dan matriks yang hanya memiliki 1 kolom disebut matriks kolom/vektor kolom.
- Terdapat 3 operasi utama dalam matriks, yaitu penjumlahan dan pengurangan matriks, perkalian dengan skalar, dan perkalian dua matriks.
- Dua operasi lain yang tidak kalah penting adalah transpose matriks dan trace.

Terima Kasih